Задание 2.

Квадратное уравнение

Условие. Вася пишет функцию $f(x) = x^2 + bx + c$, причем коэффициенты b, c он выбирает наугад из квадрата с вершинами, лежащими в точках $(2; 2), (-2; 2), (2; -2), (-2, -2)(2; 2), (-2; 2), (2; -2), (-2, -2)$. Найдите вероятность того, что корни окажутся мнимыми. $\square$

Решение. Прежде всего, найдем корни уравнения $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Известно, что квадратное уравнение имеет мнимые корни $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда квадратного уравнения дискриминант отрицательный. Другими словами:

$$x_{1,2} \in \mathbb{C} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow b^2 - 4c < 0 \Rightarrow c > \frac{b^2}{4}$$

Учитывая, что $-2 \leq b, c \leq 2$, можно свести исходную задачу к геометрической вероятности, изобразив графически в квадрате с вершинами, лежащими в точках $(2; 2), (-2; 2), (2; -2), (-2, -2)(2; 2), (-2; 2), (2; -2), (-2, -2)$, область, задаваемую неравенством $c > \frac{b^2}{4}$:

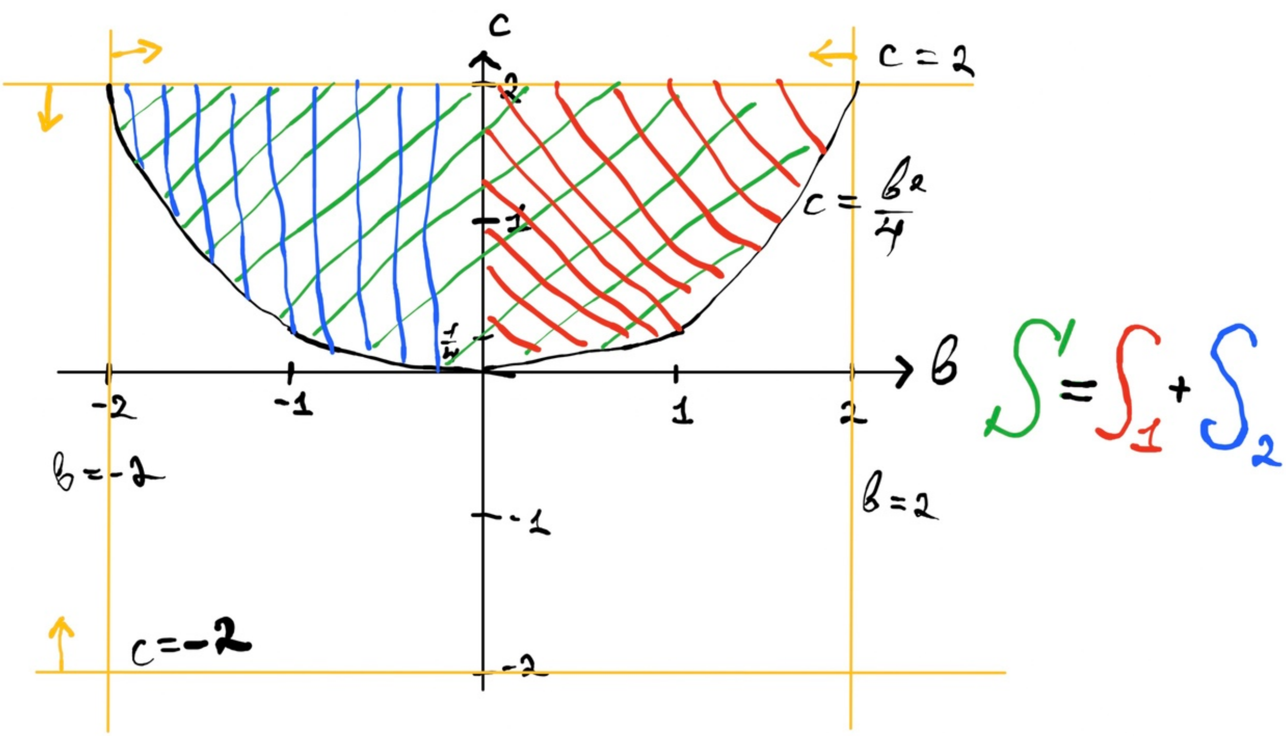

Рис. 1: Геометрическая вероятность

Площадь фигуры, ограниченной неравенствами $-2 \leq b, c \leq 2$ и $c > \frac{b^2}{4}$, заштрихуем и обозначим через S. Очевидно, функция $c = \frac{b^2}{4}$ симметрична относительно прямой $b = 0$, поэтому исходная площадь является суммой левой и правой площадей – S_1 и S_2 соответственно, причем $S = S_1 + S_2, \;\; S_1 = S_2$.

Найдем площадь S_1 – она равна разности площади квадрата со стороной 2 и площади под графиком функции $c = \frac{b^2}{4}$:

$$S_1 = 2 \cdot 2 - \int_0^2 \frac{b^2}{4} db = 4 - \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = 4 - \frac{1}{4} \int_0^2 x^2 dx = 4 - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^2 =$$

$$= 4 - \frac{1}{12}\left(2^3 - 0\right) = 4 - \frac{1}{12} \cdot 8 = 4 - \frac{8}{12} = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

Тогда $S = S_1 + S_2 = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$, а общая площадь квадрата S_{square} равна $4 \cdot 4 = 16$.
Тогда по геометрической вероятности, вероятность p того, что корни окажутся мнимыми, равна:

$$p = \frac{S}{S_{square}} = \frac{\frac{20}{3}}{16} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{20}{3 \cdot 16} = \frac{5}{12}$$

Таким образом, вероятность того, что корни окажутся мнимыми, равна $\frac{5}{12}$. $\square$