



**POLITECNICO
DI TORINO**

Dipartimento
di Automatica e Informatica

Gli algoritmi di visita dei grafi

Gianpiero Cabodi e Paolo Camurati

Algoritmi di visita

Visita di un grafo $G=(V, E)$:

- a partire da un vertice dato, seguendo gli archi con una certa strategia, elencare i vertici incontrati, eventualmente aggiungendo altre informazioni.

Algoritmi:

- in profondità (depth-first search, DFS)
- in ampiezza (breadth-first search, BFS).

Visita in profondità (versione base)

Dato un grafo (connesso o non connesso), a partire da un vertice s , visita **tutti** i vertici del grafo (raggiungibili da s e non).

Principio base della visita in profondità: espandere l'ultimo vertice scoperto che ha ancora vertici non ancora scoperti adiacenti.

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita (discesa ricorsiva, visita in pre-order). Il vettore `pre` gioca il ruolo del vettore `mark` nel Calcolo Combinatorio, ma contiene i tempi crescenti di scoperta.

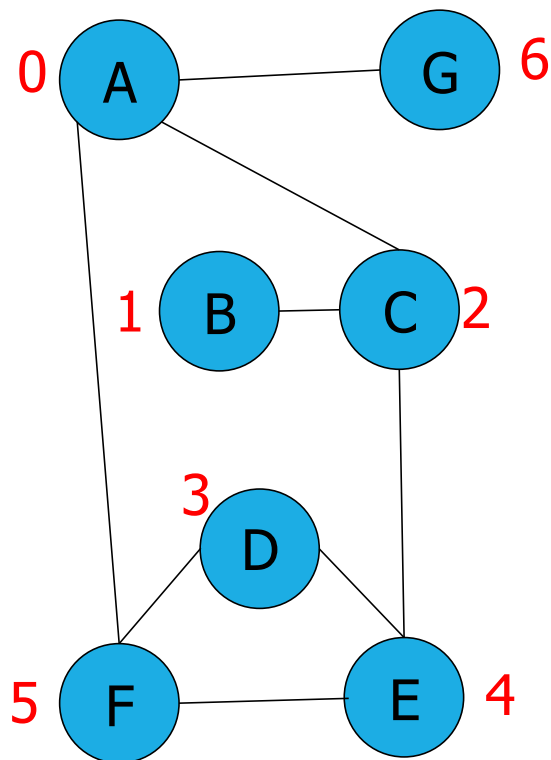
Algoritmo

wrapper

- `GRAPHsimpleDfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `SimpleDfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `SimpleDfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

B: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `SimpleDfsR`.

Esempio



in.txt

```

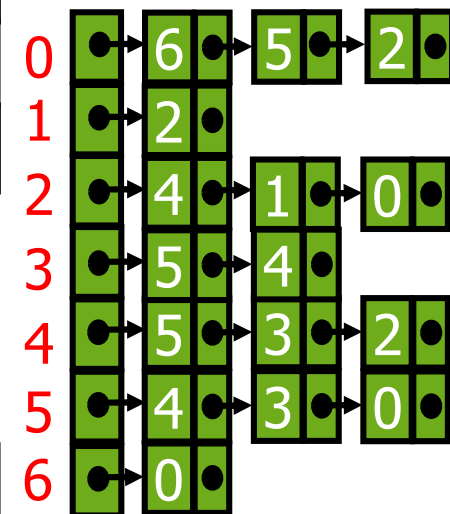
A C
A F
A G
B C
C E
D E
D F
F E

```

ST

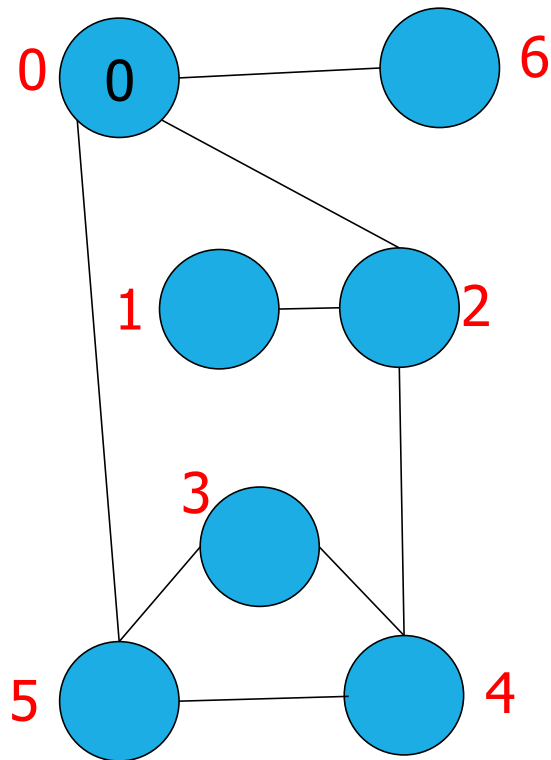
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G

Lista delle
adiacenze

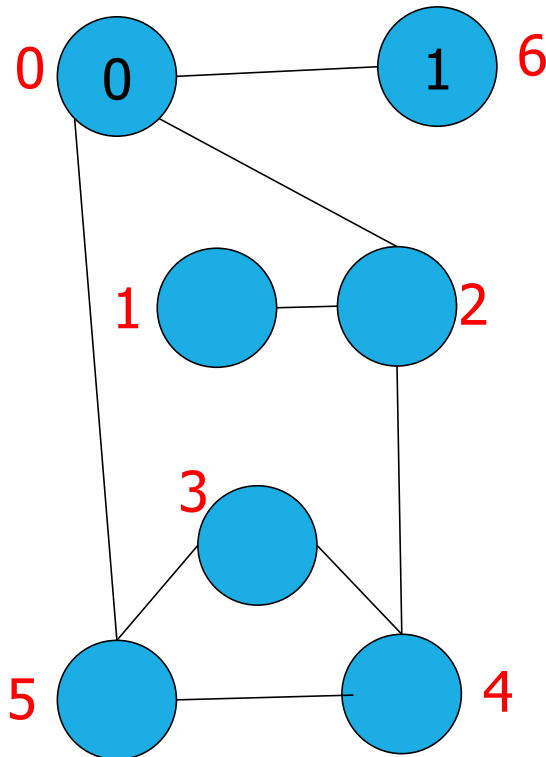


Esempio

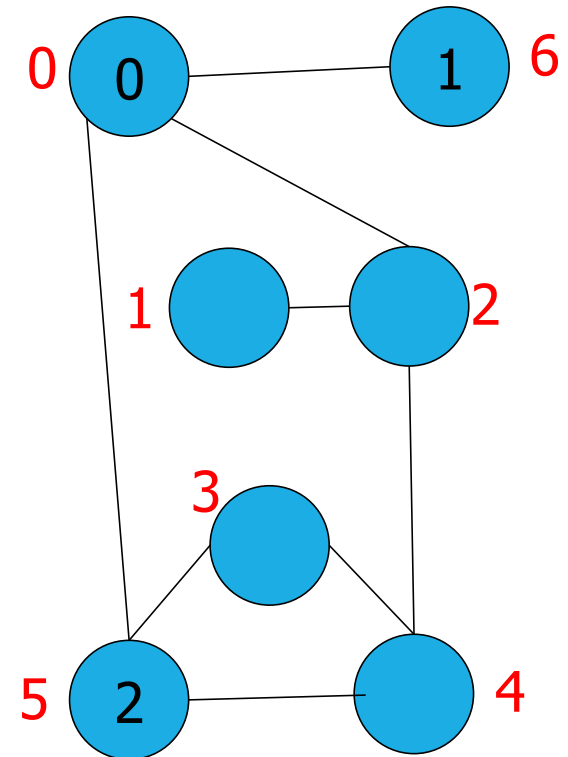
cnt = 0



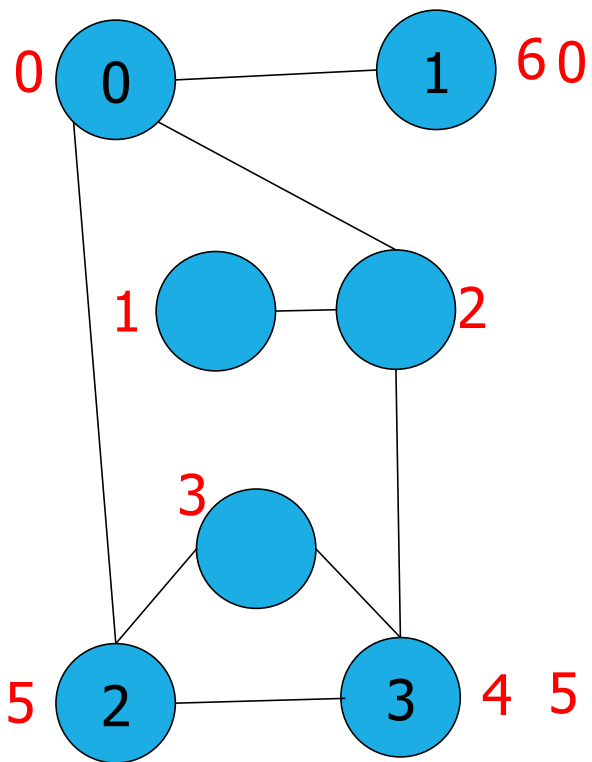
cnt = 1



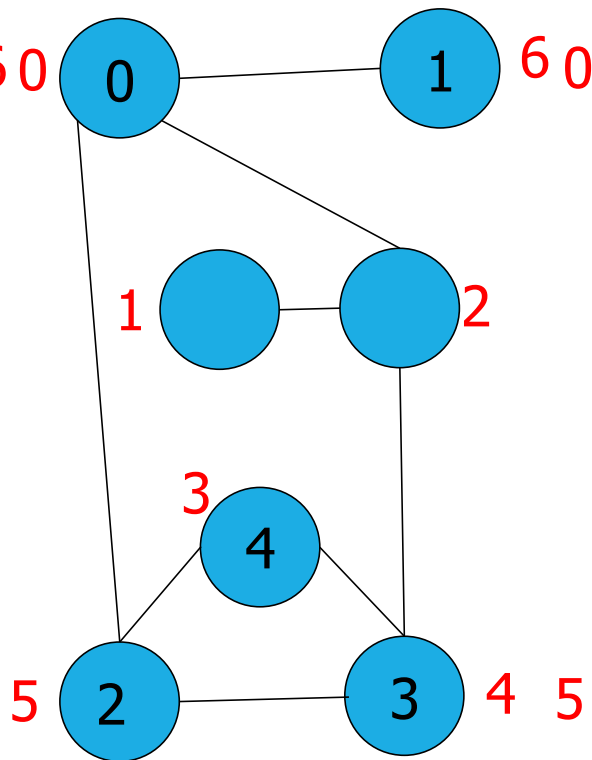
cnt = 2



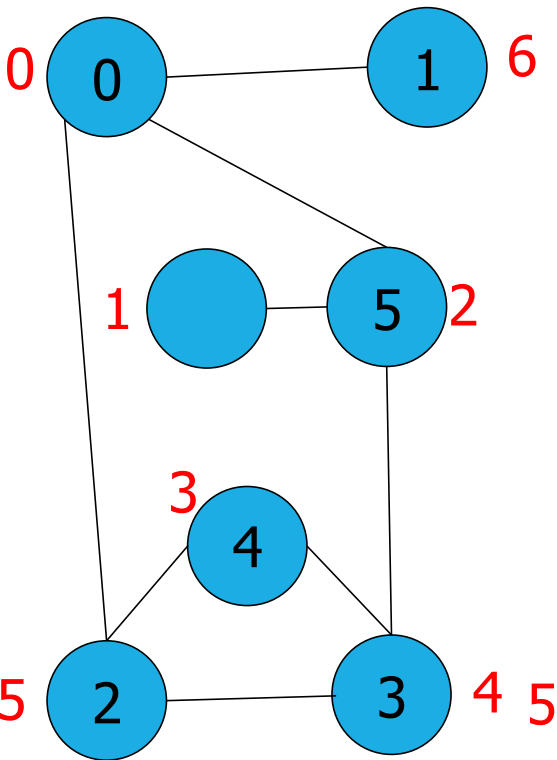
cnt = 3



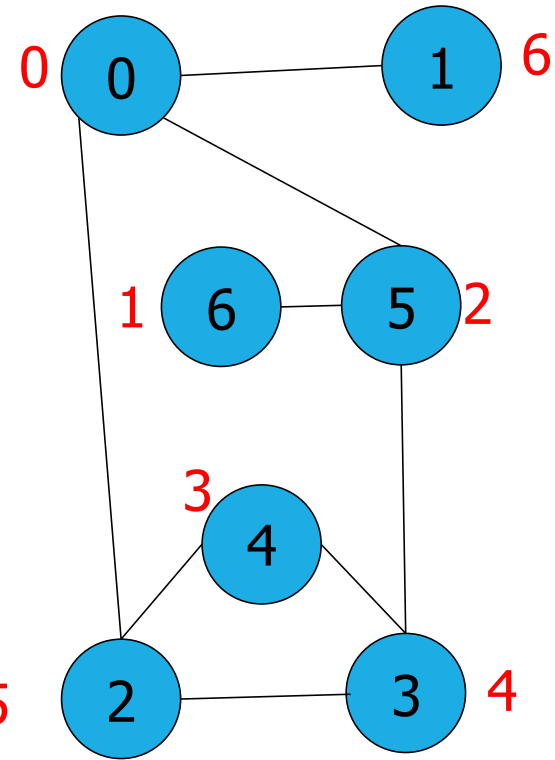
cnt = 4



cnt = 5



cnt = 6



Strutture dati

- grafo non pesato come lista delle adiacenze
- vettore `pre[i]` dove per ciascun vertice si registra il tempo di scoperta (numerazione in preordine dei vertici)
- contatore `cnt` per tempi di scoperta

`cnt` e `*pre` sono locali alla funzione `GRAPHsimpleDfs` e passati by reference alla funzione ricorsiva `SimpleDfsR`.


```

void GRAPHsimpleDfs(Graph G, int id) {
    int v, cnt=0, *pre;
    pre = malloc(G->V * sizeof(int));
    if ((pre == NULL)) return;
    for (v=0;v<G->V;v++) pre[v]=-1;
    simpleDfsR(G, EDGEcreate(id,id), &cnt, pre);

    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (pre[v]== -1)
            simpleDfsR(G, EDGEcreate(v,v), &cnt, pre);

    printf("discovery time labels \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("vertex %s : %d \n", STsearchByIndex(G->tab, v), pre[v]);
}

```

visita a partire da id

visita dei nodi non ancora visitati

```
static void simpleDfsR(Graph G, Edge e, int *cnt, int *pre) {  
    link t; int w = e.w;  
    pre[w] = (*cnt)++;  
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)  
        if (pre[t->v] == -1)  
            simpleDfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), cnt, pre);  
}
```

terminazione implicita
della ricorsione

Visita in profondità (versione estesa)

Estensione:

- nodi etichettati con etichetta tempo di scoperta / tempo di completamento
- foresta di alberi della visita in profondità, memorizzata in un vettore.

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita (discesa ricorsiva, visita in pre-order), vettore $pre[i]$.

Completamento: fine dell'elaborazione del vertice (uscita dalla ricorsione, visita in post-order) vettore $post[i]$.

Scoperta/Completamento: tempo discreto che avanza mediante contatore $time$. Avanzamento quando si scopre o si completa.

Identificazione del padre nella visita in profondità: vettore $st[i]$.

Algoritmo

wrapper

- `GRAPHextendedDfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `ExtendedDfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `ExtendedDfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

B: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `ExtendedDfsR`.

