

## Задание 5.

### Друзья останутся без подарков?

*Условие.* Известно, что  $n$  друзей собрались и решили отправить письма Деду Морозу. У каждого есть 11 конверт и 11 письмо. Потом ребята всё перемешали и стали класть письма в конверты. Сколько в среднем писем попадёт в свой конверт?  $\square$

*Решение.* Введем  $\xi$  – случайная величина количества писем, которые попали в свой конверт после перемешивания.

Дополнительно, введем  $\xi_i$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$  – случайная величина, которая принимает значение 1, если в  $i$ -ый конверт попало свое письмо, и 0, если в  $i$ -ый конверт попало не свое письмо.

Очевидно, что  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда найдем распределение случайных величин  $\xi_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ : понятно, что нужное письмо попадет в  $i$ -ый конверт с вероятностью  $p_1 = \frac{1}{n}$ , поскольку из  $n$  писем нужное всего одно, также, понятно что нужное письмо не попадет в  $i$ -ый конверт с вероятностью  $p_2 = \frac{n-1}{n}$ , поскольку из  $n$  писем не подходящих в  $i$ -ый конверт писем всего  $n - 1$  штука. Тогда  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  случайная величина  $\xi_i$  имеет распределение:

$\xi_i$	0	1
$p$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Теперь  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  мы можем вычислить математическое ожидание случайной величины  $\xi_i$ :

$$\mathbb{E}\xi_i = 0 \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Теперь, воспользуемся тем, что  $\xi_i$  одинаково распределены  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , и тем, что матожидание суммы равно сумме матожиданий и найдем  $\mathbb{E}\xi$ :

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbb{E}\xi_1 + \dots + \mathbb{E}\xi_n = n \cdot \mathbb{E}\xi_i = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Таким образом, поскольку  $\mathbb{E}\xi = 1$ , то в среднем ровно одно письмо попадет в свой конверт.  $\square$