POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Automatica e Informatica

Problemi di ricerca e ottimizzazione

Paolo Camurati

Tipologie di problemi

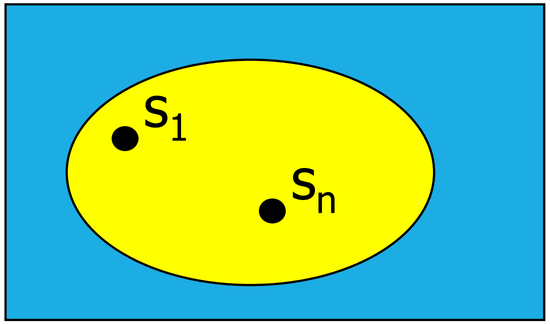
Problemi di calcolo:

- soluzione con procedimento matematico che porta, senza scelte e con un numero finito di passi, alla soluzione

- Esempi:
  - fattoriale
  - determinante
  - numeri di Fibonacci, di Catalan, di Bell etc.

Problemi di ricerca:

- dati:
  - S: spazio (insieme) delle soluzioni possibili
  - V: spazio delle soluzioni valide
  - in generale $V \subset S$
- appurare se $V = \varnothing$
- elencare gli elementi di V
  - almeno 1
  - tutti in caso di enumerazione.



S: spazio delle soluzioni

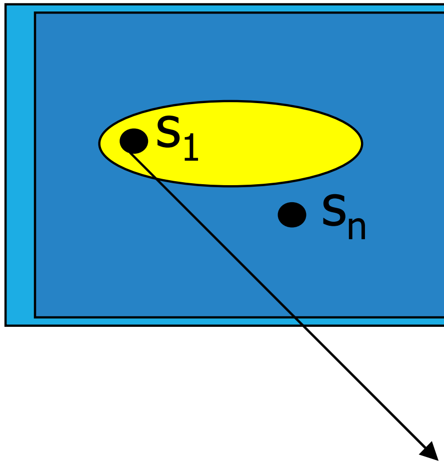
V: soluzioni valide

Esempi:

- insiemi delle parti che soddisfano condizione
- 8 regine
- Sudoku
- in grafo tutti i cammini semplici da un vertice

Problemi di ottimizzazione:

- $S \equiv V$: tutte le soluzioni sono valide
- data una funzione obiettivo f (costo o vantaggio), selezionare una o più soluzioni per cui f è minima o massima
- l'enumerazione è necessaria.



S: spazio delle soluzioni

≡

V: soluzioni valide

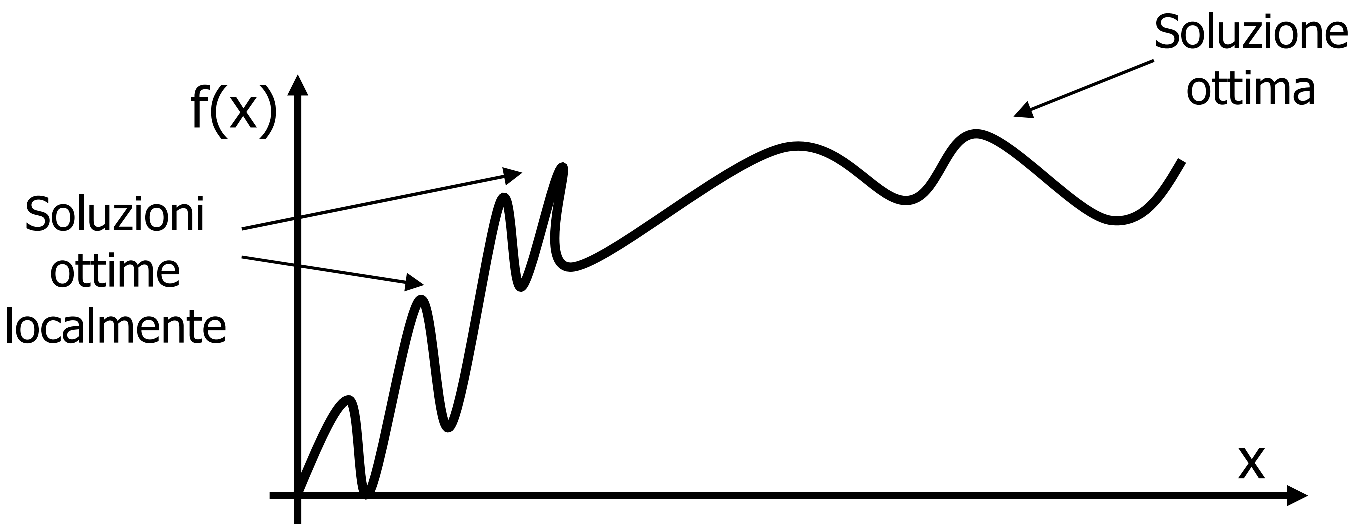
$f(s_1)$ minimo (massimo)

Esempi:

- massimizzare il valore di un insieme di oggetti compatibili con una capacità di un contenitore
- in grafo tutti i cammini semplici da un vertice a lunghezza massima

Minimo (massimo): assoluto o in un dominio contiguo:

- Soluzione *ottima*: min/max assoluto
- Soluzione *ottima localmente*: min/max locale



Risposte possibili:

- contare il numero di soluzioni valide
- trovare almeno una soluzione valida
- trovare tutte le soluzioni valide
- trovare tra le soluzioni valide quella (o quelle) ottima(e) secondo un criterio di ottimalità.

Esplorazione dello spazio delle soluzioni

Approccio incrementale:

- soluzione iniziale vuota
- estensione della soluzione mediante applicazione di scelte
- terminazione al raggiungimento di soluzione

Algoritmo generico che usa una struttura dati SD:

Ricerca():

- metti la soluzione iniziale in SD
- finché SD non diventa vuota:
  - estrai una soluzione parziale da SD;
  - se è una soluzione valida, Return Soluzione
  - applica le scelte lecite e metti le soluzioni parziali risultanti in SD
- Return fallimento.

Quando SD è:

- una coda (FIFO), la ricerca è in ampiezza (breadth-first)
- una pila (LIFO), la ricerca è in profondità (depth-first)
- una coda a priorità, la ricerca è best-first.

Se l'algoritmo:

- non conosce nulla del problema, si dice non informato
- ha conoscenza specifica (euristica), si dice informato

Se l'algoritmo è in grado di esplorare tutto lo spazio si dice completo.

Approccio seguito: algoritmo di ricerca

- in profondità
- non informato
- completo
- ricorsivo.

Rappresentazione

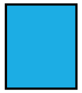
Spazio delle soluzioni rappresentato come albero di ricerca:

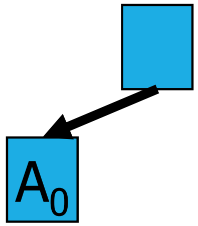
- di altezza n, dove n è la dimensione della soluzione
- di grado k, dove k è il massimo numero di scelte possibili
- la radice è la soluzione iniziale vuota
- i nodi intermedi sono etichettati con le soluzioni parziali
- le foglie sono le soluzioni. Una funzione determina se sono soluzioni valide

Esempio

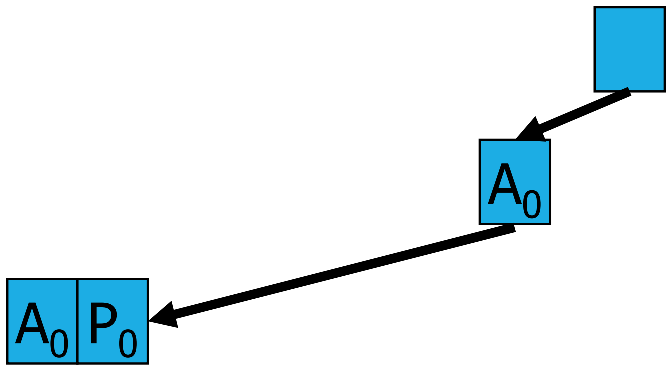
In un ristorante c'è un menu a prezzo fisso composto da antipasto, primo e secondo.
Il cliente può scegliere tra 2 antipasti A_0, A_1, 3 primi P_0, P_1 e P_2 e 2 secondi S_0, S_1.

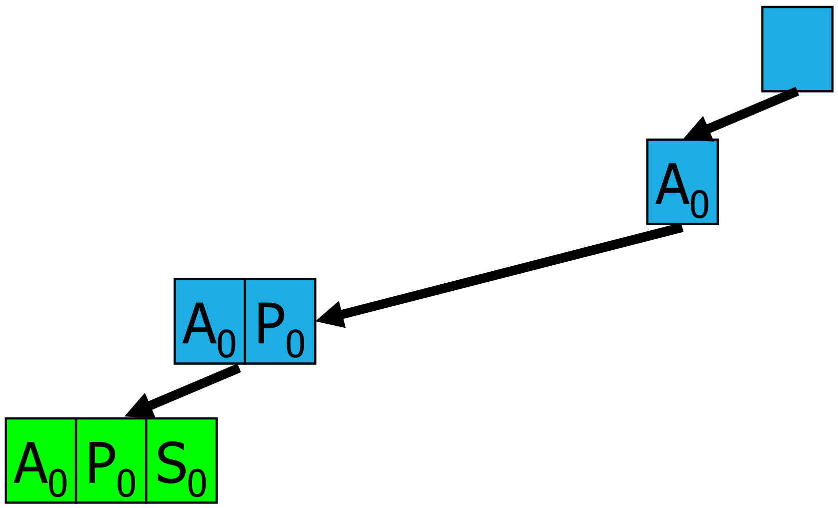
Quanti e quali pranzi diversi si possono scegliere con questo menu?

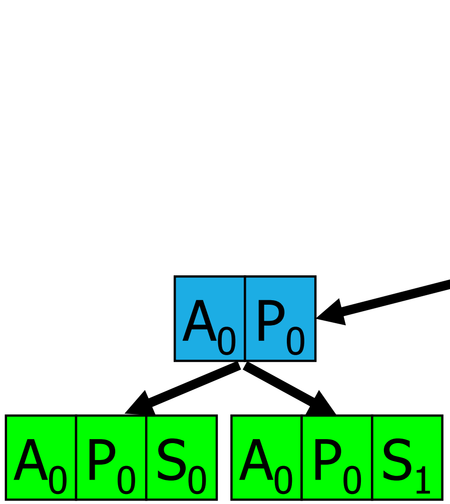


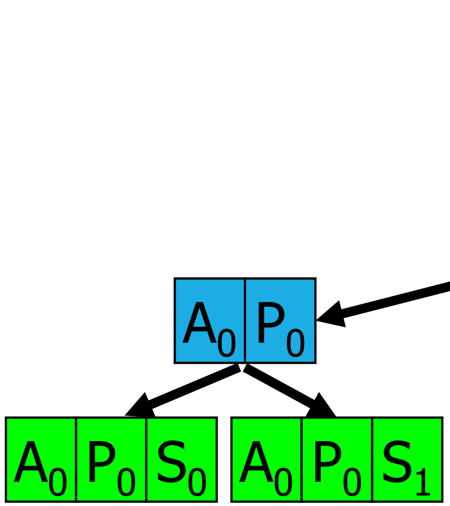


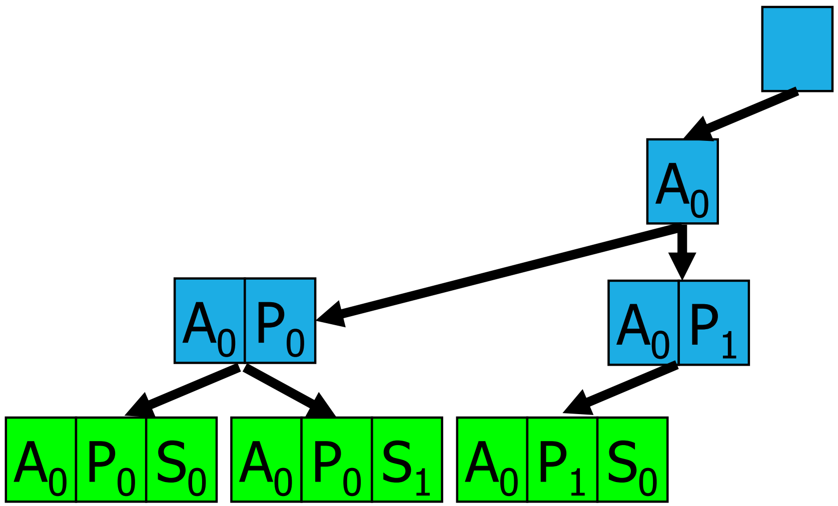
A_0


A_0
A_0 P_0

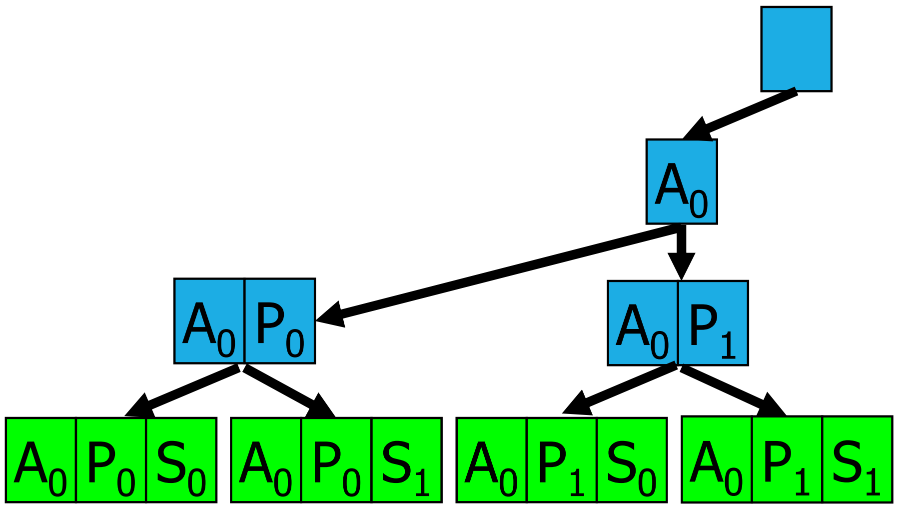

A0
A0 P0
A0 P0 S0

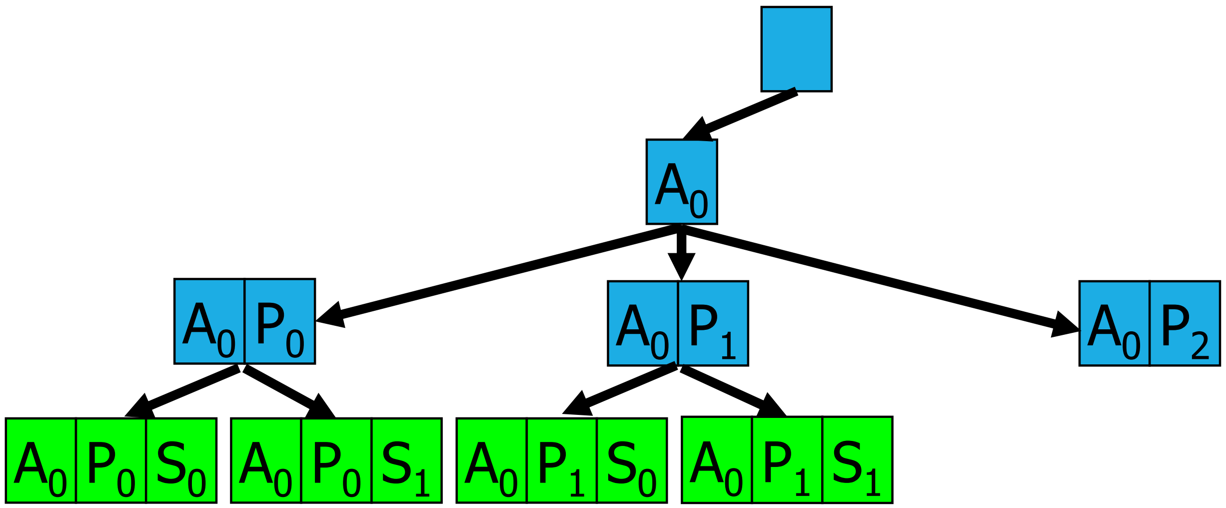

A0
A0 P0
A0 P0 S0
A0 P0 S1


A0
A0 P0
A0 P1
A0 P0 S0
A0 P0 S1

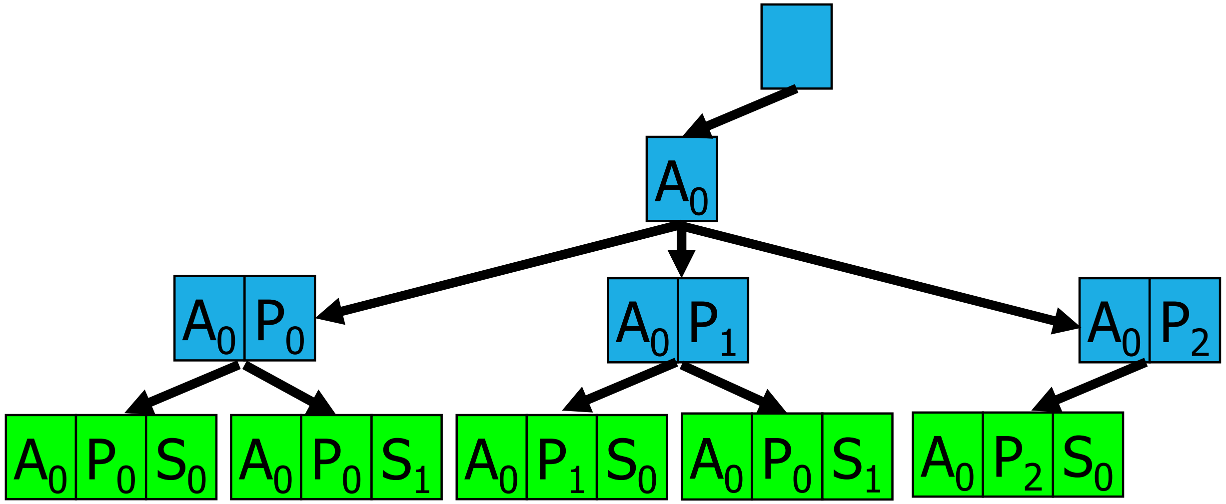


A0
A0 P0
A0 P1
A0 P0 S0
A0 P0 S1
A0 P1 S0

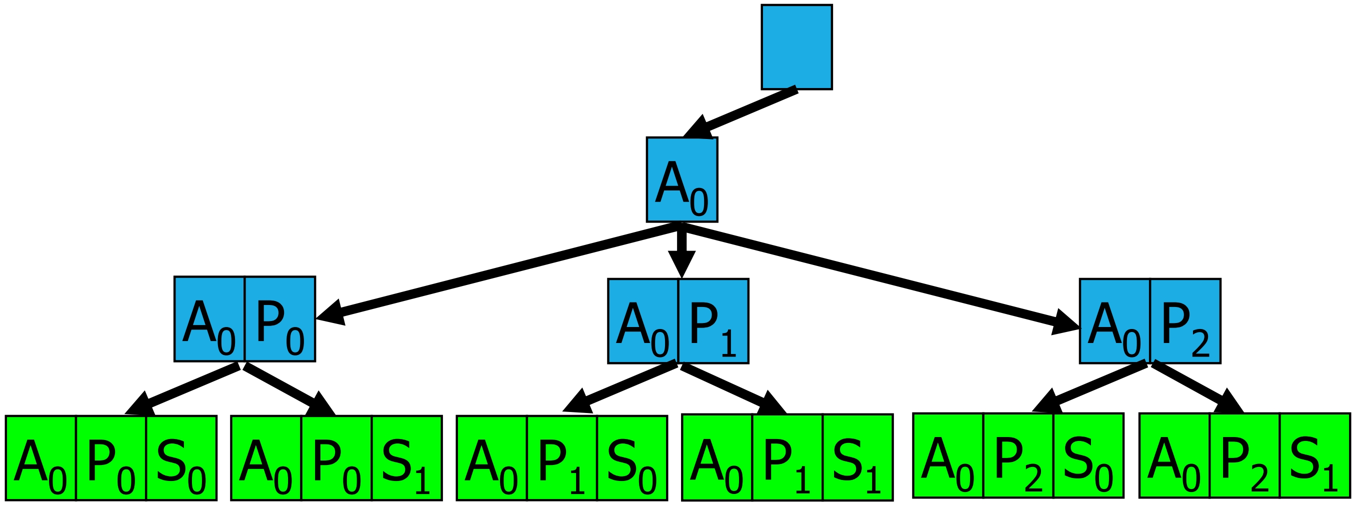

A0
A0 P0
A0 P1
A0 P0 S0
A0 P0 S1
A0 P1 S0
A0 P1 S1

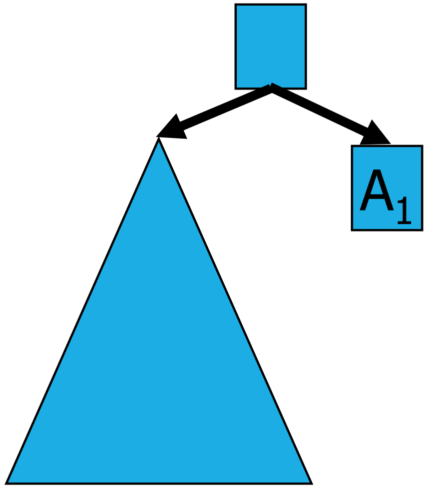


A0
A0 P0
A0 P1
A0 P2
A0 P0 S0
A0 P0 S1
A0 P1 S0
A0 P1 S1



A_0
A_0 P_0
A_0 P_1
A_0 P_2
A_0 P_0 S_0
A_0 P_0 S_1
A_0 P_1 S_0
A_0 P_0 S_1
A_0 P_2 S_0


A_0
$A_0 P_0$
$A_0 P_1$
$A_0 P_2$
$A_0 P_0 S_0$
$A_0 P_0 S_1$
$A_0 P_1 S_0$
$A_0 P_1 S_1$
$A_0 P_2 S_0$
$A_0 P_2 S_1$



e così via

Calcolo Combinatorio e spazio delle soluzioni

- Scelte come elementi di un gruppo
- Spazio delle soluzioni caratterizzato dalle regole di associazione (raggruppamento) degli elementi
- Calcolo Combinatorio: regole di associazione
  - elementi distinti o no
  - elementi ordinati o no
  - elementi ripetuti o no

Il Calcolo Combinatorio: definizione

Il calcolo combinatorio:

- conta quanti sono i sottoinsiemi di un insieme dato che godono di una certa proprietà
- cioè determina il numero dei modi mediante i quali possono essere associati, secondo prefissate regole, gli elementi di uno stesso gruppo.

L’argomento sarà trattato in Metodi Matematici per l’Ingegneria.

Nel problem-solving serve enumerare questi modi, non solo contarli.

Principi-base: addizione

Se un insieme S di oggetti è diviso in sottoinsiemi S_0 .. S_{n-1} a 2 a 2 disgiunti tali che la loro unione sia S (definizione di partizione)

$S = S_0 \cup S_1 \cup .... S_{n-1}$ && $\forall\, i \neq j\ S_i \cap S_j = \emptyset$

il numero degli oggetti in S può essere determinato sommando il numero degli oggetti in ciascuno degli insiemi S_0 .. S_{n-1}

$$|S| = \sum_{i=0}^{n-1} |Si|$$

Formulazione alternativa:
se un oggetto può essere scelto in p_0 modi da un gruppo S_0 , … e in p_{n-1} modi da un gruppo separato S_{n-1}, allora la selezione dell'oggetto da uno qualunque degli n gruppi può essere fatta in $\sum_{i=0}^{n-1} |p_i|$ modi.

Esempio

Ci sono 4 corsi di Informatica e 5 di Matematica. Uno studente ne può seguire 1 solo. In quanti modi può scegliere?

Insiemi disgiunti $\Rightarrow$

Modello: principio di addizione

Numero di scelte = 4 + 5 = 9

Principi-base: moltiplicazione

Dati n insiemi S_i $(0 \leq i < n)$ ciascuno di cardinalità $|S_i|$, il numero di n-uple ordinate $(s_0 \ldots s_{n-1})$ con $s_0 \in S_0 \ldots s_{n-1} \in S_{n-1}$ è:

$$\prod_{i=0}^{n-1} |S_i|$$

Formulazione alternativa:
se un oggetto x_0 può essere scelto in p_0 modi da un gruppo, un oggetto x_1 può essere scelto in p_1 modi, un oggetto x_{n-1} può essere scelto in p_{n-1} modi, la scelta di una n-upla di oggetti $(x_0 \ldots x_{n-1})$ può essere fatta in $p_0 \cdot p_1 \ldots. \cdot p_{n-1}$ modi.

Esempio

In un ristorante c'è un menu a prezzo fisso composto da antipasto, primo, secondo e dolce.
Il cliente può scegliere tra 2 antipasti, 3 primi, 2 secondi e 4 dolci.

Quanti pranzi diversi si possono scegliere con questo menu?

Modello: principio di moltiplicazione

Numero di scelte = 2 x 3 x 2 x 4 = 48

Criteri di raggruppamento

Si possono raggruppare k oggetti presi da un gruppo S di n elementi tenendo presente:

- l'**unicità** degli elementi: gli elementi del gruppo S sono tutti distinti, quindi S è un insieme? O è un multiinsieme (multiset)?
- l'**ordinamento:** 2 configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento?
- le **ripetizioni:** uno stesso oggetto del gruppo può o meno essere riusato più volte all'interno di uno stesso raggruppamento?

Disposizioni semplici

no ripetizioni

insieme

Una disposizione <u>semplice</u> $D_{n,\,k}$ di *n* oggetti <u>distinti</u> di classe *k* (a k a k) è un sottoinsieme <u>ordinato</u> composto da *k* degli *n* oggetti (0 ≤ *k* ≤ *n*).

l'ordinamento conta

Vi sono

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1)$$

disposizioni semplici di n oggetti a k a k.

Si noti che:

- distinti $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un insieme
- ordinato $\Rightarrow$ l’ordinamento conta
- semplice $\Rightarrow$ in ogni raggruppamento ci sono esattamente k oggetti non ripetuti

Due raggruppamenti sono diversi:

- o perché c’è almeno un elemento diverso
- o perché l’ordine è diverso.

Esempio

rappresentazione posizionale: l’ordine conta!

Quanti e quali sono i numeri di 2 cifre distinte che si possono scrivere utilizzando i numeri 4, 9, 1 e 0?

$k = 2$

$n = 4$

no cifre ripetute

Modello: disposizioni semplici

$D_{4,\,2} = 4!/(4-2)! = 4 \cdot 3 = 12$

Soluzione:
{49, 41, 40, 94, 91, 90, 14, 19, 10, 04, 09, 01 }

Disposizioni con ripetizione

ripetizioni

insieme

Una disposizione con ripetizione $D'_{n,\,k}$ di *n* oggetti distinti di classe *k* (a k a k) è un sottoinsieme ordinato composto da *k* degli *n* oggetti ($0 \leq k$) ognuno dei quali può essere preso sino a k volte.

nessun limite superiore!

l'ordinamento conta

Vi sono

$$D'_{n,\,k} = n^k$$

disposizioni con ripetizione di n oggetti a k a k.

Si noti che:

- distinti $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un insieme
- ordinato $\Rightarrow$ l'ordinamento conta
- assenza di «semplice» $\Rightarrow$ in ogni raggruppamento uno stesso oggetto può figurare, ripetuto, fino ad un massimo di *k* volte
- k può essere > n

Due raggruppamenti sono diversi se uno di essi:

- contiene almeno un oggetto che non figura nell’altro oppure
- gli oggetti sono diversamente ordinati oppure
- gli oggetti che figurano in uno figurano anche nell’altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

Esempio

rappresentazione posizionale: l’ordine conta!

Quanti e quali sono i numeri binari puri su 4 bit?

$n = 2$

$k = 4$

Ogni bit può assumere valore 0 o 1.

Modello: disposizioni con ripetizione

$D'_{2,4} = 2^4 = 16$

Soluzione

{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111
1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 }

Permutazioni semplici

no ripetizioni

insieme

Una disposizione semplice $D_{n,\,n}$ di *n* oggetti distinti di classe *n* (a n a n) si dice permutazione semplice P_n. Si tratta di un sottoinsieme ordinato composto dagli *n* oggetti.

l'ordinamento conta

Vi sono

$$P_n = D_{n,\,n} = n!$$

permutazioni semplici di n oggetti.

Si noti che:

- distinti $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un insieme
- ordinato $\Rightarrow$ l'ordinamento conta
- semplice $\Rightarrow$ in ogni raggruppamento si sono esattamente n oggetti non ripetuti.

Due raggruppamenti sono diversi perché gli elementi sono gli stessi, ma l'ordine è diverso.

Esempio

rappresentazione posizionale: l'ordine conta!

Quanti e quali sono gli anagrammi di ORA (parola di 3 lettere distinte)?

n = 3

no ripetizioni

Modello: permutazioni semplici

$P_3 = 3! = 6$

Soluzione
{ ORA, OAR, ROA, RAO, AOR, ARO }

Permutazioni con ripetizione

elementi ripetuti

Dato un multiinsieme di n oggetti di cui a uguali fra loro, b uguali fra loro, etc., il numero di permutazioni distinte con oggetti ripetuti è:

l'ordine conta!

$$P_n^{(a,\, b,\, ..)} = \frac{n!}{(a! \cdot b! \ \dots)}$$

Si noti che:

- assenza di «distinti» $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un multiinsieme
- permutazioni $\Rightarrow$ l'ordinamento conta

Due raggruppamenti sono diversi perché gli elementi sono gli stessi ma l'ordine è diverso.

Esempio

rappresentazione posizionale: l'ordine conta!

Quanti e quali sono gli anagrammi distinti di ORO (parola di 3 lettere di cui 2 identiche)?

$n = 3$

$\alpha = 2$

Modello: permutazioni con ripetizione

$P^{(2)}_3 = 3!/2! = 3$

Soluzione

{ OOR, ORO, ROO }

Combinazioni semplici

no ripetizioni

insieme

Una combinazione <u>semplice</u> $C_{n,\,k}$ di *n* oggetti <u>distinti</u> di classe *k* (a k a k) è un sottoinsieme <u>non ordinato</u> composto da *k* degli *n* oggetti ($0 \leq k \leq n$).

l'ordinamento non conta

Il numero di combinazioni di n elementi a k a k è al numero di disposizioni di n elementi a k a k diviso per il numero di permutazioni di k elementi.

Si noti che:

- distinti $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un insieme
- non ordinato $\Rightarrow$ l'ordinamento non conta
- semplice $\Rightarrow$ in ogni raggruppamento ci sono esattamente k oggetti non ripetuti

Due raggruppamenti sono diversi perché c'è almeno un elemento diverso.

Vi sono:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

coefficiente binomiale

combinazioni semplici di n oggetti a k a k.

Definizione ricorsiva del coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Esempio

l'ordine non conta!

Quante terne si possono fare con i 90 numeri del gioco del Lotto?

k = 3

n = 90

Modello: combinazioni semplici

$$C_{90,3} = \frac{90!}{3!(90-3)!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87!}{3 \cdot 2 \cdot 87!} = 117480$$

In un torneo quadrangolare di calcio tra Juve, Toro, Inter e Milan di sola andata, quante e quali partite si disputano?

$n= 4, k = 2$

$C_{4,2} = 4!/2!(4-2)! = 6$

Soluzione

{ Juve-Milan, Juve-Inter, Juve-Toro, Milan-Inter, Milan-Toro, Inter-Toro }

Combinazioni con ripetizione

ripetizioni

Una combinazione con ripetizione $C'_{n,k}$ di *n* oggetti distinti di classe *k* (a k a k) è un sottoinsieme non ordinato composto da *k* degli *n* oggetti ($0 \leq k$) ognuno dei quali può essere preso sino a k volte.

nessun limite superiore!

insieme

l'ordinamento non conta

Vi sono

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

combinazioni con ripetizione di n oggetti a k a k.

Si noti che:

- distinti $\Rightarrow$ il gruppo su cui si opera è un insieme
- non ordinato $\Rightarrow$ l'ordinamento non conta
- assenza di «semplice» $\Rightarrow$ in ogni raggruppamento uno stesso oggetto può figurare, ripetuto, fino ad un massimo di *k* volte
- k può essere > n.

Due raggruppamenti sono diversi se uno di essi:

- contiene almeno un oggetto che non figura nell'altro oppure
- gli oggetti che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

Esempio

k = 2

Lanciando contemporaneamente 2 dadi, quante sono le composizioni con cui si possono presentare le facce?

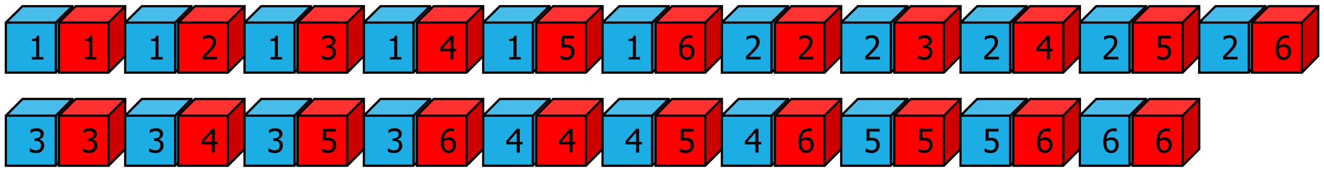
l'ordine non conta!

n = 6

Modello: combinazioni con ripetizione

$C'_{6,\,2} = (6 + 2 - 1)!/2!(6-1)! = 21$

Soluzione



L'Insieme delle Parti

Dato un insieme S di k elementi (k=|S|), l'insieme delle parti (o powerset) $\wp(S)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di S, incluso S stesso e l'insieme vuoto.

Esempio:

S = {1, 2, 3, 4 } e k = 4

$\wp(S)$ = {{}, {4}, {3}, {3,4}, {2}, {2,4}, {2,3}, {2,3,4}, {1}, {1,4}, {1,3}, {1,3,4}, {1,2}, {1,2,4}, {1,2,3}, {1,2,3,4} }

Le Partizioni di un insieme

Dato un insieme I di n elementi, una collezione $S = \{S_i\}$ di blocchi forma una partizione di I se e solo se valgono tutte le seguenti condizioni:

- i blocchi sono non vuoti:

$$\forall\ S_i \in S\ \ S_i \neq \varnothing$$

- i blocchi sono a coppie disgiunti:

$$\forall\ S_i, S_j \in S \text{ con } i \neq j\ \ S_i \cap S_j = \varnothing$$

- la loro unione è I:

$$I = \cup_i S_i$$

Il numero di blocchi k varia da 1 (blocco = insieme I) a n (ogni blocco contiene un solo elemento di I).

Esempio

I = {1, 2, 3, 4 } n = 4

k = 1

1 partizione:

{1, 2, 3, 4}

k = 2

7 partizioni:

{1, 2, 3}, {4}

{1, 2, 4}, {3}

{1, 2}, {3, 4}

{1, 3, 4}, {2}

{1, 3}, {2, 4}

{1, 4}, {2, 3}

{1}, {2, 3, 4}

k = 3

6 partizioni:

{1, 2}, {3}, {4}

{1, 3}, {2}, {4}

{1}, {2 ,3}, {4}

{1, 4}, {2}, {3}

{1}, {2, 4}, {3}

{1}, {2}, {3, 4}

k = 4

1 partizione:

{1}, {2}, {3}, {4}

Numero di partizioni

Il numero complessivo delle partizioni di un insieme I di n oggetti in k blocchi con $1 \leq k \leq n$ è dato dai numeri di Bell definiti dalla seguente ricorrenza:

$B_0 = 1$

$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k$

I primi numeri di Bell sono: $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, ……..