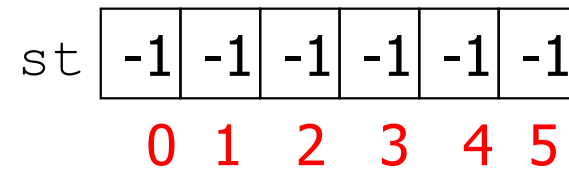
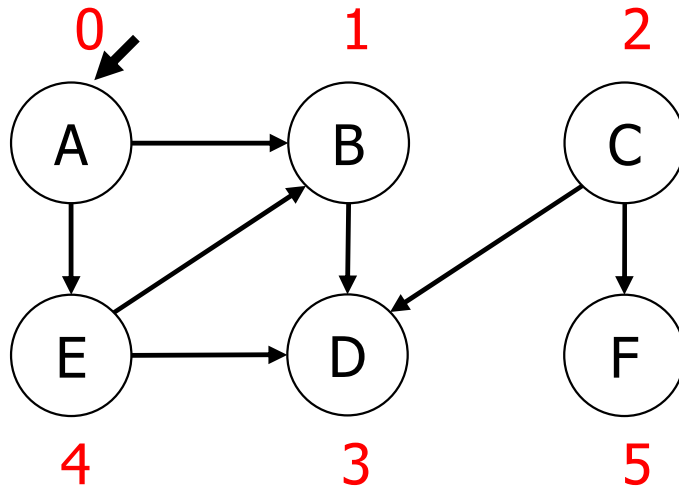
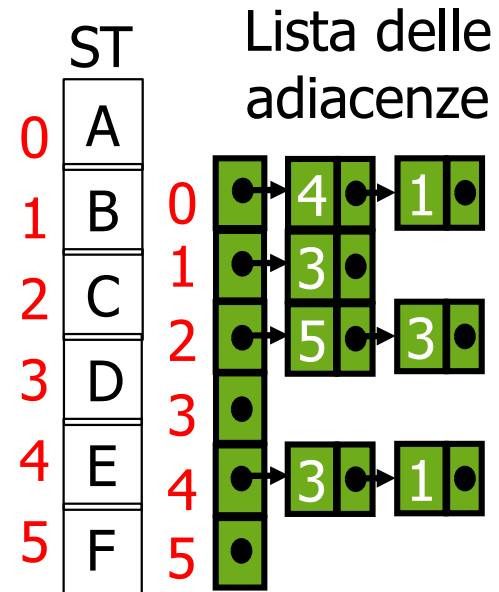
Esempio

time =0 st

in.txt

```

A B
C D
A E
C F
B D
E B
E D
    
```



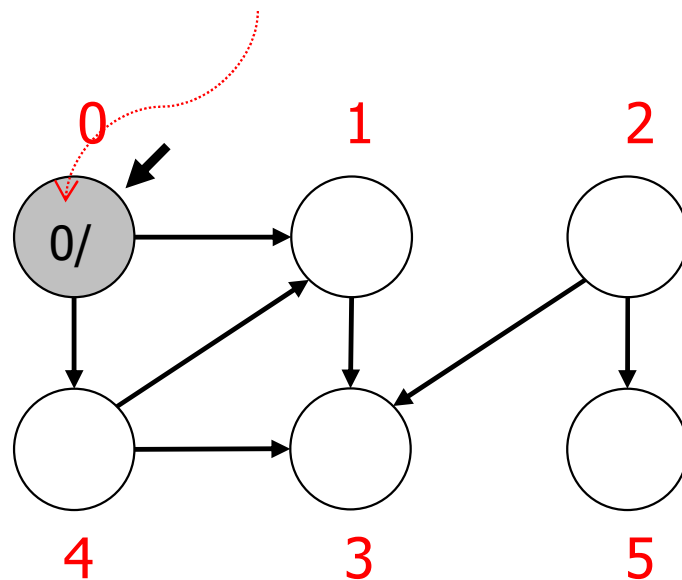
Convenzione grafica:

- nodo bianco: non ancora scoperto
- nodo grigio: scoperto ma non terminato
- nodo nero: terminato

time = 0

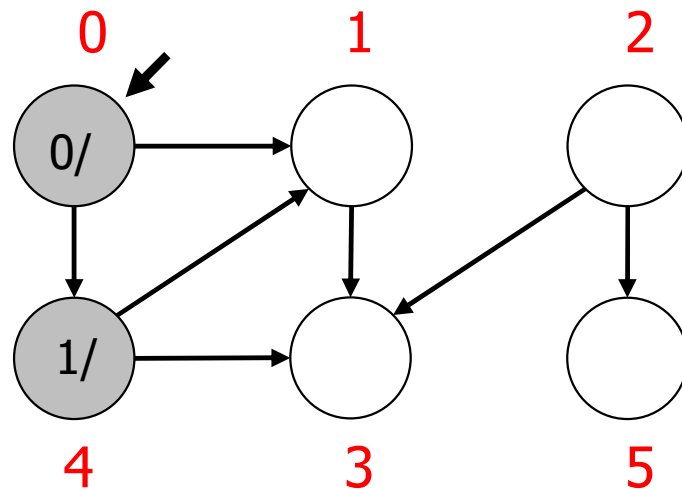
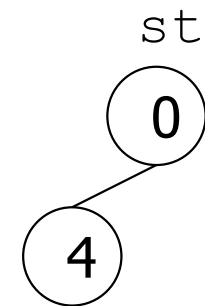
st
0

pre[i]/post[i]



st	0	-1	-1	-1	-1	-1
	0	1	2	3	4	5

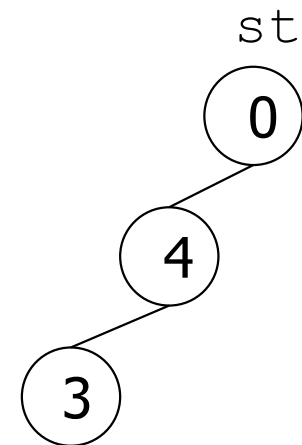
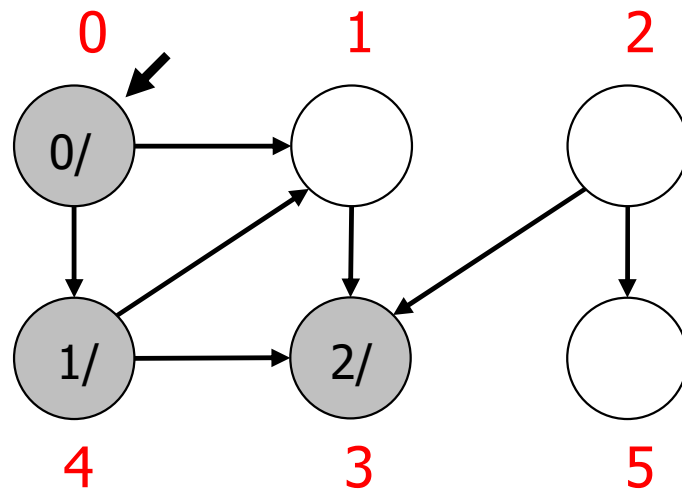
time = 1



st

0	-1	-1	-1	0	-1
0	1	2	3	4	5

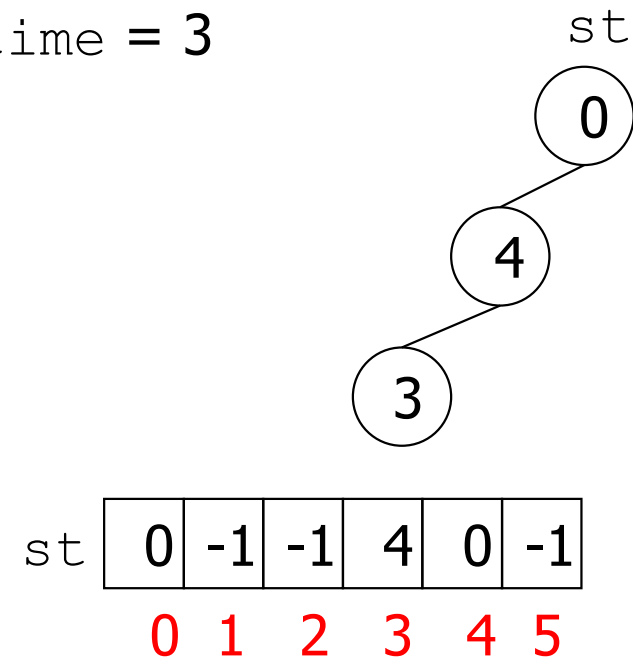
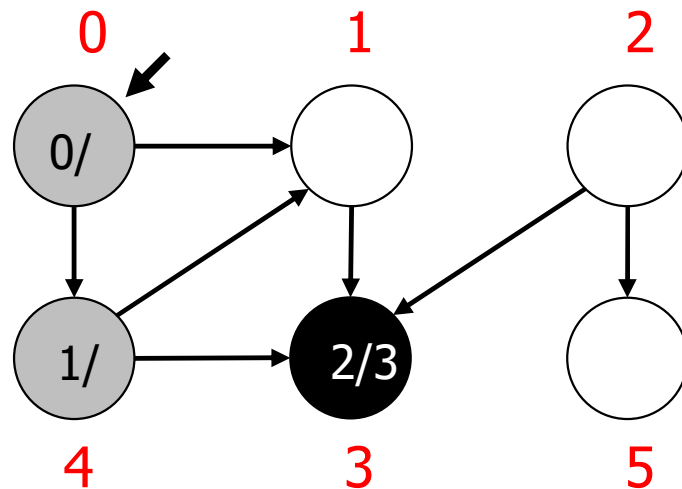
time = 2



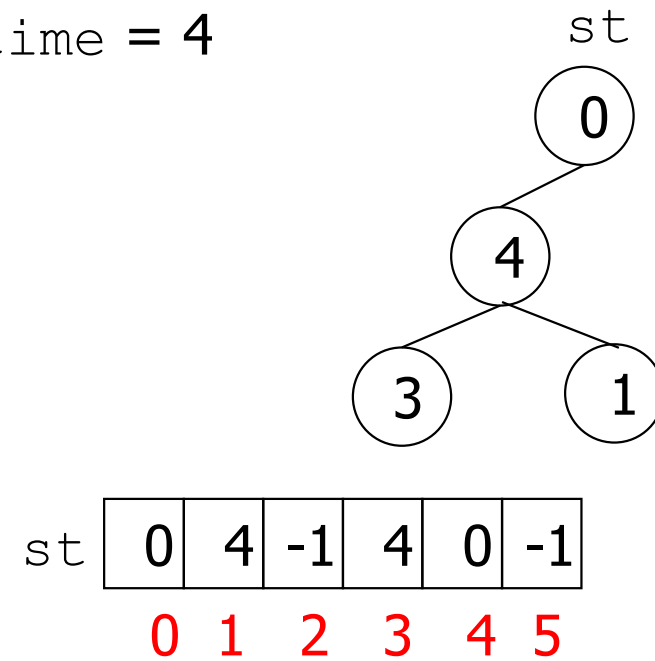
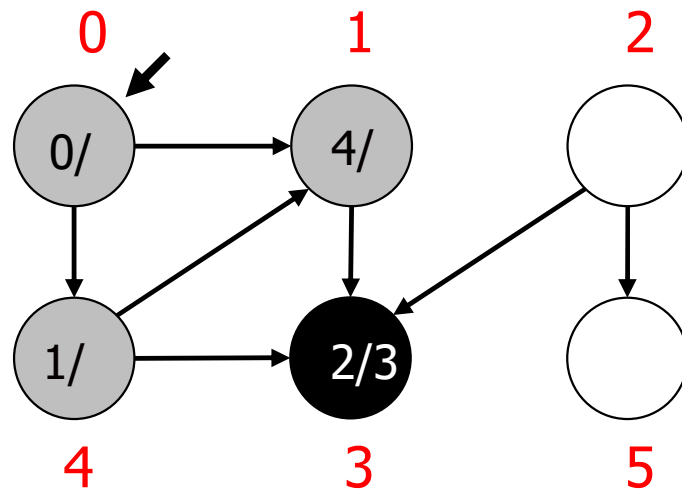
st

0	-1	-1	4	0	-1
0	1	2	3	4	5

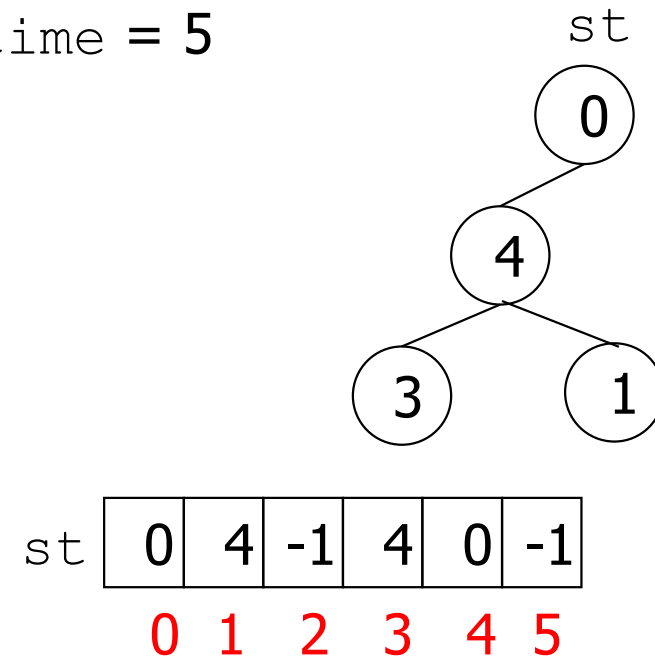
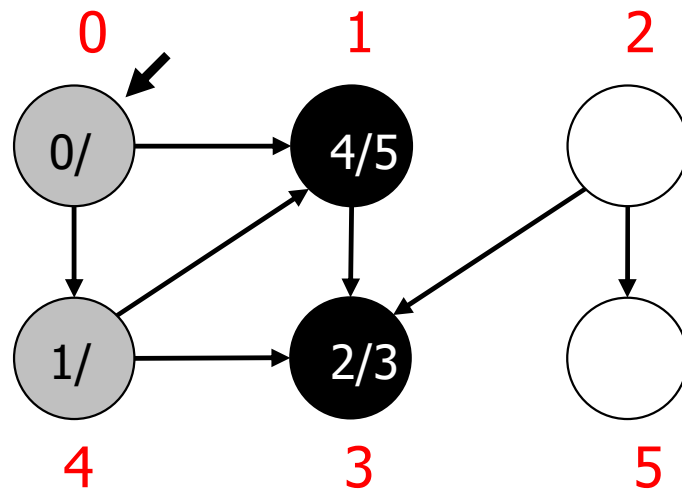
time = 3



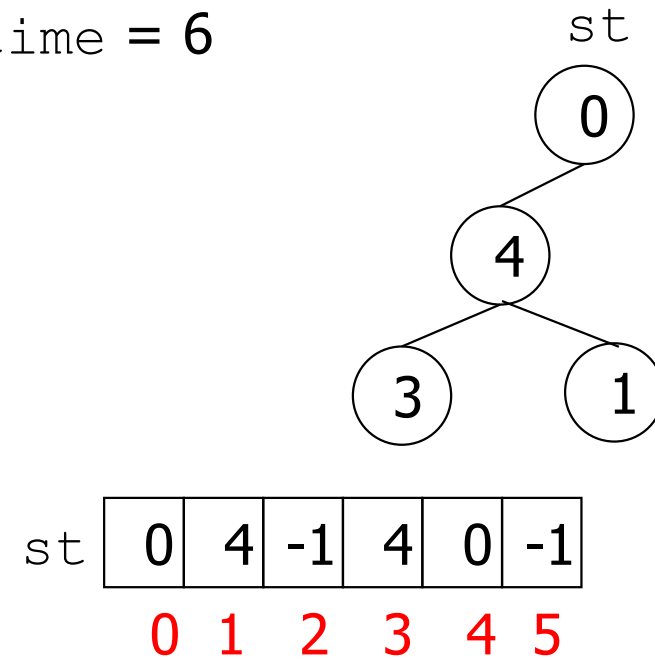
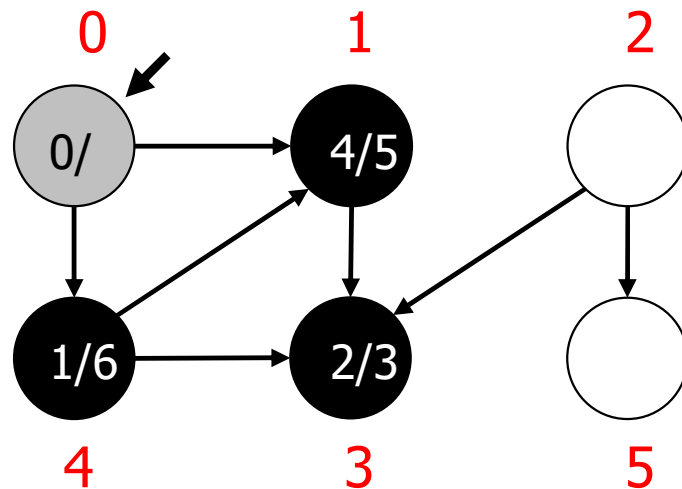
time = 4



