Задание 4.

ЭкстрИмальные значения

Условие. Найдите экстремальные значения функции z, зависящей от x и y, для которой справедливо соотношение: $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$, где $a = const, a \neq 0$. Вы можете или решить данную задачу арифметически, или программно на языке Python, но разрешается использовать только библиотеку NumPy и стандартные библиотеки Python (math, functools, etc...) □

Решение. Перепишем соотношение $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$ в следующем виде:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2) = 0$$

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2), \;\; F(x,y,z) = 0$$

Теперь, поскольку в функции $F(x,y,z)$ присутствует "удобная"сумма квадратов x^2+y^2, перейдем от декартовой системы координат к цилиндрической, переход в которую делается следующим образом:

$$\begin{cases} x(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi \\ y(\rho,\varphi,z) = \rho\sin\varphi \\ z(\rho,\varphi,z) = z \end{cases}$$

Тогда $F(x,y,z)$ можно переписать в следующем виде:

$$F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2)$$

$$F(\rho,\varphi,z) = (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + z^2)^2 - a^2(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - z^2)$$

$$F(\rho,\varphi,z) = (\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + z^2)^2 - a^2(\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - z^2)$$

$$F(\rho,\varphi,z) = (\rho^2+z^2)^2 - a^2(\rho^2-z^2)$$

$$F(\rho,z) = (\rho^2+z^2)^2 - a^2(\rho^2-z^2)$$

$$F(\rho,z) = \rho^4 + 2\rho^2z^2 + z^4 - a^2\rho^2 + a^2z^2$$

Найдем частные производные функции $F(\rho,z)$:

$$\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho} = 4\rho^3 + 4\rho z^2 - 2a^2\rho$$

$$\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z} = 4z^3 + 4\rho^2 z + 2a^2 z$$

.

Тогда можем найти производную z'_ρ:

$$z'_\rho = -\frac{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho}}{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z}}$$

Из матанализа знаем, что чтобы найти стационарную точку неявно заданной функции z необходимо и достаточно решить следующую систему:

$$\begin{cases} z'_\rho = 0 \\ F(\rho,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial\rho}}{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z}} = 0 \\ F(\rho,z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{4\rho^3 + 4\rho z^2 - 2a^2\rho}{4z^3 + 4\rho^2 z + 2a^2 z} = 0 \\ \rho^4 + 2\rho^2z^2 + z^4 - a^2\rho^2 + a^2z^2 = 0 \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на $-(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)\neq 0$:

$$\begin{cases} 4\rho^3+4\rho z^2-2a^2\rho=0 \\ \rho^4+2\rho^2z^2+z^4-a^2\rho^2+a^2z^2=0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение – разделим его на $\rho\neq 0$, но сначала рассмотрим случай, когда $\rho=0$: если $\rho=0$, то $F(0,z)=0\Rightarrow z^4+a^2z^2=0$ имеет решение в комплексных корнях: разделим его на $z^2\neq 0$, поскольку если $z=0$, то $\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z}\neq 0\Rightarrow -(4z^3+4\rho^2z+2a^2z)\neq 0\Rightarrow 0+0+0\neq 0$, получаем противоречие.

Тогда $z^2+a^2=0\Rightarrow z^2=-a^2\Rightarrow z=\pm\sqrt{-a^2}\Rightarrow z=\pm ia$. Нашли пару стационарных комплексных точек, далее проверим их.

Теперь, разделим первое уравнение на $\rho\neq 0$, получим:

$$4\rho^3+4\rho z^2-2a^2\rho=0$$

$$4\rho^2+4z^2-2a^2=0$$

$$\rho^2=\frac{a^2}{2}-z^2$$

Теперь подставим это во второе уравнение:

$$\rho^4+2\rho^2z^2+z^4-a^2\rho^2+a^2z^2=0$$

$$\left(\frac{a^2}{2}-z^2\right)^2+2\left(\frac{a^2}{2}-z^2\right)z^2+z^4-a^2\left(\frac{a^2}{2}-z^2\right)+a^2z^2=0$$

$$\frac{a^4}{4}-a^2z^2+z^4+a^2z^2-2z^4+z^4-\frac{a^4}{2}+a^2z^2+a^2z^2=0$$

$$\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}+2a^2z^2=0$$

$$-\frac{a^4}{4}+2a^2z^2=0$$

Разделим последнее уравнение на $a^2\neq 0$ (по условию):

$$-\frac{a^2}{4}+2z^2=0$$

$$2z^2=\frac{a^2}{4}$$

$$z^2=\frac{a^2}{8}$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{a^2}{8}}$$

$$z=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho^2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}$$

$$\rho^2=\frac{3a^2}{8}$$

$$\rho=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Нашли еще 4 стационарных точки, таким образом стационарных точек всего 6:

$$\rho=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\quad z=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho = \mp\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ \ z = \pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\rho = 0,\ \ z = \pm ia$$

Найдем вторую производную z''_ρ:

$$z''_\rho = \left(-\frac{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial \rho}}{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z}}\right)'_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(-\frac{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial \rho}}{\frac{\partial F(\rho,z)}{\partial z}}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(-\frac{4\rho^3+4\rho z^2-2a^2\rho}{4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z}\right) =$$

$$= -\frac{(12\rho^2+4z^2-2a^2)\cdot(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)-(4\rho^3+4\rho z^2-2a^2\rho)\cdot 8\rho z}{(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)^2} =$$

$$= -\frac{48\rho^2 z^3+48\rho^4 z+24\rho^2 a^2 z++16z^5+16\rho^2 z^3+8a^2 z^3-8a^2 z^3-8\rho^2 a^2 z-4a^4 z-32\rho^4 z-32\rho^2 z^3+16a^2\rho^2 z}{(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)^2} =$$

$$= -\frac{-4a^4 z+32a^2\rho^2 z+16\rho^4 z+32\rho^2 z^3+16z^5}{(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)^2} =$$

$$= \frac{4a^4 z-32a^2\rho^2 z-16\rho^4 z-32\rho^2 z^3-16z^5}{(4z^3+4\rho^2 z+2a^2 z)^2}$$

Далее, необходимо подставить стационарных точек во вторую производную z''_ρ и посмотреть на знак – если знак положительный, то точка минимума, если отрицательный, то точка максимума. Опустив громоздкие вычисления, при подстановке стационарных точек (z,ρ) во вторую производную z''_ρ, получим:

$$(z,\rho) = (ia, 0) : z''_\rho(z,\rho) = -\frac{3i}{a}$$

$$(z,\rho) = (-ia, 0) : z''_\rho(z,\rho) = \frac{3i}{a}$$

$$(z,\rho) = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) : z''_\rho(z,\rho) = -\frac{3}{a\sqrt{2}}$$

$$(z,\rho) = \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) : z''_\rho(z,\rho) = \frac{3}{a\sqrt{2}}$$

$$(z,\rho) = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, -\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) : z''_\rho(z,\rho) = -\frac{3}{a\sqrt{2}}$$

$$(z,\rho) = \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}, -\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) : z''_\rho(z,\rho) = \frac{3}{a\sqrt{2}}$$

Таким образом, первая и вторая стационарные точки, поскольку они комплексные, не имеют смысла – в комплексной плоскости нет минимумов и максимумов, значения не сравниваются между собой. В случае, когда $a > 0$, третья и пятые стационарные точки – точки максимума, четвертая и шестая точки – точки минимума. В случае, когда $a < 0$ – все с точностью до наоборот.

Таким образом, экстремальные значения функции z равны $\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

□