Lo spazio di ricerca non è modellato tramite calcolo combinatorio.

Nota: l’ordine dei blocchi e degli elementi in ogni blocco non conta.
Di conseguenza le 2 partizioni:

$$\{1, 3\}, \{2\}, \{4\} \text{ e } \{2\}, \{3, 1\}, \{4\}$$

sono identiche.

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Automatica e Informatica

Esplorazione esaustiva dello spazio delle soluzioni

Paolo Camurati

Scomposizione in sottoproblemi

È il passo più importante del progetto di una soluzione ricorsiva:

- bisogna identificare il problema risolto dalla singola ricorsione
- cioè suddividere il lavoro tra varie chiamate ricorsive.

Si opera in maniera distribuita, senza visione unitaria della soluzione.

Approcci:

- ogni ricorsione sceglie un elemento della soluzione. Terminazione: la soluzione ha raggiunto la dimensione richiesta oppure non ci sono più scelte
- la ricorsione esamina uno degli elementi dell'insieme di partenza per decidere se e dove andrà aggiunto alla soluzione.

Si segue il primo approccio perché più intuitivo.

Strutture dati

- Strutture dati
  - globali, cioè comuni a tutte le istanze della funzione ricorsiva
  - locali, cioè locali a ciascuna delle istanze
- Strutture dati globali:
  - dati del problema (matrice, mappa, grafo), vincoli, scelte disponibili, soluzione
- Strutture dati locali:
  - indici di livello di chiamata ricorsiva, copie locali di strutture dati, indici o puntatori a parti di strutture dati globali

- Globale nell’accezione precedente non implica uso di variabili globali C
- Uso di variabili globali C per strutture dati globali:
  - sconsigliato ma non vietato quando le funzioni ricorsive operano su pochi e ben noti dati
  - vantaggio: pochi parametri passati alle funzioni ricorsive
- Soluzione adottata: tutti i dati (globali e locali) passati come parametri. Possibilità di racchiuderli in una `struct` per leggibilità.

Tipologie di strutture dati per oggetti interi

- Oggetti non interi: tabelle di simboli per ricondursi ad interi
- insieme o insiemi di oggetti di partenza:
  - unico: vettore `val`
  - molteplici: sottovettori di tipo Livello
  - alternativa: liste
- soluzione: non si chiede di memorizzarle tutte, ma solo di elencarle:
  - vettore `sol`
  - variabile scalare (ad esempio `cnt`) passata come parametro by value e ritornata

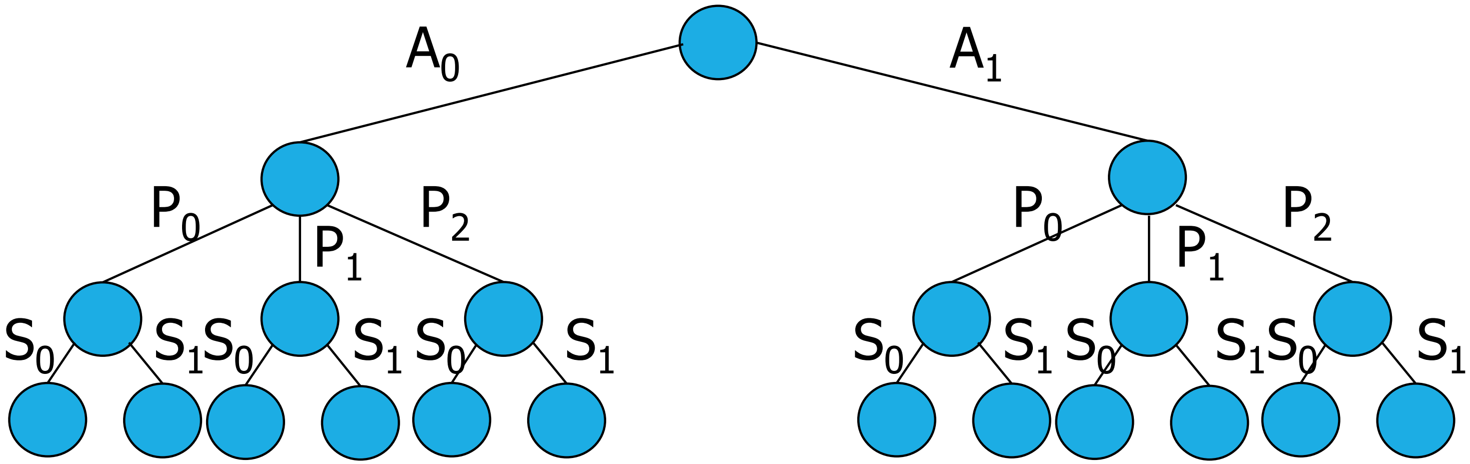
- indici:
  - `pos` identifica il livello della ricorsione e serve per decidere quali caselle di scelta usare o soluzione riempire
  - `n` e `k`: indicano la dimensione del problema e della soluzione cercata
- vincoli: non tutte le scelte sono lecite. Quelle lecite soddisfano vincoli:
  - statici
  - dinamici, (ad esempio il vettore `mark`).

Principio di moltiplicazione

- Si effettuano n scelte in successione, rappresentate mediante un albero
- I nodi hanno un numero di figli variabile livello per livello. Ognuno dei figli può essere visto come una delle scelte possibili a quel livello
- Il massimo numero di figli determina il grado dell’albero
- L’altezza dell’albero è n. Le soluzioni sono le etichette degli archi che si incontrano in ogni cammino radice-foglia.

Esempio

Menu con scelta tra 2 antipasti (A_0, A_1), 3 primi (P_0, P_1, P_2) e 2 secondi (S_0,S_1) (n=k=3).
Albero di grado 3 e altezza 3, 12 percorsi radice-foglie.



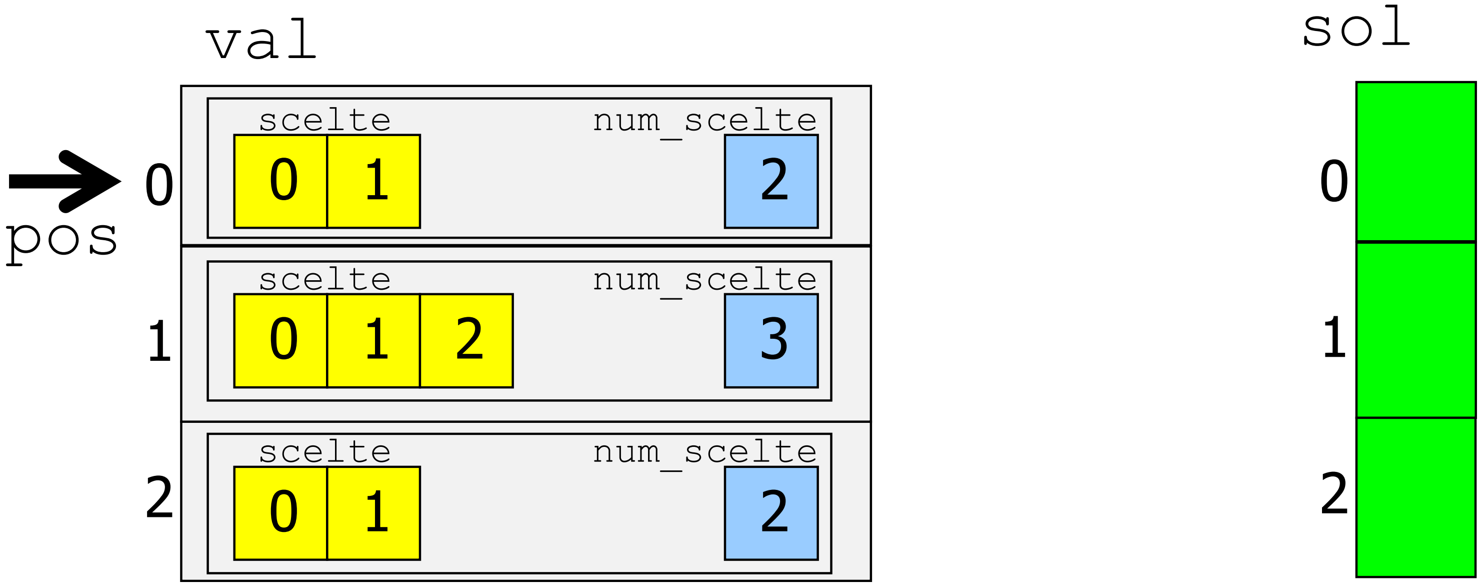
Soluzione:

(A_0,P_0,S_0), (A_0,P_0,S_1), (A_0,P_1,S_0), (A_0,P_1,S_1), (A_0,P_2,S_0), (A_0,P_2,S_1), (A_1,P_0,S_0), (A_1,P_0,S_1), (A_1,P_1,S_0), (A_1,P_1,S_1), (A_1,P_2,S_0), (A_1,P_2,S_1)

I principi-base dell'esplorazione

- Si prendono n *decisioni in sequenza,* ciascuna tra diverse *scelte* , il cui numero è fisso dato il livello di decisione, ma variabile di livello in livello
- le scelte sono in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme degli interi (non necessariamente contigui)
- le scelte possibili sono memorizzate in un vettore `val` di dimensione `n` di strutture `Livello`. Ogni struttura è un intero per il numero di scelte per quel livello `num_scelte` e un vettore `*scelte` di interi di quella dimensione per le scelte
- la soluzione è memorizzata in un vettore di interi `sol` di dimensione `n`.

In riferimento all'esempio



- si vogliono enumerare tutte le soluzioni, esplorandone l’intero spazio
- tutte le soluzioni sono valide
- le chiamate ricorsive sono associate alla soluzione, la cui dimensione ad ognuna di esse cresce di 1
- una soluzione viene rappresentata come un vettore `sol` di `n` elementi che registra le scelte fatte ad ogni passo
- ad ogni passo `pos` indica la dimensione della soluzione parziale
- se `pos>=n` si è trovata una soluzione

- il passo ricorsivo itera sulle scelte possibili per il valore corrente di `pos`, cioè il contenuto di `sol[pos]` è preso da `val[pos].scelte[i]` estendendo ogni volta la soluzione
- e ricorre sulla scelta `pos+1`-esima
- `cnt` è il valore di ritorno della ricorsione e conteggia il numero di soluzioni.

```c
typedef struct {int *scelte; int num_scelte; } Livello;

val = malloc(n*sizeof(Livello));

for (i=0; i<n; i++)
  val[i].scelte = malloc(val[i].n_scelte*sizeof(int));

sol = malloc(n*sizeof(int));
```

01calcolocombinatorio

```
int princ_molt(int pos, Livello *val, int *sol,int n, int cnt) {
  int i;
  if (pos >= n) {
    for (i = 0; i < n; i++)
      printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i = 0; i < val[pos].num_scelte; i++) {
    sol[pos] = val[pos].scelte[i];
    cnt = princ_molt(pos+1, val, sol, n, cnt);
  }
  return cnt;
}
```

Modelli

Lo spazio delle possibilità può essere modellato come quello delle:

- disposizioni semplici
- disposizioni con ripetizione
- permutazioni semplici
- permutazioni con ripetizione
- combinazioni semplici
- combinazioni con ripetizione
- insieme delle parti
- (partizioni).

I principi-base dell'esplorazione

- Si immagini di dovere prendere delle *decisioni in sequenza,* ciascuna tra diverse *scelte* senza avere informazioni che guidano la decisione
- le scelte possibili sono memorizzate in un vettore `val` di interi di dimensione n
- si vogliono enumerare tutte le soluzioni, esplorandone l'intero spazio, decidendo, una volta raggiunta una soluzione, se è valida/ottima

Alternative:

- le chiamate ricorsive sono associate alla soluzione, la cui dimensione ad ognuna di esse cresce di 1. Terminazione quando la dimensione della soluzione corrente è quella finale
- le chiamate ricorsive sono associate alle scelte. Ad ogni chiamata si effettua una scelta. Terminazione quando tutte le scelte sono state esaurite.

Nel seguito si adotta la prima alternativa.

- una soluzione viene rappresentata come un vettore `sol` di interi di `k` elementi che registra le scelte fatte ad ogni passo
- ad ogni passo `pos` indica la dimensione della soluzione parziale
  - se `pos>=k`, si è trovata una soluzione, di cui si appura la validità/ottimalità
  - altrimenti, se è possibile una scelta `pos+1`-esima, con essa si estende sol e si procede da questa ricorsivamente
    - altrimenti, si "annulla" l'ultima scelta pos (backtrack) e si ricomincia dalla `pos-1`-esima scelta
- iterazione: il contenuto di `sol[pos]` è preso da `val`.

Il Backtracking

Il backtracking non è un paradigma vero e proprio, come il divide et impera, il greedy o la programmazione dinamica in quanto non vi è uno schema generale.

È piuttosto una tecnica algoritmica per esaminare ordinatamente le possibili istanze (soluzioni ammissibili o valide) di uno spazio di ricerca.

Un'applicazione che dimostra l'importanza del backtracking è il Puzzle di Einstein.

Il Puzzle di Einstein

In una strada sono allineate 5 case:

- di 5 colori diversi (blu, verde, rosso, avorio, giallo)
- abitate 5 persone di diversa nazionalità, che:
- bevono 5 bevande diverse
- hanno 5 animali diversi
- fumano sigarette di 5 marche diverse.

Dato un insieme di fatti, determinare:

- chi beve acqua
- chi ha la zebra.

Secondo Einstein solo il 2% delle persone saprebbe rispondere.


Politecnico di Torino
Corriere della Sera - Ultime No
Nuova scheda
https://www.corriere.it
Cerca
Più visitati
Come iniziare
All possible binary nu...
recursion | Practice | G...
SEZIONI
EDIZIONI LOCALI
CORRIERE TV
ARCHIVIO
TROVOCASA
TROVOLAVORO
SERVIZI
CERCA
LOGIN
SCOPRI
SOTTOSCRIVI
-60%
CORRIERE DELLA SERA
Speciale Black Friday
Fino a lunedì 26.11.2018
ABBONATI ORA >
di Dario Di Vico
Il partito del Pil fa il terzo incomodo tra Lega e 5 Stelle
di Mario Sconcerti
Campionato tradito se conta soltanto un posto
LA TRATTATIVA
Manovra, Salvini e Di Maio aprono all'Ue
Il piano: meno deficit. È derby sul reddito
"Blockchain" e appalti: il dossier di Conte
di Emanuele Buzzi, Ivo Caizzi, Marco Cremonesi, Lorenzo Salvia
Lega e M5S: «Non difendiamo i numerini». Merkel: bene il dialogo con Conte
Il consiglio del greco Tsipras all'Italia: «Cedete subito alla Ue, poi sarà peggio» di Federico Fubini
Manovra, prove di compromesso con la Ue: «Avanti per cercare una soluzione» di Ivo Caizzi
DIETRO LE QUINTE I timori di Tria sullo spread e la cautela di Conte: «La guerra non conviene a nessuno» di Salvia
LOGICA
Il test di Einstein, la prova regina per essere assunti: prova il quesito logico
un tedesco...». Comincia così uno dei test più raffinati e usati anche nei colloqui di lavoro
DATAROOM
PostePay
Il 21 novembre, iscriviti al concorso e acquista con Postepay Evolution e Postepay Evolution Business di Mastercard®
ISCRIVITI
Potrai vincere i biglietti delle partite del 26 e 27 novembre e proverai le emozioni della UEFA Champions League insieme alla tua squadra del cuore.
https://www.corriere.it/politica/18_novembre_25/salvini-nessuno-si-attacca-24percento-406d0cf6-f0fb-11e8-93f5-f4e69b527157.shtml
Scrivi qui per eseguire la ricerca
10:37
26/11/2018

Fatti

1. La casa verde è immediatamente a destra della casa avorio
2. Le Kool sono fumate nella casa gialla
3. Le Kool sono fumate nella casa vicino a quella dove si tiene il cavallo
4. Il fumatore di Old Gold possiede lumache
5. Lo spagnolo è proprietario del cane
6. Il giapponese fuma Parliament
7. L'uomo che fuma Chesterfield vive nella casa accanto all'uomo con la volpe

Fatti

8. Il norvegese vive nella prima casa
9. Il norvegese vive vicino alla casa blu
10. L'inglese vive nella casa rossa
11. Il latte si beve nella casa in mezzo
12. Il caffè è bevuto nella casa verde
13. Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia
14. Il the è bevuto dall'ucraino

Quesiti

- Chi beve acqua?
- Chi ha la zebra?

Secondo Einstein solo il 2% delle persone saprebbe rispondere.

Fatto #1

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore					
Animale					
Bevanda					
Sigarette					

Il norvegese vive nella prima casa

Nelle altre case non vive il norvegese

Fatto #2

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	R V A G	B	R V A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda					
Sigarette					

Il norvegese vive vicino alla casa blu

↓

Le altre case non sono blu

Fatto #3

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	V A G	B	R V A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda					
Sigarette					

L'inglese vive nella casa rossa

La casa del norvegese non è rossa

L'inglese non vive nella casa blu

Fatto #4

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	V A G	B	R V A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda	TCSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette					

Il latte si beve nella casa in mezzo

⇩

Nelle altre case non si beve latte

Fatto #5

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	V A G	B	R A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda	TCSA	TSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette					

Il caffè è bevuto nella casa verde

La casa di mezzo non è verde

Il latte non si beve nella casa blu

Fatto #6

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	V A G	B	R A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda	TCSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	OKCLP	OKCLP	OKCP	OKCLP	OKCLP

Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

Chi beve latte non fuma Lucky Strike

Fatto #7

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	V A G	B	R A G	R V A G	R V A G
Animale					
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	OKCLP	OKCLP	OKCP	OKCLP	OKCLP

Il the è bevuto dall'ucraino

Il norvegese non beve the

L'ucraino non vive nella casa di mezzo

Fatti #8 e #9

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V A
Animale					
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	Kool	OCLP	OCP	OCLP	OCLP

La casa verde è immediatamente a destra della casa avorio
Le Kool sono fumate nella casa gialla

La prima casa non è né verde né avorio, è gialla

Solo il norvegese fuma Kool

Fatti #8 e #9

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V
Animale					
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	Kool	OCLP	OCP	OCLP	OCLP

La casa verde è immediatamente a destra della casa avorio
Le Kool sono fumate nella casa gialla

→ L'ultima casa non è avorio, in quanto non ce n'è una verde a destra

Fatto #10

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V
Animale	CLVZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	Kool	OCLP	OCP	OCLP	OCLP

Le Kool sono fumate nella casa vicino a quella dove si tiene il cavallo

Il cavallo è nella casa blu

Nelle altre case non c'è il cavallo

Fatto #11

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP ES	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V
Animale	CVZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	Kool	CLP	OCP	OCLP	OCLP

Il fumatore di Old Gold possiede lumache

Il norvegese non possiede lumache Chi possiede il cavallo non fuma Old Gold

Fatto #12

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	CSA	TCSA	Latte	TCSA	TCSA
Sigarette	Kool	CLP	OCP	OCLP	OCLP

Lo spagnolo è proprietario del cane

Il norvegese non possiede il cane

Chi possiede il cavallo non è spagnolo

Fatto #5, fatto #6, fatto #7

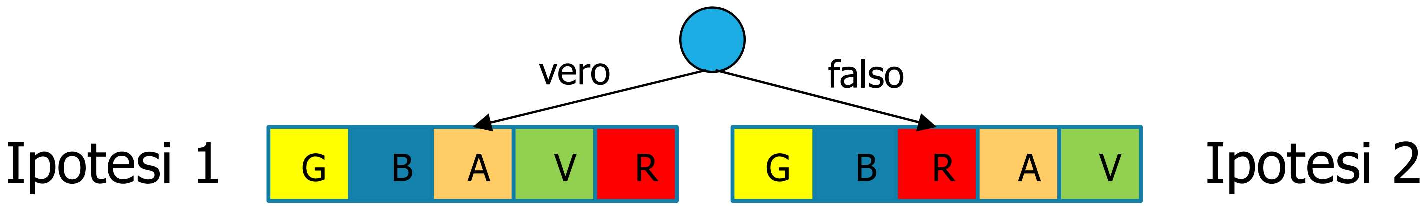
	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	UK JP ES	UK UA JP ES	UK UA JP ES
Colore	G	B	R A	R V A	R V
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	TCS	Latte	TCS	TCS
Sigarette	Kool	CLP	OCP	OCLP	OCLP

- Il caffè è bevuto nella casa verde
- Il the è bevuto dall'ucraino
- Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

➡ Il Norvegese non beve né the, né caffè, né succo, beve acqua

Ipotesi

La casa verde è immediatamente a destra della casa avorio



Ip. #1: fatto #3, fatto #5

G	B	A	V	R

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	JP ES	UA JP ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	TS	Latte	Caffè	TS
Sigarette	Kool	CLP	OCLP	OCLP	OCLP

- L'inglese vive nella casa rossa
- Il caffè è bevuto nella casa verde

Ip. #1: fatto #7

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	JP ES	JP ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	CL	OCLP	OCLP	OCL

Il the è bevuto dall'ucraino ⇒ L'inglese beve succo e non fuma Parliament

⇓

L'ucraino abita nella casa blu

⇓

L'ucraino non fuma Parliament

Ip. #1: fatto #6

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	JP ES	JP ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	OP	OP	Lucky

Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

↓

L'inglese fuma Lucky Strike → L'ucraino fuma Chesterfield

Ip. #1: fatto #12

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	JP ES	JP ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	OP	OP	Lucky

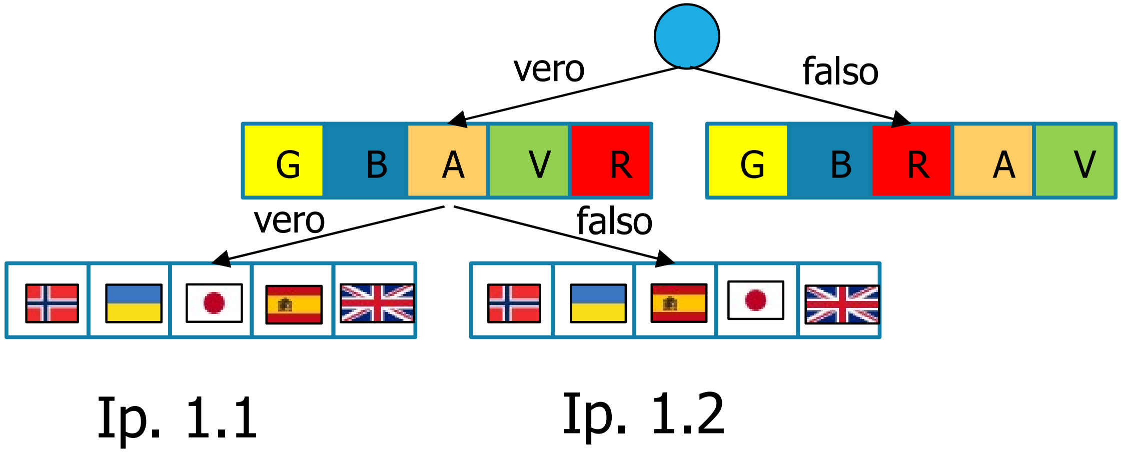
Lo spagnolo è proprietario del cane

⇩

L'inglese non possiede il cane

Ipotesi

Giapponese in casa 3, spagnolo in casa 4



Ip. #1.1: fatto #12, fatto #13

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	JP	ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		LVZ		LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	Parl.	Old	Lucky

- Lo spagnolo possiede il cane
- Il giapponese fuma Parliament

⇨ Lo spagnolo fuma Old Gold

Ip. #1.1: fatto #11

fallimento!

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	JP	ES	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ		LVZ		LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	Parl.	Old	Lucky

Il fumatore di Old Gold possiede lumache ⇒ **impossibile!** ⇒ **backtrack**

Ip. #1.2: fatto #12, fatto #13, deduzione

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	ES	JP	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ			LVZ	LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	Old	Parl.	Lucky

- Il giapponese fuma Parliament
- Lo spagnolo possiede il cane

⇒ Lo spagnolo fuma Old Gold

Ip. #1.2: fatto #11

fallimento!

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	ES	JP	UK
Colore	G	B	A	V	R
Animale	VZ			LVZ	LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Caffè	Succo
Sigarette	Kool	Chest.	Old	Parl.	Lucky

Il fumatore di Old Gold possiede lumache ⇨ **impossibile!** ⇨ **backtrack**

Ip. #2: fatto #3, fatto #5

G	B	R	A	V

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	UK	UA JP ES	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		CLVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	TS	Latte	TS	Caffè
Sigarette	Kool	CLP	OCP	OCLP	OCLP

- L'inglese vive nella casa rossa
- Il caffè è bevuto nella casa verde

Ip. #2: fatto #5, fatto #7, fatto #12

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	UK	UA JP ES	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	TS	Latte	TS	Caffè
Sigarette	Kool	CLP	OCP	OCLP	OCLP

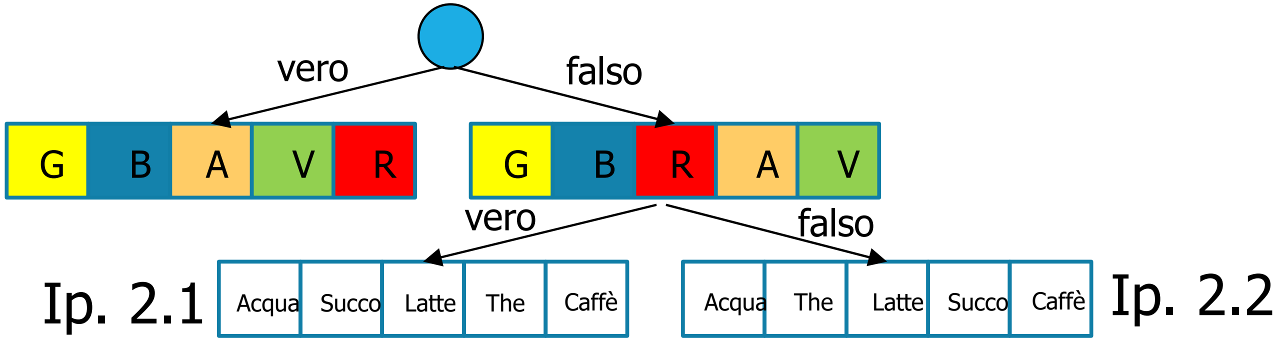
- Il the è bevuto dall'ucraino
- Il caffè è bevuto nella casa verde

→ L'ucraino non abita nella casa verde

- Lo spagnolo è proprietario del cane → L'inglese non possiede il cane

Ipotesi

Succo in casa blu, the in casa avorio



Ip. #2.1: fatto #6, fatto #7

Acqua	Succo	Latte	The	Caffè

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA JP	UK	UA	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	Succo	Latte	The	Caffè
Sigarette	Kool	Lucky	OCP	OCP	OCP

- Il the è bevuto dall'ucraino
- Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

Ip. #2.1: deduzione

Acqua	Succo	Latte	The	Caffè

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	JP	UK	UA	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	Succo	Latte	The	Caffè
Sigarette	Kool	Lucky	OCP	OCP	OCP

Il giapponese abita nella casa blu

Ip. #2.1: fatto #13

fallimento!

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	JP	UK	UA	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	Succo	Latte	The	Caffè
Sigarette	Kool	Lucky Parliament	OC	OC	OC

Il giapponese fuma Parliament ⇨ **impossibile!** ⇨ **backtrack**

Ip. 2.2: fatto #6, fatto #7

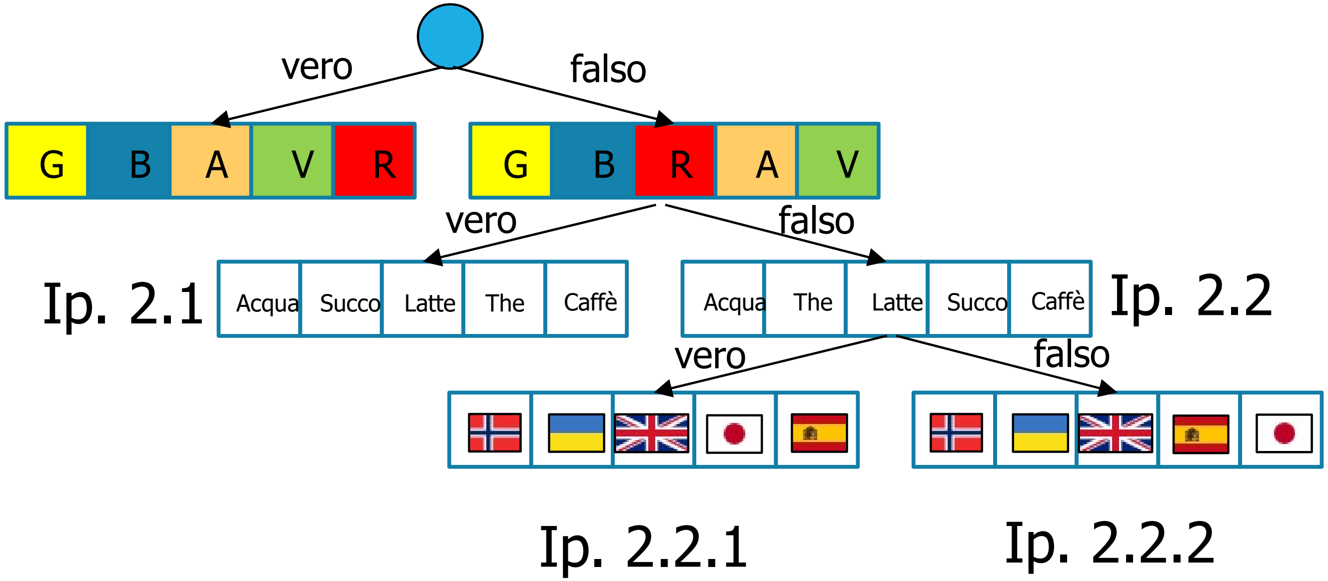
Acqua	The	Latte	Succo	Caffè

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	UK	JP ES	JP ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	CLVZ	CLVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Succo	Caffè
Sigarette	Kool	CP	OCP	Lucky	OCP

- Il the è bevuto dall’ucraino
- Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

Ipotesi

Spagnolo in casa 4, giapponese in casa 5



Ip. 2.2.1 : fatto #6, fatto #12, fatto #13

fallimento!

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	UK	JP	ES
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ	LVZ	
Bevanda	Acqua	The	Latte	Succo	Caffè
Sigarette	Kool	C	OC	Lucky Parliament	

- Lo spagnolo è proprietario del cane
- Il giapponese fuma Parliament
- Chi fuma le Lucky Strike beve succo d'arancia

→ **impossibile!** → **backtrack**

Ip. 2.2.2 : fatto #12, fatto #13

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	UK	ES	JP
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ		LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Succo	Caffè
Sigarette	Kool	C	OC	Lucky	Parliament

- Lo spagnolo è proprietario del cane
- Il giapponese fuma Parliament

Ip. 2.2.2: deduzioni

	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	UK	ES	JP
Colore	G	B	R	A	V
Animale	VZ		LVZ		LVZ
Bevanda	Acqua	The	Latte	Succo	Caffè
Sigarette	Kool	Chester.	Old G.	Lucky	Parliament

Il giapponese fuma Parliament ➡ { L'ucraino fuma Chesterfield
L'inglese fuma Old Gold }

Ip. #2.2.2 : fatto #11 e fatto #14

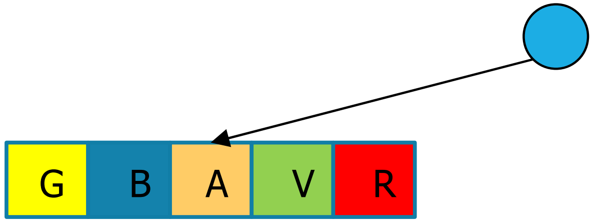
successo!

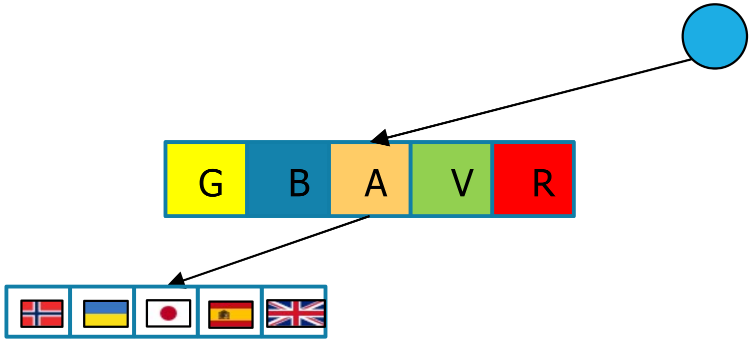
	1	2	3	4	5
Nazione	NO	UA	UK	ES	JP
Colore	G	B	R	A	V
Animale					
Bevanda	Acqua	The	Latte	Succo	Caffè
Sigarette	Kool	Chester.	Old G.	Lucky	Parliament

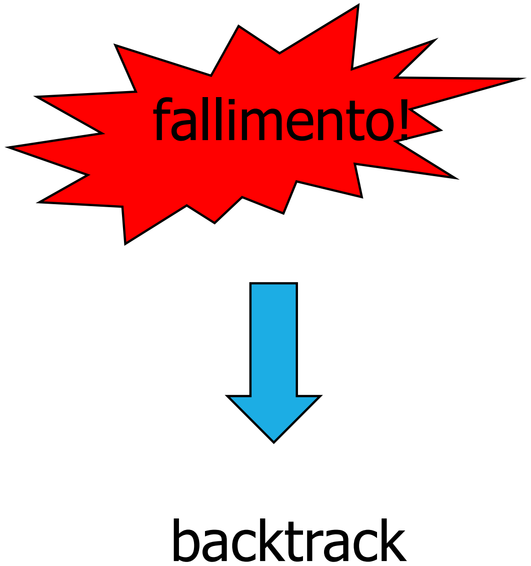
- Il fumatore di Old Gold possiede lumache
- L'uomo che fuma Chesterfield vive nella casa accanto all'uomo con la volpe

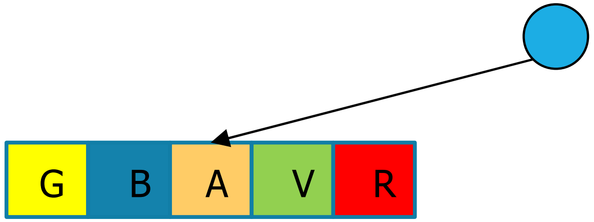
Osservazioni

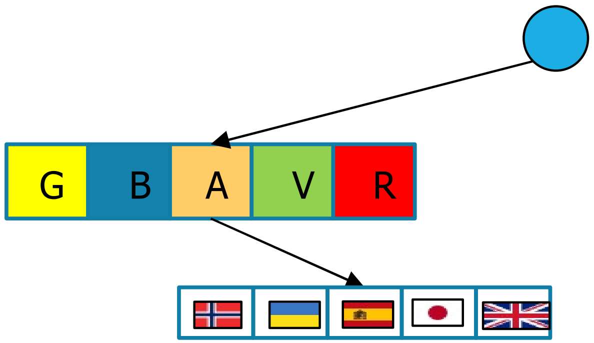
- Difficoltà:
  - non solo implicazioni dirette, ma anche esclusioni
  - struttura ad albero per tener traccia delle ipotesi
  - backtrack!