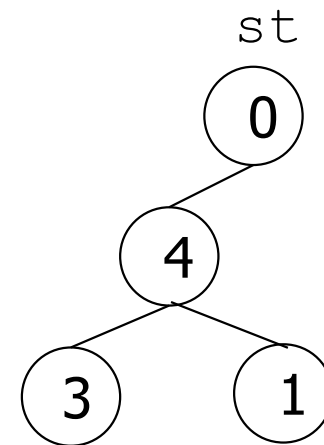
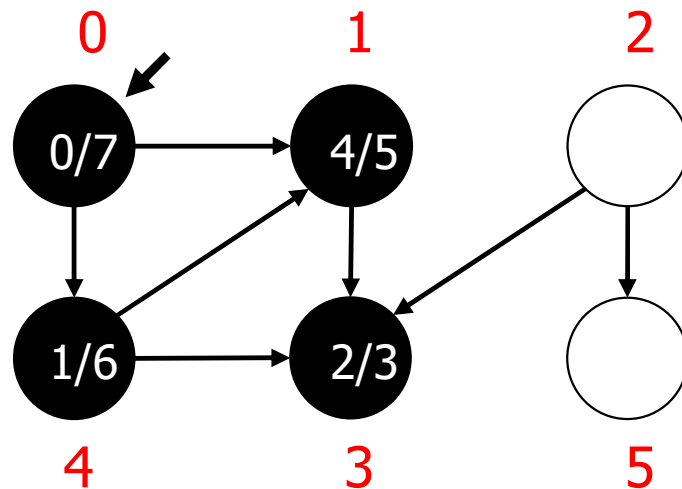
time = 5



time = 6



time = 7

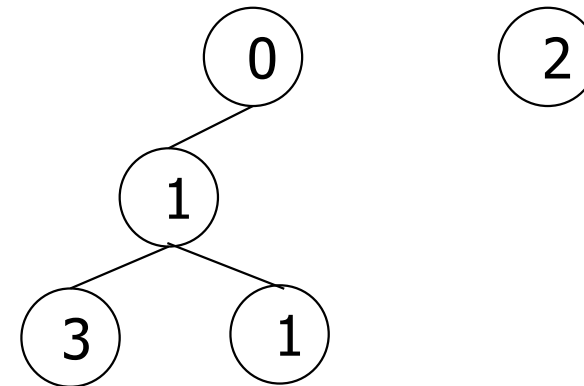
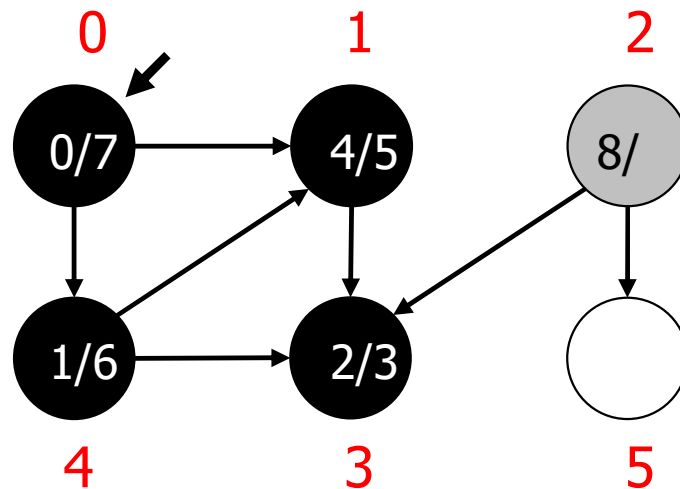


st

0	4	-1	4	0	-1
0	1	2	3	4	5

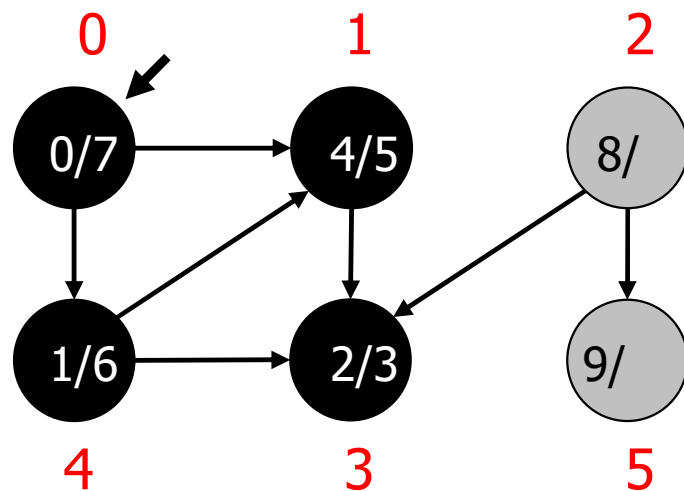
time = 8

st

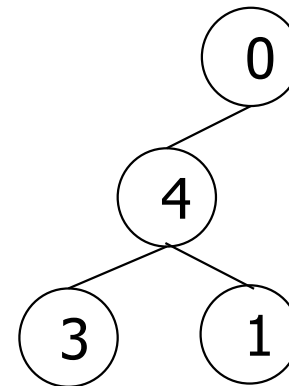


st

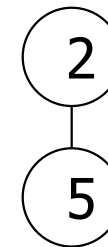
0	4	2	4	0	-1
0	1	2	3	4	5



time = 9

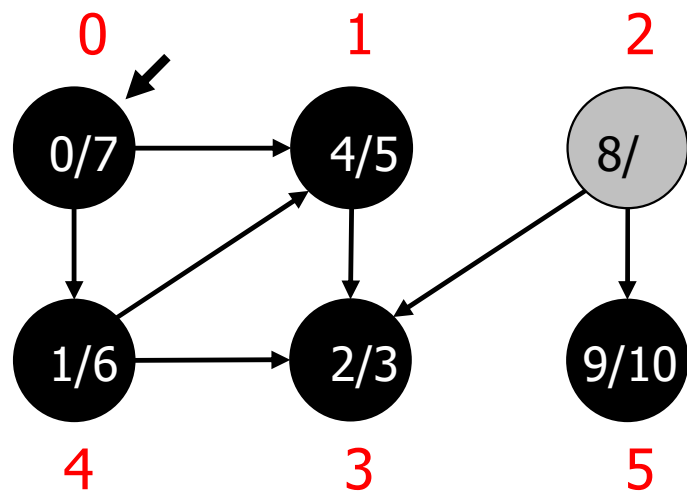


st

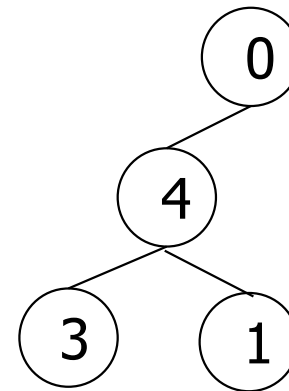


st

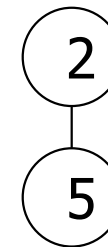
0	4	2	4	0	2
0	1	2	3	4	5



time = 10

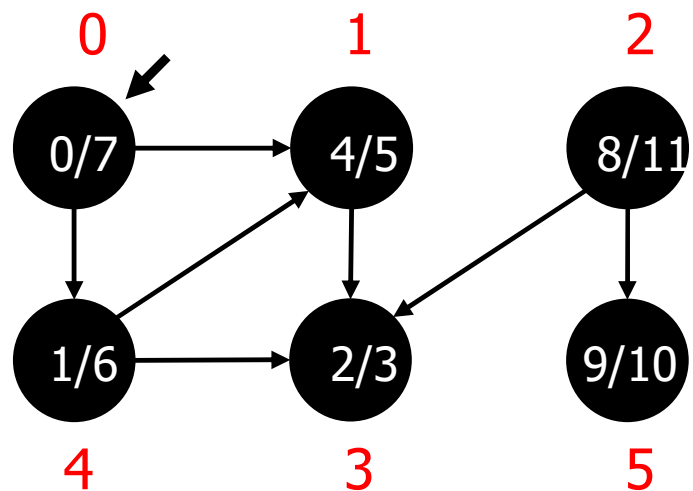


st

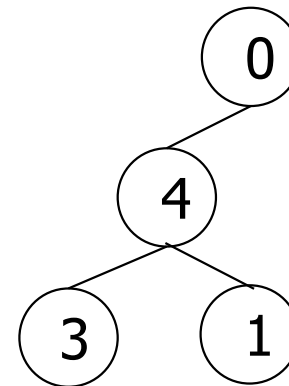


st

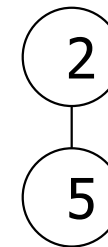
0	4	2	4	0	2
0	1	2	3	4	5



time = 11



st



st

0	4	2	4	0	2
0	1	2	3	4	5

Strutture dati

- grafo non pesato come lista delle adiacenze
 - vettori dove per ciascun vertice:
 - si registra il tempo di scoperta (numerazione in preordine dei vertici) `pre[i]`
 - si registra il tempo di completamento (numerazione in postordine dei vertici) `post[i]`
 - si registra il padre per la costruzione della foresta degli alberi della visita in profondità: `st[i]`
 - contatore `time` per tempi di scoperta/completamento
- `time`, `*pre`, `*post` e `*st` sono locali alla funzione `GRAPHextendedDfs` e passati by reference alla funzione ricorsiva `ExtendedDfsR`.

```

void GRAPHextendedDfs(Graph G, int id) {
    int v, time=0, *pre, *post, *st;
    pre/post/st = malloc(G->V * sizeof(int));
    for (v=0;v<G->V;v++) {
        pre[v]=-1; post[v]=-1; st[v]=-1;}
    extendedDfsR(G, EDGEcreate(id,id), &time, pre, post, st);
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (pre[v]==-1)
            extendedDfsR(G,EDGEcreate(v,v),&time,pre,post,st);
    printf("discovery/endprocessing time labels \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("%s:%d/%d\n",STsearchByIndex(G->tab,v),pre[v],post[v]);
    printf("resulting DFS tree \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("%s's parent: %s \n",STsearchByIndex (G->tab, v),
            STsearchByIndex (G->tab, st[v]));
}

```

```

static void ExtendedDfsR(Graph G, Edge e, int *time, int *pre,
                        int *post, int *st) {
    link t;
    int w = e.w;
    st[e.w] = e.v;
    pre[w] = (*time)++;
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)
        if (pre[t->v] == -1)
            ExtendedDfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), time, pre, post, st);
    post[w] = (*time)++;
}

```

terminazione implicita
della ricorsione

Visita in profondità (versione completa)

Si etichetta ogni arco:

- grafi orientati: T(tree), B(backward), F(forward), C(cross)
- grafi non orientati: T(tree), B(backward)

Classificazione degli archi

Grafo orientato:

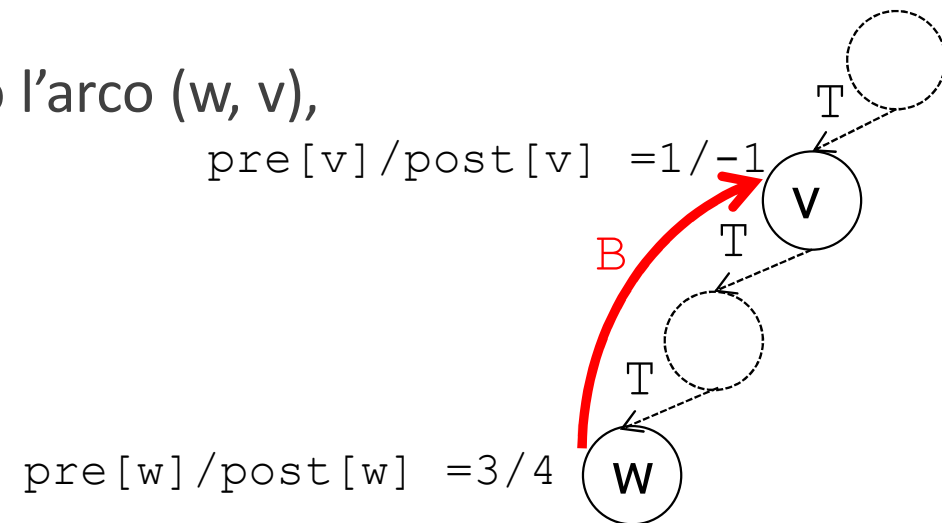
- **T**: archi dell'albero della visita in profondità
- **B**: connettono un vertice w ad un suo antenato v nell'albero:

tempo di fine elaborazione di v **sarà** $>$ tempo di fine elaborazione di w .

Equivale a testare se, quando scopro l'arco (w, v) ,

$\text{post}[v] == -1$

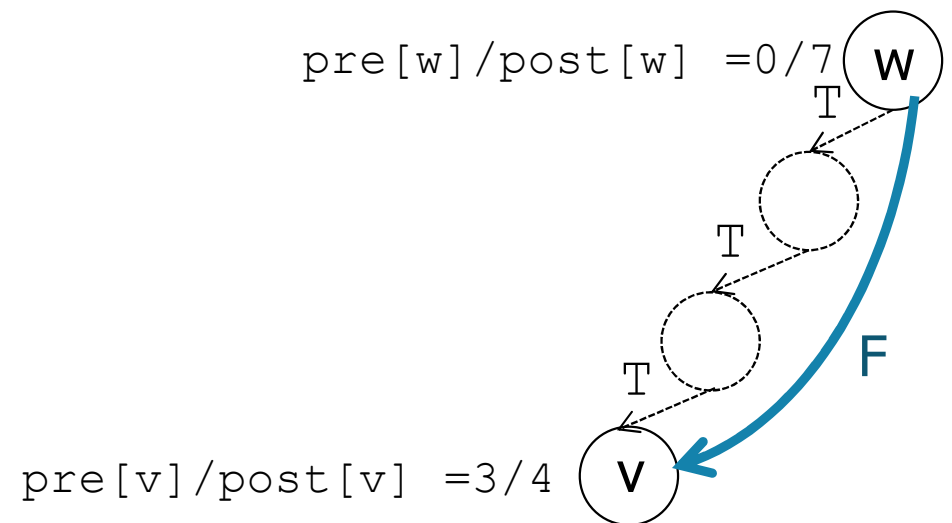
$\text{pre}[v] / \text{post}[v] = 1 / -1$



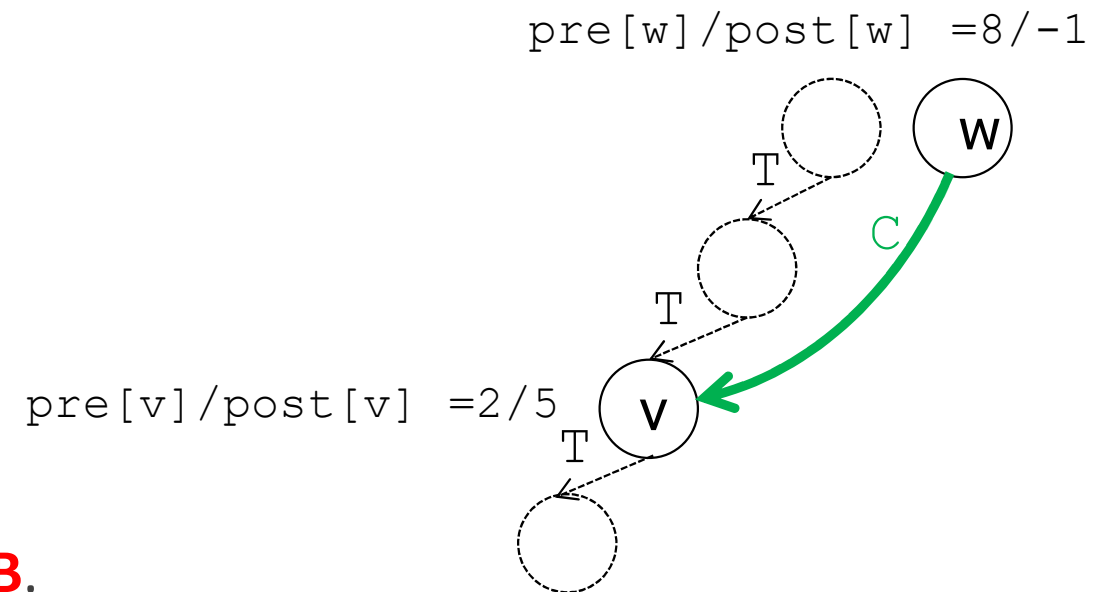
- **F**: connettono un vertice w ad un suo discendente v nell'albero:

tempo di scoperta di v **è** $>$ tempo di scoperta di w quando scopro l'arco (w, v)

$$\text{pre}[v] > \text{pre}[w]$$



- **C**: archi rimanenti, per cui
tempo di scoperta di w **è** $>$ tempo di scoperta di v quando scopro
l'arco (w, v)
 $pre[w] > pre[v]$



Grafo non orientato: solo archi **T** e **B**.

