

Задание 1.

Прогрессивная последовательность, прогрессивная ли?

Условие. Из множества $\{1, 2, \dots, 97\}$ выбирают три числа. Какова вероятность, что из них можно составить арифметическую прогрессию? \square

Решение. Прежде всего, заметим что в множестве $\{1, 2, \dots, 97\}$ всего:

1. 49 нечетных чисел: $\{1, 3, \dots, 95, 97\}$
2. 48 четных чисел: $\{2, 4, \dots, 94, 96\}$

Далее, для удобства, будем считать, что арифметическая прогрессия – возрастающая арифметическая прогрессия, поскольку любое множество чисел, составляющее убывающую арифметическую прогрессию, $-a_1, \dots, a_n$, можно представить в виде убывающей арифметической прогрессии, $-a_n, \dots, a_1$.

Любая тройка чисел a_1, a_2, a_3 , образующая арифметическую (возрастающую) прогрессию имеет вид: $a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d$, где d – разность арифметической прогрессии.

Заметим, что числа a_1 и $a_3 = a_1 + 2d$ имеют одинаковую четность, поскольку добавление четного числа ($2d$) не меняет четности. Также, заметим, что любая пара чисел $(a_1, a_1 + 2d)$ однозначно определяет a_2 , последнее из тройки чисел, образующих арифметическую прогрессию:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 2d}{2} = a_1 + d$$

Тогда, поскольку два числа арифметической прогрессии однозначно определяют третье число, то количество троек, из которых можно составить арифметическую прогрессию, можно найти следующим образом: это сумма количества всевозможных способов выбрать 2 нечетных числа из всех нечетных чисел и количества всевозможных способов выбрать 2 четных числа из всех четных чисел.

Нечетных чисел всего 49, поэтому количество всевозможных способов выбрать 2 нечетных числа из всех нечетных чисел, которых всего 49, равно C_{49}^2 . Аналогично, четных чисел всего 48, поэтому количество всевозможных способов выбрать 2 четных числа из всех четных чисел, которых всего 48, равно C_{48}^2 .

$$C_{48}^2 + C_{49}^2 = \frac{48!}{2!46!} + \frac{49!}{2!47!} = \frac{48 \cdot 47}{2} + \frac{49 \cdot 48}{2} = \frac{48 \cdot 47 + 49 \cdot 48}{2} = \frac{96 \cdot 48}{2} = 48^2 = 2304$$

Количество благоприятных исходов в искомой вероятности p равно 2304, а количество всевозможных исходов, равно количеству всевозможных способов выбрать 3 числа из данных нам 97-ми, что равно C_{97}^3 . Тогда искомая вероятность p равна:

$$p = \frac{C_{48}^2 + C_{49}^2}{C_{97}^3} = \frac{2304}{\frac{97 \cdot 96 \cdot 95}{3 \cdot 2}} = \frac{2304}{97 \cdot 16 \cdot 95} = \frac{2304}{147440} = \frac{144}{9215}$$

Таким образом, вероятность, что из трех выбранных чисел множества $\{1, 2, \dots, 97\}$ можно составить арифметическую прогрессию, равна $\frac{144}{9215}$. \square