G
B
A
V
R


G
B
A
V
R

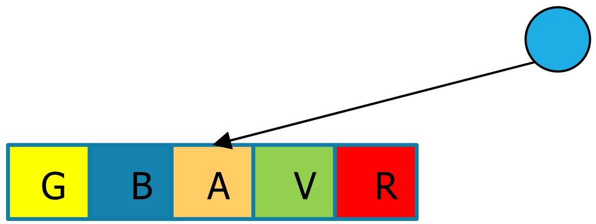

fallimento!
backtrack

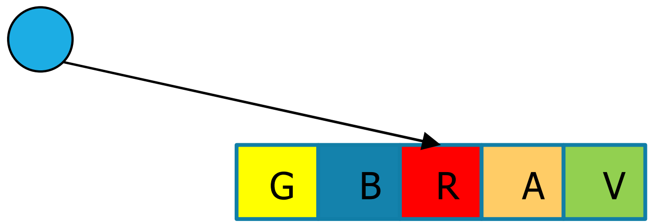

G
B
A
V
R

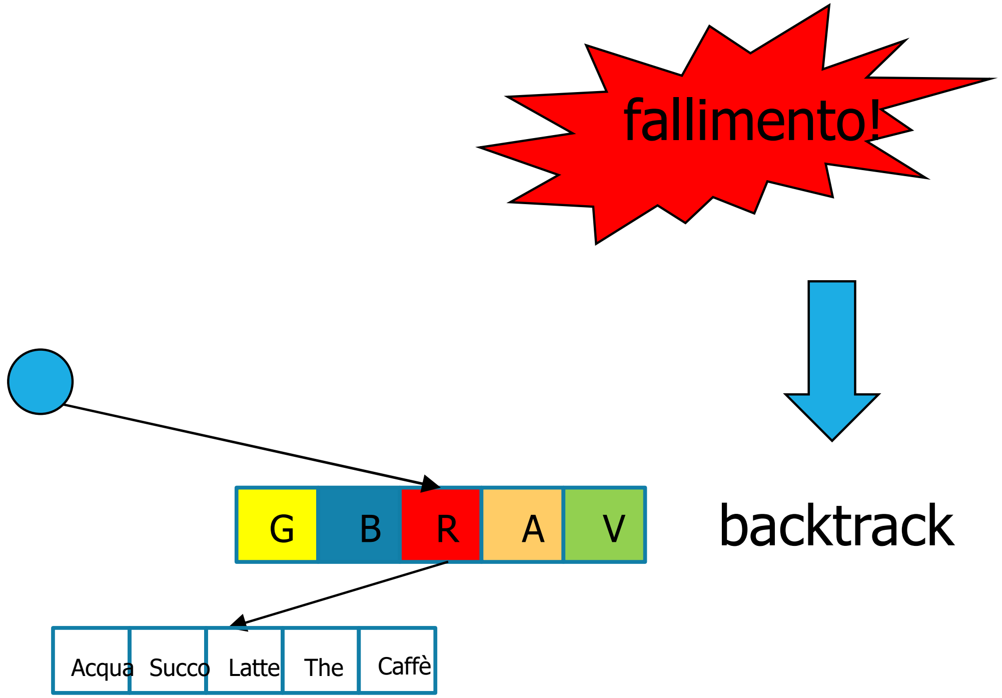


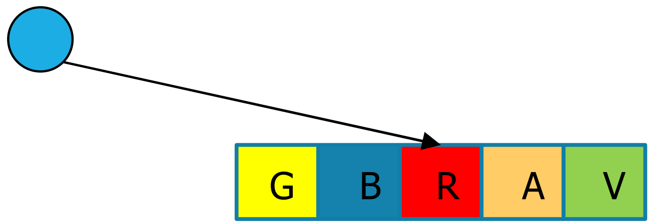
fallimento!

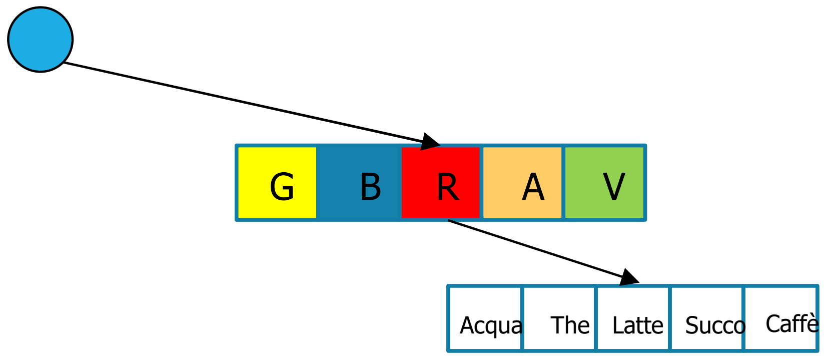
backtrack

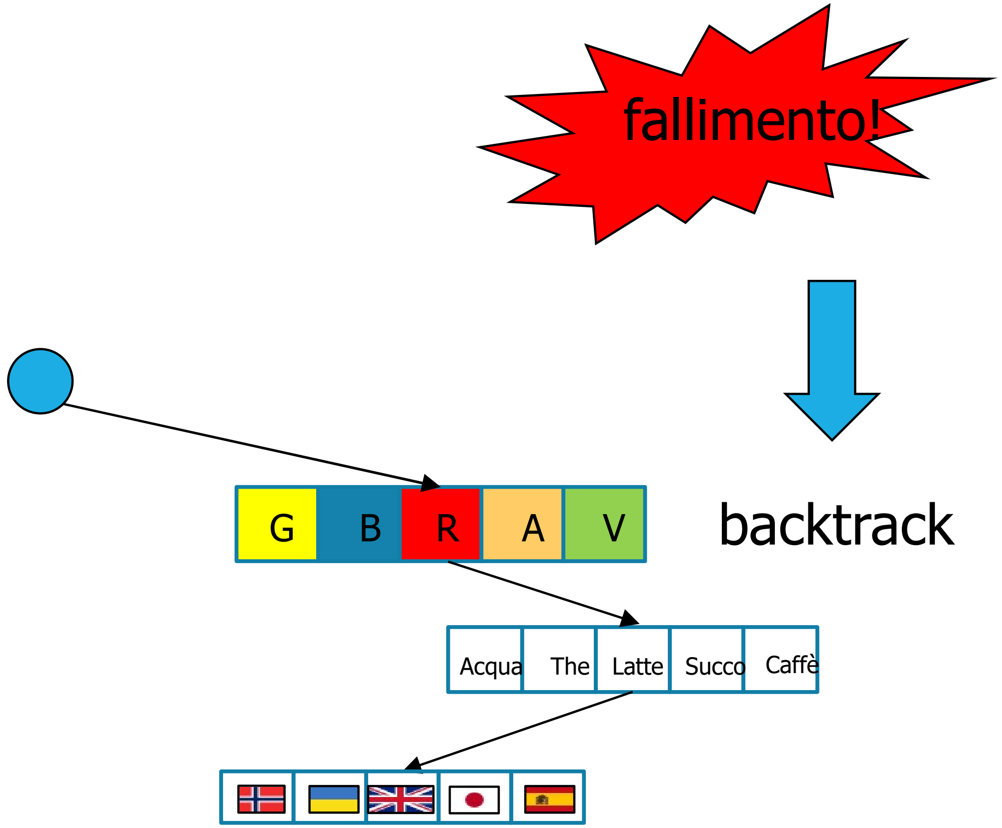

G
B
A
V
R

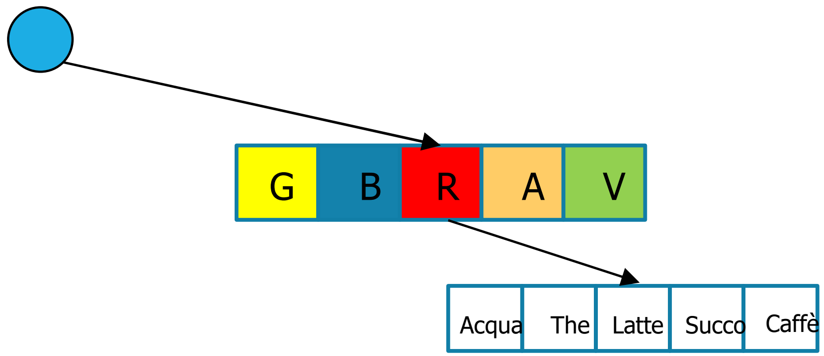

G
B
R
A
V

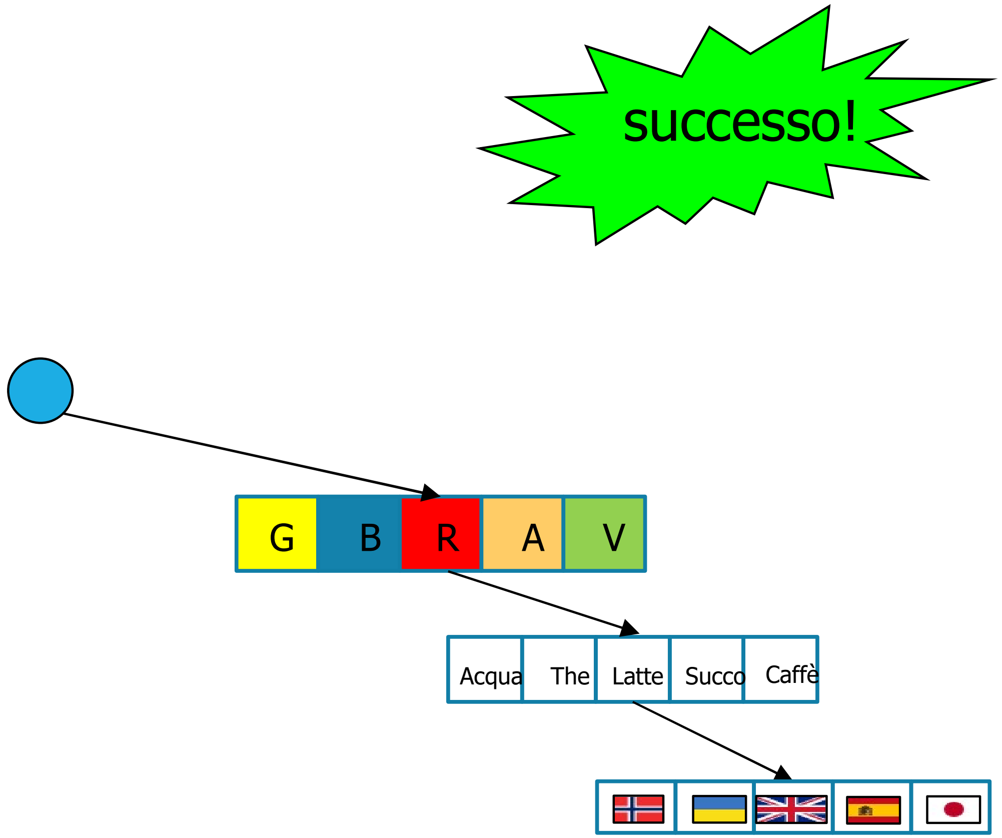

fallimento!
backtrack
G
B
R
A
V
Acqua
Succo
Latte
The
Caffè


G
B
R
A
V


G
B
R
A
V
Acqua
The
Latte
Succo
Caffè


fallimento!
backtrack
G
B
R
A
V
Acqua
The
Latte
Succo
Caffè


G
B
R
A
V
Acqua
The
Latte
Succo
Caffè


successo!
G
B
R
A
V
Acqua
The
Latte
Succo
Caffè

Disposizioni semplici

Per non generare elementi ripetuti:

- un vettore `mark` registra gli elementi già presi (`mark[i]==0` $\Rightarrow$ elemento i-esimo non ancora preso, 1 altrimenti)
- la cardinalità di `mark` è pari al numero di elementi di `val` (tutti distinti, essendo un insieme)
- in fase di scelta l'elemento i-esimo viene preso solo se `mark[i]==0`, `mark[i]` viene assegnato con 1
- in fase di backtrack, `mark[i]` viene assegnato con 0
- `cnt` registra il numero di soluzioni.

```
int disp(int pos,int *val,int *sol,int *mark, int n, int k,int cnt){
  int i;
  if (pos >= k){
    for (i=0; i<k; i++) printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i=0; i<n; i++){
    if (mark[i] == 0) {
      mark[i] = 1;
      sol[pos] = val[i];
      cnt = disp(pos+1, val, sol, mark, n, k,cnt);
      mark[i] = 0;
    }
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle n scelte

controllo ripetizione

marcamento e scelta

ricorsione

smarcamento