Algoritmo

wrapper

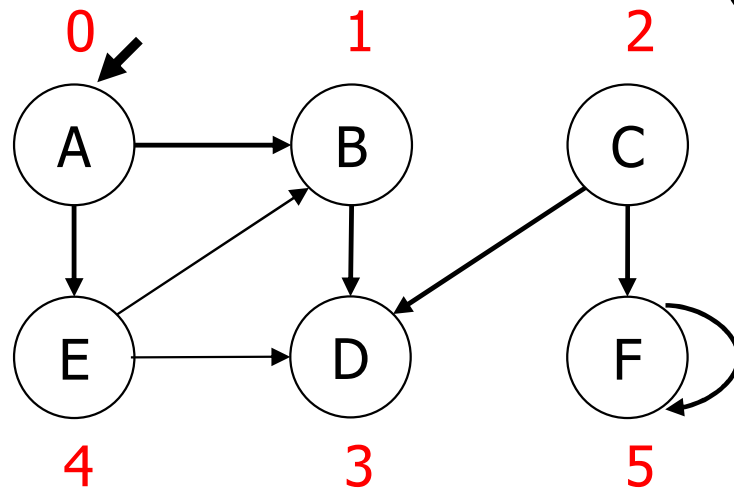
- `GRAPHdfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `dfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `dfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

NB: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `dfsR`.

Strutture dati: come nella versione estesa. Codice della `GRAPHdfs` identico a quello della `GRAPHextendedDfs`.

Esempio

time = 0 st



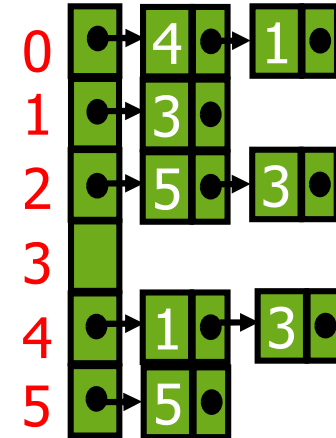
Lista archi

A	B
C	D
A	E
C	F
B	D
E	D
E	B
F	F

ST

0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

Lista delle
adiacenze

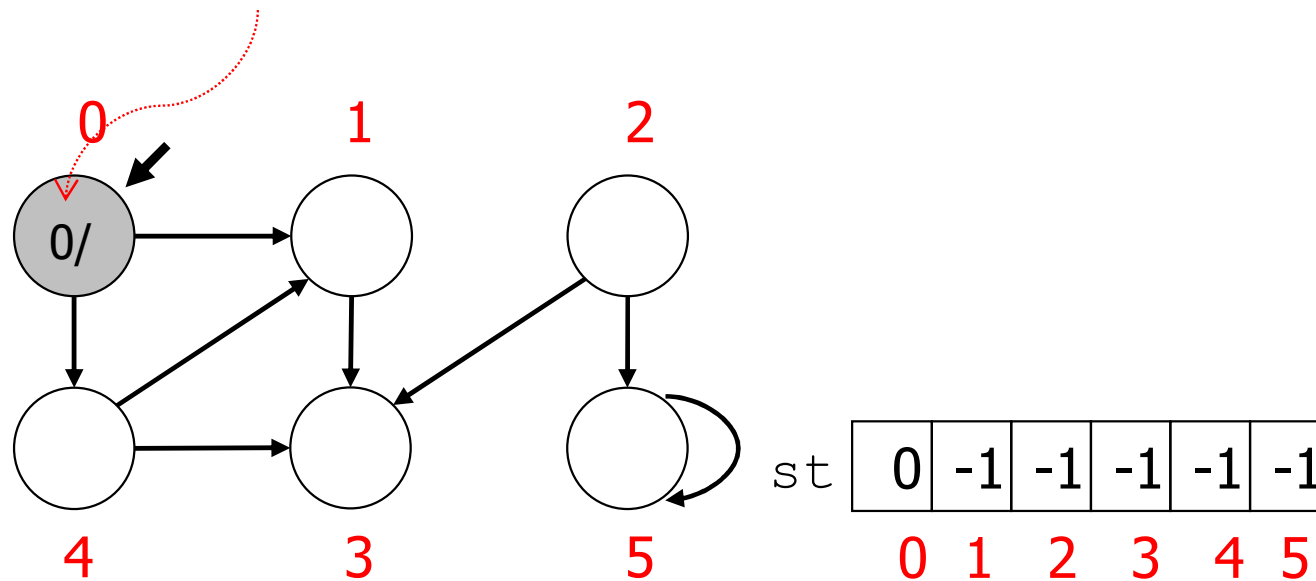


st	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	0	1	2	3	4	5

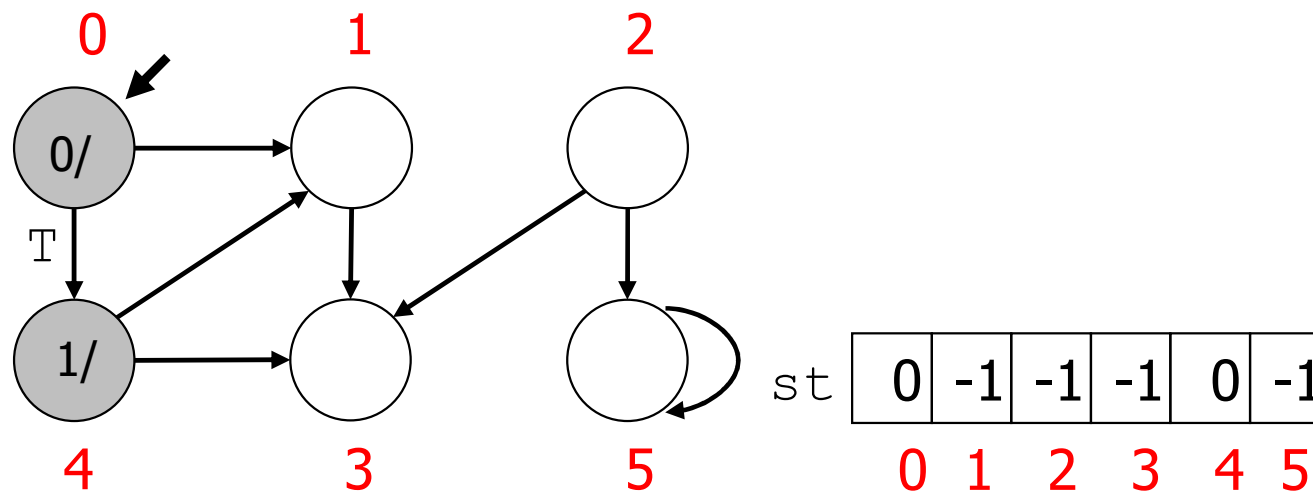
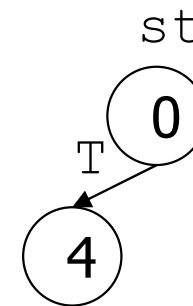
time = 0

st
0

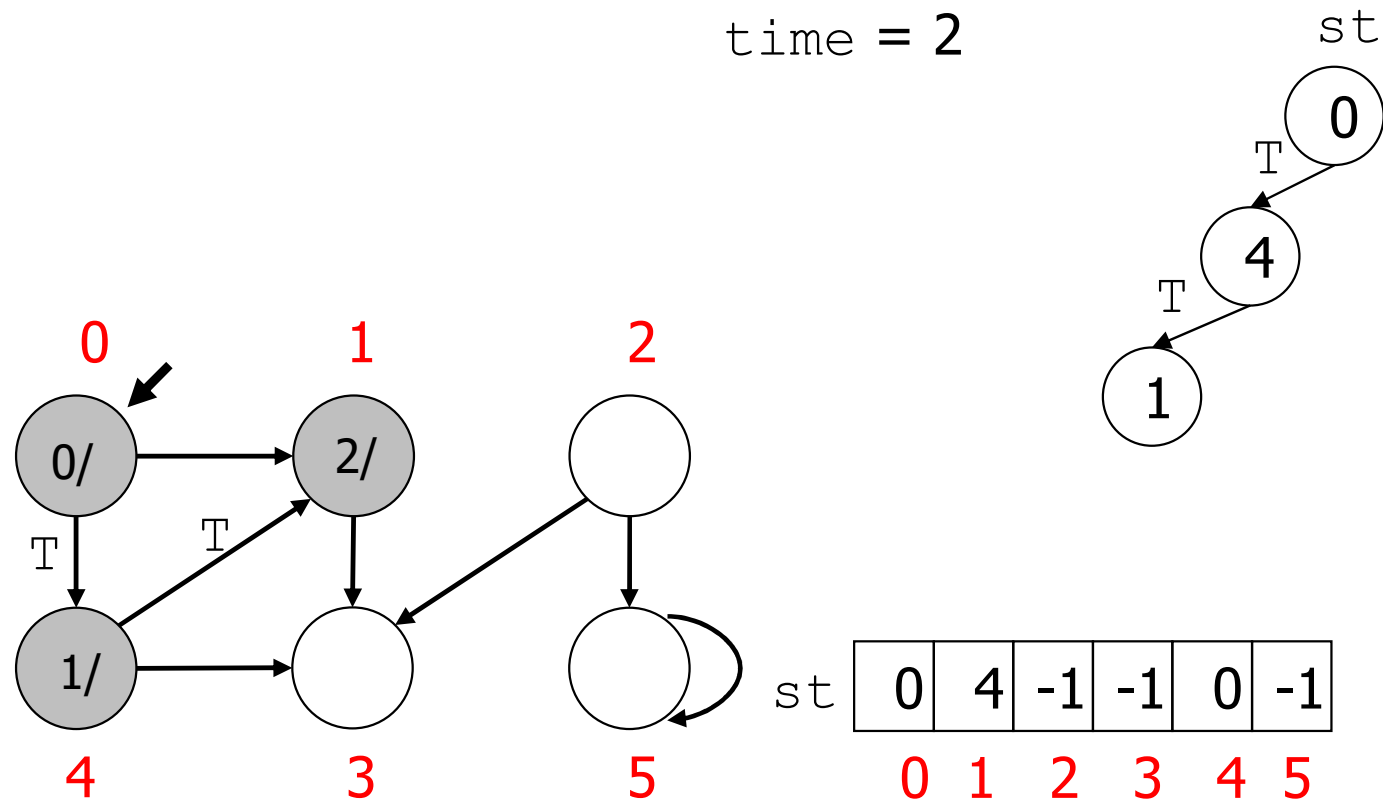
pre[i]/post[i]



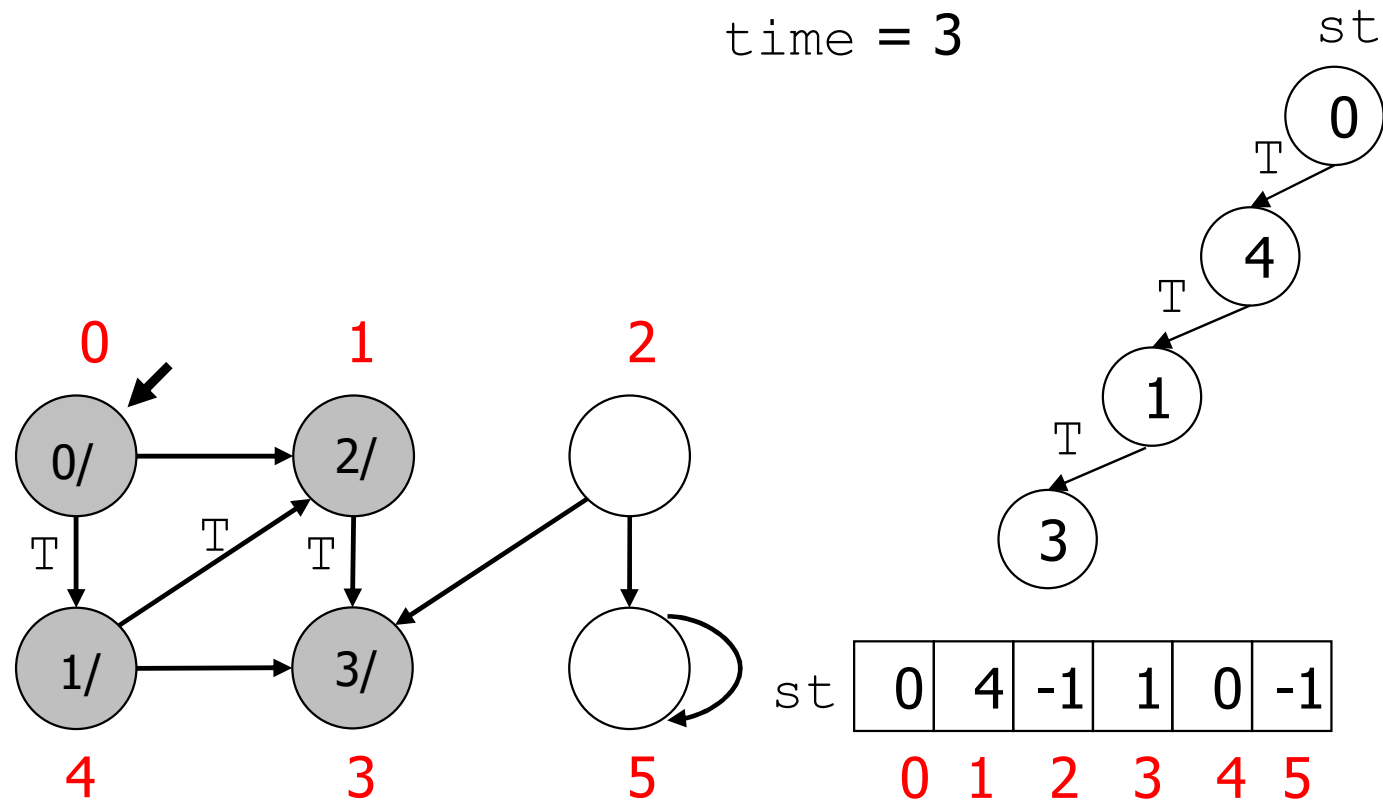
time = 1



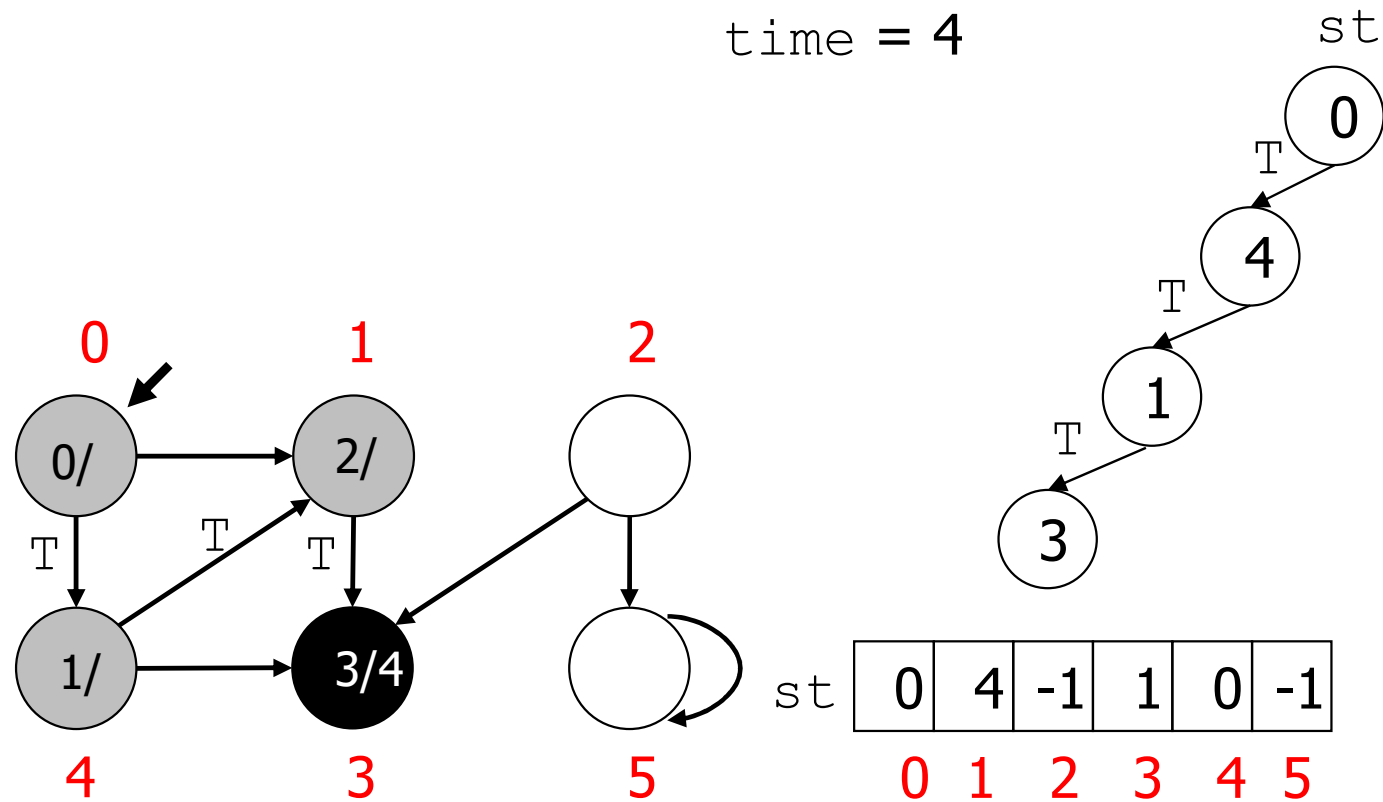
time = 2



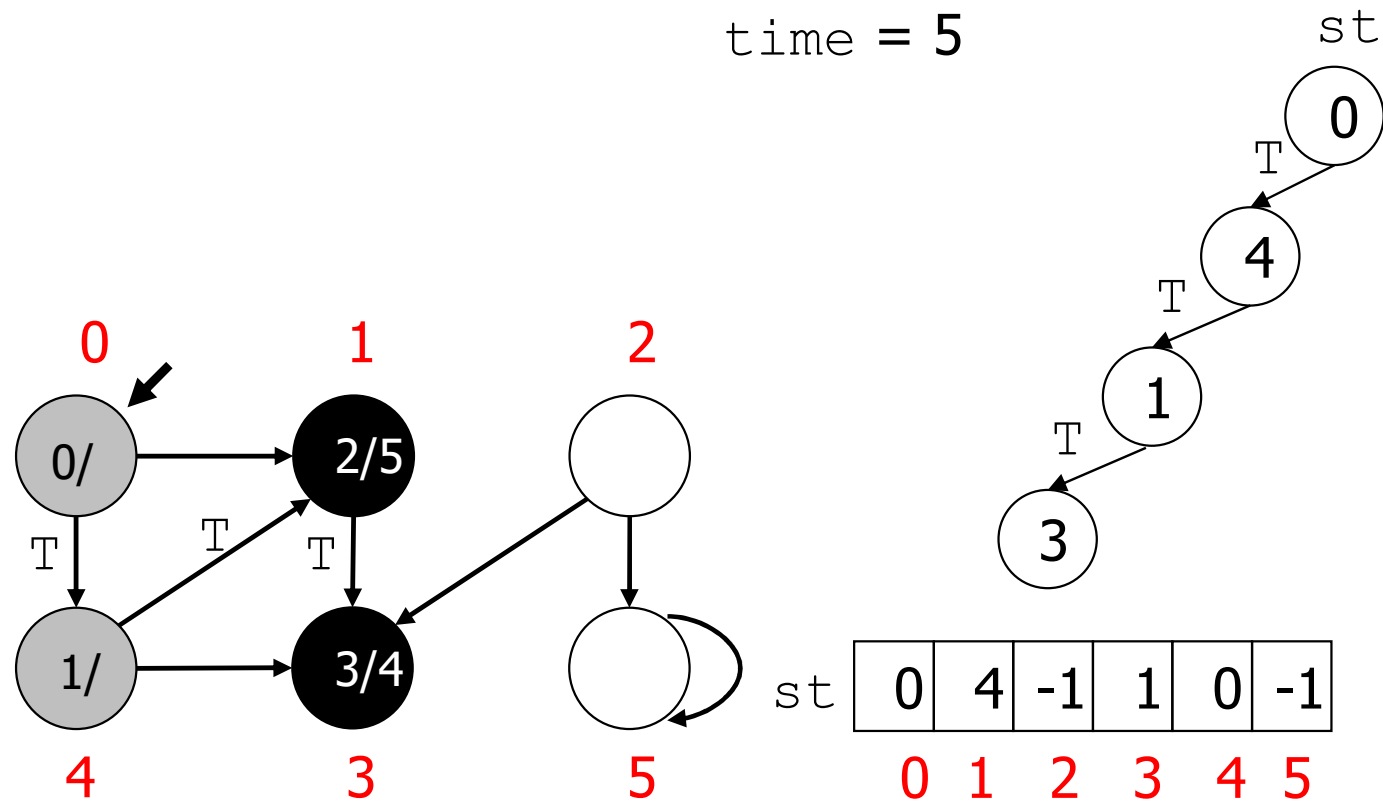
time = 3



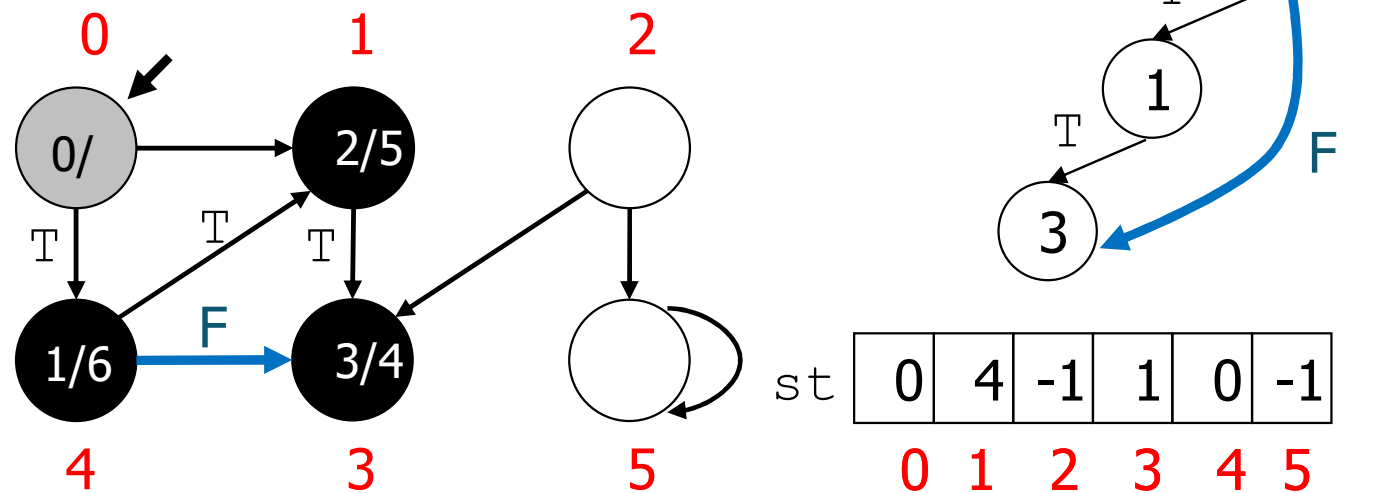
time = 4



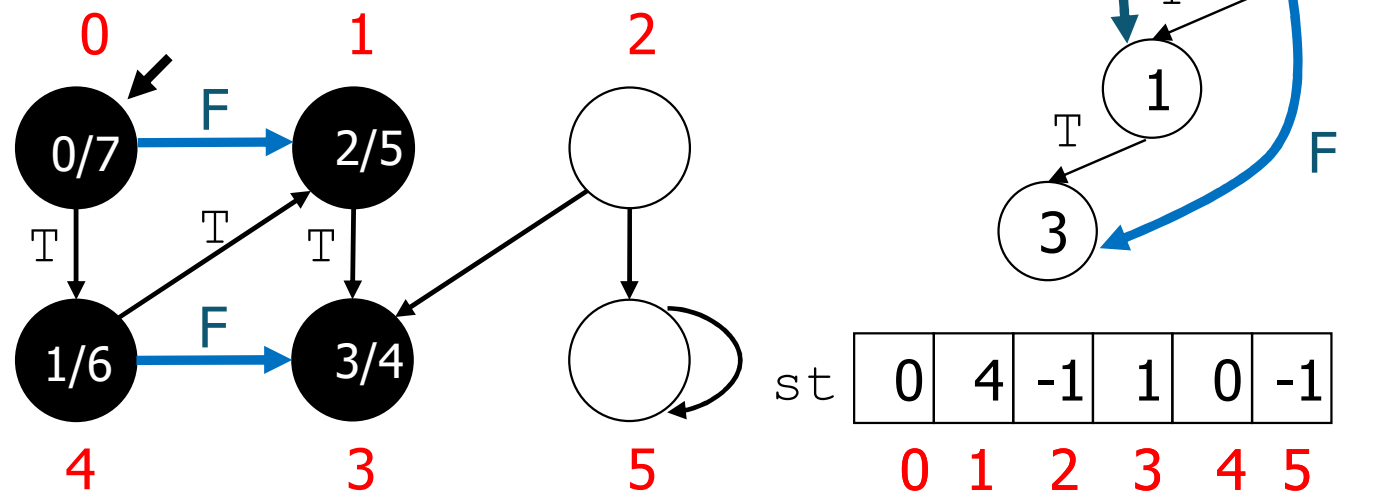
time = 5



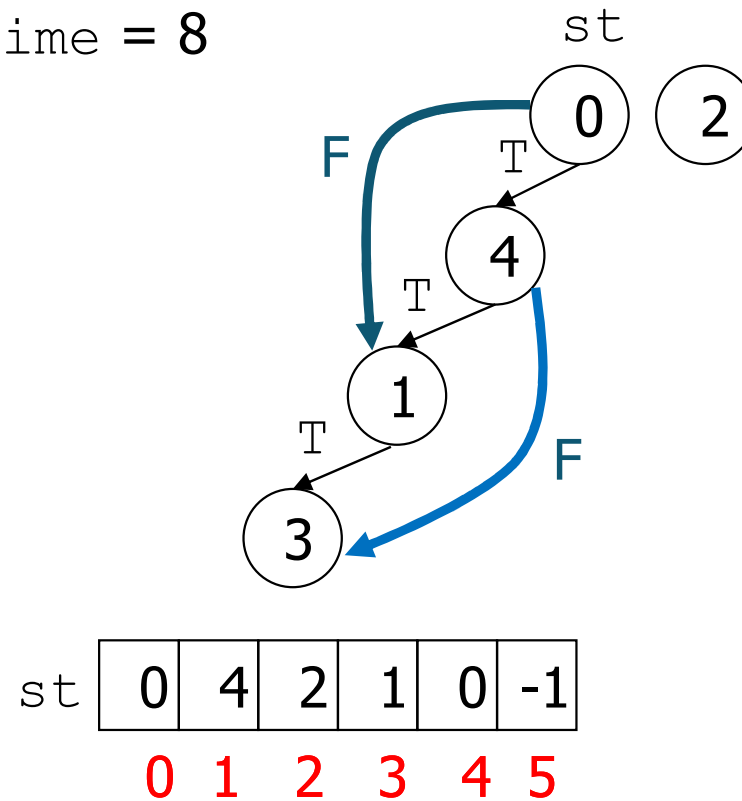
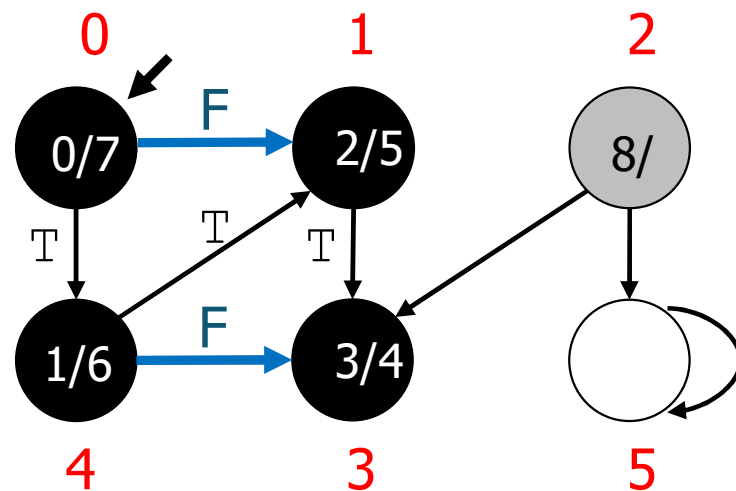
time = 6