```
val = malloc(n * sizeof(int));
sol = malloc(k * sizeof(int));
mark = calloc(n, sizeof(int));
```

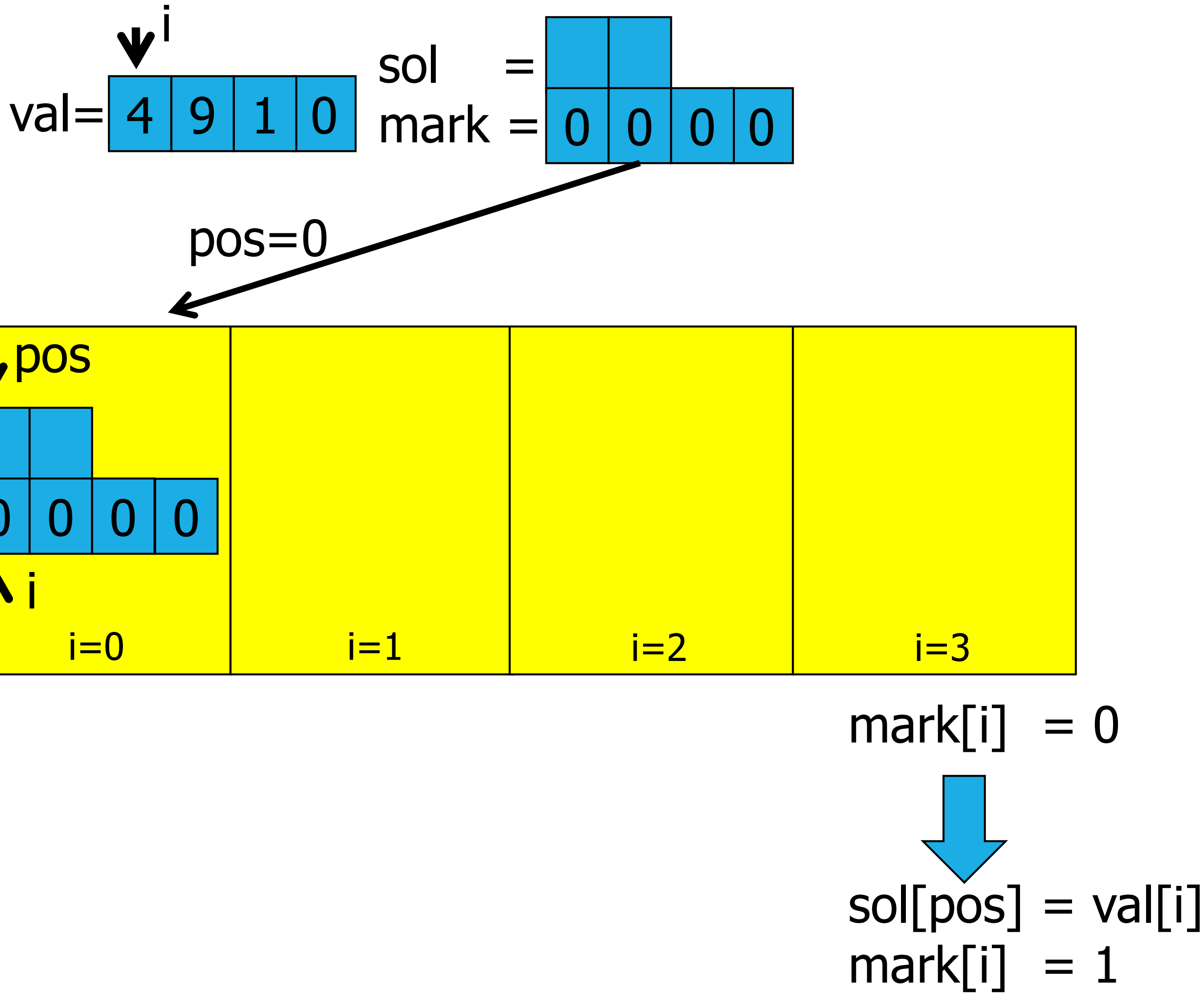
Esempio

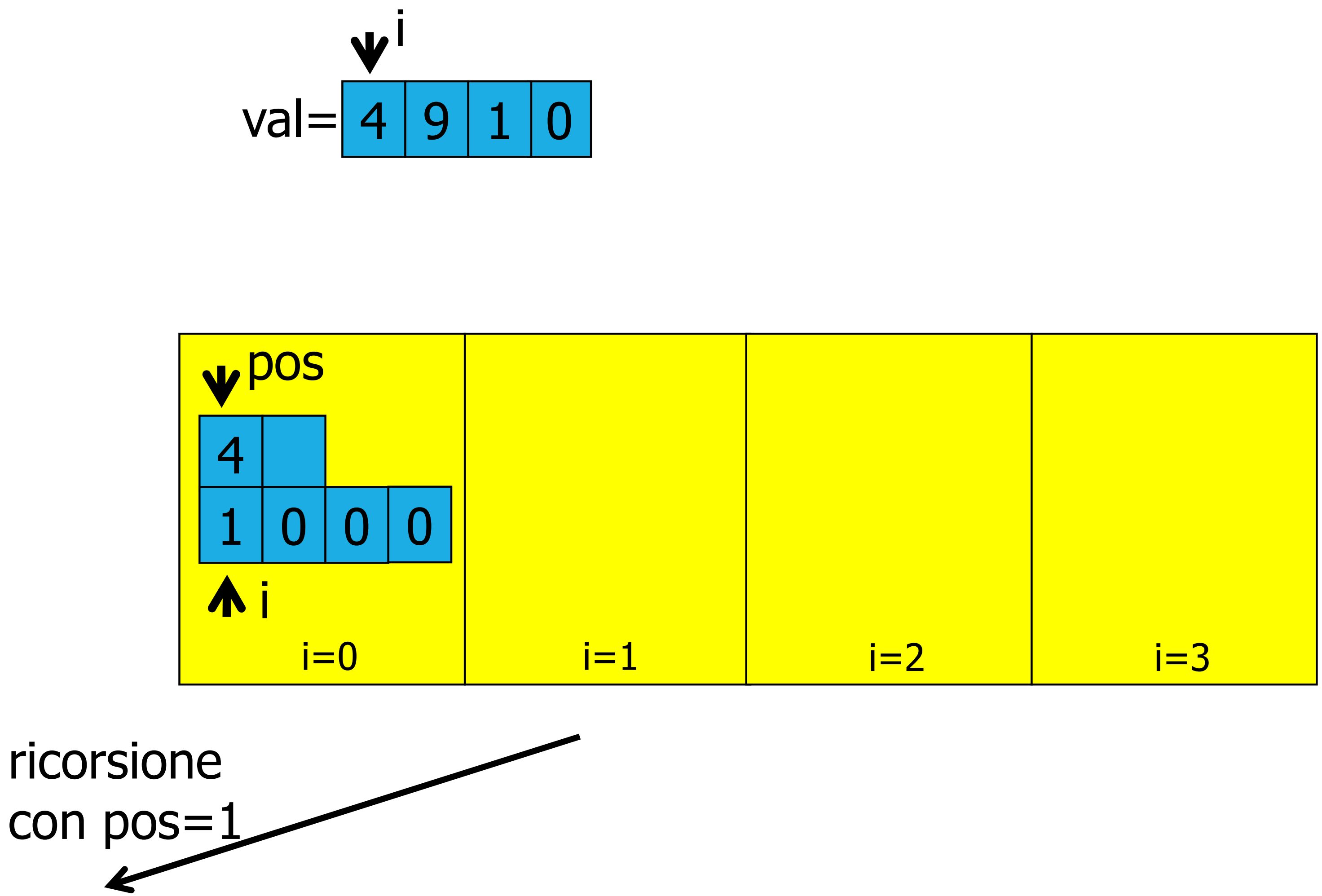
Quanti e quali sono i numeri di 2 cifre distinte che si possono scrivere utilizzando i numeri 4, 9, 1 e 0?

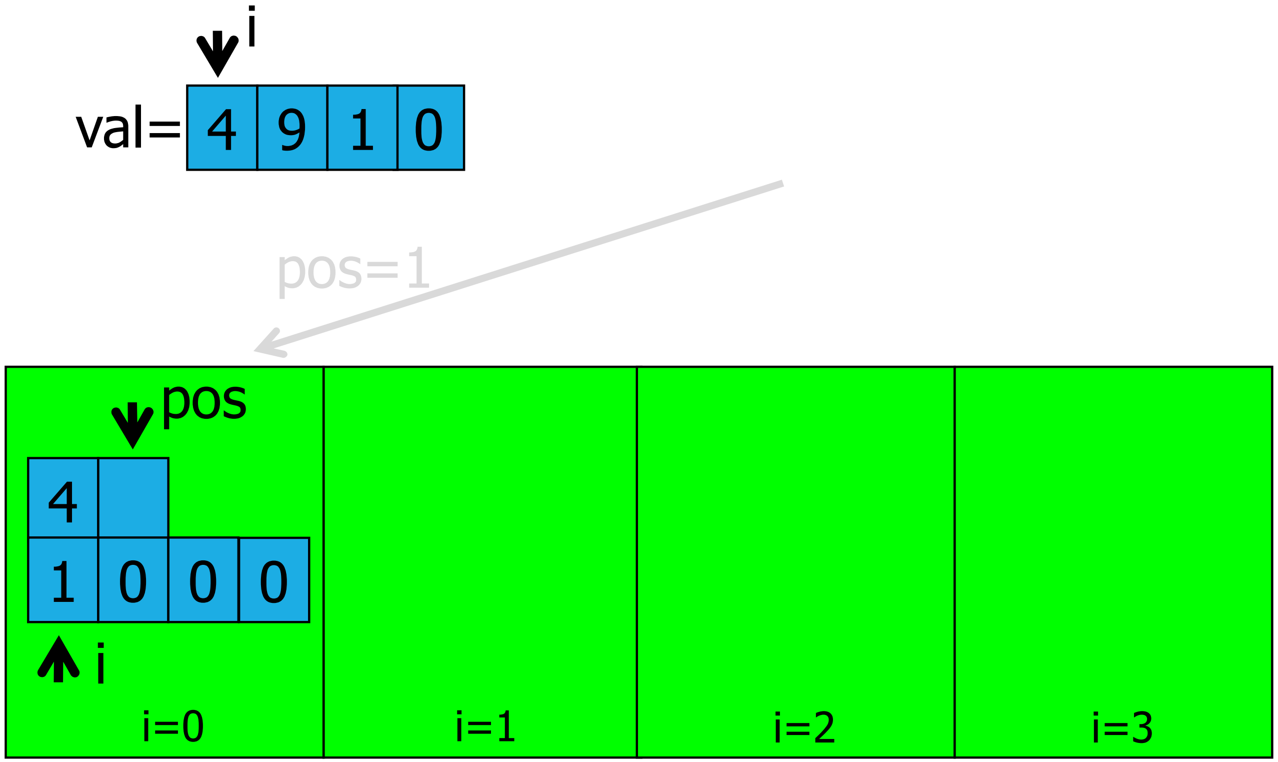
n = 4, k = 2, val = {4, 9, 1, 0 }

$D_{4,\,2} = 4!/(4-2)! = 4 \cdot 3 = 12$

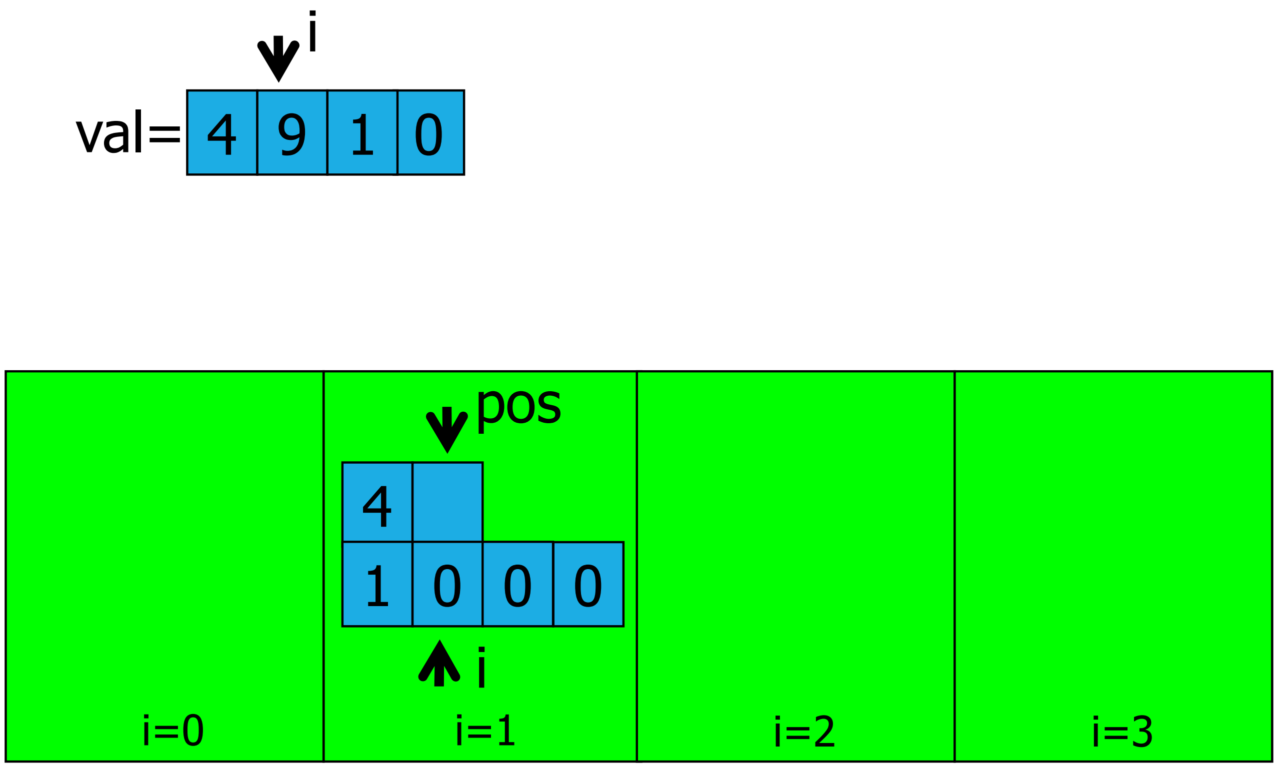
Soluzione:
{49, 41, 40, 94, 91, 90, 14, 19, 10, 04, 09, 01 }


i
val=
4
9
1
0
sol =
mark =
0
0
0
0
pos=0
pos
0
0
0
0
i
i=0
i=1
i=2
i=3
mark[i] = 0
sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1


i
val= 4 9 1 0
pos
4
1 0 0 0
i
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=1

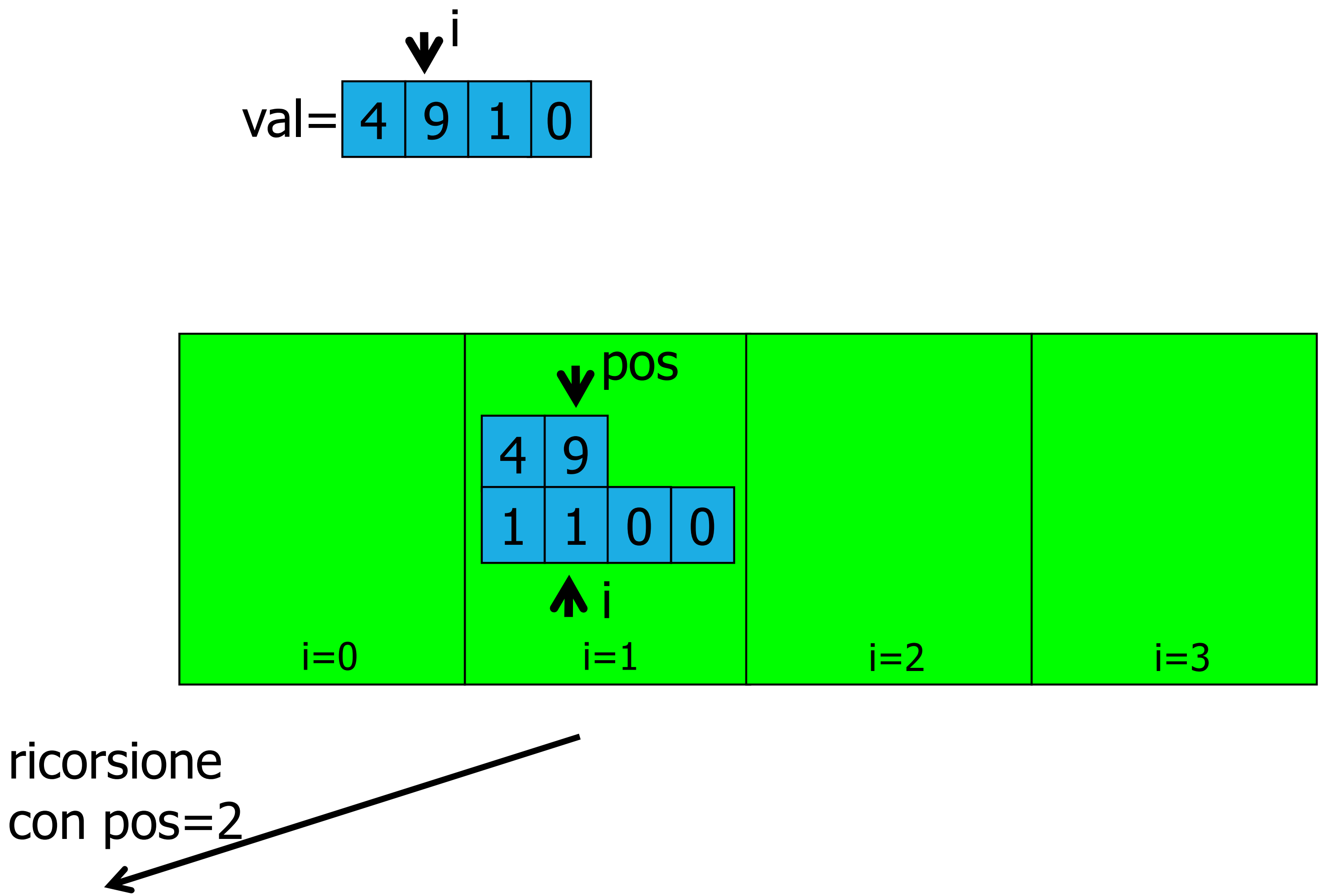


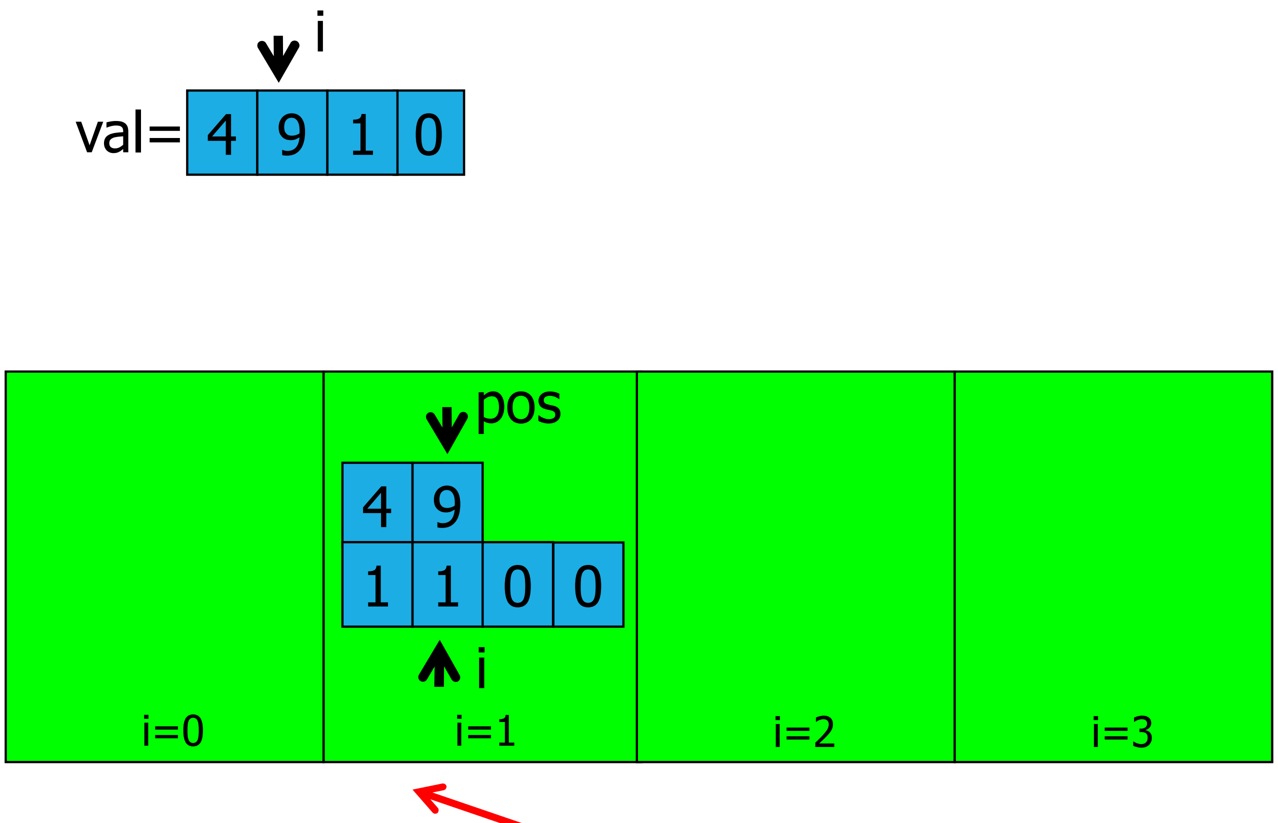
mark[i] = 1

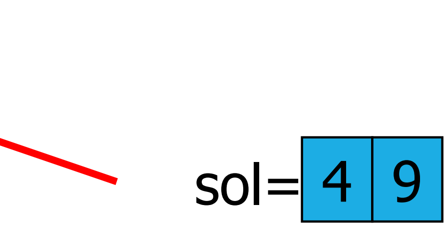


mark[i] = 0

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1

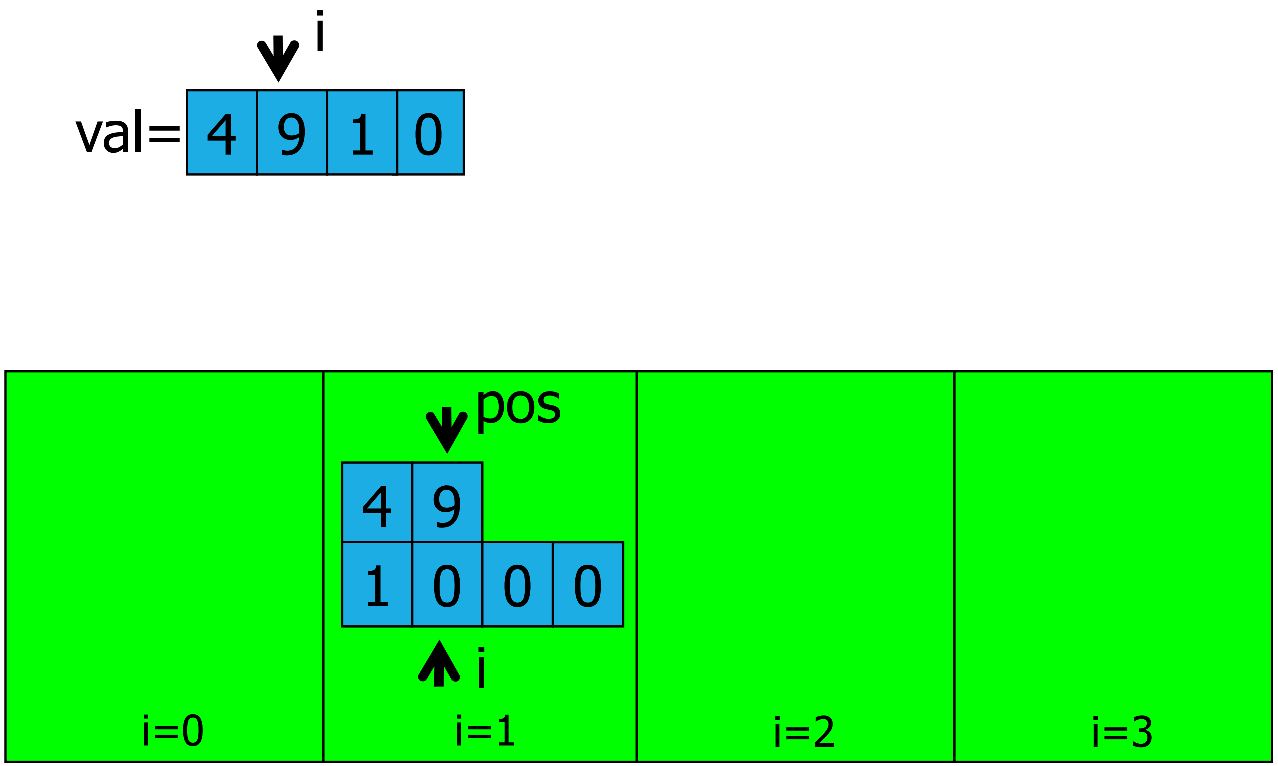

i
val=
4
9
1
0
pos
4
9
1
1
0
0
i
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=2



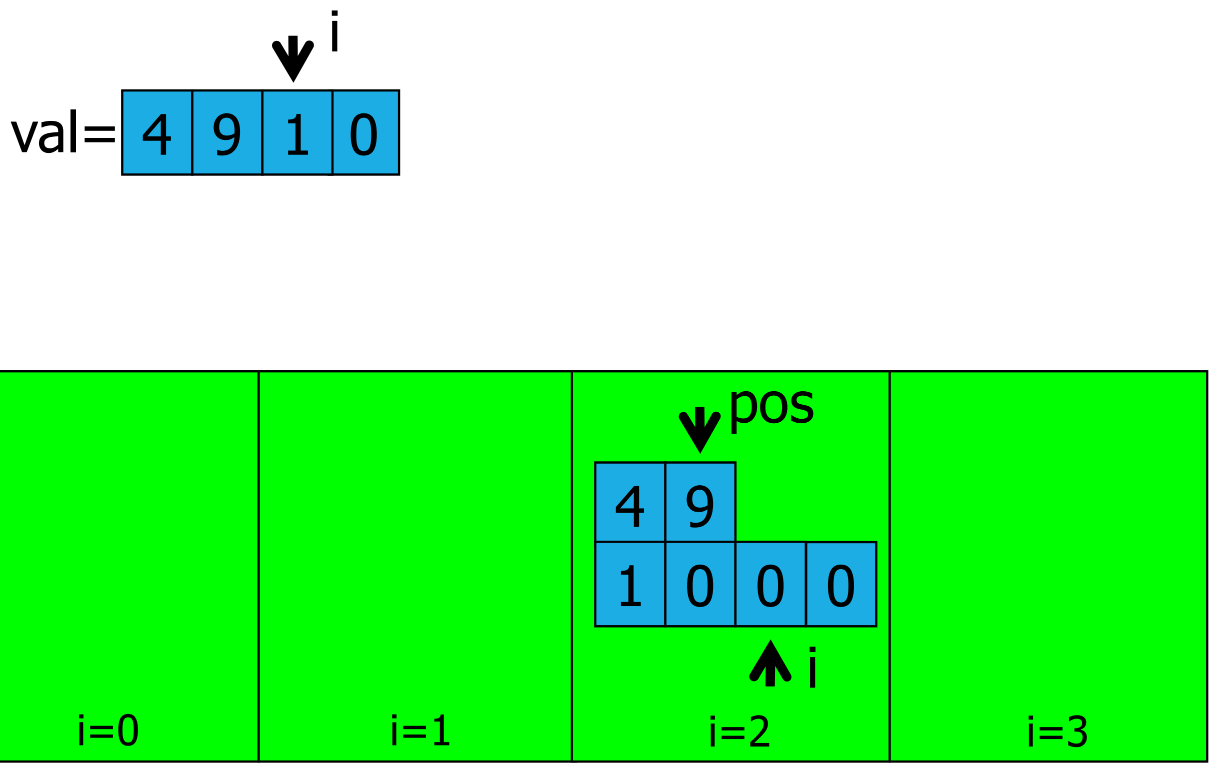


terminazione: visualizza, aggiorna cnt

ritorna

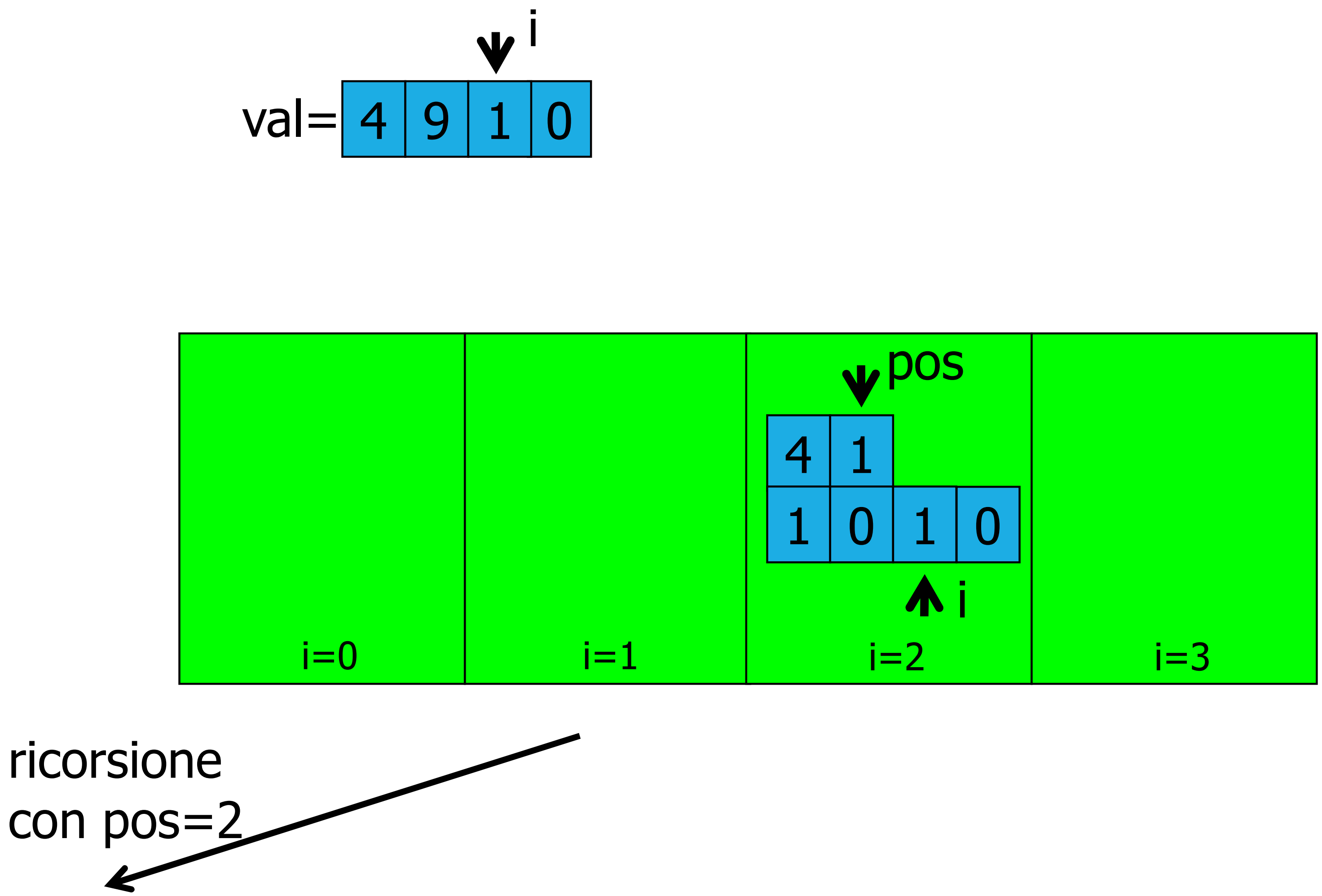


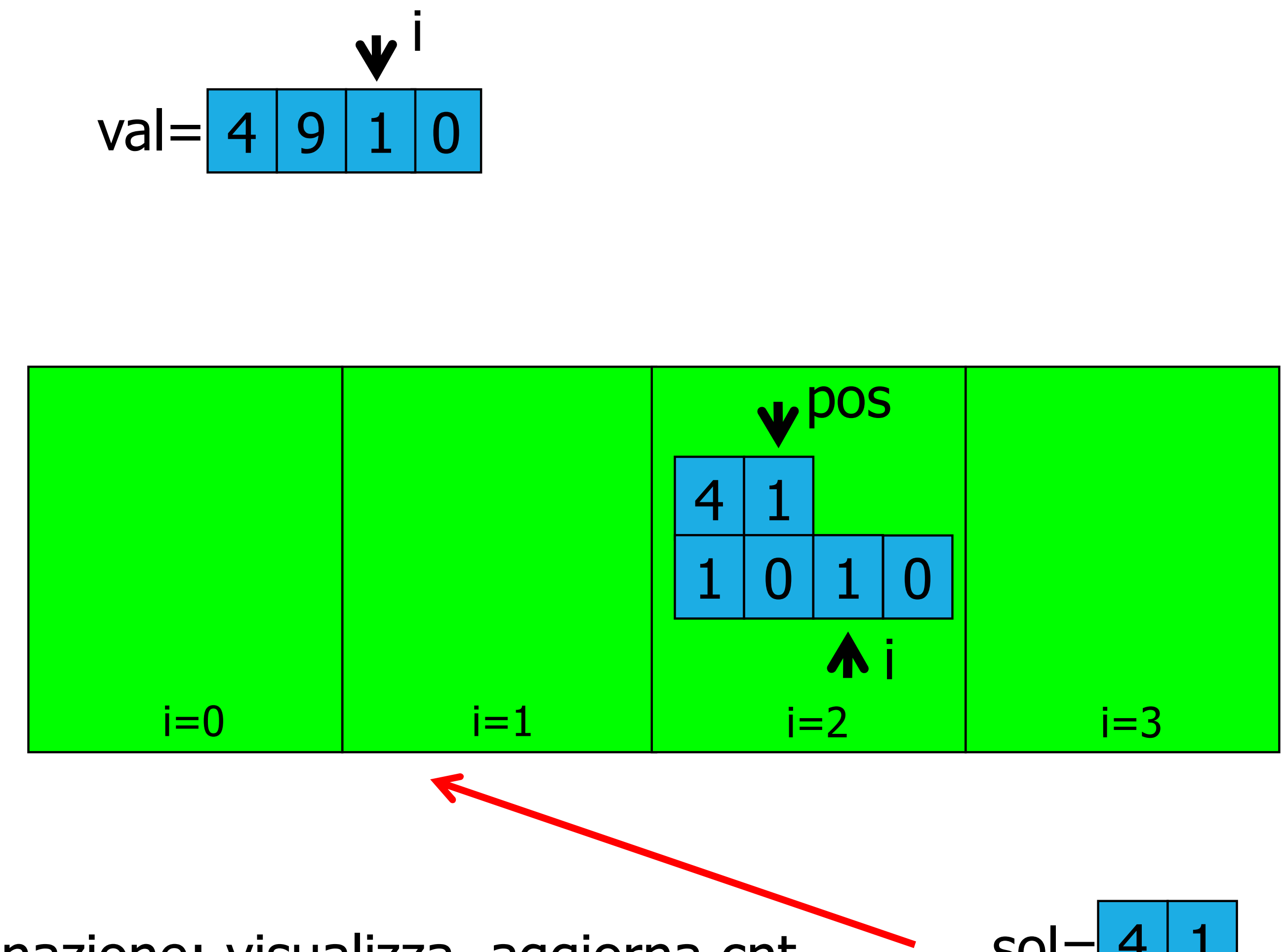
smarca mark[i]



mark[i] = 0

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1

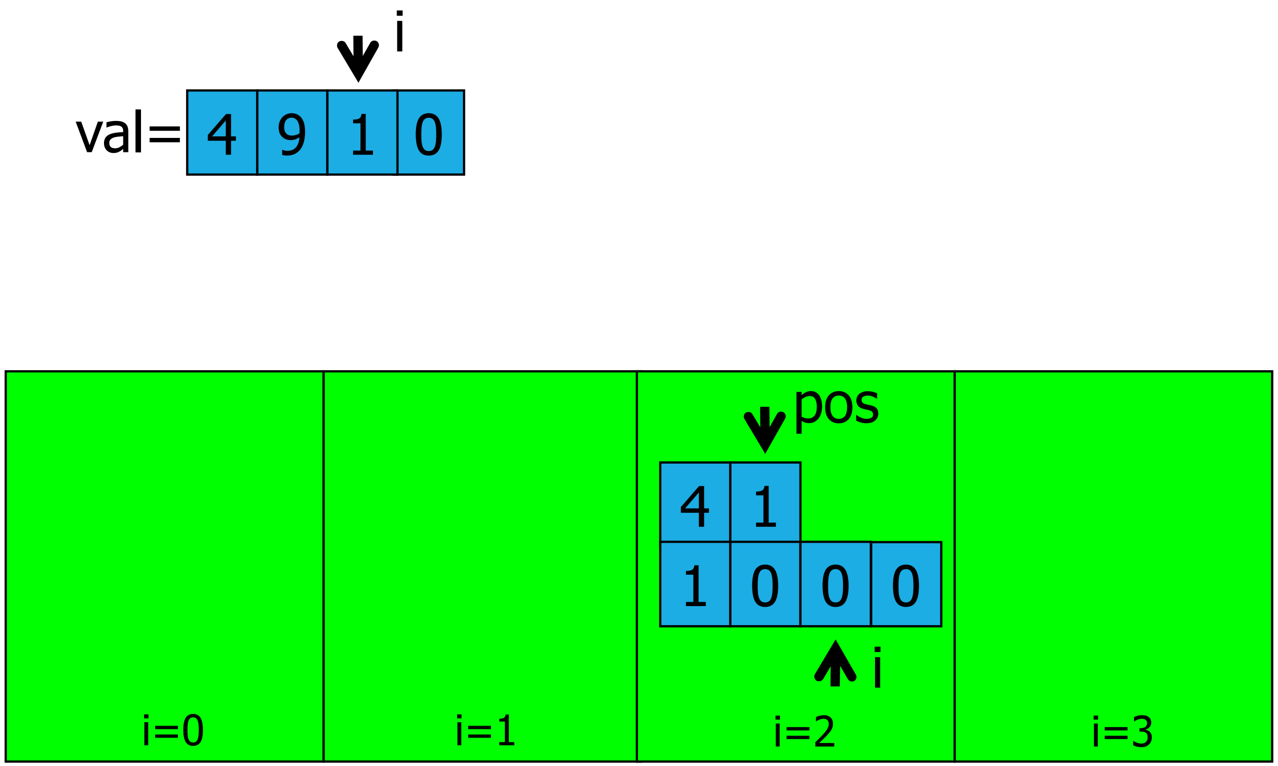

i
val= 4 9 1 0
pos
4 1
1 0 1 0
i
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=2



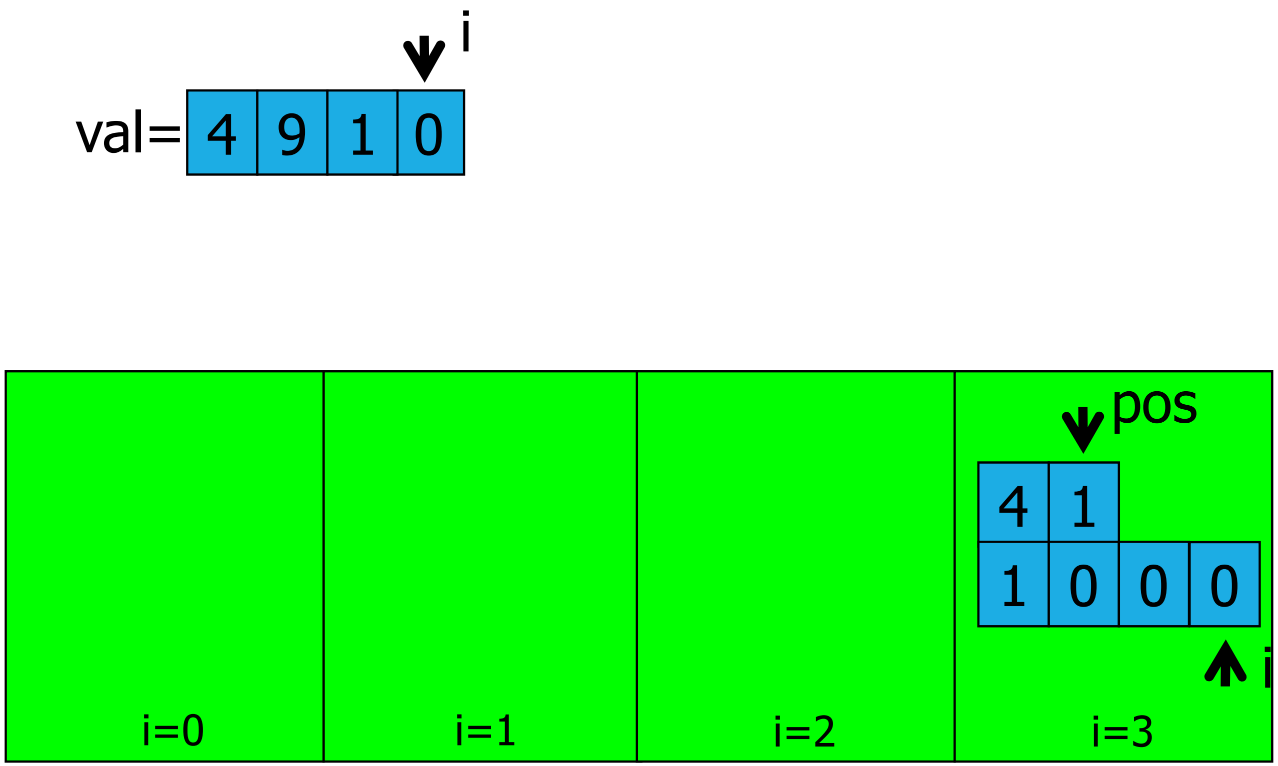
terminazione: visualizza, aggiorna cnt

sol= 4 1

ritorna

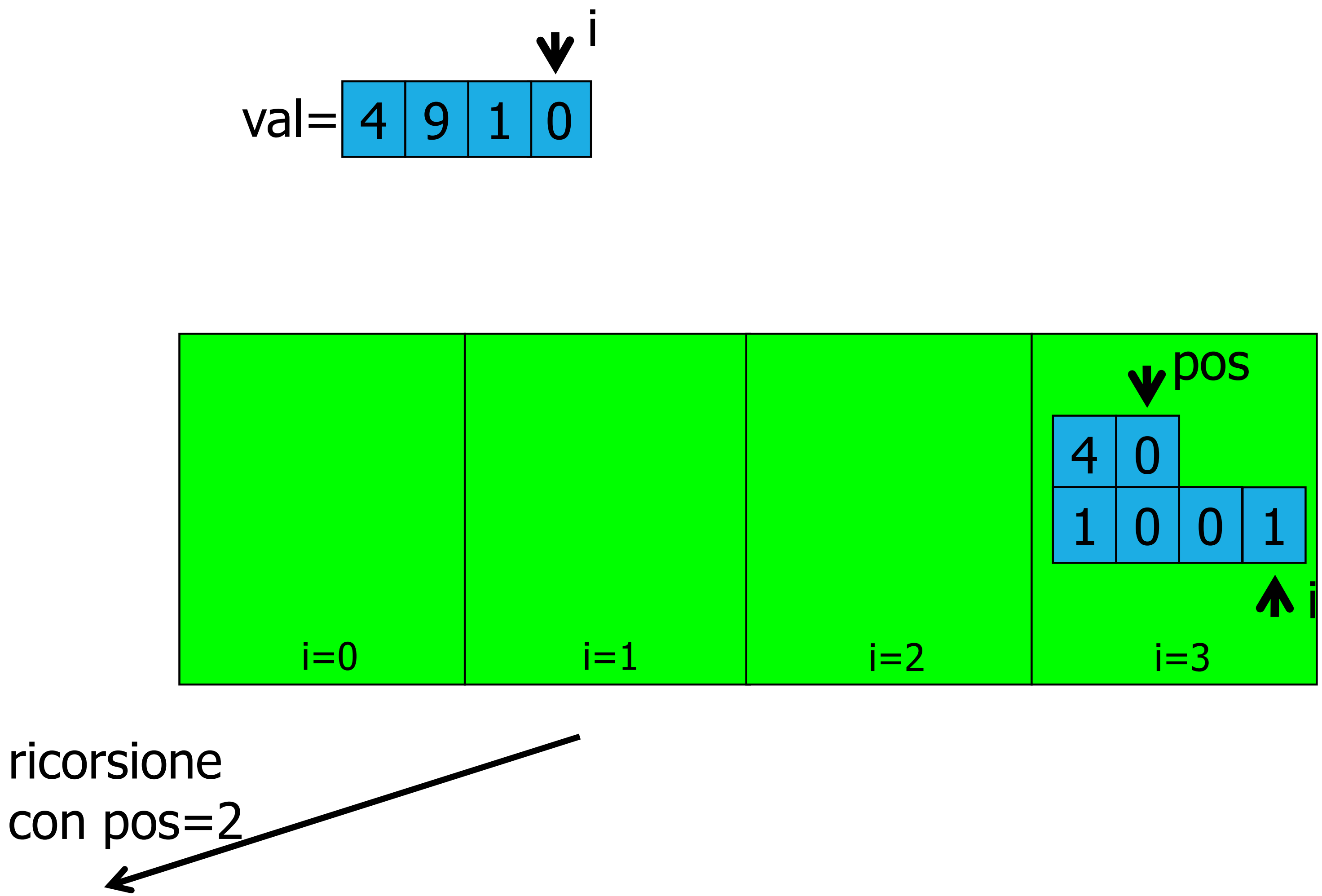


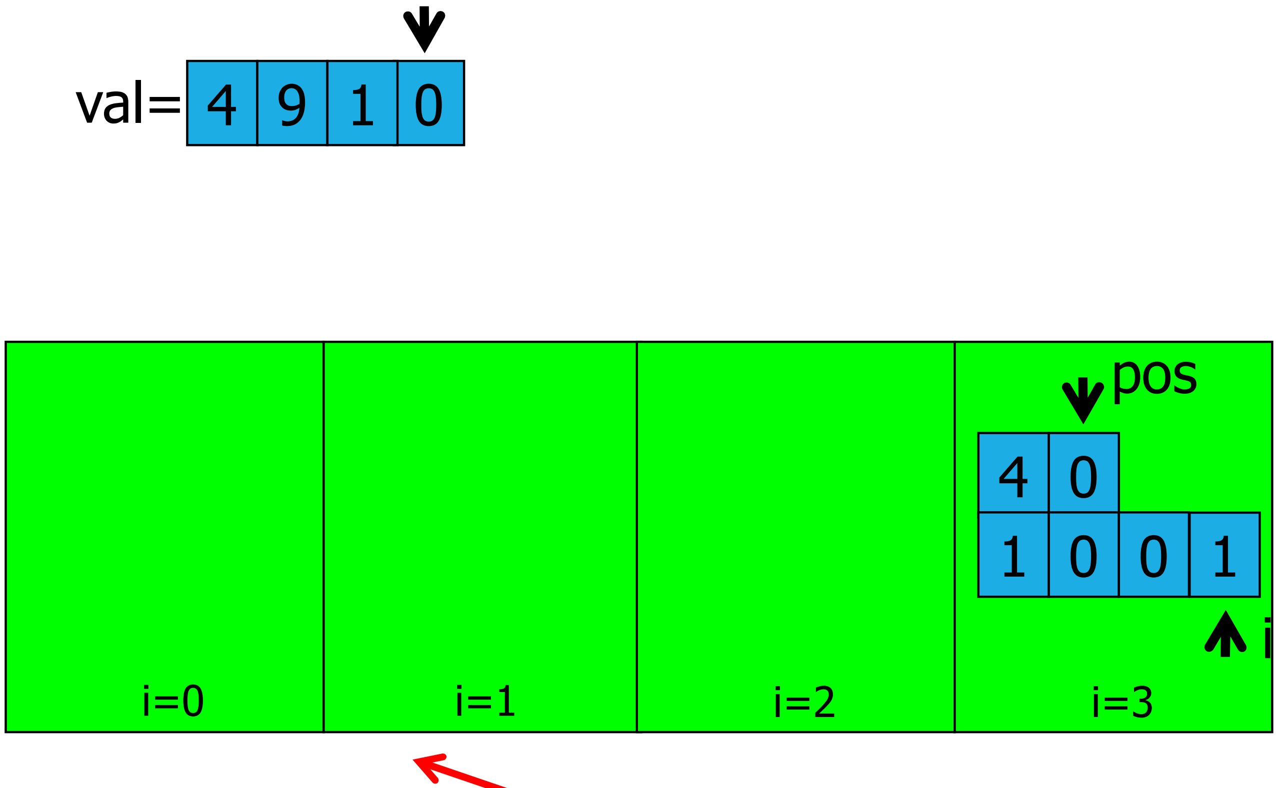
smarca mark[i]

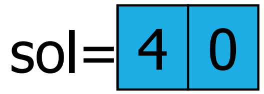


mark[i] = 0

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1

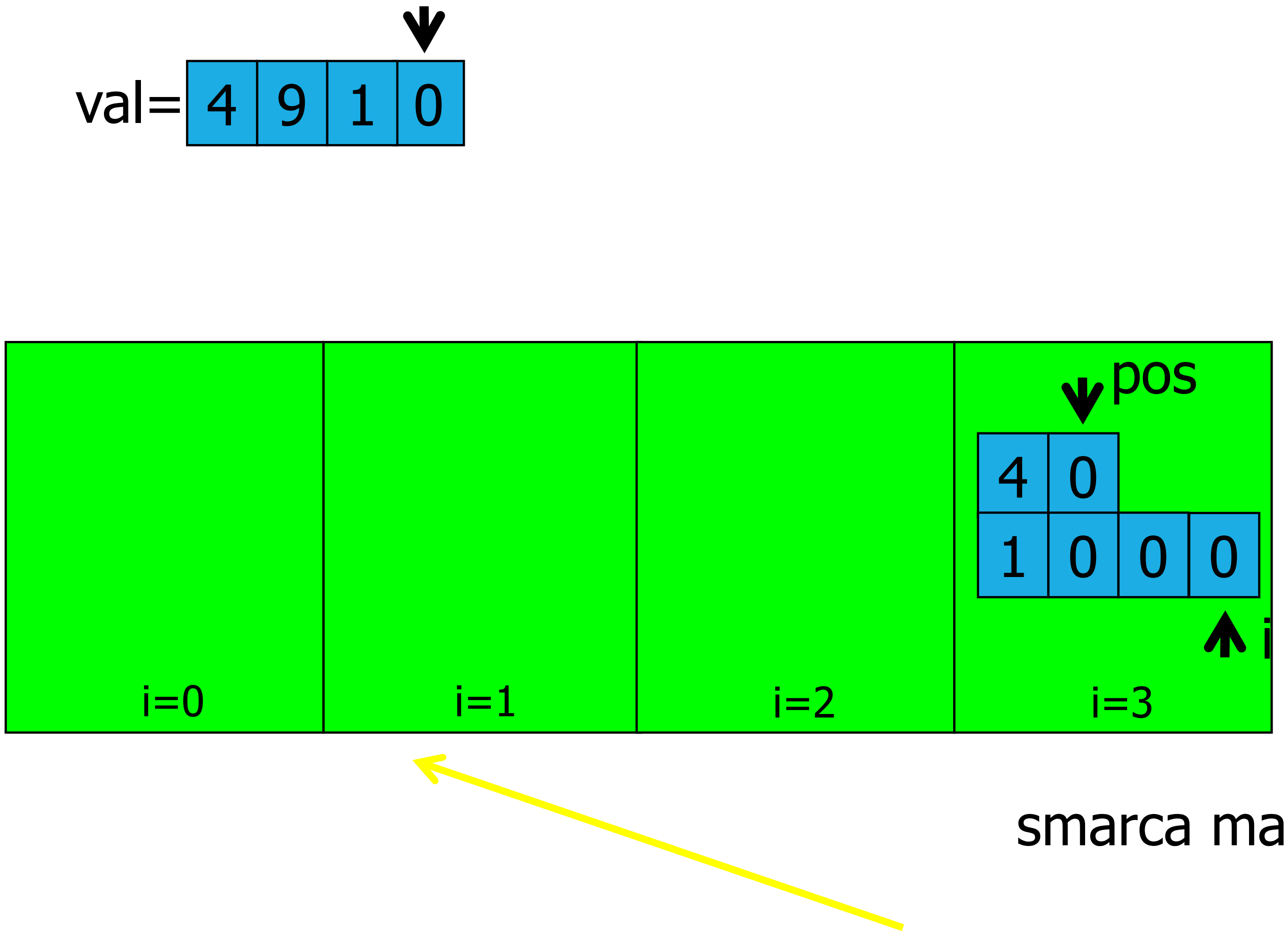

i
val=
4
9
1
0
pos
4
0
1
0
0
1
i
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=2





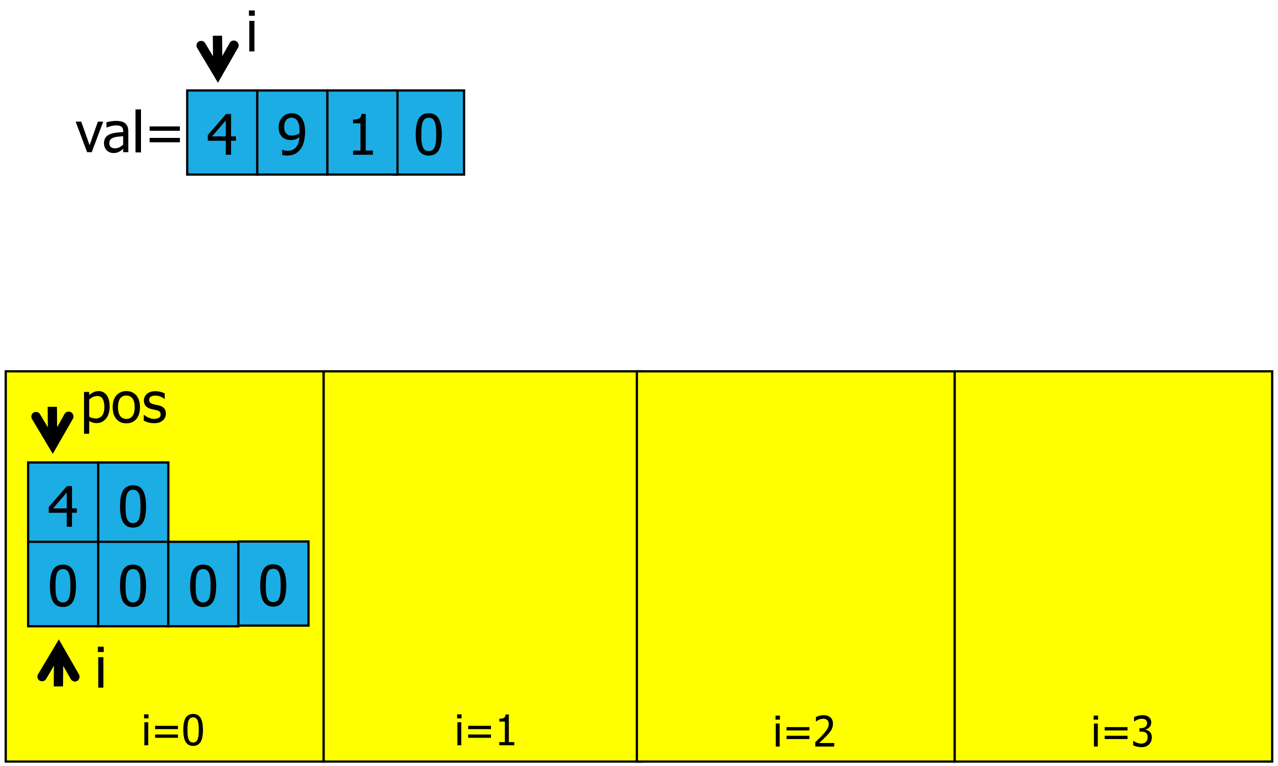
terminazione: visualizza, aggiorna cnt

ritorna

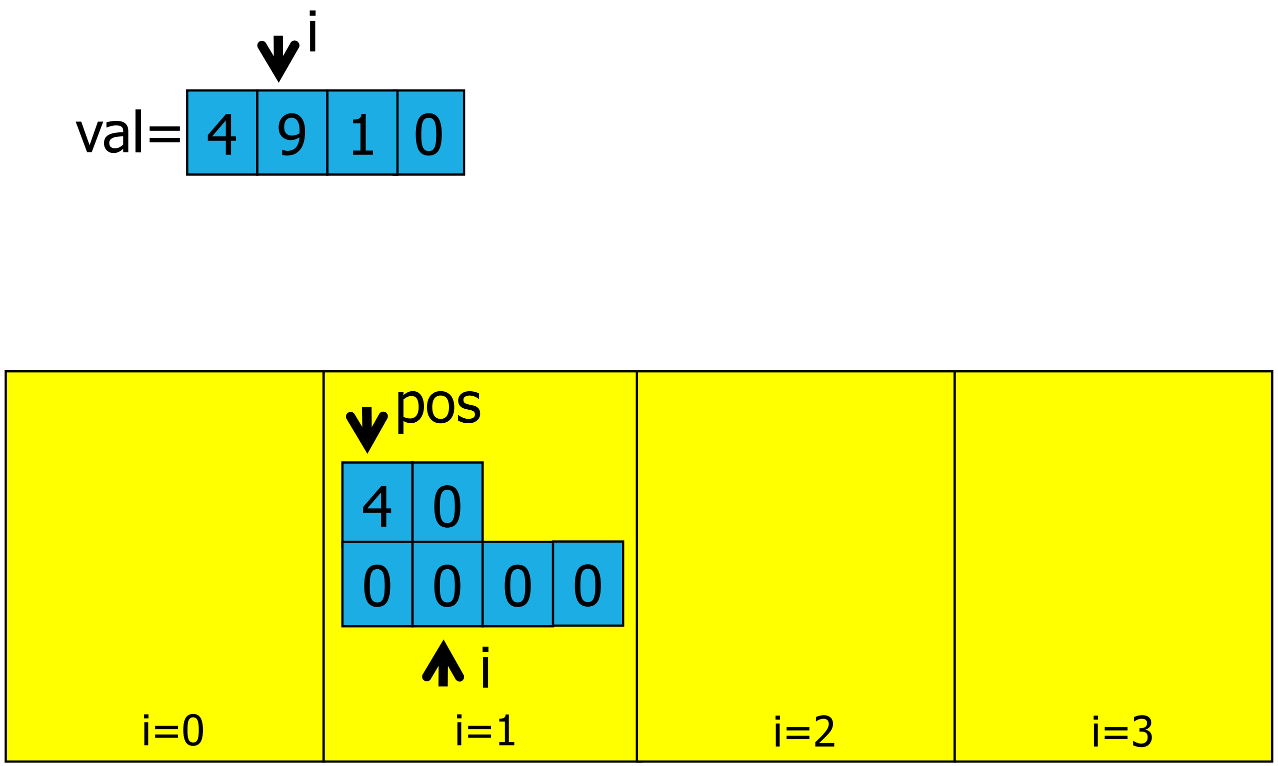


smarca mark[i]

ciclo for terminato, ritorna

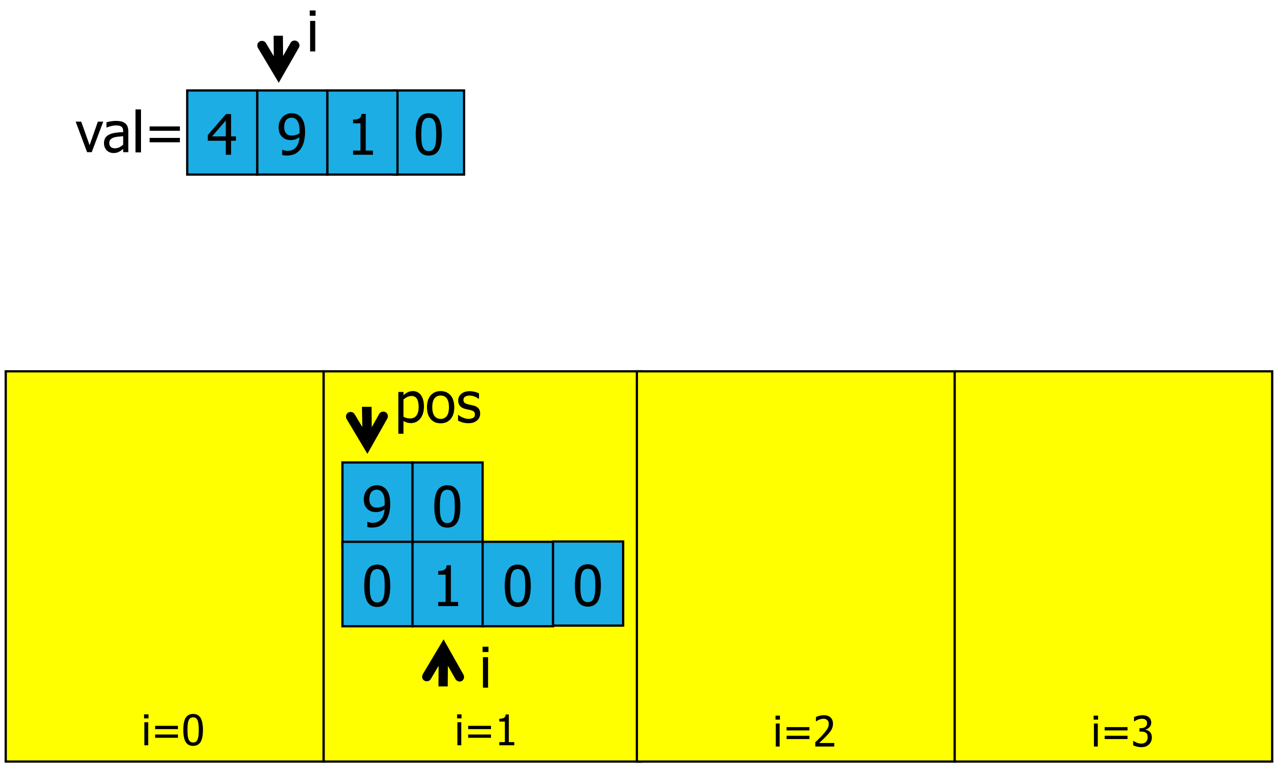


smarca mark[i]



mark[i] = 0

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1



ricorsione
con pos=1

etc. etc.

Disposizioni ripetute

- Ogni elemento può essere ripetuto fino a k volte.
- Non c'è un vincolo imposto da n su k
- Per ognuna delle posizioni si enumerano esaustivamente tutte le scelte possibili
- cnt registra il numero di soluzioni.