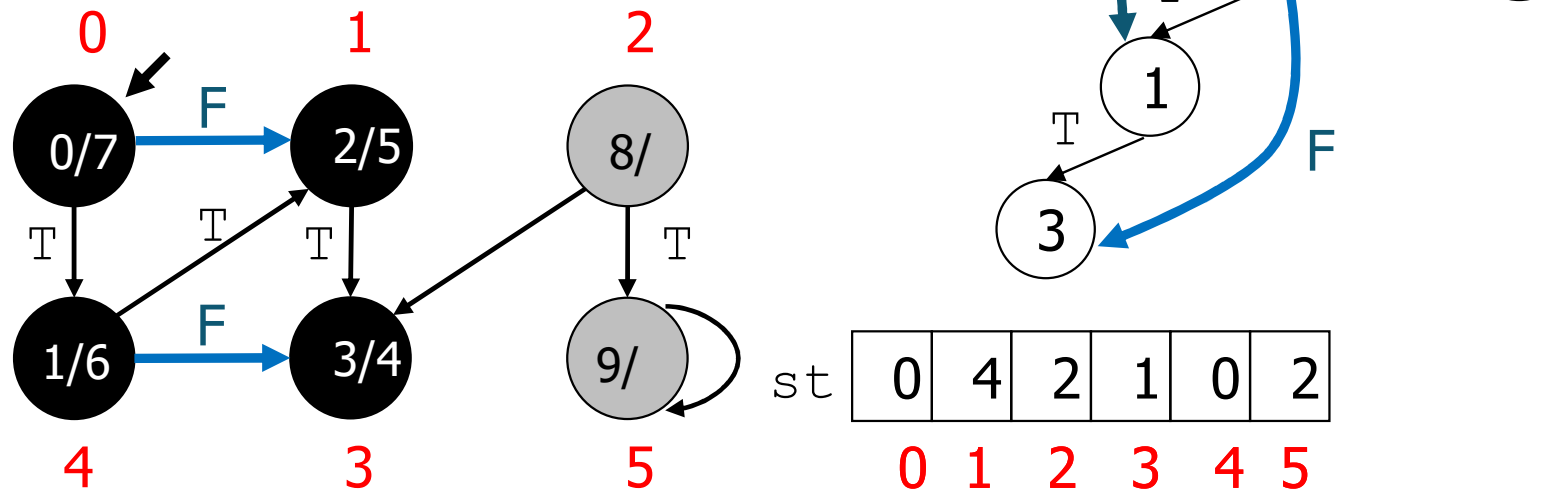
time = 7



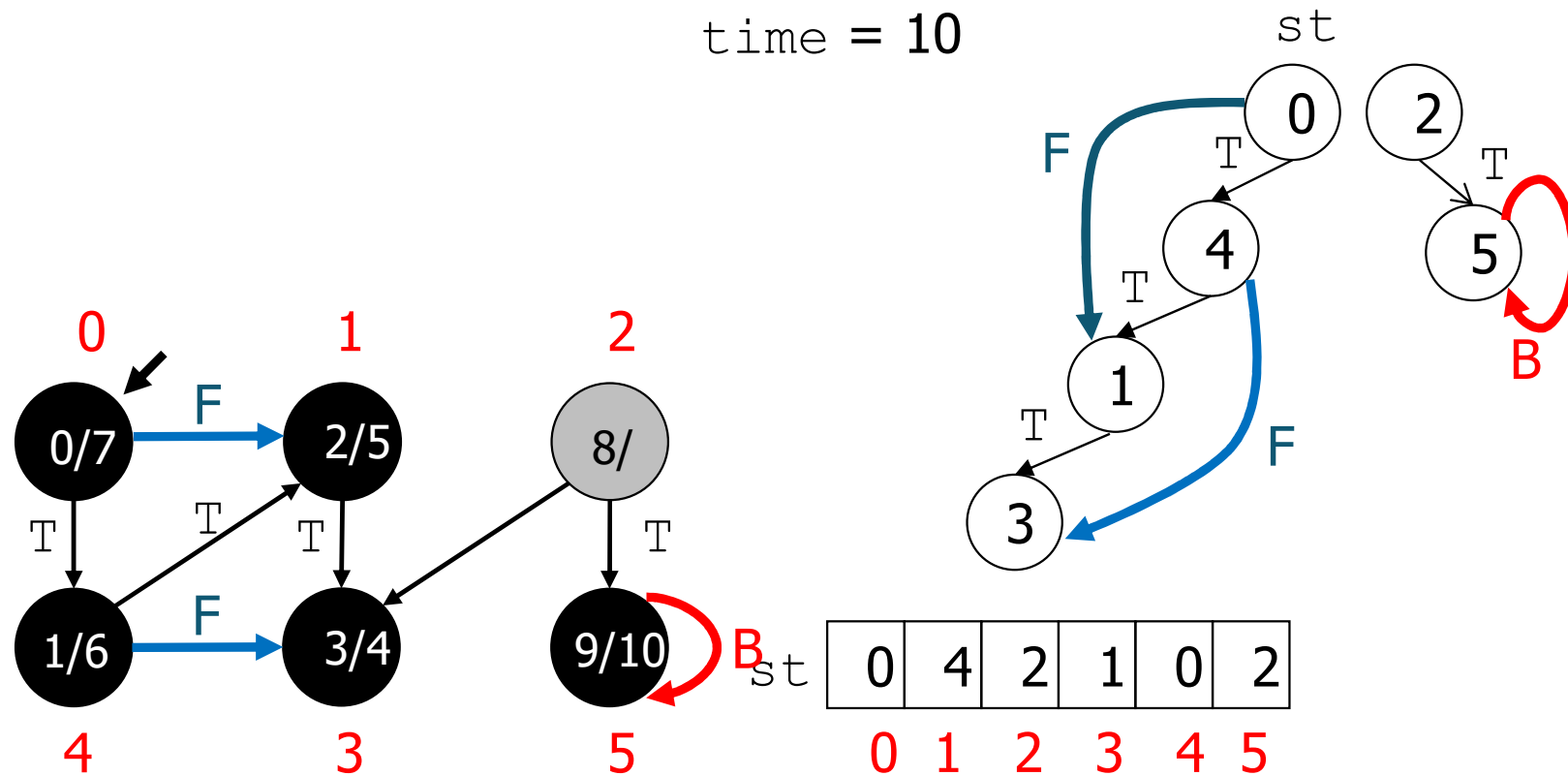
time = 8



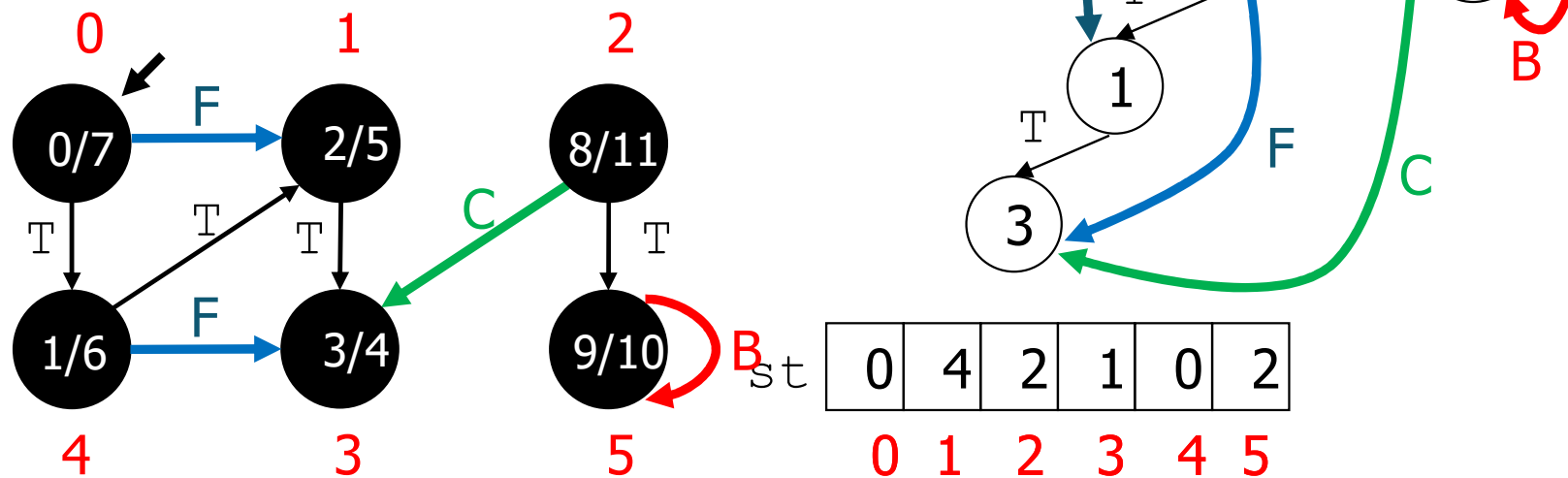
time = 9



time = 10



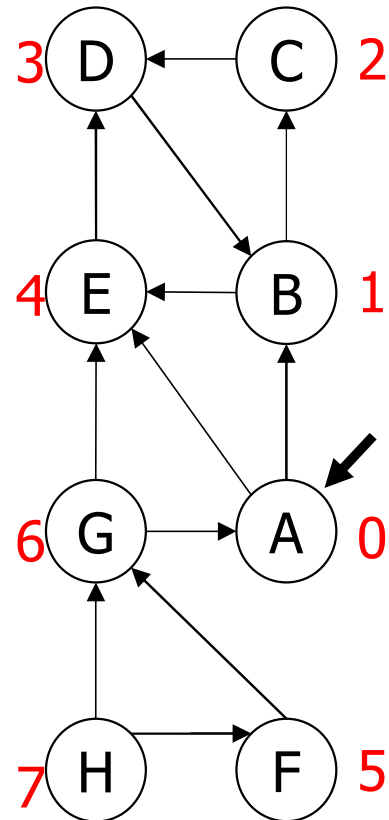
time = 11



Esempio

Lista archi

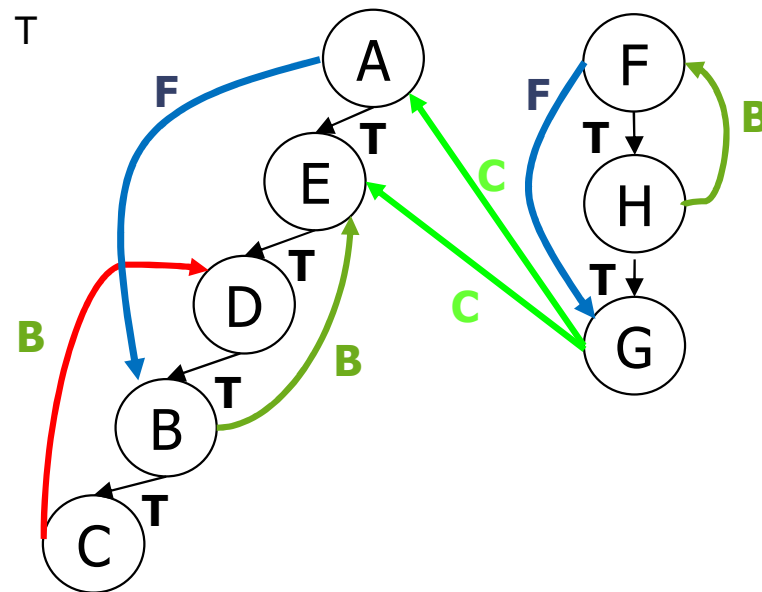
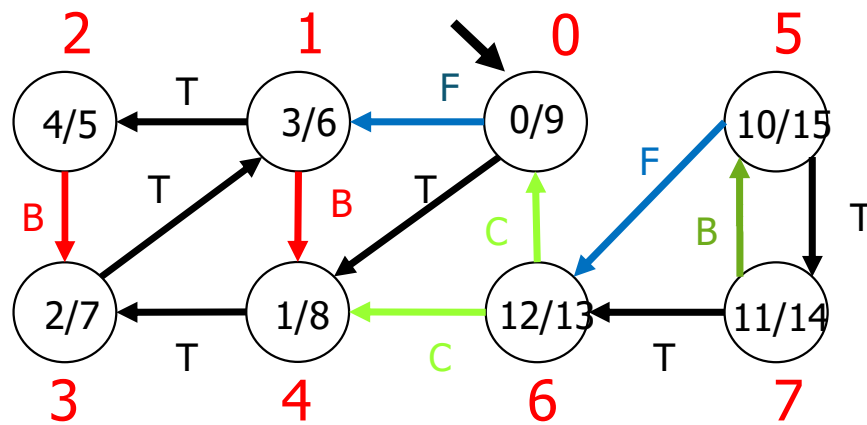
A	B
B	C
C	D
A	E
F	G
F	H
D	B
E	D
B	E
G	E
H	G
H	F
G	A



	ST
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H

Lista delle
adiacenze

0	●	→ 4	●	→ 1	●
1	●	→ 4	●	→ 2	●
2	●	→ 3	●		
3	●	→ 1	●		
4	●	→ 3	●		
5	●	→ 7	●	→ 6	●
6	●	→ 0	●	→ 4	●
7	●	→ 5	●	→ 6	●




```
void dfsR(Graph G, Edge e, int *time,  
          int *pre, int *post, int *st){
```

```
    link t;
```

```
    int v, w = e.w;
```

```
    Edge x;
```

```
    if (e.v != e.w)
```

escludi arco fittizio

```
        printf("(%s, %s):  T \n", STsearchByIndex(G->tab, e.v),  
               STsearchByIndex(G->tab, e.w));
```

```
    st[e.w] = e.v;
```

```
    pre[w] = (*time)++;
```

```
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)
```

terminazione implicita
della ricorsione

```
        if (pre[t->v] == -1)
```

```
            dfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), time, pre, post, st);
```

```
        else {
```

```
            v = t->v;
```

```
            x = EDGEcreate(w, v);
```

test per non considerare gli archi 2 volte

grafi non orientati

```
if (pre[w] < pre[v])
    printf("(s, s): B\n", STsearchByIndex(G->tab, x.v),
           STsearchByIndex(G->tab, x.w)) ;
if (post[v] == -1)
    printf("(s, s): B\n", STsearchByIndex(G->tab, x.v),
           STsearchByIndex(G->tab, x.w));
else
    if (pre[v] > pre[w])
        printf("(s,s):F\n",STsearchByIndex(G->tab, x.v),
               STsearchByIndex(G->tab, x.w));
    else
        printf("(s,s):C\n",STsearchByIndex(G->tab, x.v),
               STsearchByIndex(G->tab, x.w));
}
post[w] = (*time)++;
}
```

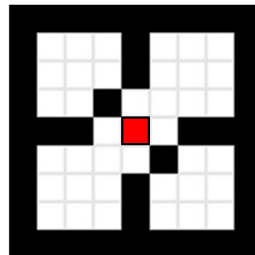
grafi orientati

Complessità (lista adiacenze)

- Inizializzazione $\Theta(|V|)$
- visita ricorsiva da u $\Theta(|E|)$
- $T(n) = \Theta(|V| + |E|)$.
- con la matrice delle adiacenze: $T(n) = \Theta(|V|^2)$.

Applicazione: flood fill

- Scopo: colorare un'intera area di pixel connessi con lo stesso colore (Bucket Tool)
- DFS a partire dal pixel sorgente (seed), terminazione quando si incontra una frontiera (boundary):



<http://en.wikipedia.org>

Sedgewick, Wayne, Algorithms Part I & II, www.coursera.org

Visita in ampiezza

A partire da un vertice s :

- determina tutti i vertici raggiungibili da s , quindi non visita necessariamente tutti i vertici a differenza della DFS
- calcola la distanza minima da s di tutti i vertici da esso raggiungibili.
- genera un albero della visita in ampiezza.

Ampiezza: espande tutta la frontiera tra vertici già scoperti/non ancora scoperti.

Principi base

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita raggiungendolo percorrendo un arco.

Il vettore $\text{pre}[v]$ registra il tempo di scoperta di v .

Dato un vertice v , il vettore $\text{st}[v]$ registra il padre di v nell'albero della visita in ampiezza.

Non appena il vertice viene scoperto, si registra il tempo di scoperta e il padre nell'albero, concludendo così l'elaborazione del vertice stesso.

Strutture dati

- grafo non pesato come matrice delle adiacenze
- coda Q di archi $e = (v, w)$
- vettore `st` dei padri nell'albero di visita in ampiezza
- vettore `pre` dei tempi di scoperta dei vertici
- contatore `time` del tempo

`time`, `*pre` e `*st` sono locali alla funzione `GRAPHbfs`
e passati by reference alla funzione `bfs`.



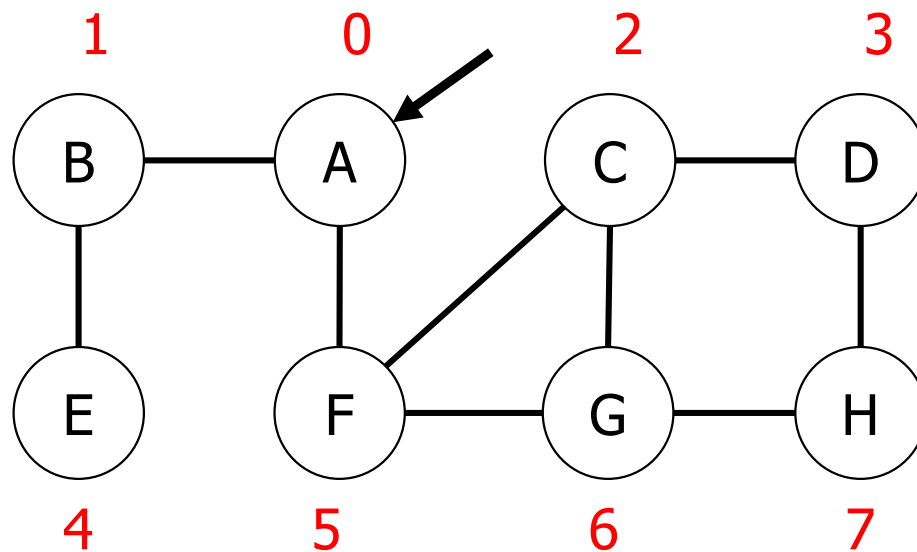
wrapper

Algoritmo

- metti l'arco fittizio di partenza $e = (id, id)$ nella coda
- ripeti fintanto che la coda non si svuota
 - estrai dalla coda un arco $e = (v, w)$
 - se $e.w$ è un vertice non ancora scoperto ($pre[e.w] == -1$)
 - indica che $e.v$ è padre di $e.w$ nella BFS ($st[e.w] = e.v$)
 - marca $e.w$ come scoperto al tempo $time$ ($pre[e.w] = time++$) e incrementa il tempo
 - trova i vertici non ancora scoperti x adiacenti a $e.w$ e metti in coda tutti gli archi che connettono $e.w$ ad essi.

`bfs`: funzione che visita in ampiezza a partire da un vertice di partenza `id`.