```c
int disp_rip(int pos,int *val,int *sol,int n,int k,int cnt){
  int i;
  if (pos >= k) {
    for (i=0; i<k; i++)
      printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i = 0; i < n; i++) {
    sol[pos] = val[i];
    cnt = disp_rip(pos+1, val, sol, n, k, cnt);
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle n scelte

scelta

ricorsione

Permutazioni semplici

Per non generare elementi ripetuti:

- un vettore `mark` registra gli elementi già presi (`mark[i]==0` ⇒ elemento i-esimo non ancora preso, 1 altrimenti)
- la cardinalità di `mark` è pari al numero di elementi di `val` (tutti distinti, essendo un insieme)
- in fase di scelta l'elemento i-esimo viene preso solo se `mark[i]==0`, `mark[i]` viene assegnato con 1
- in fase di backtrack, `mark[i]` viene assegnato con 0
- `cnt` registra il numero di soluzioni.

```c
int perm(int pos,int *val,int *sol,int *mark, int n, int cnt){
  int i;
  if (pos >= n){
    for (i=0; i<n; i++) printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i=0; i<n; i++)
    if (mark[i] == 0) {
      mark[i] = 1;
      sol[pos] = val[i];
      cnt = perm(pos+1, val, sol, mark, n, cnt);
      mark[i] = 0;
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle n scelte

controllo ripetizione

marcamento e scelta

ricorsione

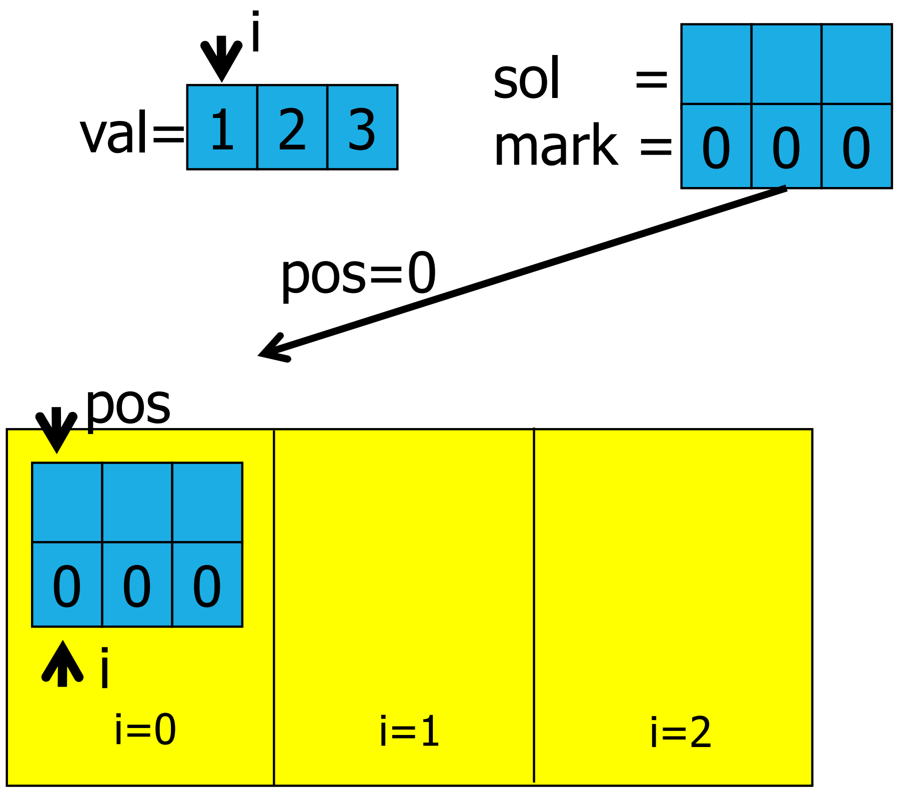
smarcamento

```c
val = malloc(n * sizeof(int));
sol = malloc(n * sizeof(int));
mark = calloc(n, sizeof(int));
```

Esempio

Dato un insieme val di n interi, generare tutte le permutazioni di questi valori.
Il numero di permutazioni è n!.

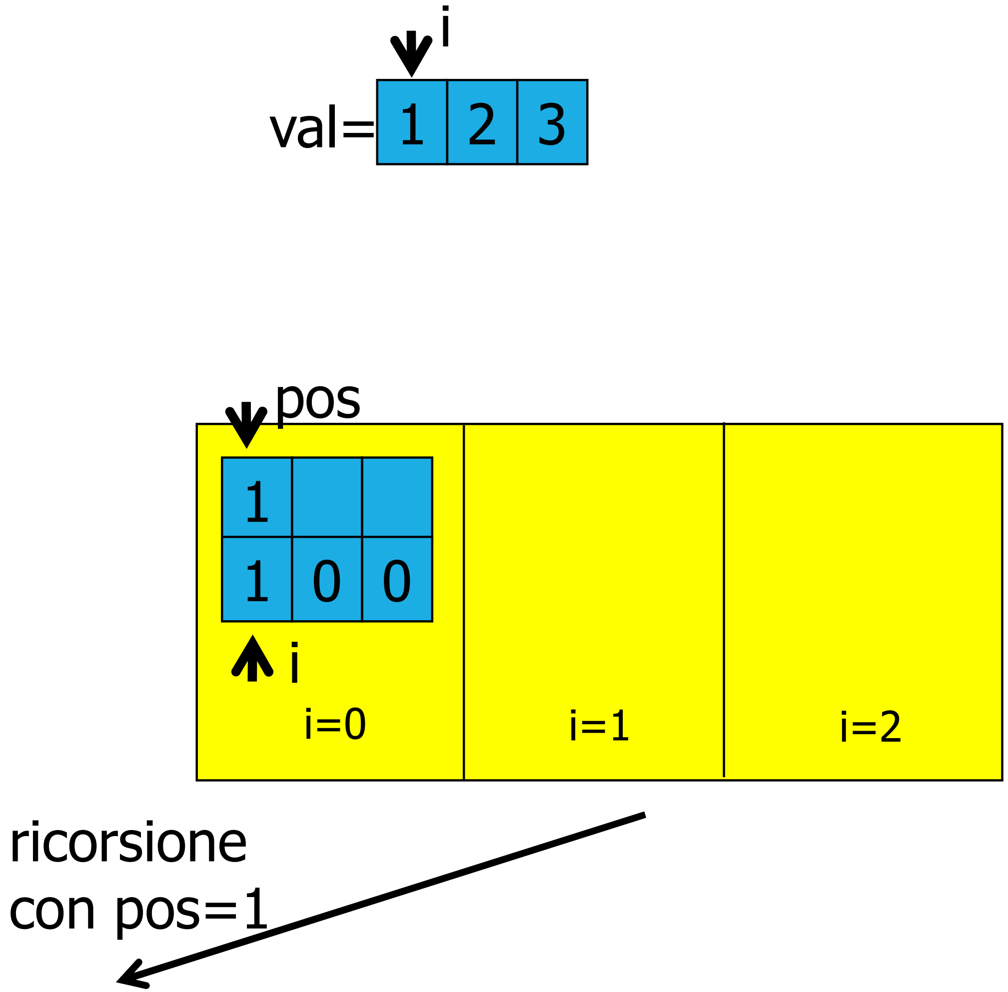
Esempio
val = {1, 2, 3}   n = 3
n! = 6.
Le 6 permutazioni sono:
{1,2,3} {1,3,2} {2,1,3} {2,3,1} {3,1,2} {3,2,1}

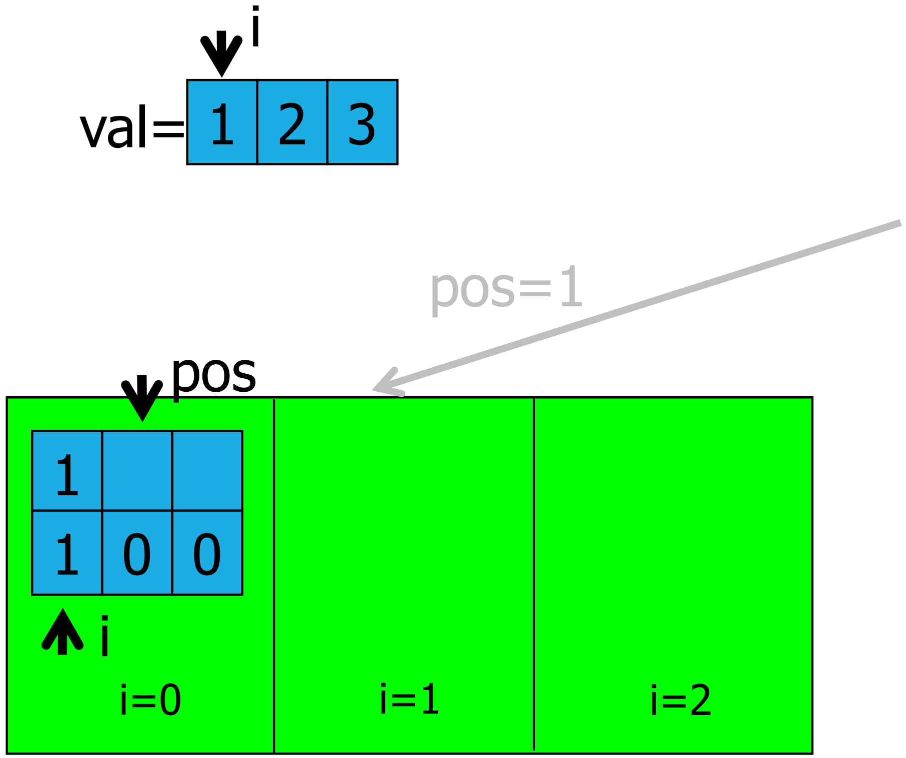


mark[i] = 0

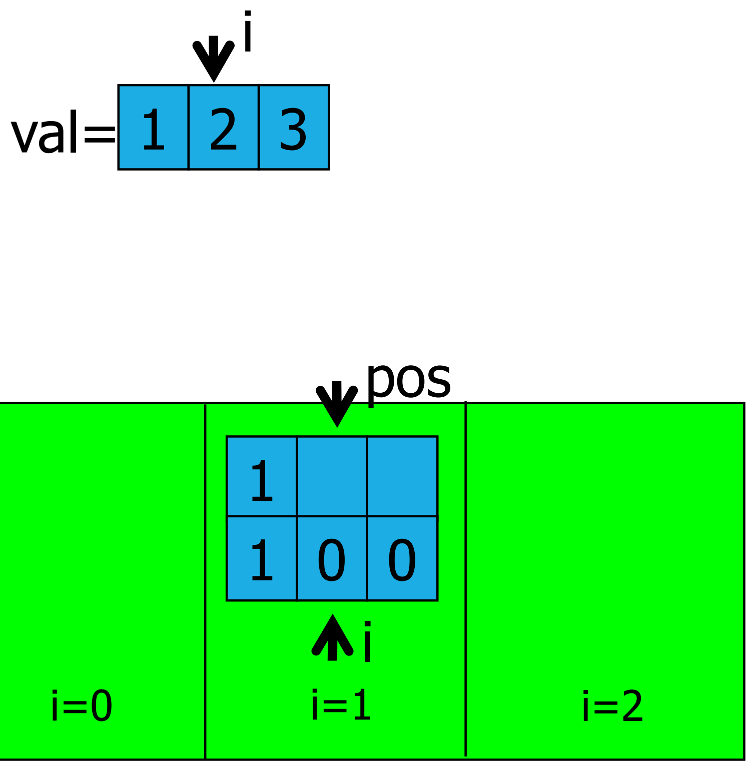
⇓

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1


i
val=
1
2
3
pos
1
1
0
0
i
i=0
i=1
i=2
ricorsione
con pos=1

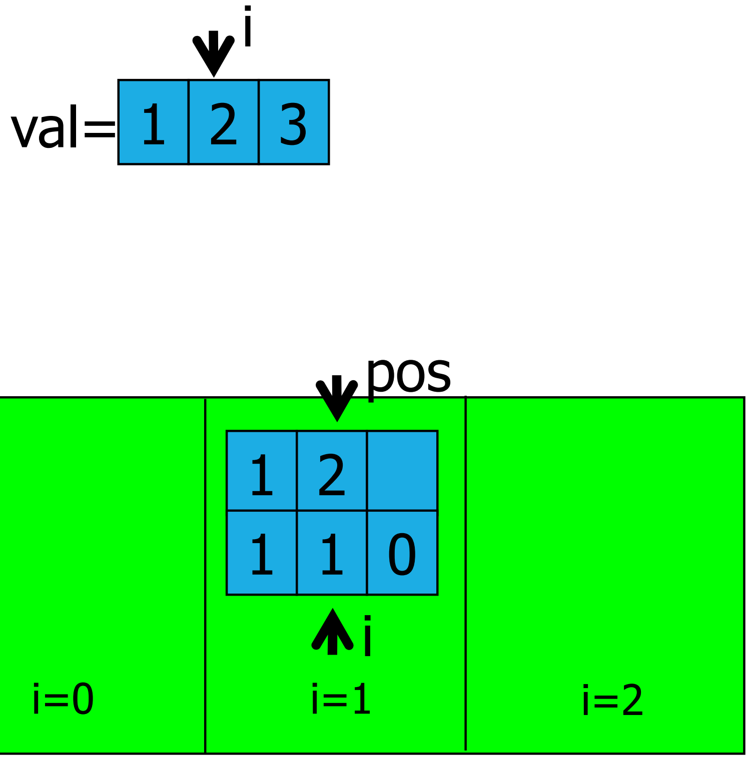


mark[i] = 1



mark[i] = 0

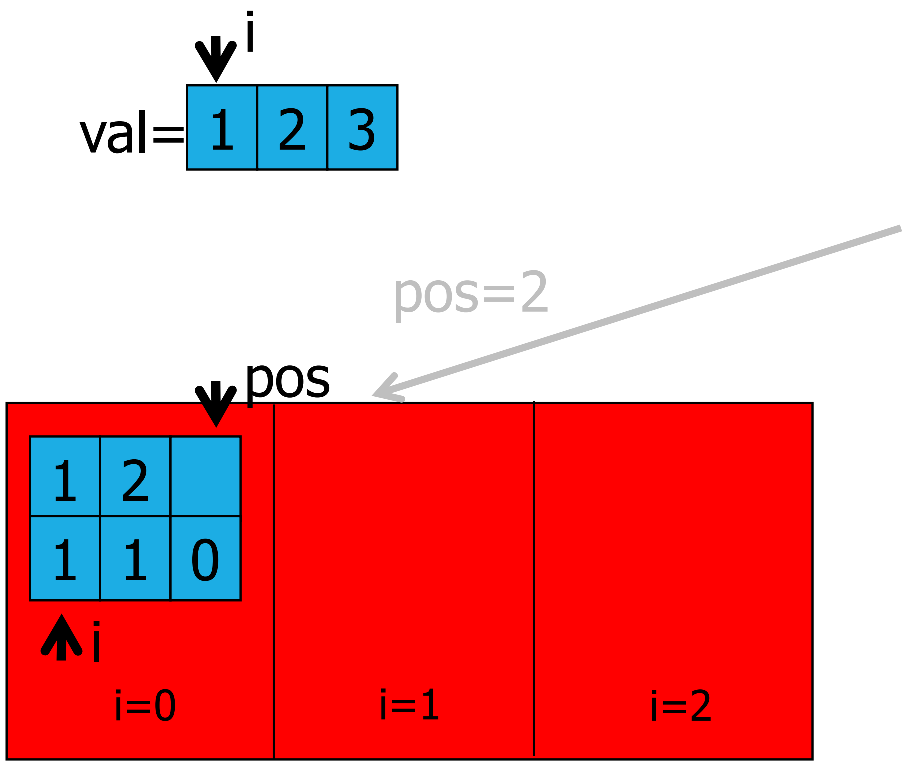
sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1



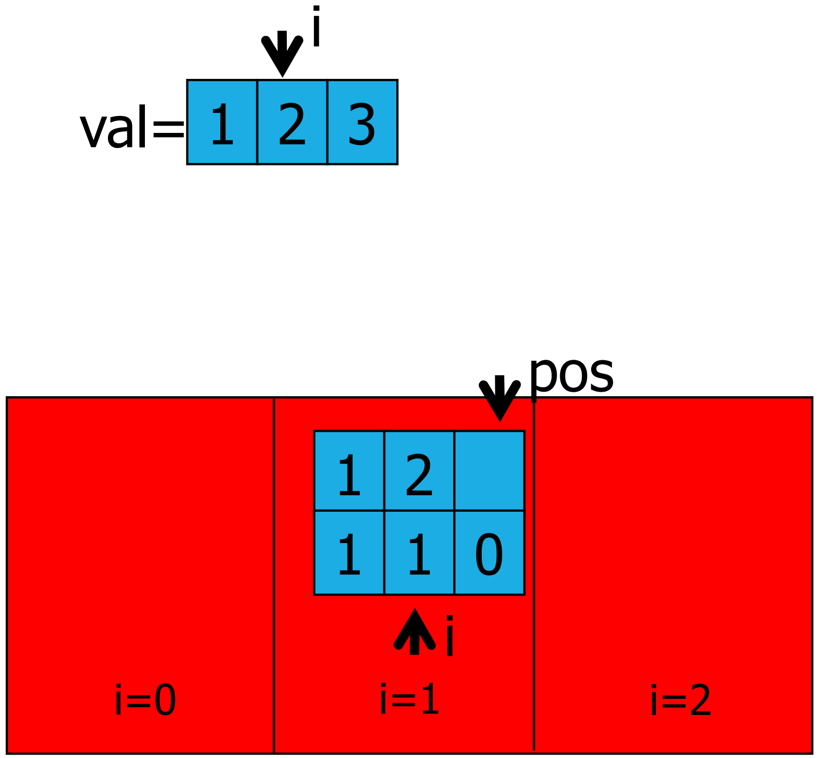
mark[i] = 0

sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1

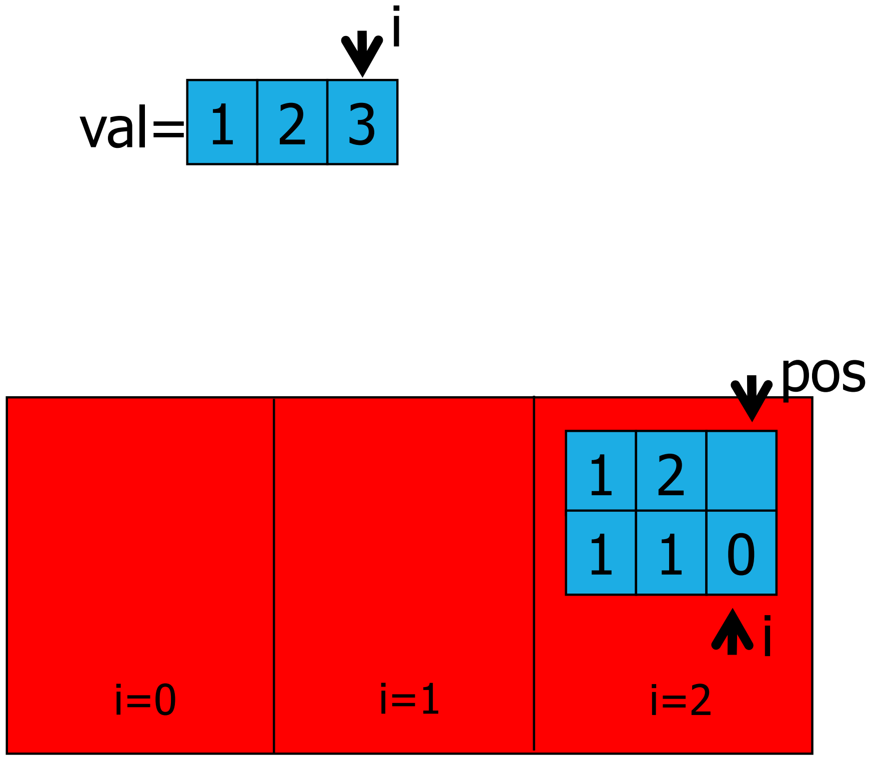
ricorsione
con pos=2



mark[i] = 1

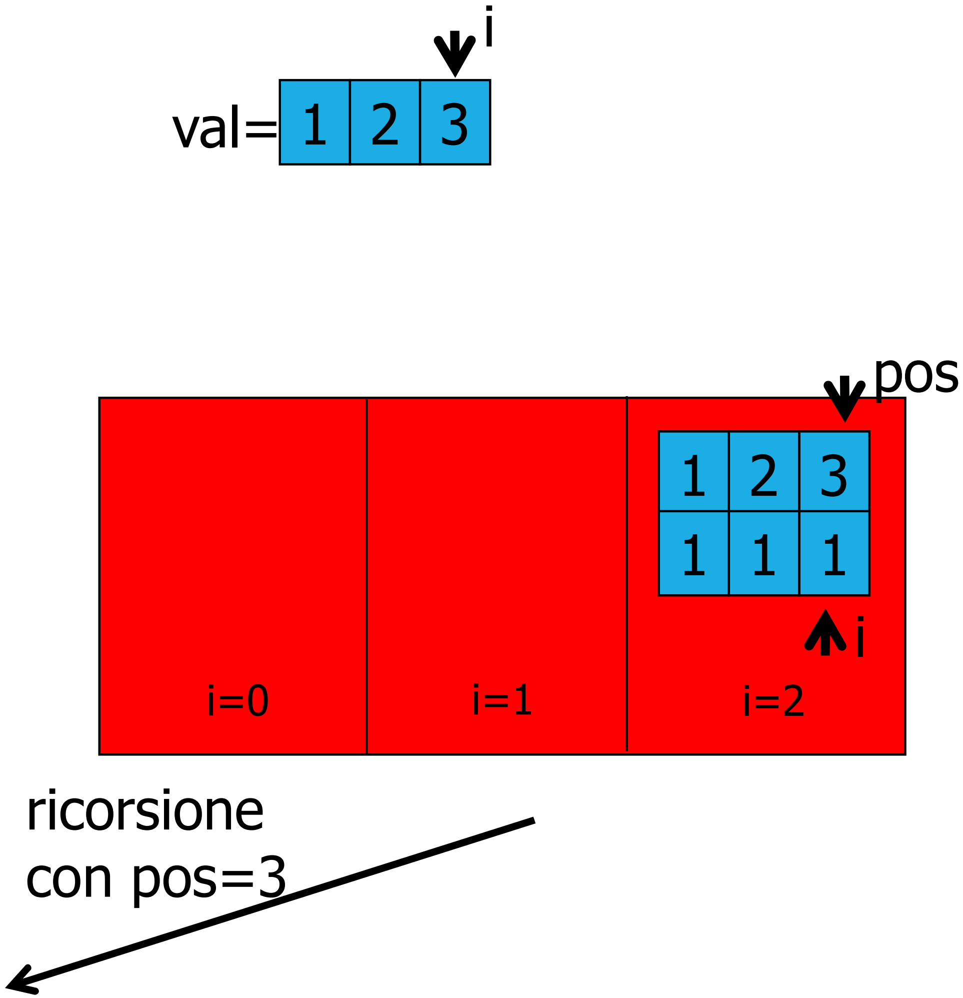


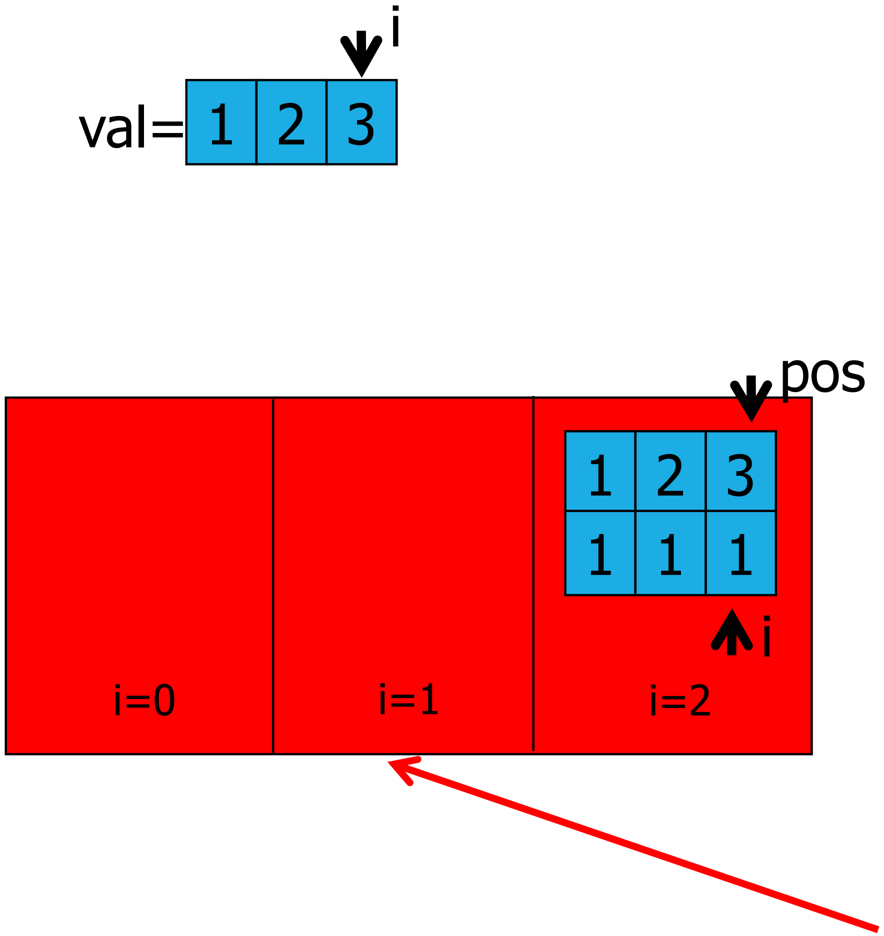
mark[i] = 1



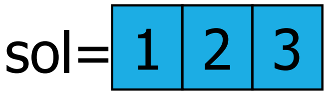
mark[i] = 0

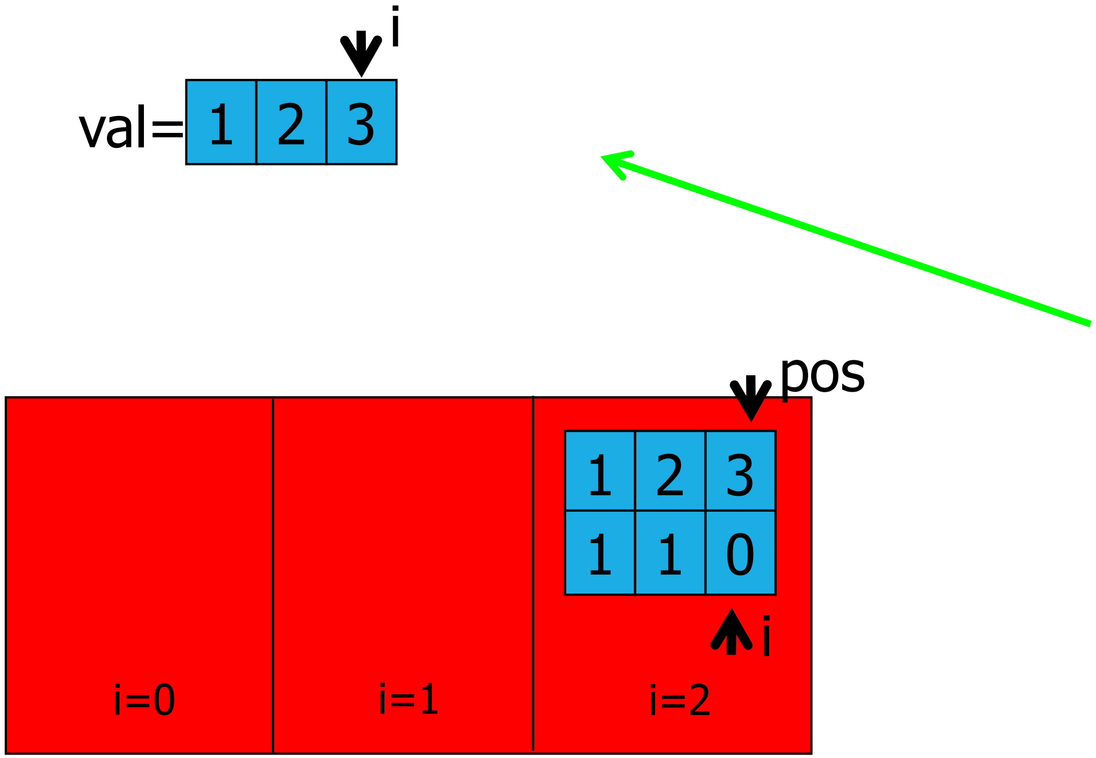
sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1


i
val=
1 2 3
pos
1 2 3
1 1 1
i
i=0
i=1
i=2
ricorsione
con pos=3



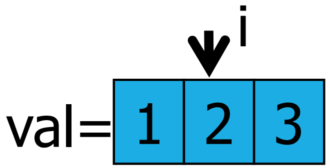
terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

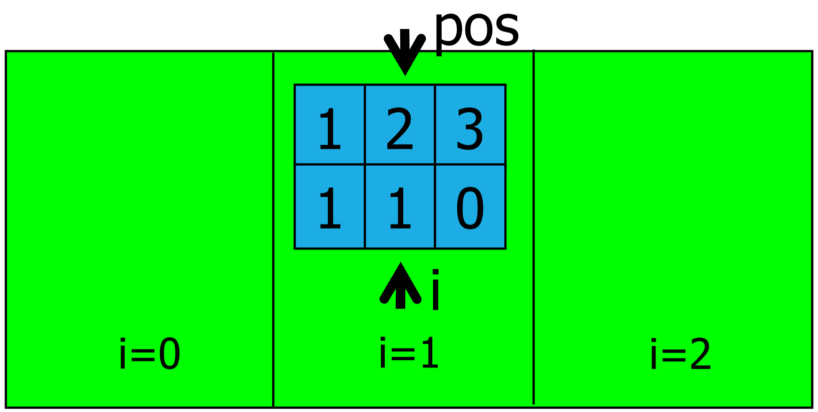


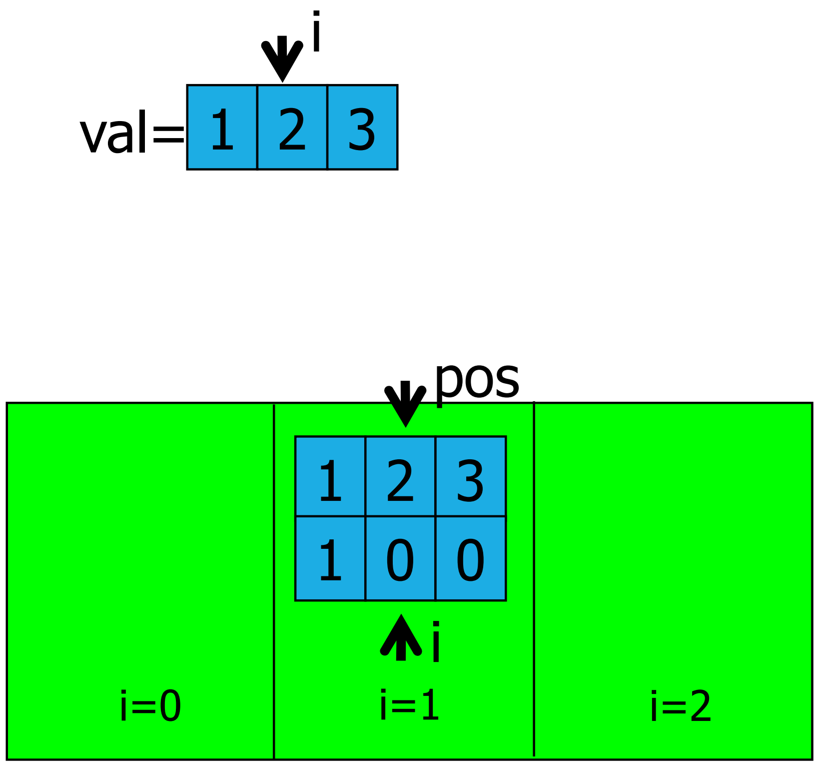


smarca mark[i]

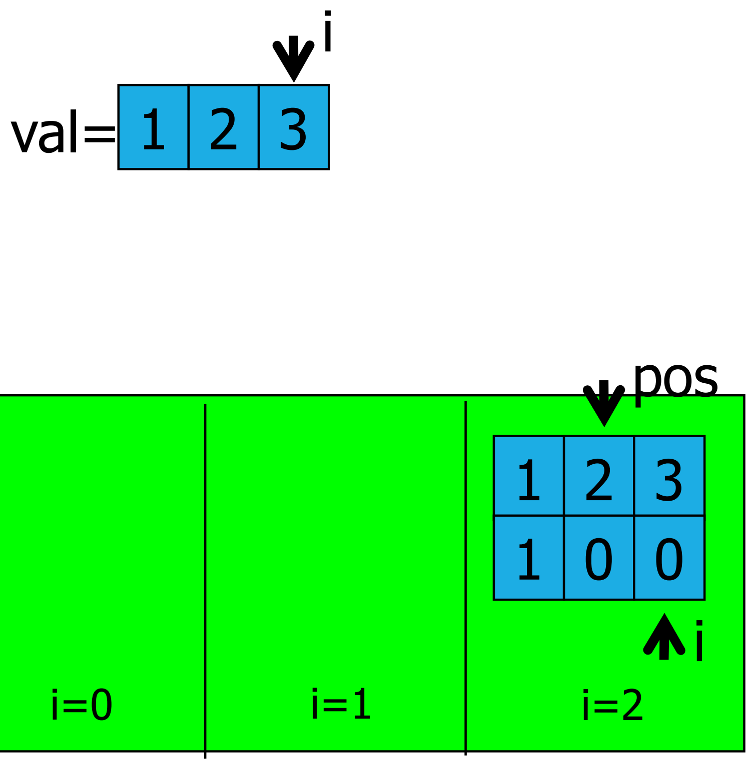
ciclo for terminato, ritorna


i
val=
1
2
3


pos
1
2
3
1
1
0
i
i=0
i=1
i=2

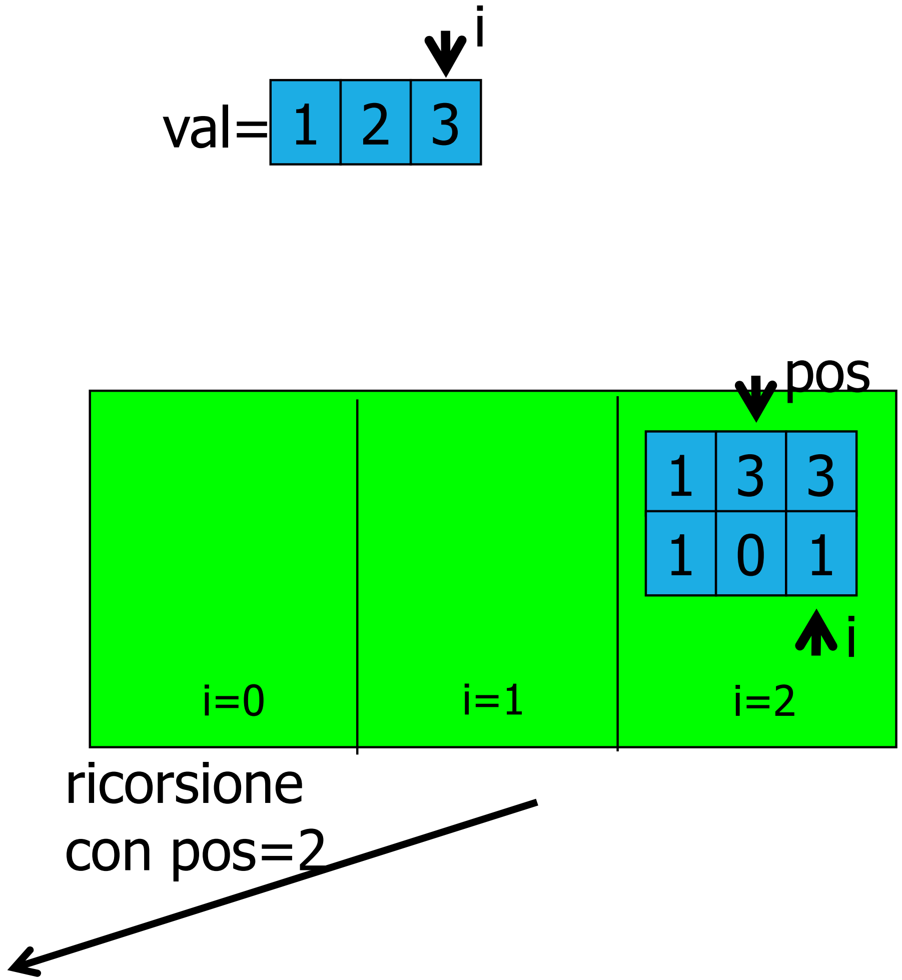


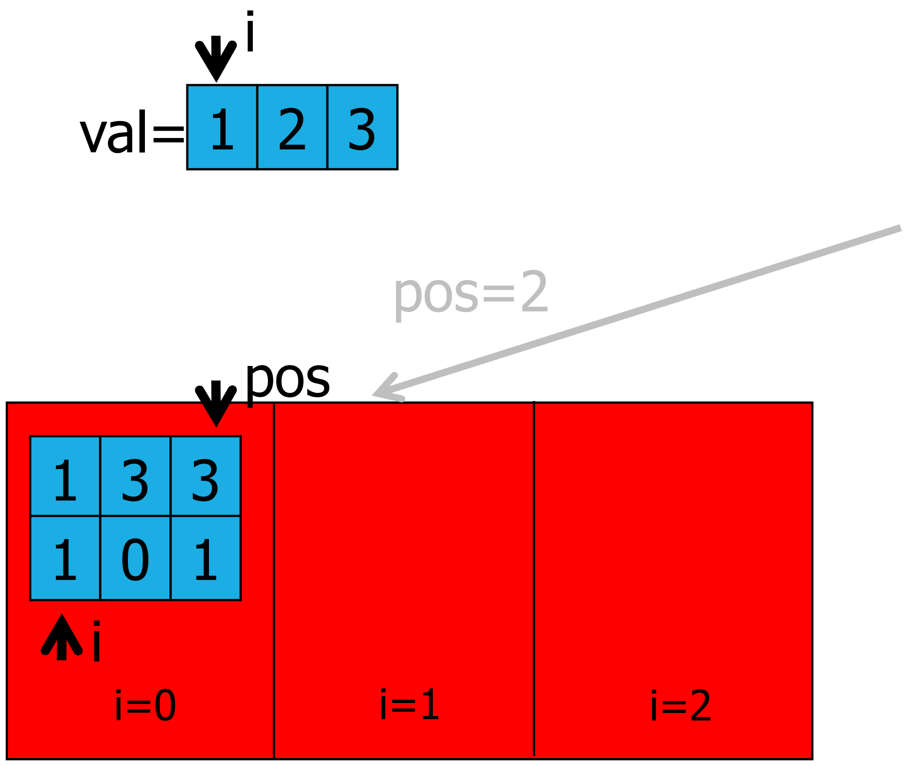
smarca mark[i]



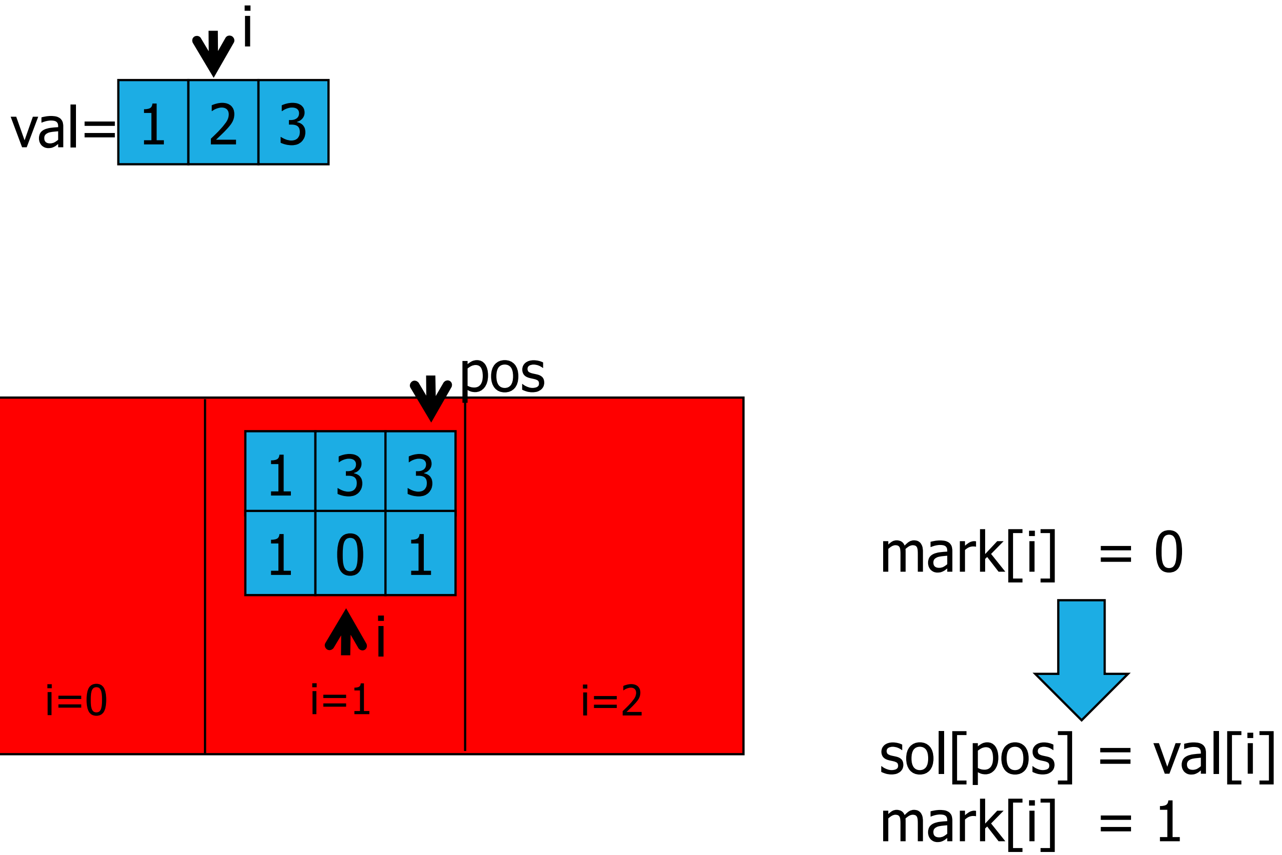
mark[i] = 0

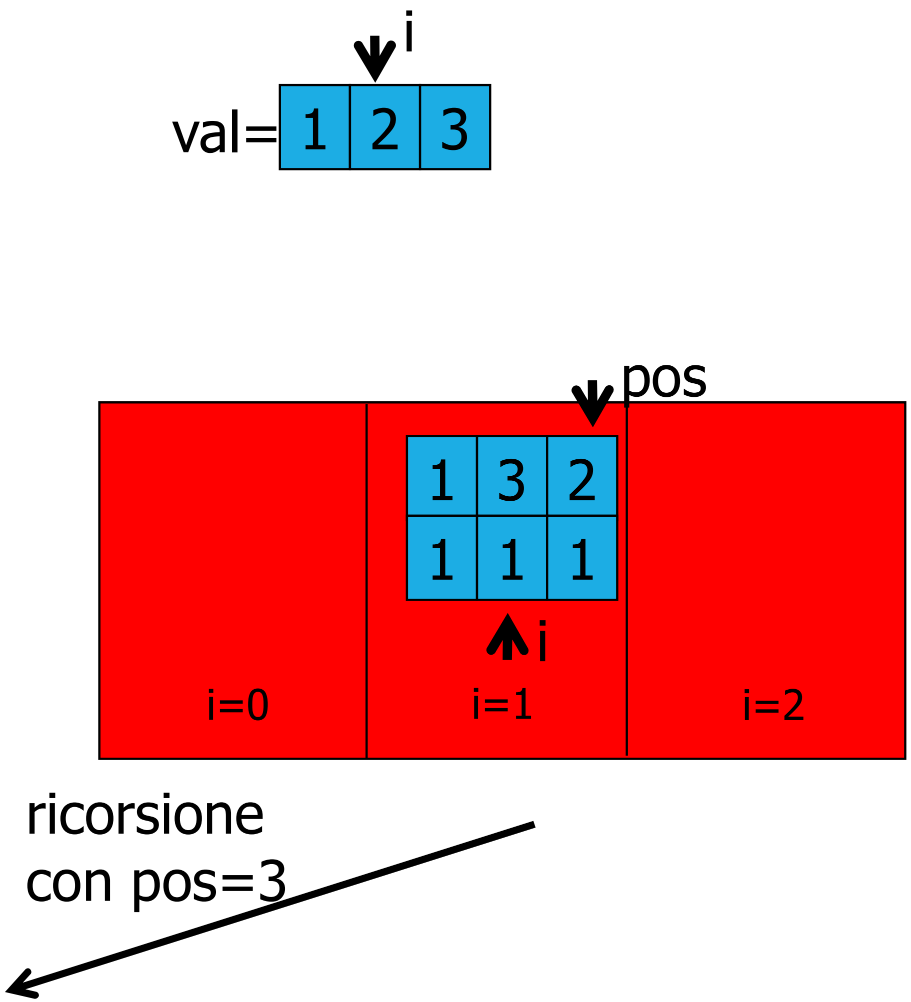
sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1

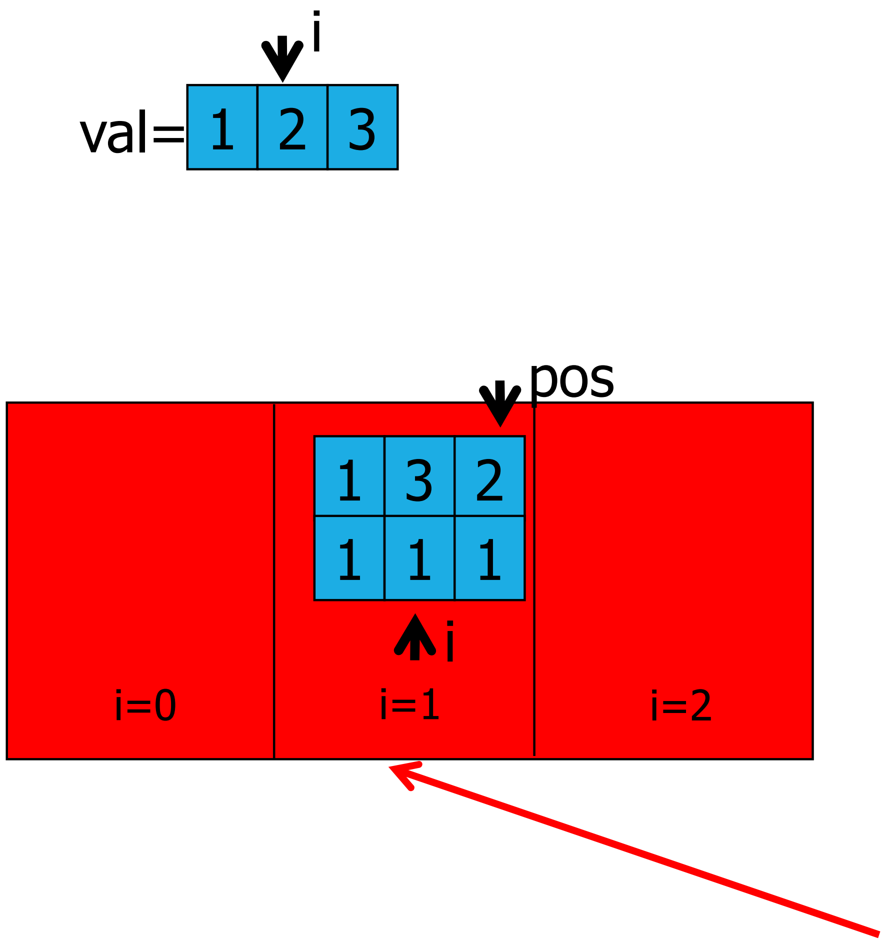

i
val=
1 2 3
pos
1 3 3
1 0 1
i
i=0
i=1
i=2
ricorsione
con pos=2



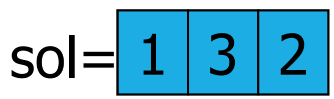
mark[i] = 1

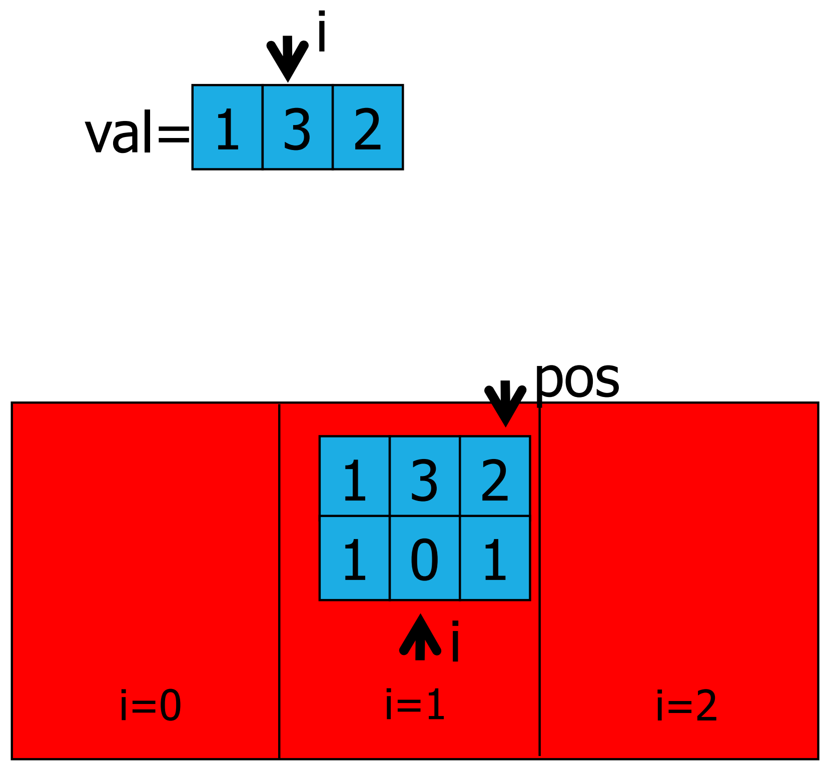

i
val= 1 2 3
pos
1 3 3
1 0 1
i
i=0
i=1
i=2
mark[i] = 0
sol[pos] = val[i]
mark[i] = 1


i
val=
1 2 3
pos
1 3 2
1 1 1
i
i=0
i=1
i=2
ricorsione
con pos=3

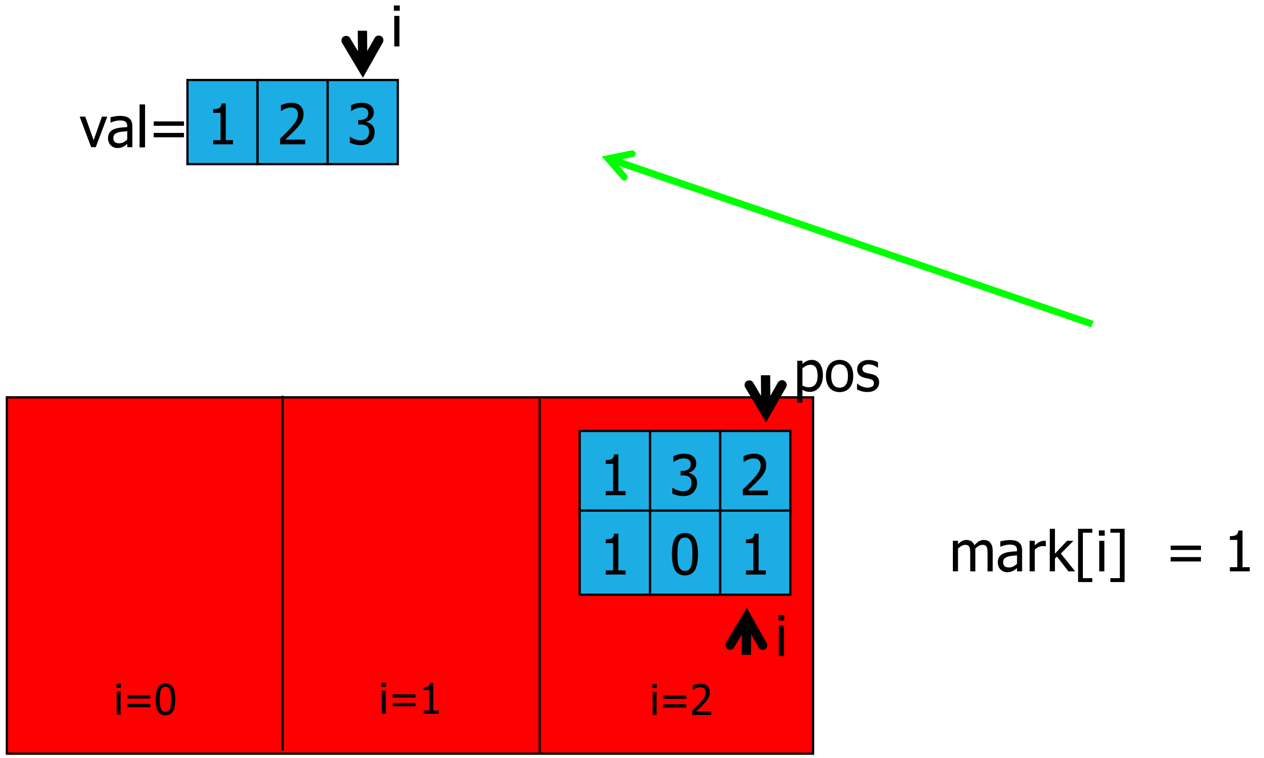


terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

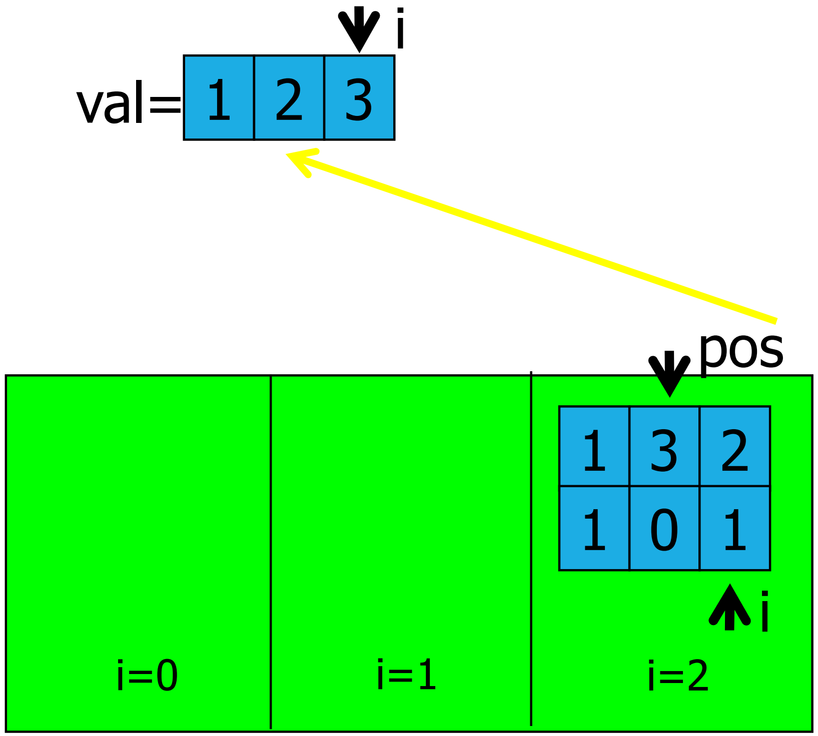




smarca mark[i]



ciclo for terminato, ritorna



ciclo for terminato, ritorna

etc. etc.

Esempio: anagrammi con ripetizioni

Si legga una stringa, se ne generino tutti gli anagrammi.

- Se tutte le lettere della stringa sono distinte, gli anagrammi sono distinti.
- Se le lettere della stringa si ripetono, anche gli anagrammi si ripetono.
- Ipotizzando che le lettere ripetute siano in qualche modo distinguibili, il problema si riconduce alle permutazioni semplici.
- Se la stringa è lunga n, il numero di anagrammi è n!

Esempio

stringa = ORO,   n = 3

n! = 6.

I 6 anagrammi con ripetizione sono:

{ ORO, OOR, ROO, ROO, OOR, ORO }

```c
int anagr(int pos, char *sol, char *val int *mark, int n,  int cnt) {
  int i;
  if (pos >= n) {
     sol[pos] = '\0';
     printf("%s\n", sol);
     return cnt+1;
  }
  for (i=0; i<n; i++)
    if (mark[i] == 0) {
      mark[i] = 1;
      sol[pos] = val[i];
      cnt = anagrammi(pos+1,sol,val,mark,n,cnt);
      mark[i] = 0;
    }
  return cnt;
}
```

02anagrammi_con_ripetizioni

Permutazioni ripetute

Si procede in maniera analoga alle permutazioni semplici, con le seguenti variazioni:

- `n` è la cardinalità del multiinsieme
- si memorizzano nel vettore `dist_val` di `n_dist` celle gli elementi distinti del multiinsieme
  - si ordina il vettore val con un algoritmo O(nlogn)
  - si «compatta» `val` eliminando gli elementi duplicati e lo si memorizza in `dist_val` con un algoritmo O(n)

- il vettore `mark` di `n_dist` elementi registra all'inizio il numero di occorrenze degli elementi distinti del multiset
- l'elemento `dist_val[i]` viene preso se `mark[i]>0`, `mark[i]` viene decrementato
- al ritorno dalla ricorsione `mark[i]` viene incrementato
- `cnt` registra il numero di soluzioni.

```c
int perm_r(int pos, int *dist_val, int *sol,int *mark,
           int n, int n_dist, int cnt) {
  int i;
  if (pos >= n) {
    for (i=0; i<n; i++)
      printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i=0; i<n_dist; i++) {
    if (mark[i] > 0) {
      mark[i]--;
      sol[pos] = dist_val[i];
      cnt=perm_r(pos+1,dist_val,sol,mark,n, n_dist,cnt);
      mark[i]++;
    }
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle n_dist scelte

controllo occorrenze

marcamento e scelta

ricorsione

smarcamento

```c
val = malloc(n*sizeof(int));
dist_val = malloc(n*sizeof(int));
sol = malloc(n*sizeof(int));
```

Esempio: anagrammi distinti

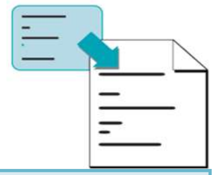
Data una stringa con lettere eventualmente ripetute, generare tutti i suoi anagrammi distinti.