Esempio



Lista archi

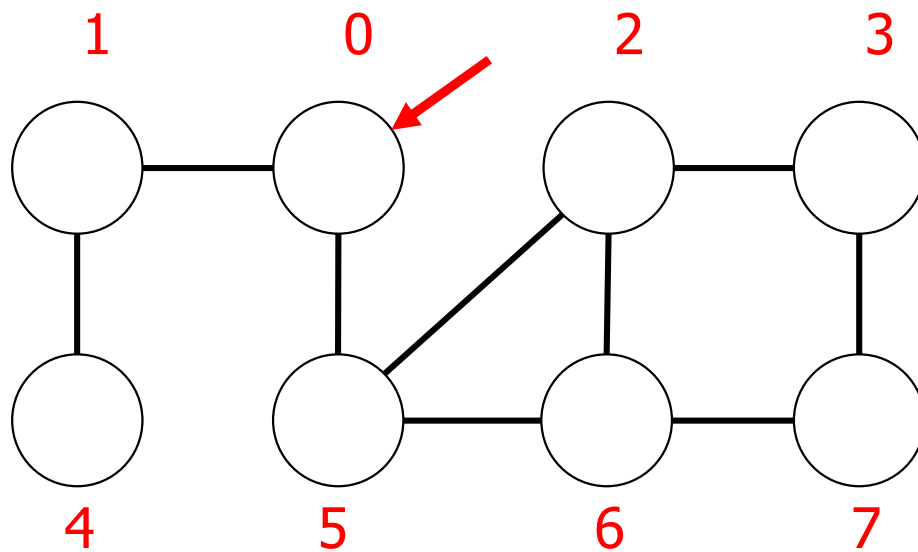
A	B
C	D
B	E
C	F
F	G
D	H
A	F
C	G
G	H

	ST
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H

st							
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (0,0)

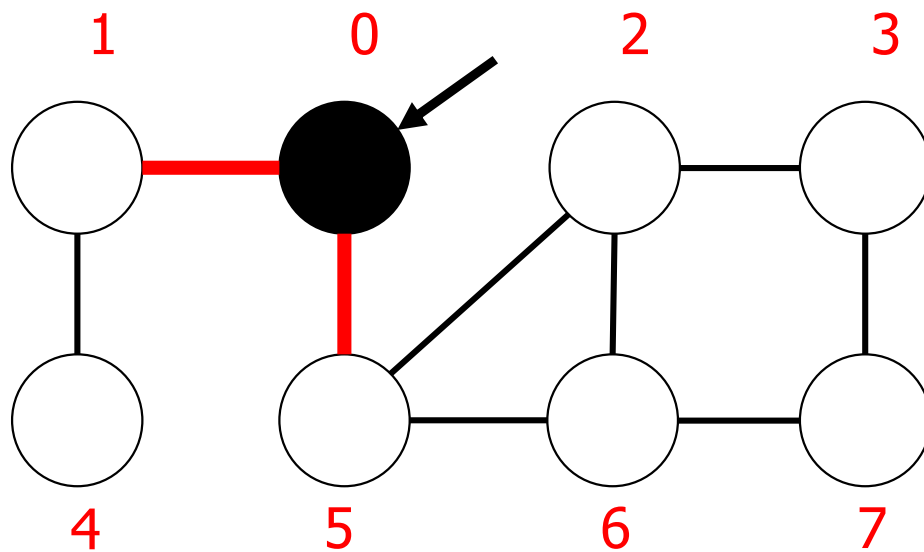
st



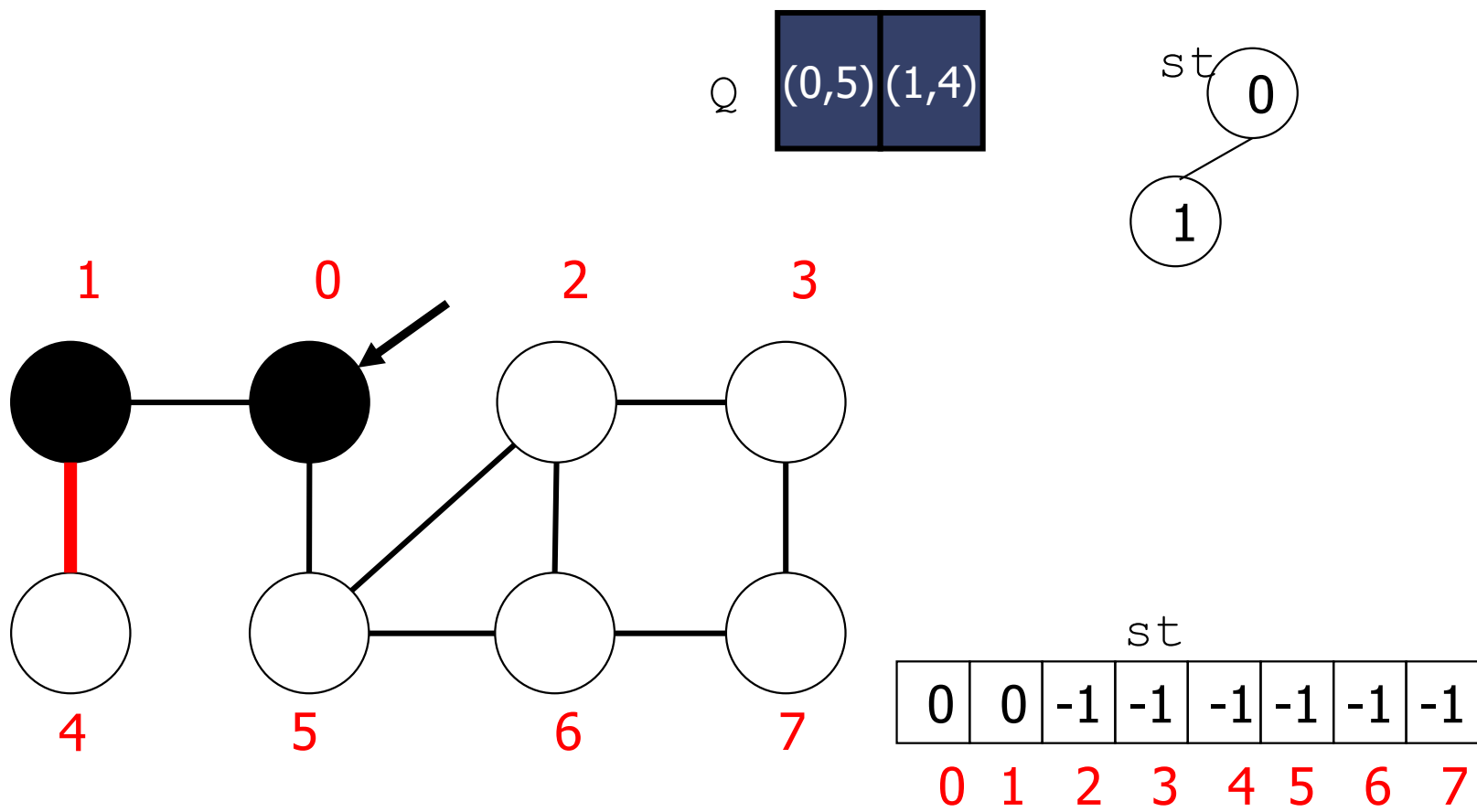
st							
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (0,1) (0,5)

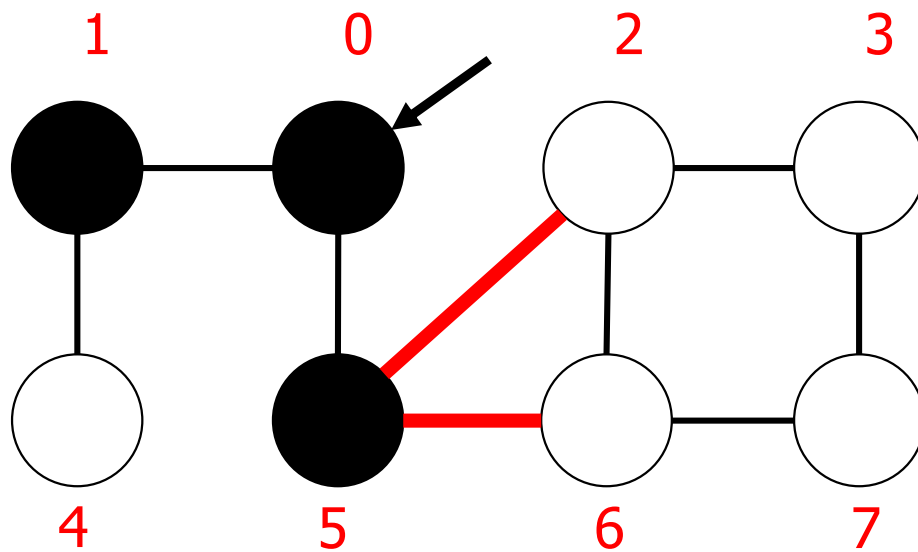
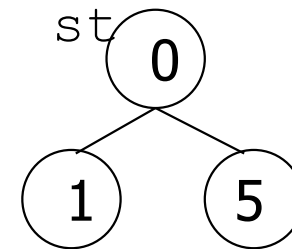
st 0



st							
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

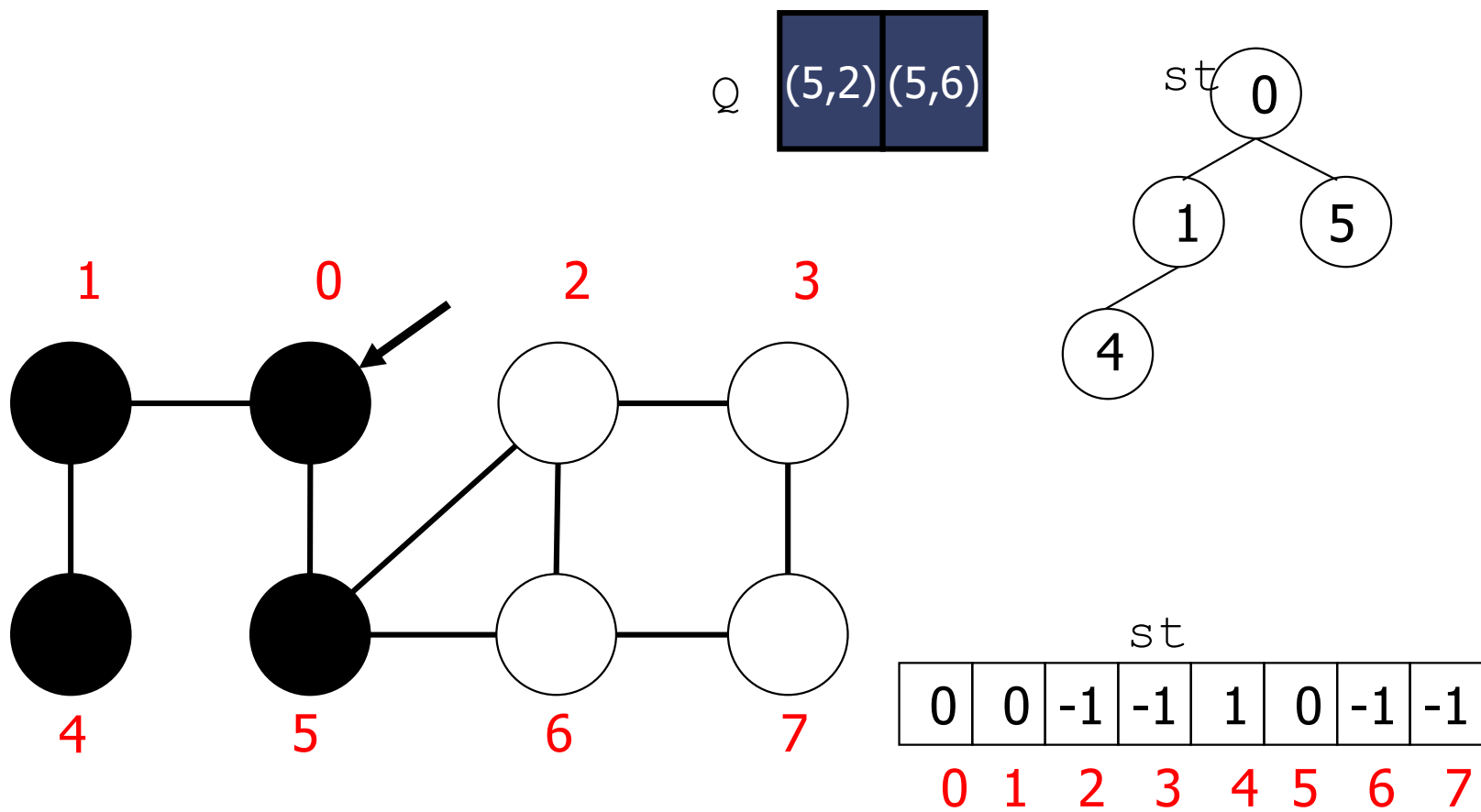


Q (1,4) (5,2) (5,6)