stringa ORO   n = 3

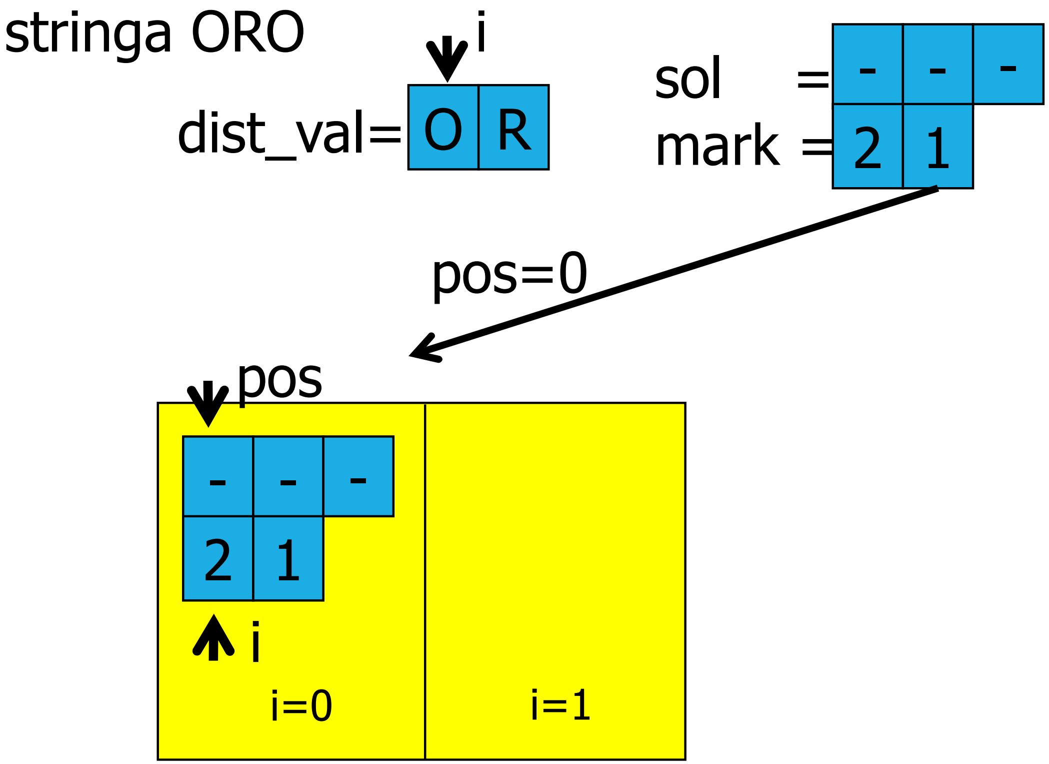
dist_val = { O, R } , n_dist = 2

$P^{(2)}_3 = 3!/2! = 3$

Soluzione
{ OOR, ORO, ROO }

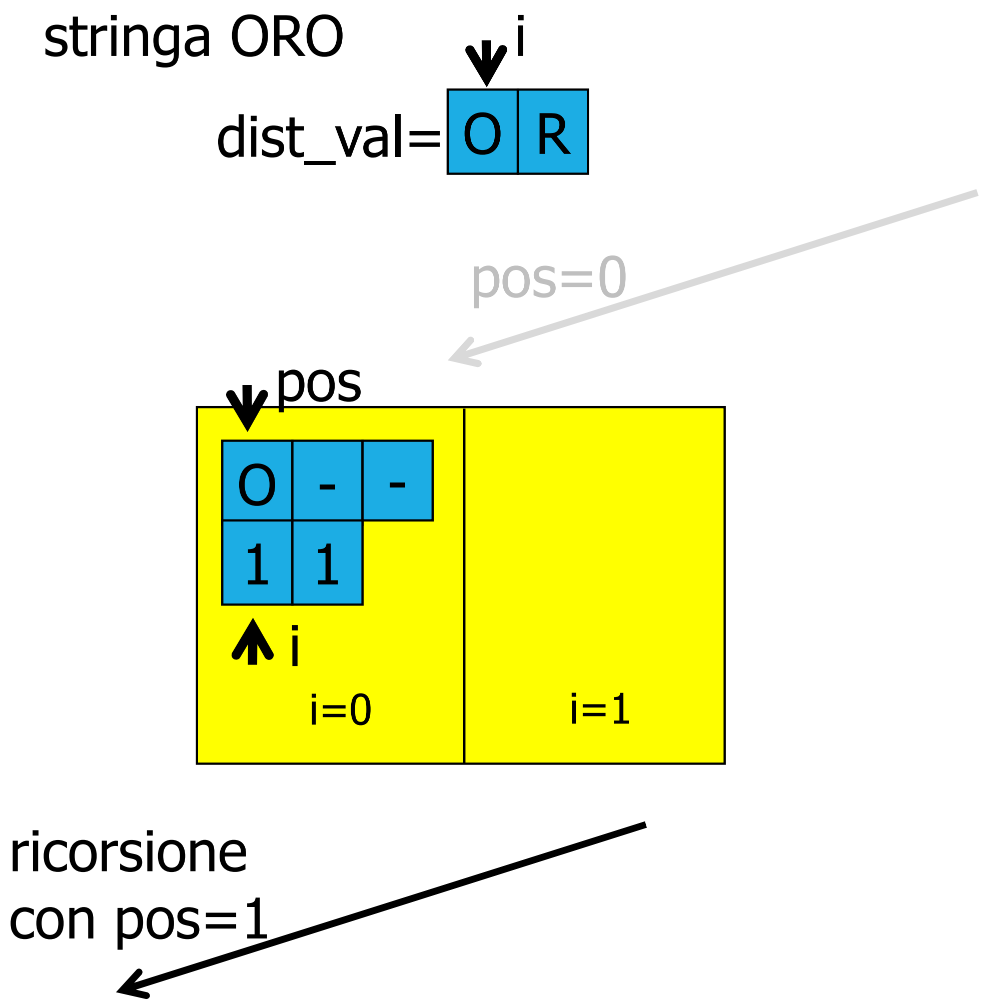


03anagrammi_distinti

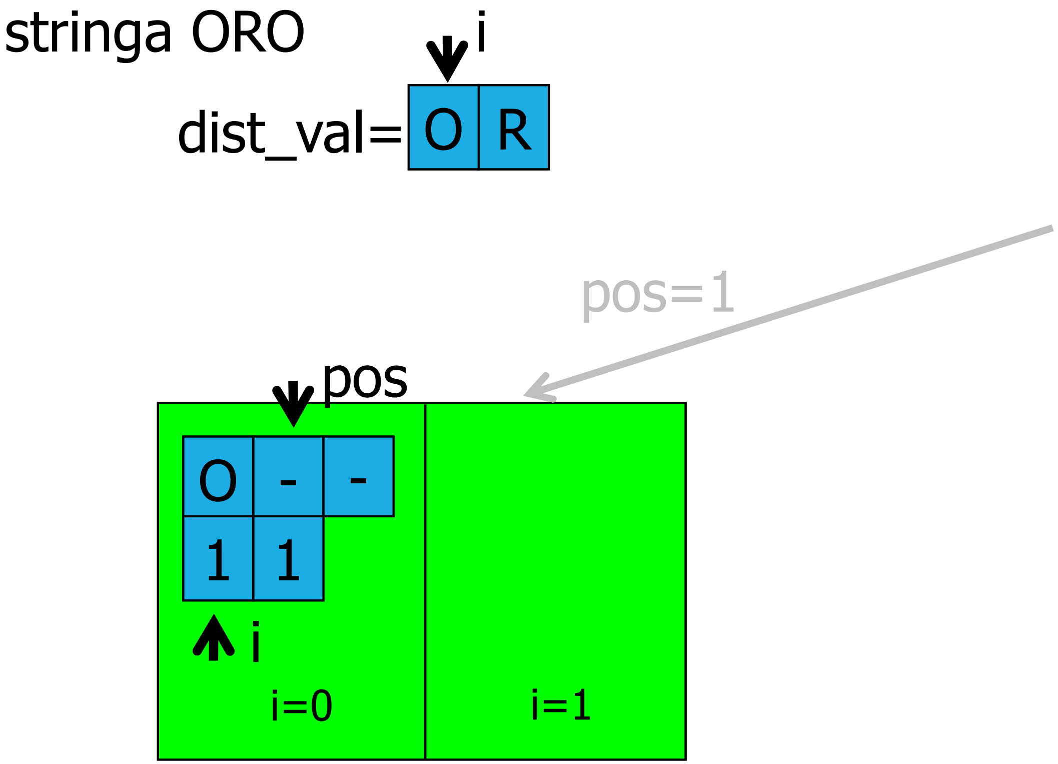


mark[i] > 0

sol[pos] = val[i]
mark[i]--



stringa ORO
i
dist_val=
O
R
pos=0
pos
O
-
-
1
1
i
i=0
i=1
ricorsione
con pos=1

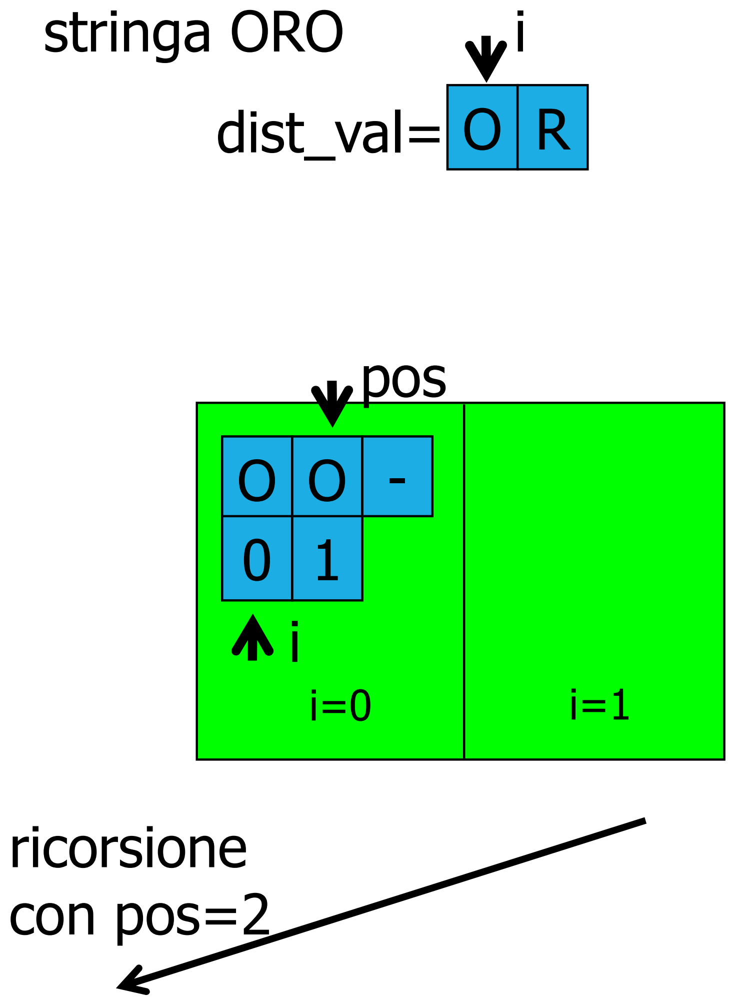


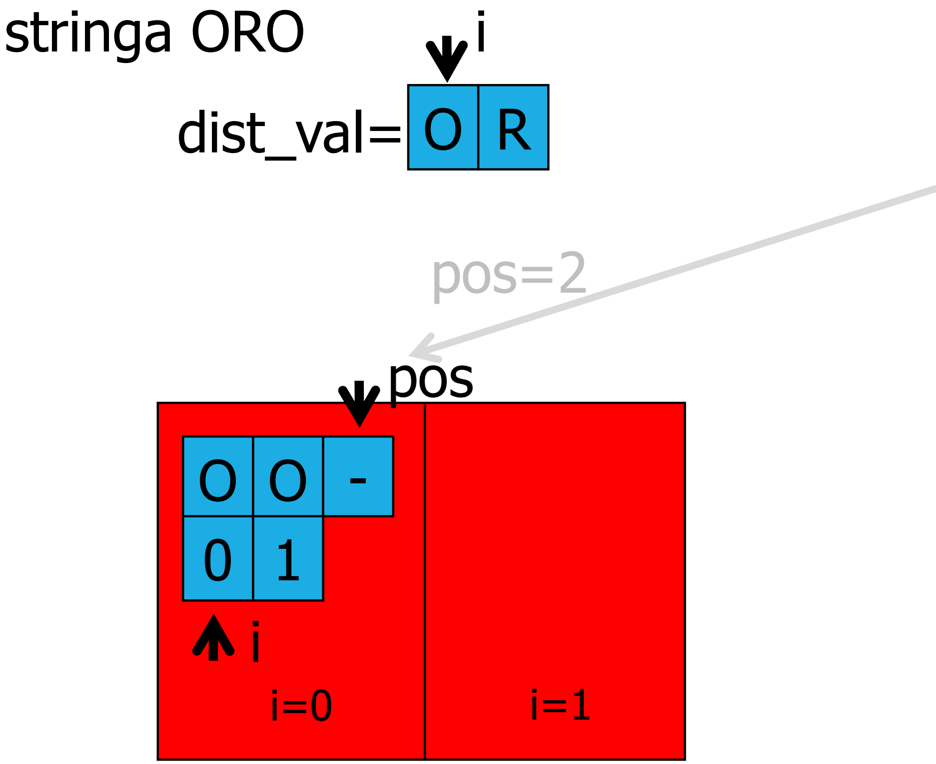
mark[i] > 0

⇓

sol[pos] = val[i]
mark[i]--

stringa ORO

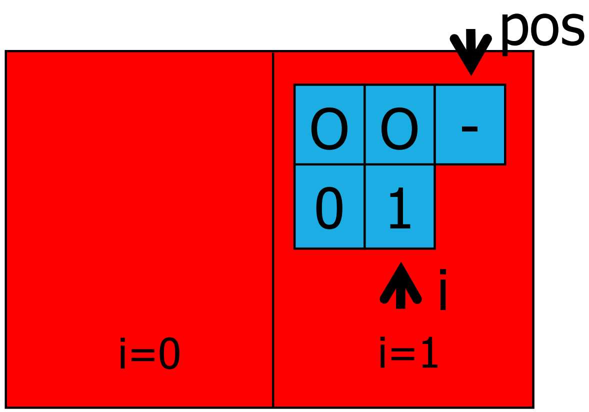




mark[i] non è > 0

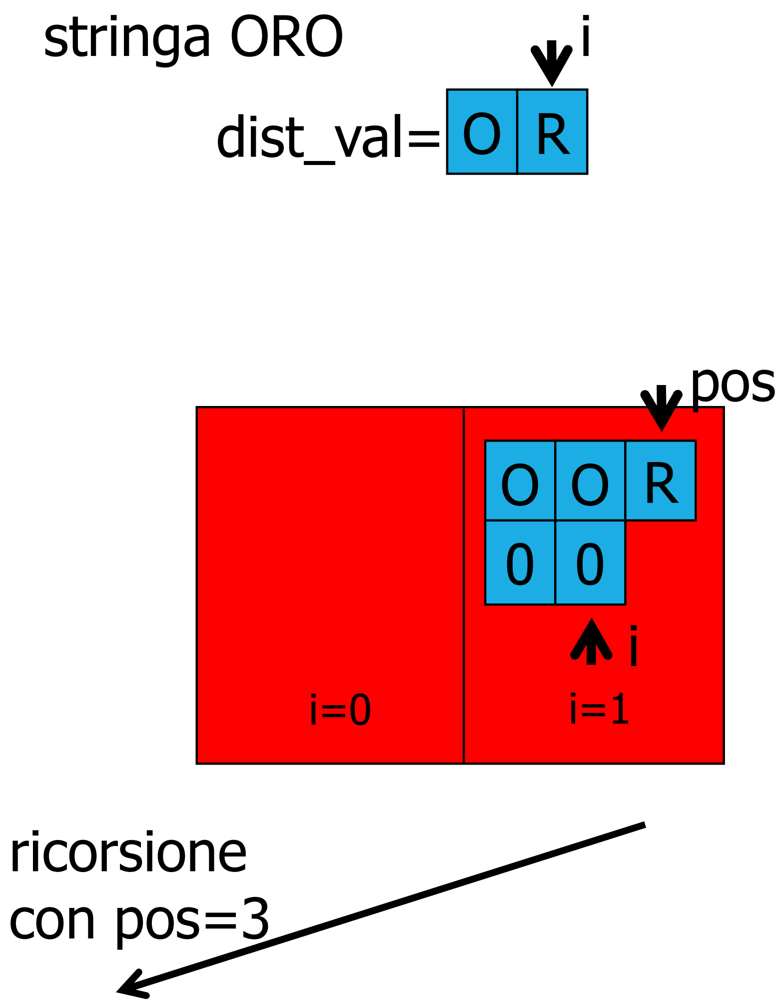
stringa ORO

dist_val= | O | R |

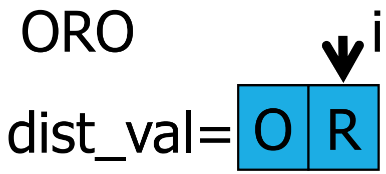


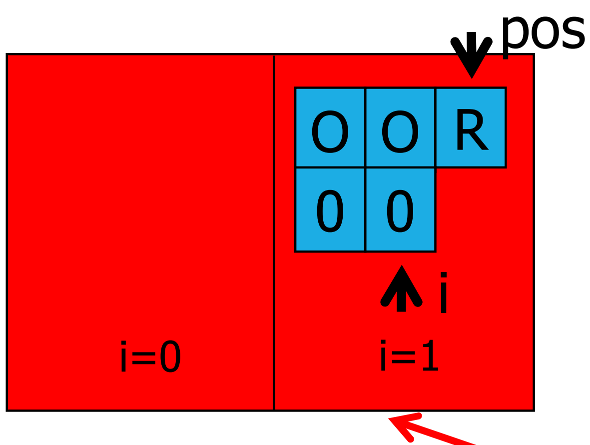
mark[i] > 0

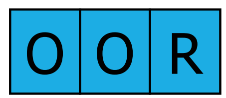
sol[pos] = val[i]
mark[i]--


stringa ORO
i
dist_val= O R
pos
O O R
0 0
i
i=0
i=1
ricorsione
con pos=3

stringa ORO

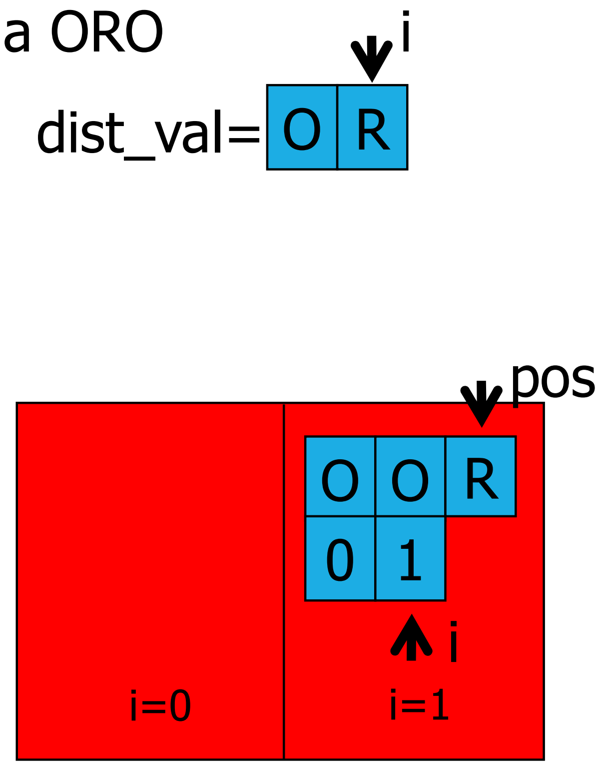






terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

stringa ORO



mark[i]++

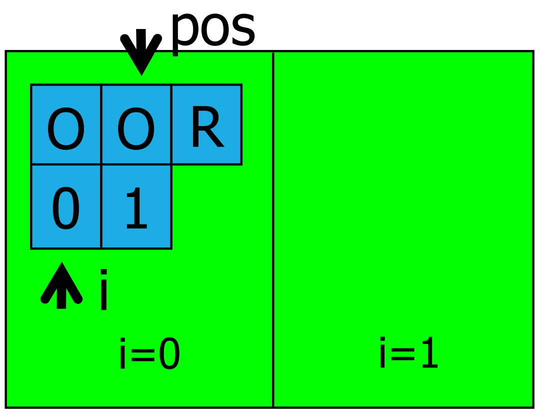
backtrack

ciclo for terminato, ritorna

stringa ORO

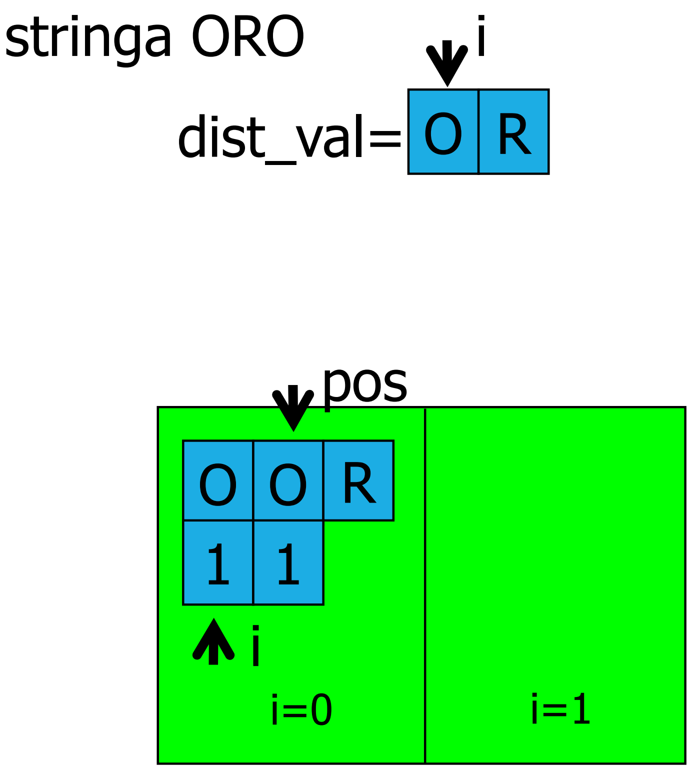
i

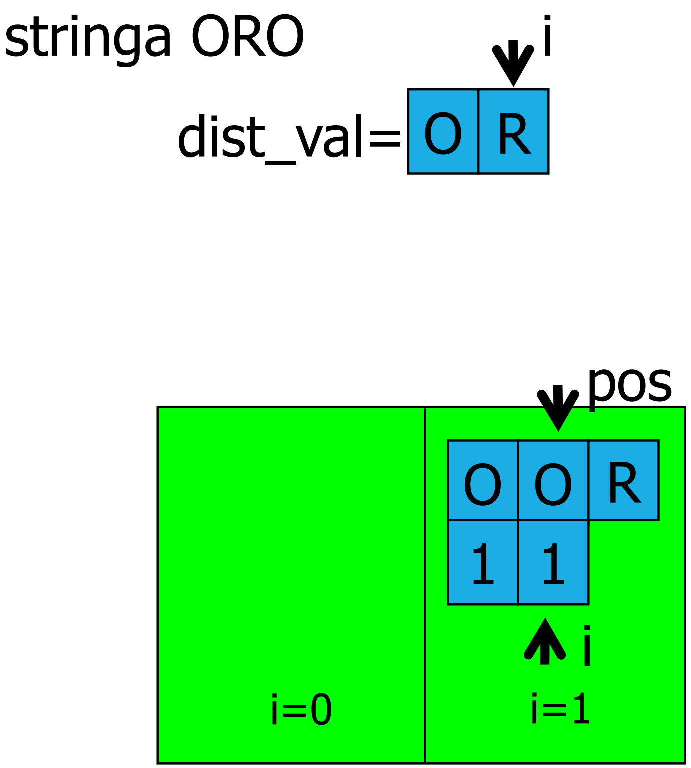
dist_val= | O | R |



mark[i]++

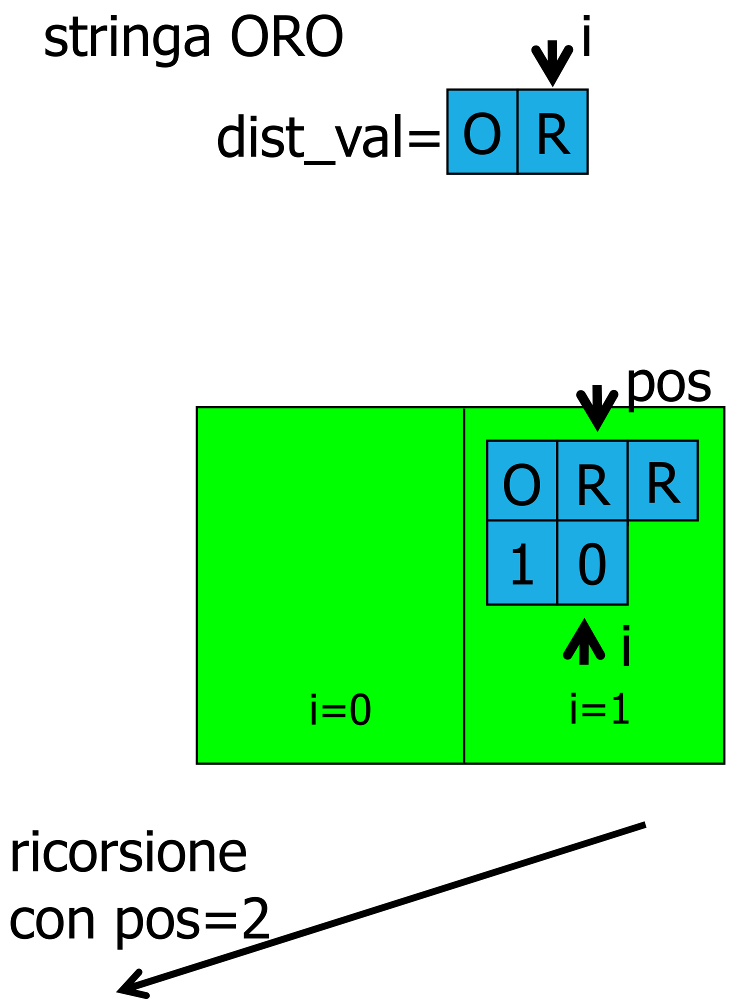
backtrack

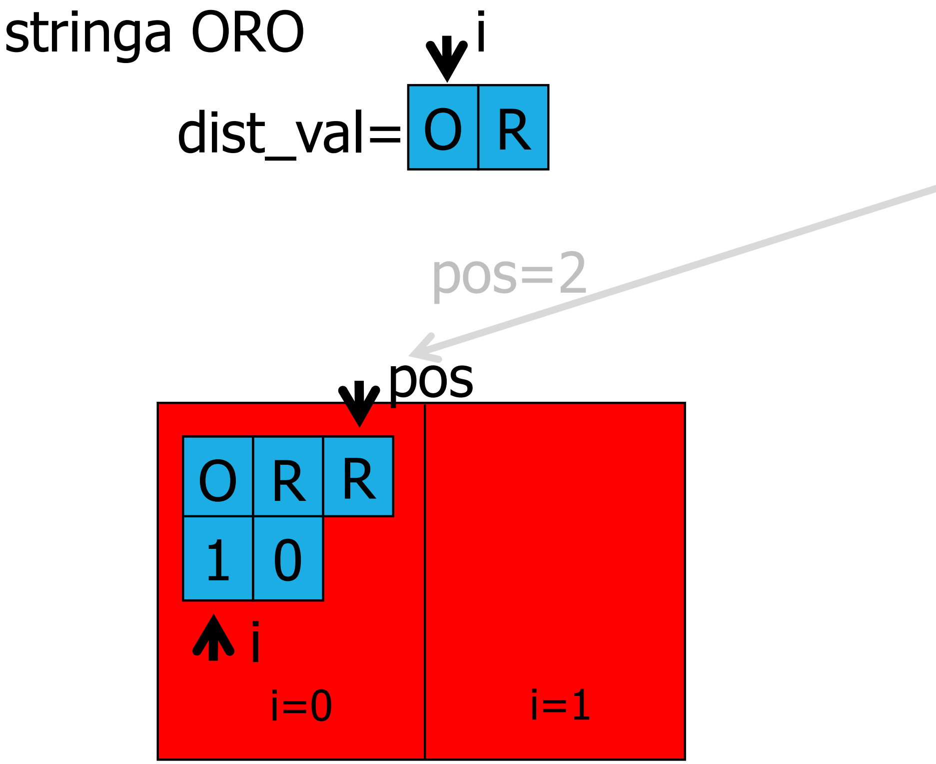

stringa ORO
i
dist_val=
O
R
pos
O
O
R
1
1
i
i=0
i=1



mark[i] > 0

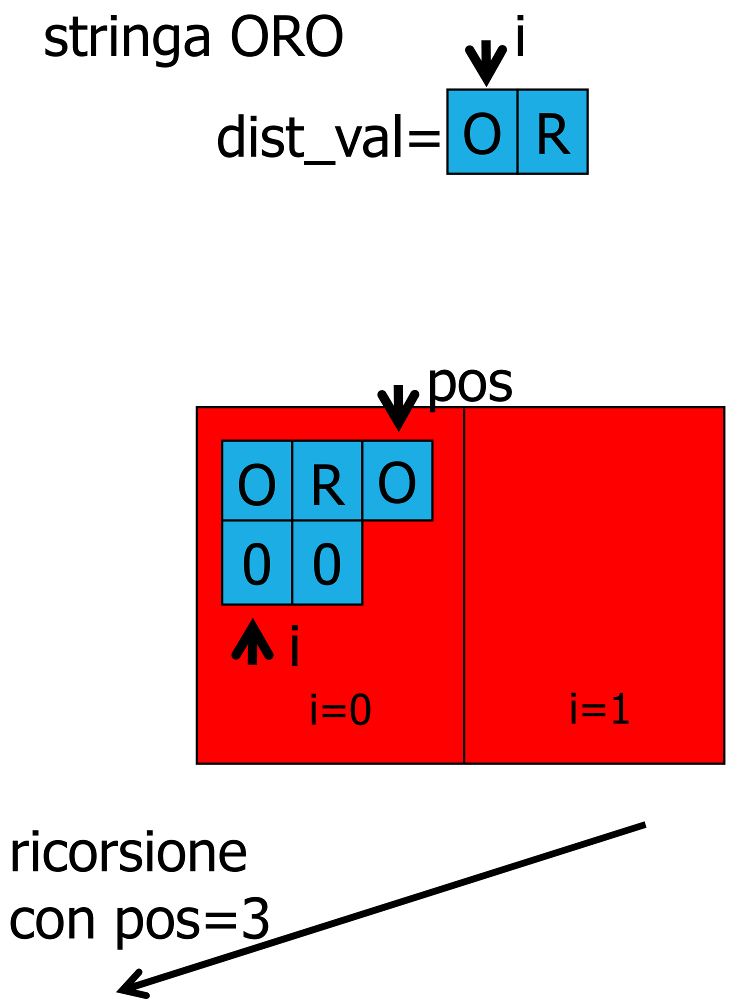
sol[pos] = val[i]
mark[i]--


stringa ORO
i
dist_val=
O
R
pos
O
R
R
1
0
i
i=0
i=1
ricorsione
con pos=2

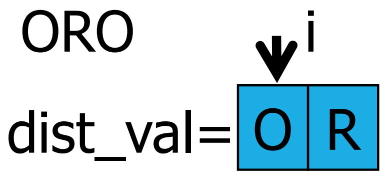


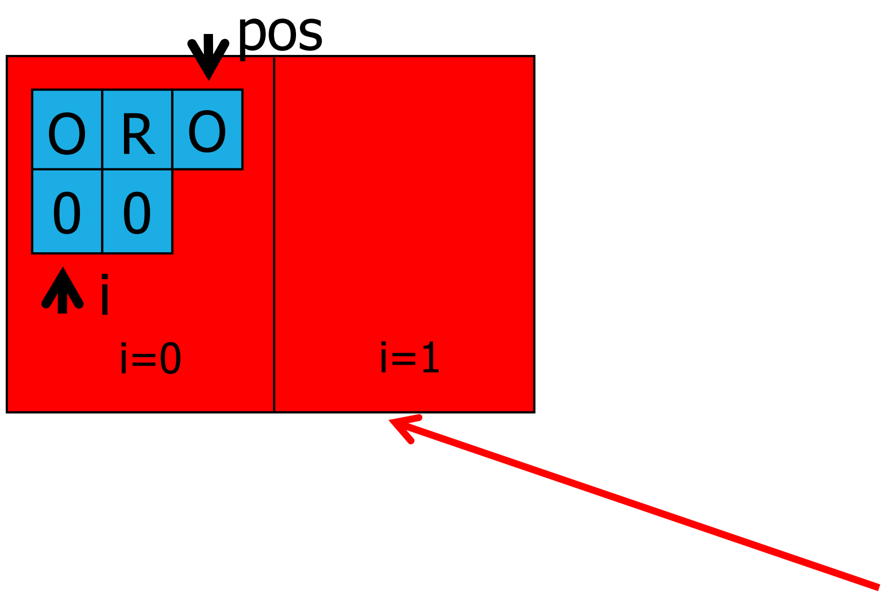
mark[i] > 0

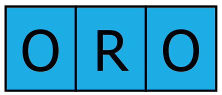
sol[pos] = val[i]
mark[i]--


stringa ORO
i
dist_val=
O R
pos
O R O
0 0
i
i=0
i=1
ricorsione
con pos=3

stringa ORO





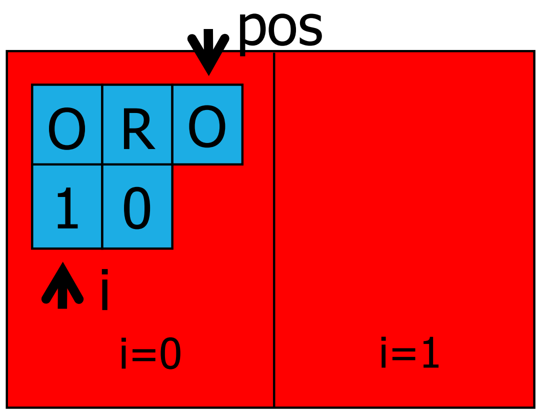


terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

stringa ORO

i

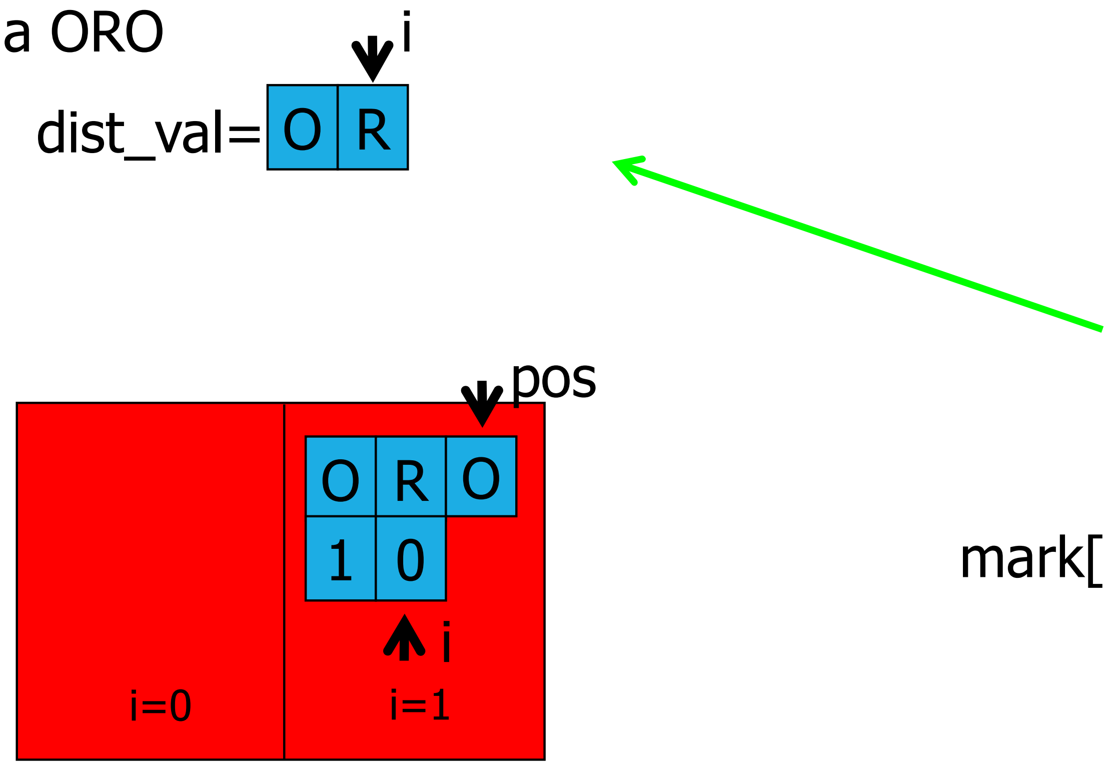
dist_val= O R



mark[i]++

backtrack

stringa ORO



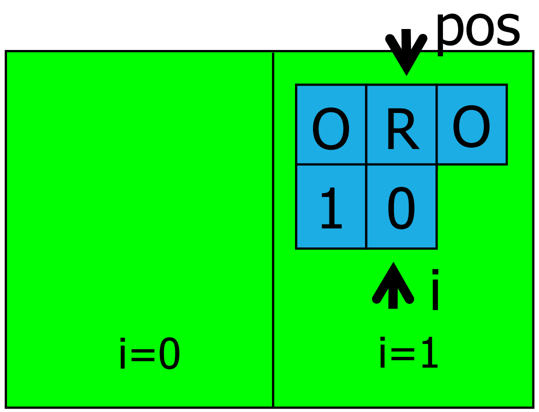
mark[i] non è > 0

ciclo for terminato, ritorna

stringa ORO

i

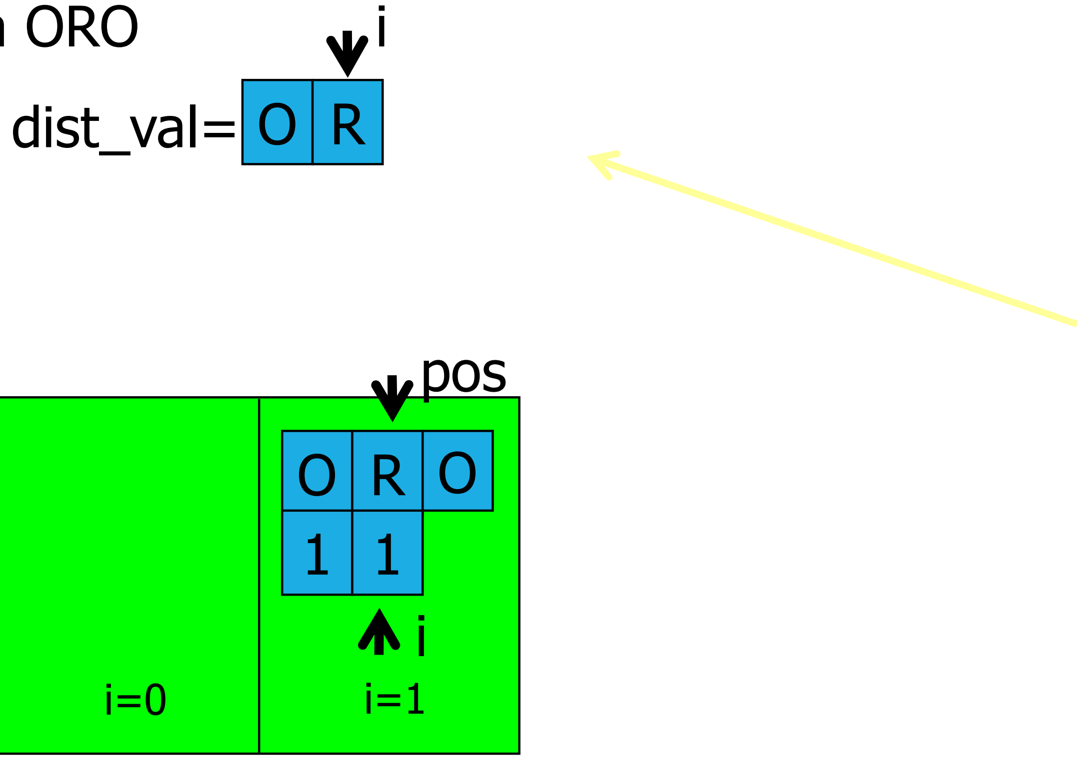
dist_val= O R



mark[i]++

backtrack

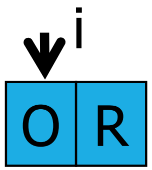
stringa ORO

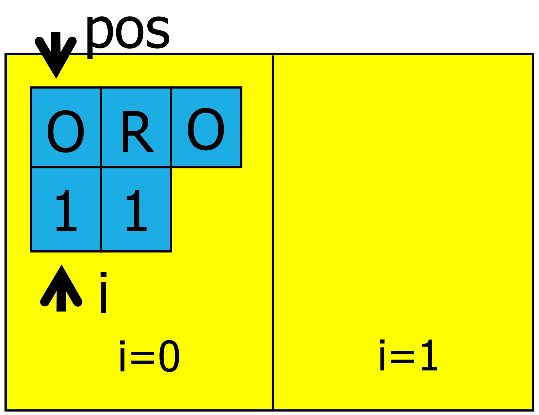


ciclo for terminato, ritorna

stringa ORO

dist_val=

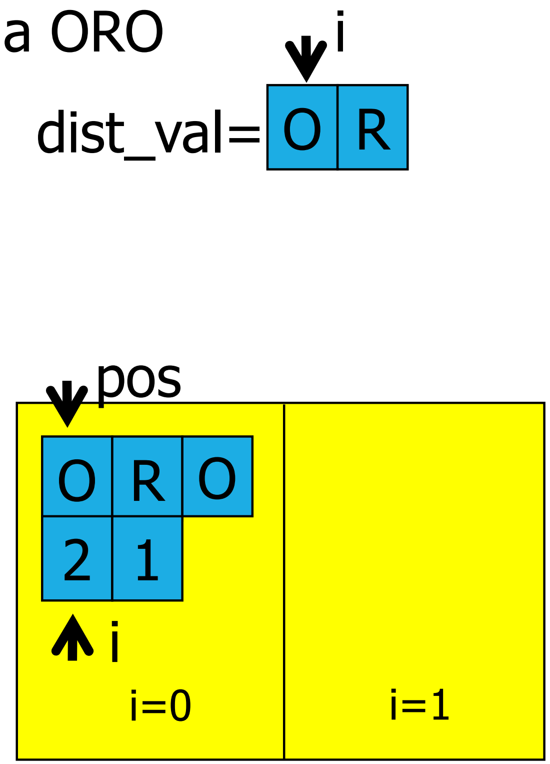




mark[i]++

backtrack

stringa ORO



etc. etc.