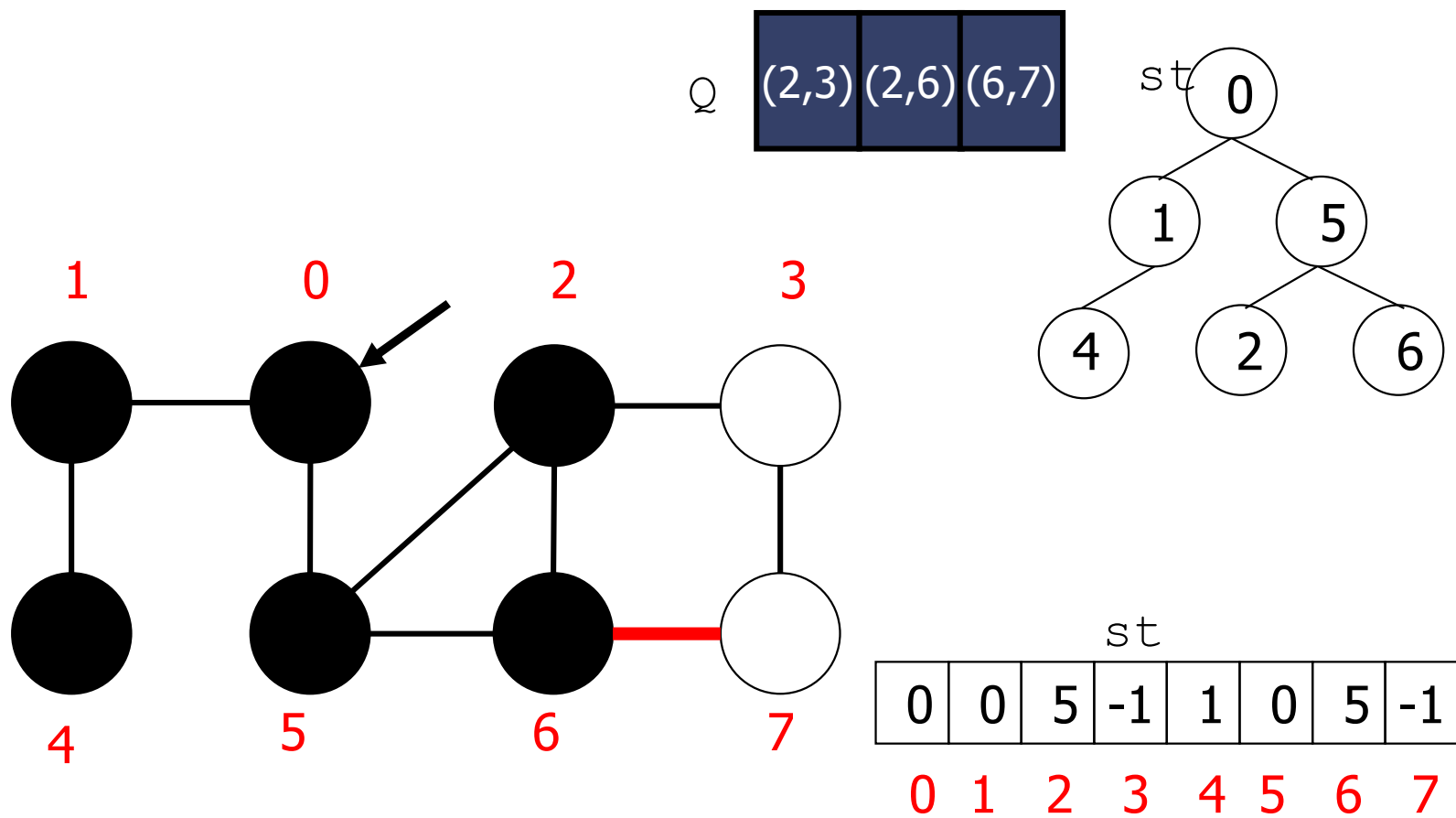


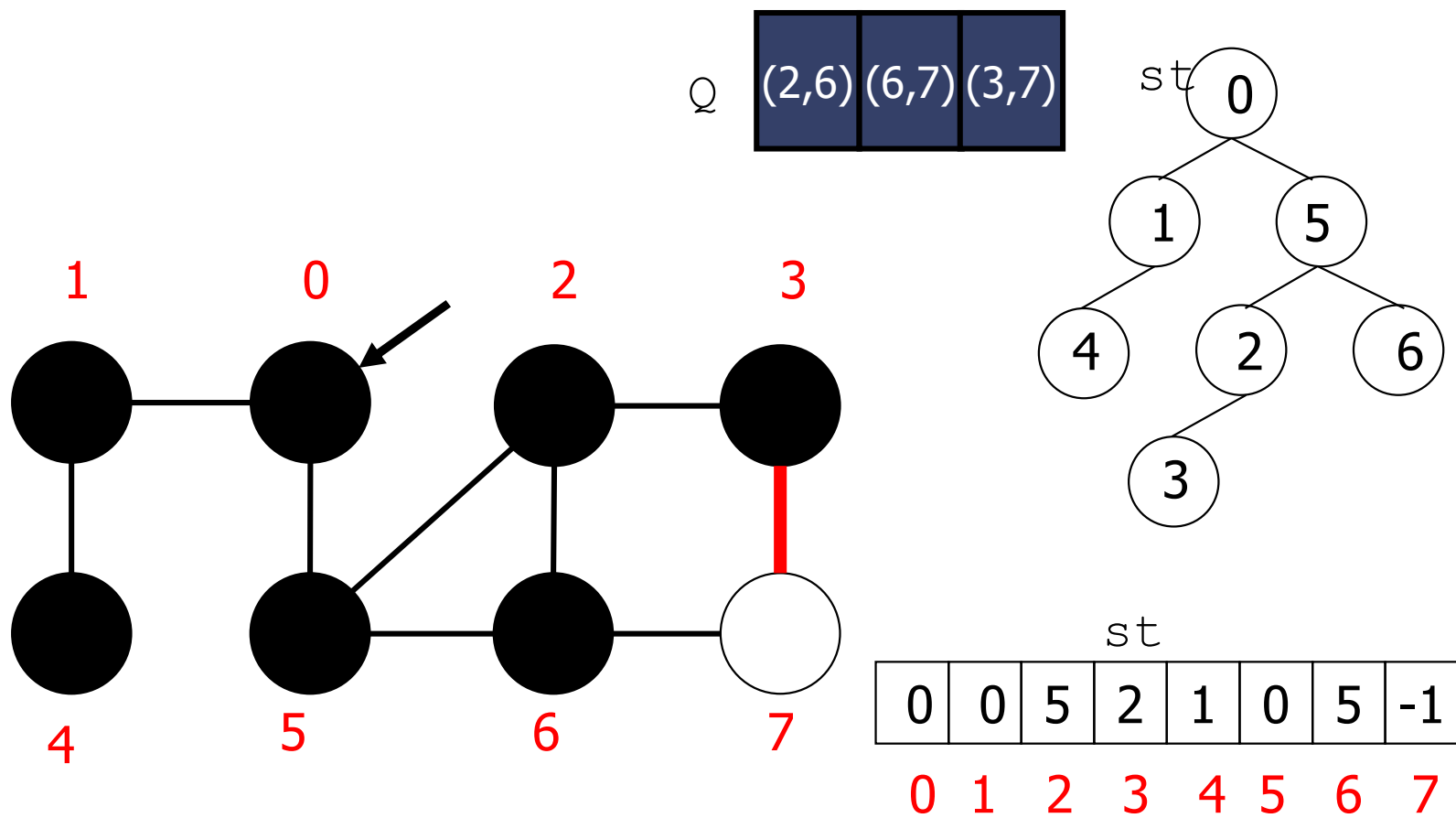
st

0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

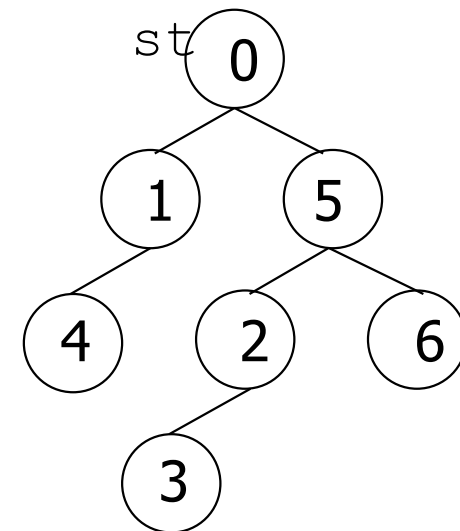
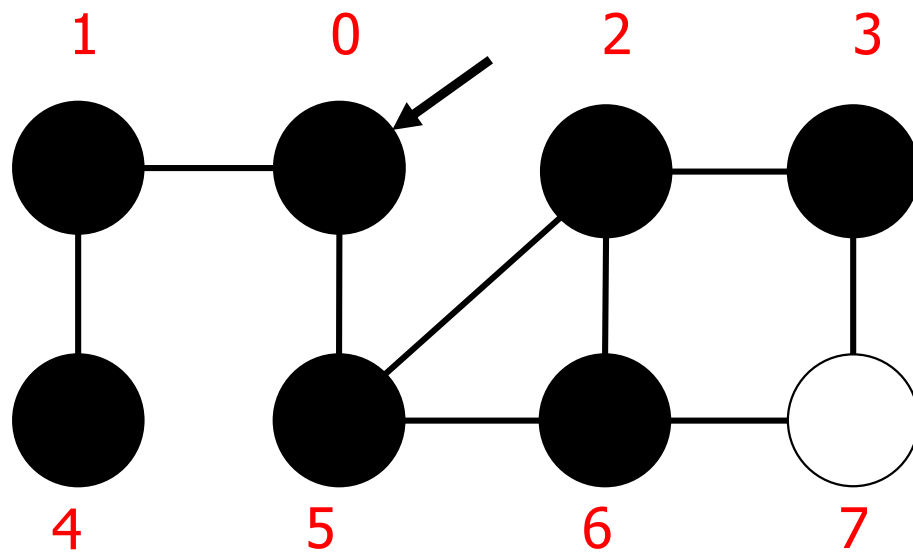






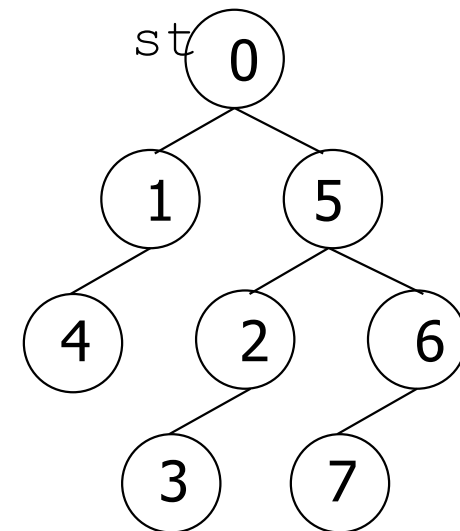
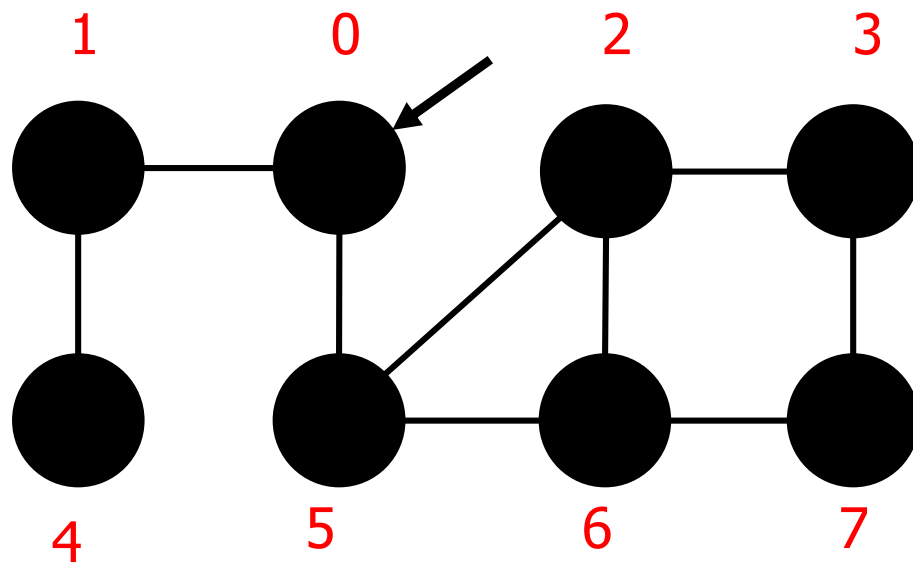


Q (6,7) (3,7)



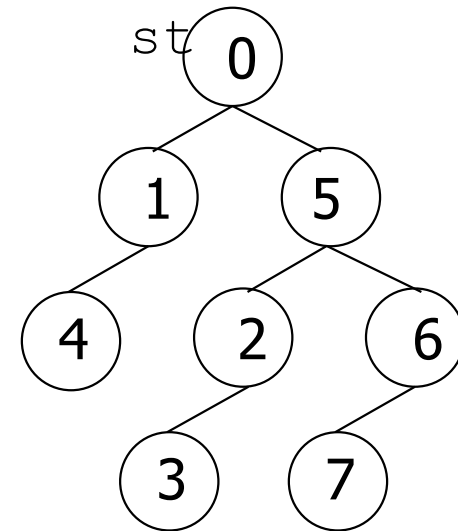
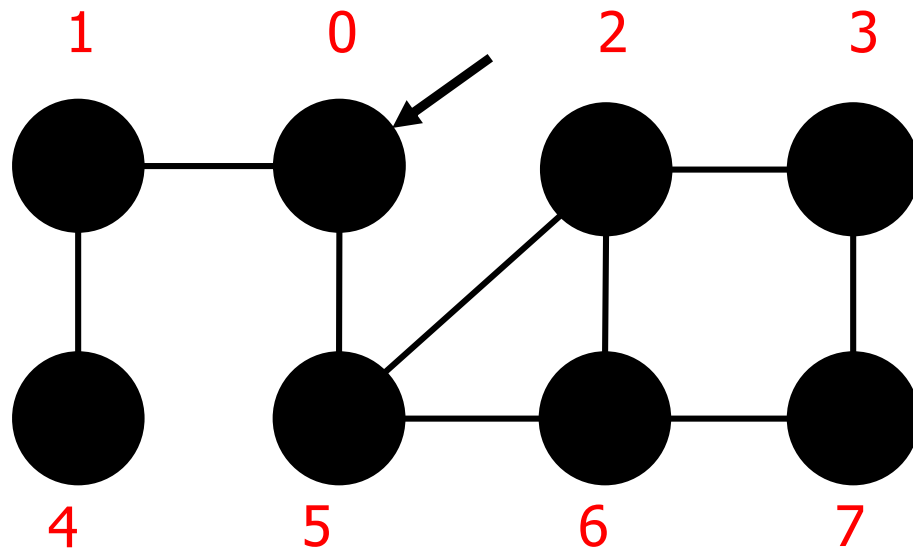
st							
0	0	5	2	1	0	5	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (3,7)



st							
0	0	5	2	1	0	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

Q



st							
0	0	5	2	1	0	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

```

void GRAPHbfs(Graph G, int id) {
    int v, time=0, *pre, *st, *dist;
    /* allocazione di pre, st e dist */
    for (v=0; v < G->V; v++) {
        pre[v] = -1; st[v] = -1; dist[v] = INT_MAX;
    }
    bfs(G, EDGEcreate(id,id), &time, pre, st, dist);
    printf("\n Resulting BFS tree \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (st[v] != -1)
            printf("%s's parent is:%s\n",STsearchByIndex(G->tab, v),
                STsearchByIndex(G->tab, st[v]));
    printf("\n Levelizing \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (st[v] != -1)
            printf("%s: %d \n",STsearchByIndex(G->tab,v),dist[v]);
}

```

```

void bfs(Graph G, Edge e, int *time, int *pre, int *st,
        int *dist) {
    int x;
    Q q = Qinit();
    Qput(q, e);
    dist[e.v]=-1;
    while (!Qempty(q))
        if (pre[(e = Qget(q)).w] == -1) {
            pre[e.w] = (*time)++;
            st[e.w] = e.v;
            dist[e.w] = dist[e.v]+1;
            for (x = 0; x < G->V; x++)
                if (G->madj[e.w][x] == 1)
                    if (pre[x] == -1)
                        Qput(q, EDGEcreate(e.w, x));
        }
}

```

matrice delle
adiacenze

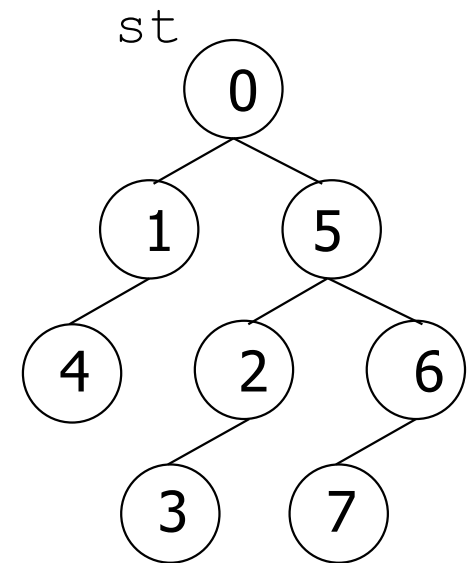
Complessità

- Operazioni sulla coda
- Scansione della matrice delle adiacenze $T(n) = \Theta(|V|^2)$.
- Con la lista delle adiacenze: $T(n) = O(|V| + |E|)$.

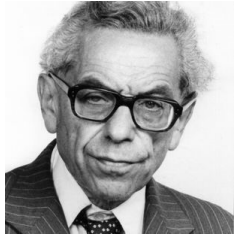
Proprietà

Cammini minimi: la visita in ampiezza determina la minima distanza tra s e ogni vertice raggiungibile da esso.

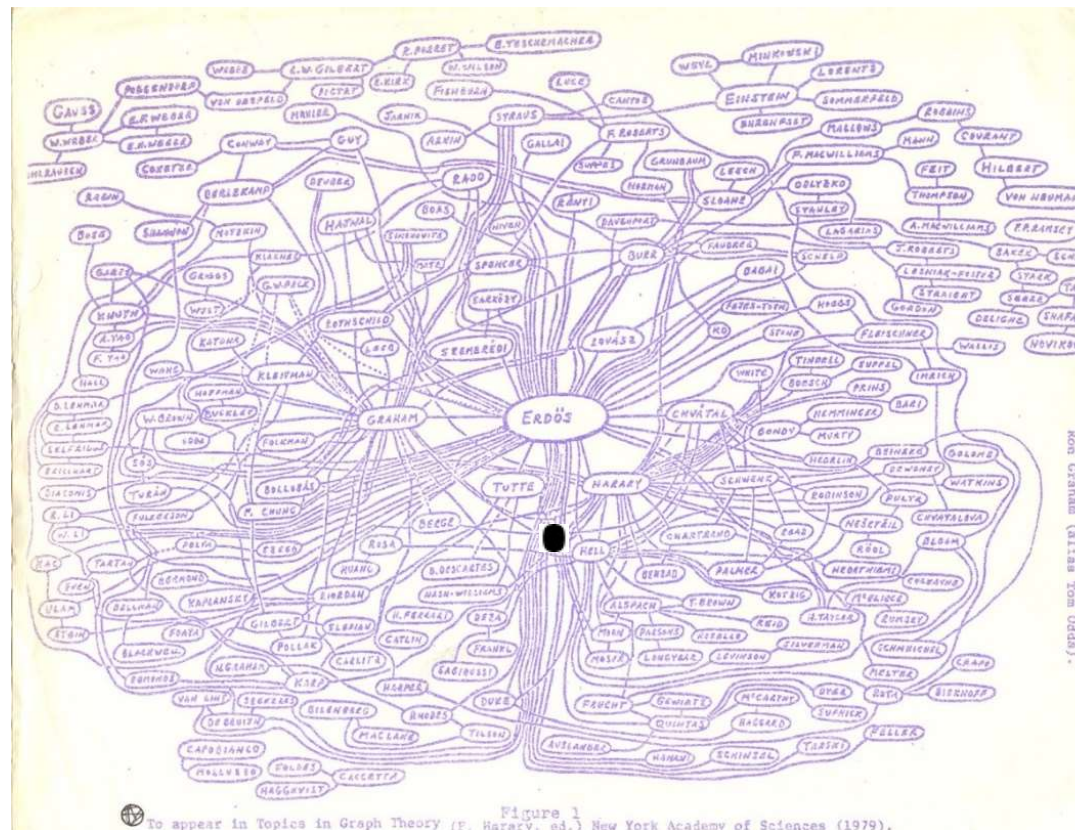
Cammino minimo da 0 a 3:
0, 5, 2, 3
lunghezza = 3



Applicazione: I numeri di Erdős



- Paul Erdős (1913-1996): matematico ungherese «itinerante»: pubblicazioni con moltissimi coautori
- Grafo non orientato:
 - vertici: matematici
 - arco: unisce 2 matematici che hanno una pubblicazione in comune
- numero di Erdős: distanza minima di ogni matematico da Erdős
- BFS



<http://www.oakland.edu/upload/images/Erdos%20Number%20Project/cgraph.jpg>
Sedgewick, Wayne, Algorithms Part I & II, www.coursera.org

Riferimenti

- Visita in profondità:
 - Sedgewick Part 5 18.2, 18.3, 18.4
 - Cormen 23.3
- Visita in ampiezza:
 - Sedgewick Part 5 18.7
 - Cormen 23.2
- Numero di Erdős:
 - Bertossi 9.5.2

Esercizi di teoria

- 10. Visite dei grafi e applicazioni
 - 10.2 Visita in ampiezza
 - 10.3 Visita in profondità