Combinazioni semplici

Rispetto alle disposizioni semplici si tratta di «forzare» uno dei possibili ordinamenti:

- un indice `start` determina a partire da quale valore di `val` si inizia a riempire `sol`. Il vettore `val` viene scandito tramite indice `i` a partire da `start`
- il vettore `sol` viene riempito a partire dall'indice `pos` con i valori possibili di `val` da `start` in poi
- una volta assegnato a `sol` il valore `val[i]`, si ricorre con `i+1` e `pos+1`
- non serve il vettore `mark`
- `cnt` registra il numero di soluzioni.

```
int comb(int pos, int *val, int *sol, int n, int k, int start, int cnt) {
  int i, j;
  if (pos >= k) {
    for (i=0; i<k; i++)
      printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i=start; i<n; i++) {
    sol[pos] = val[i];
    cnt = comb(pos+1, val, sol, n, k, i+1, cnt);
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle scelte

scelta: sol[pos] riempito con i valori possibili di `val` da `start` in poi

ricorsione

prossima posizione

prossima scelta

```
val = malloc(n * sizeof(int));
sol = malloc(k * sizeof(int));
```

Esempio: combinazione di k tra n valori

Dato un insieme di n interi, generare tutte le combinazioni semplici di k di questi valori. Il numero di combinazioni è n!/((n-k)!*k!) .

val = {7, 2, 0, 4, 1} :

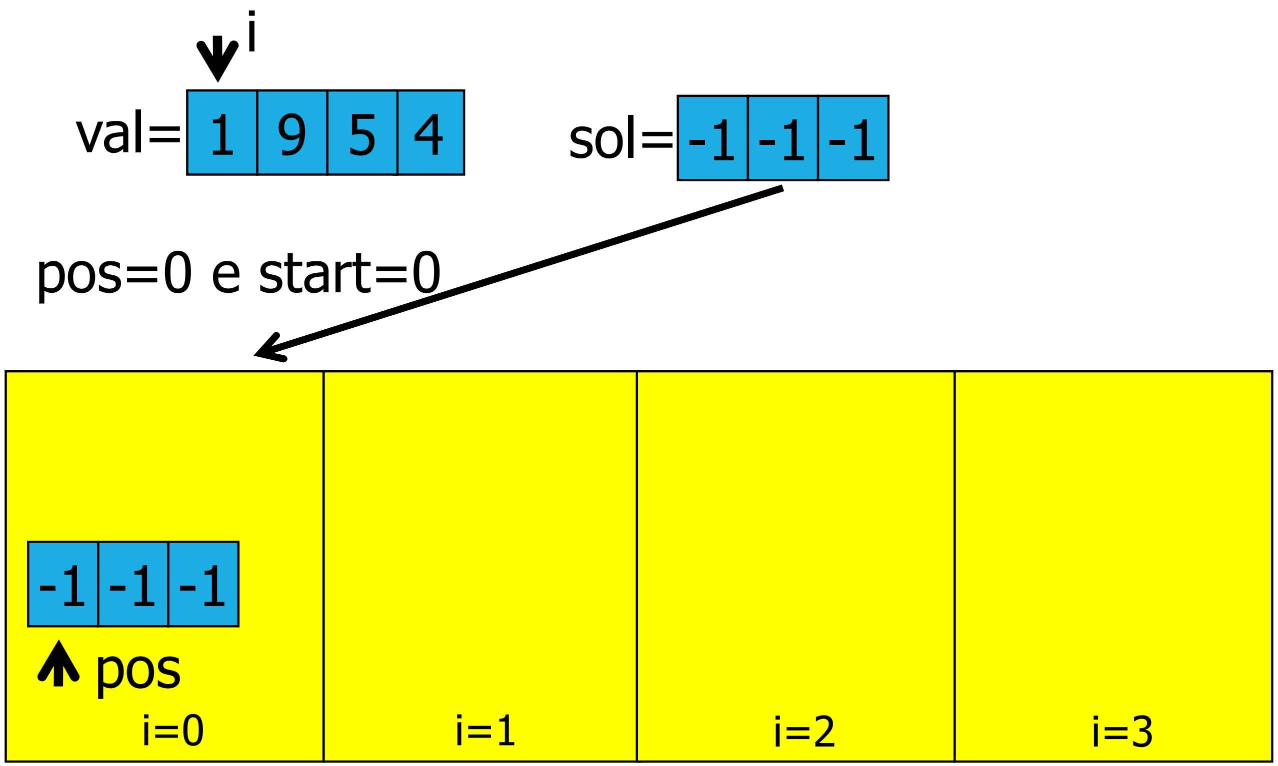
- n = 5 e k = 4: 5 combinazioni

{7,2,0,4} {7,2,0,1} {7,2,4,1} {7,0,4,1} {2,0,4,1}

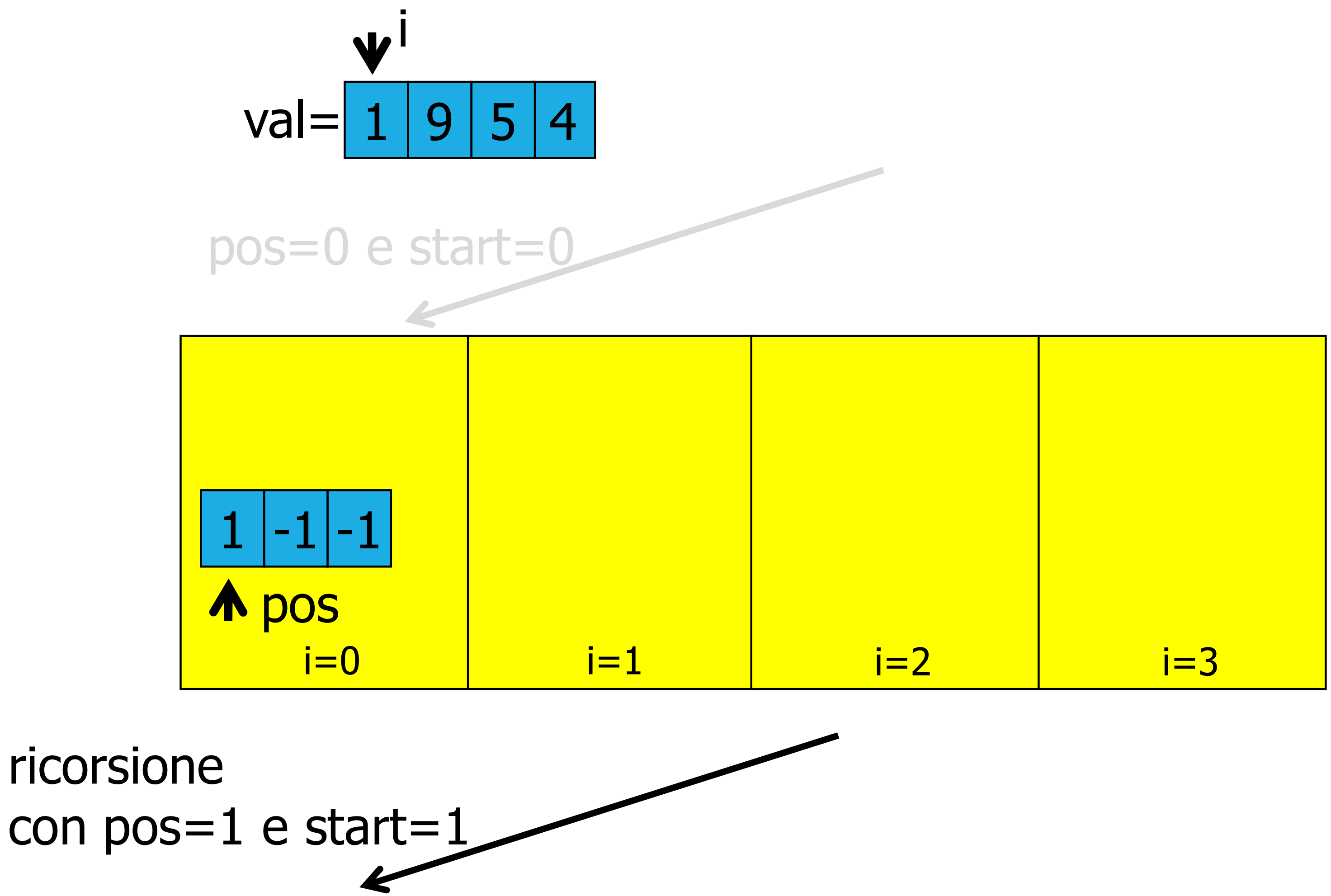
val = {1, 9, 5, 4} :

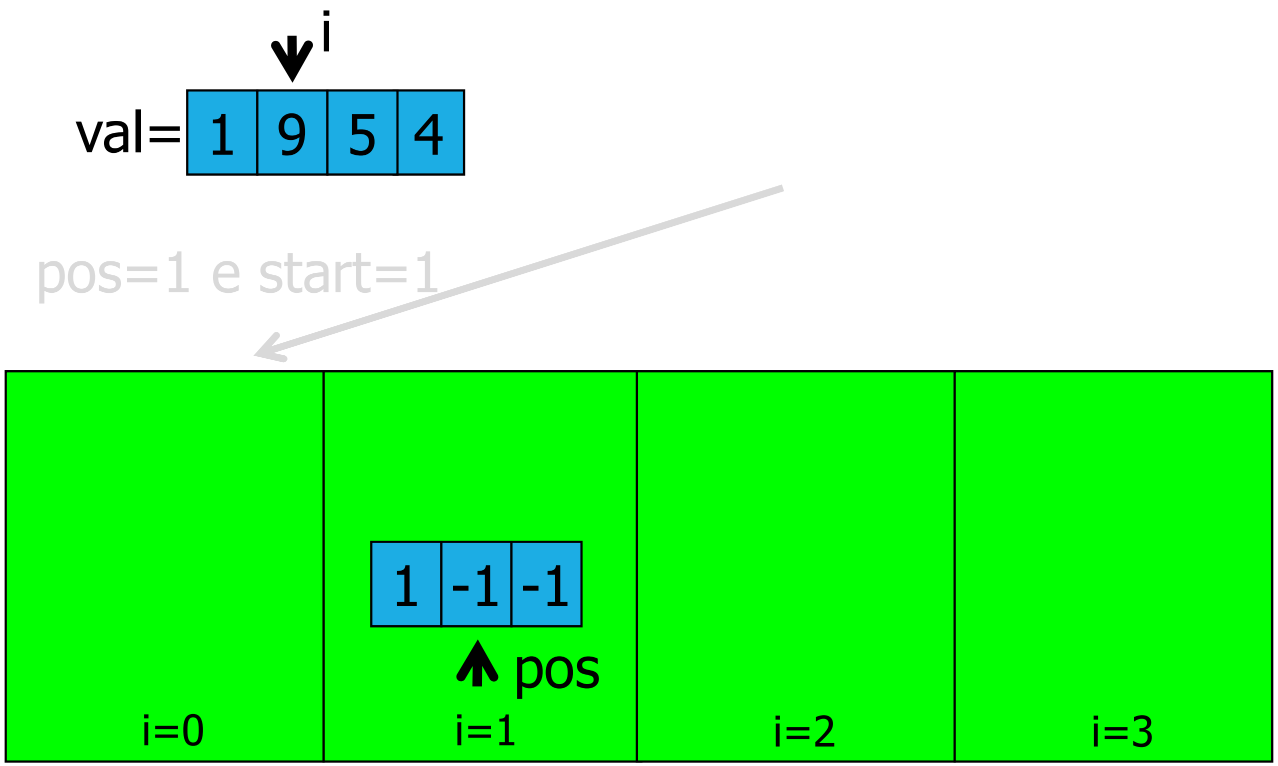
- n = 4 e k = 3: 4 combinazioni

{1,9,5} {1,9,4} {1,5,4} {9,5,4}

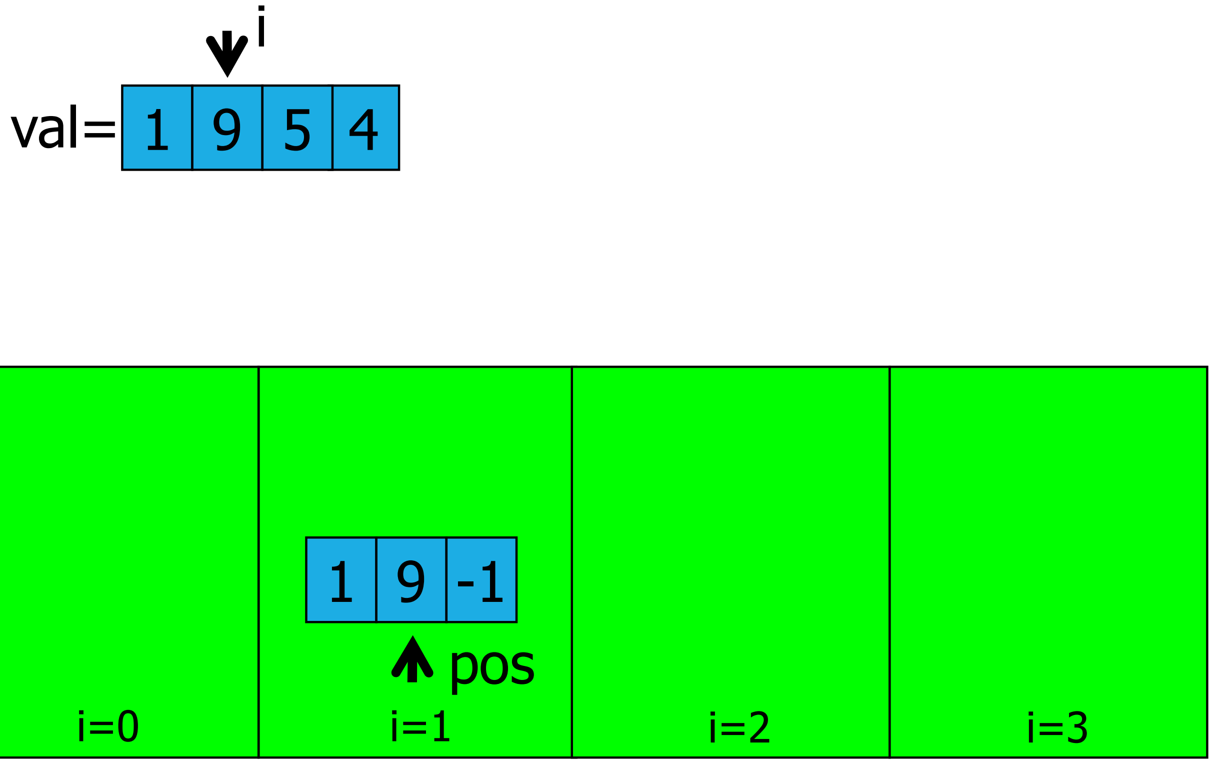


sol[pos] = val[i]

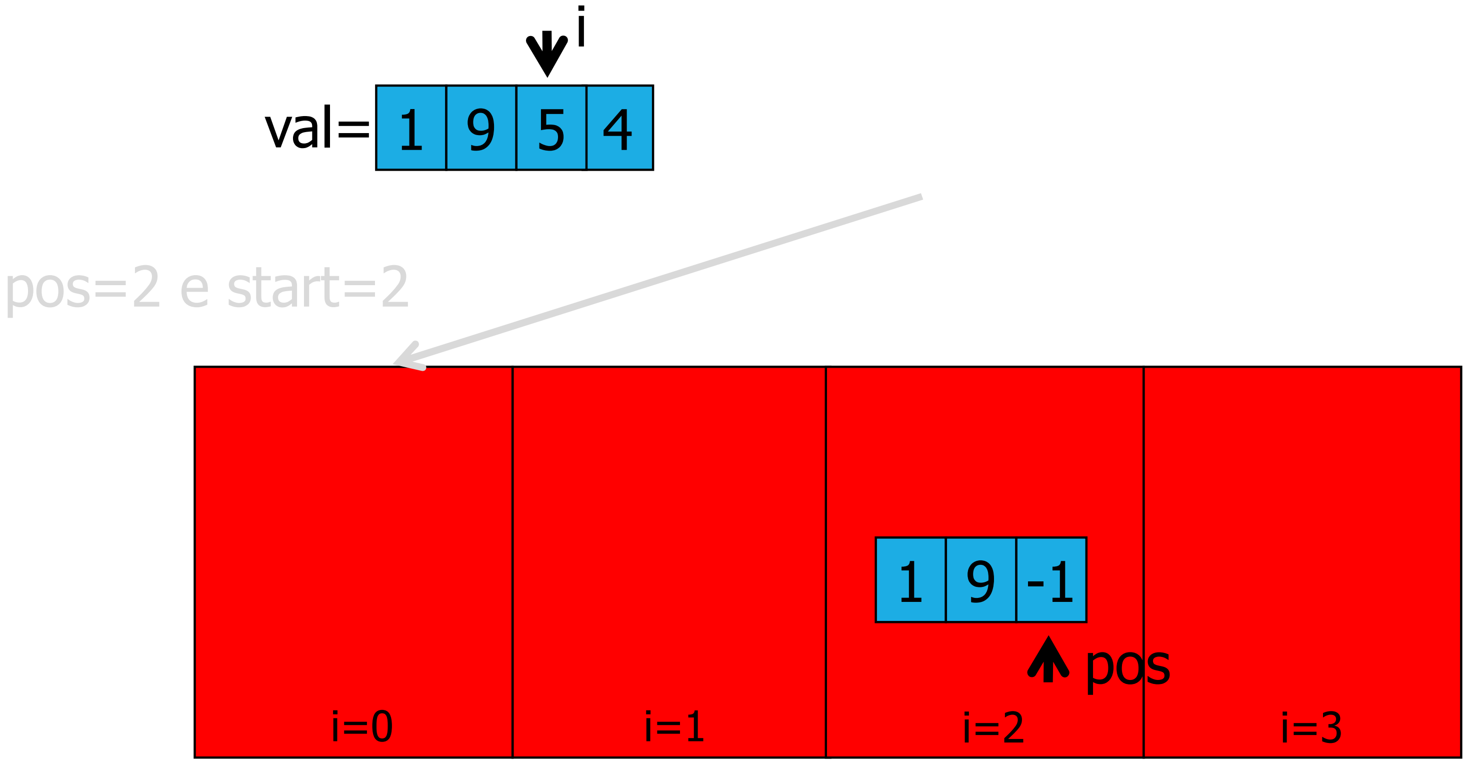

i
val= 1 9 5 4
pos=0 e start=0
1 -1 -1
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=1 e start=1



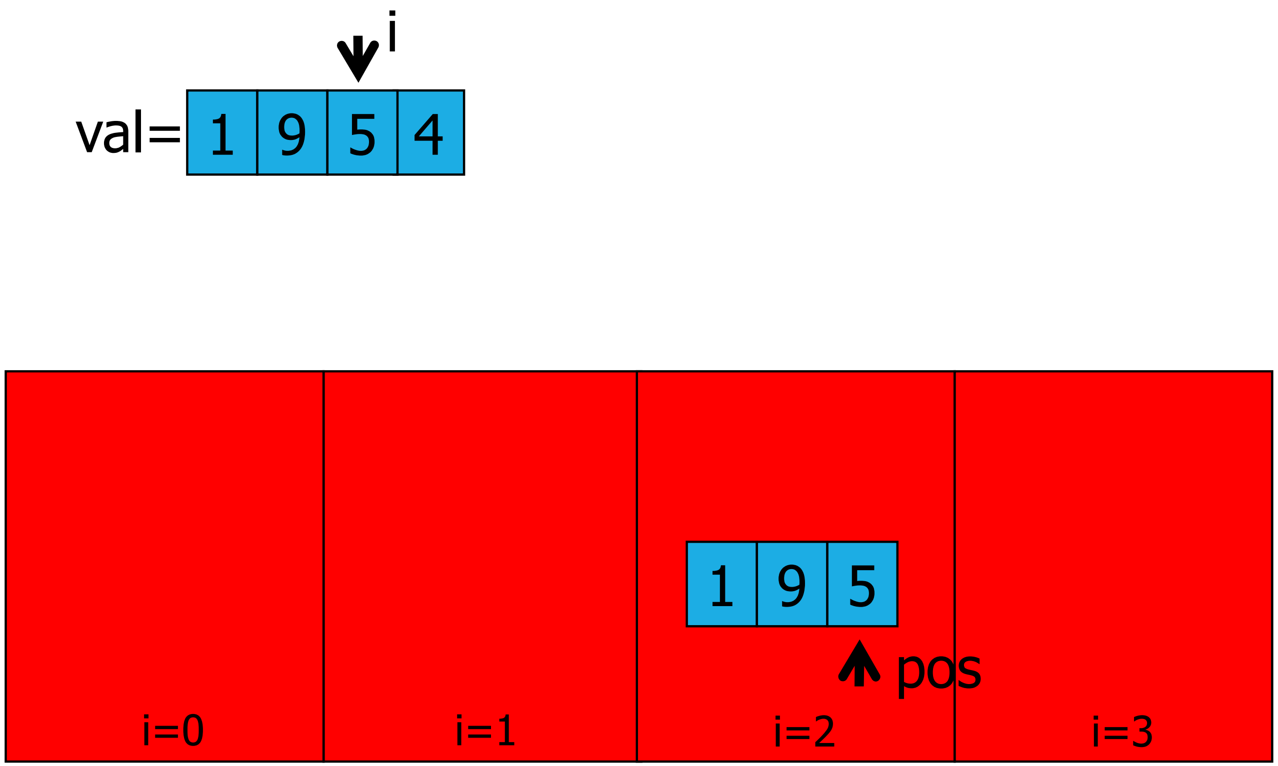
sol[pos] = val[i]



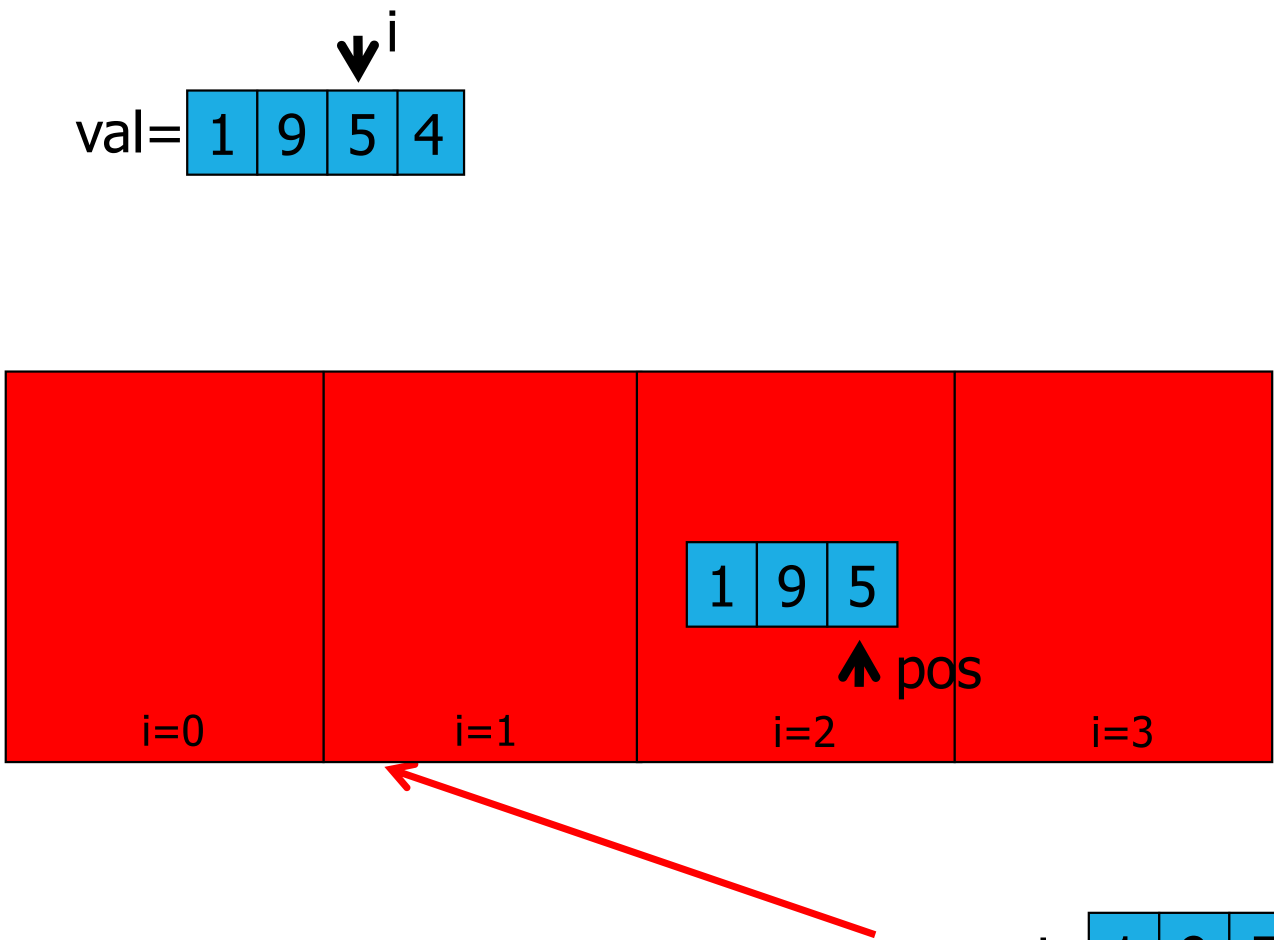
ricorsione
con pos=2 e start=2



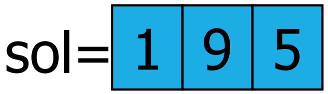
sol[pos] = val[i]

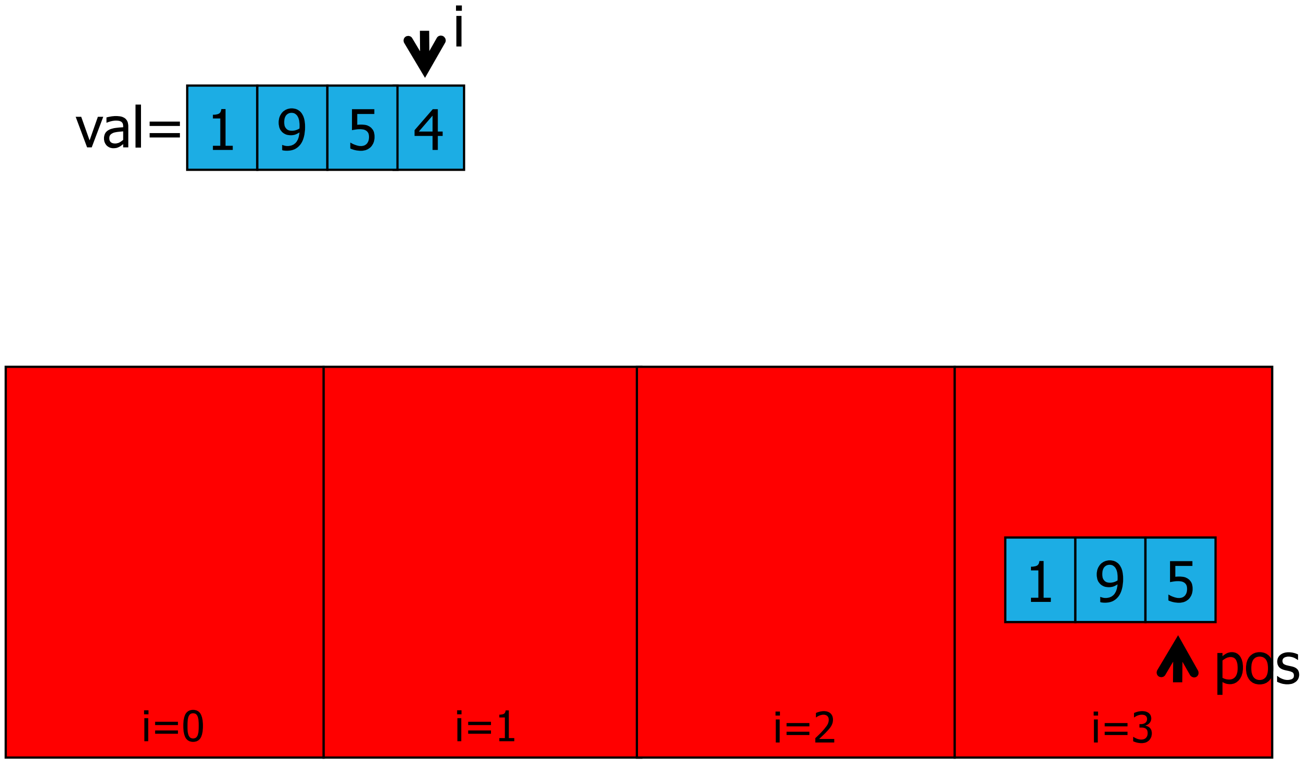


ricorsione
con pos=3 e start=3

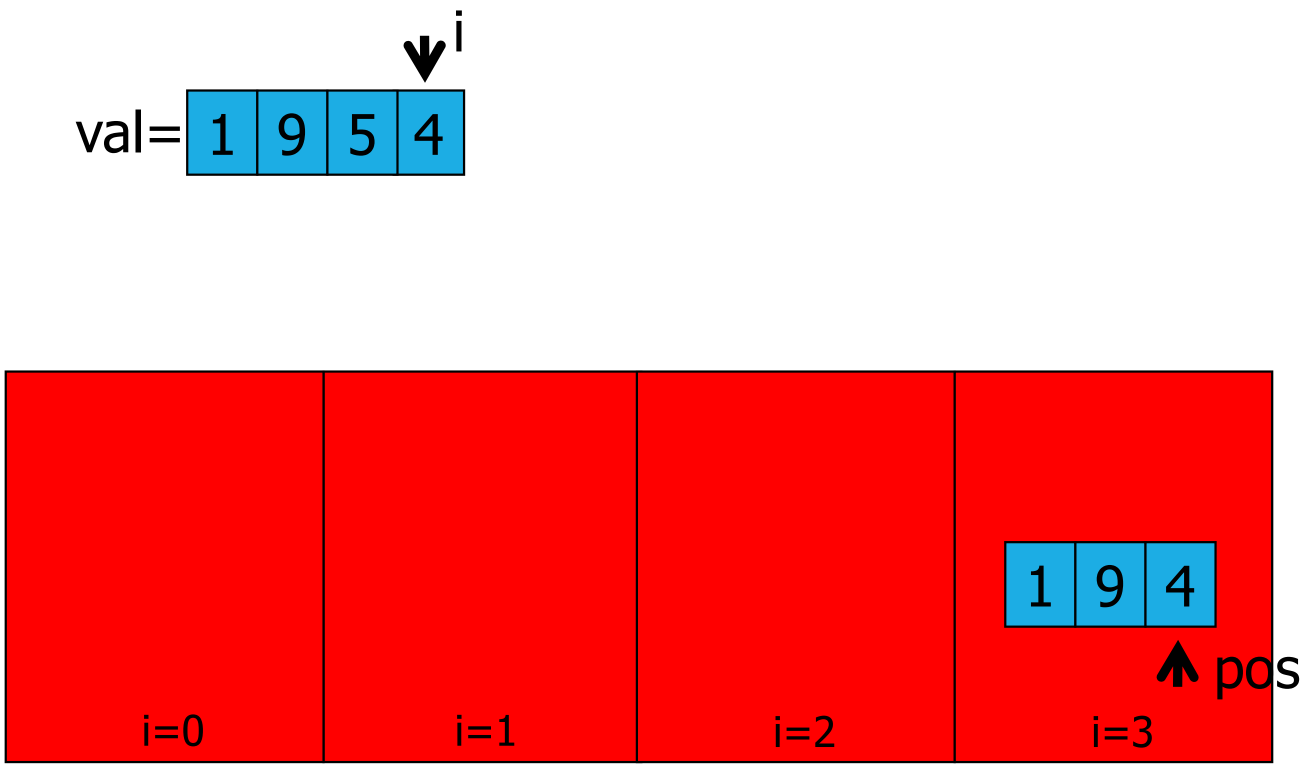


terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

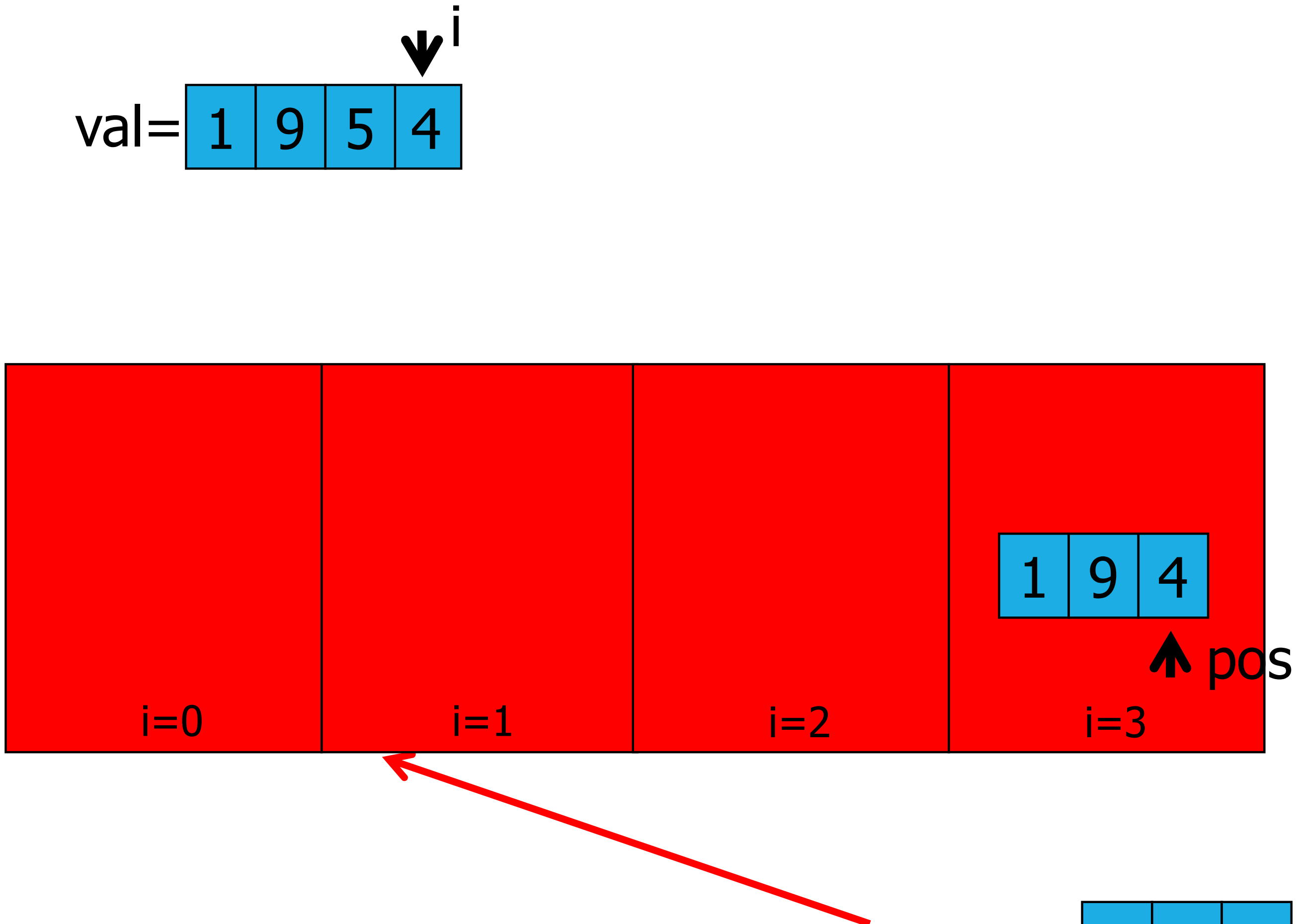




sol[pos] = val[i]

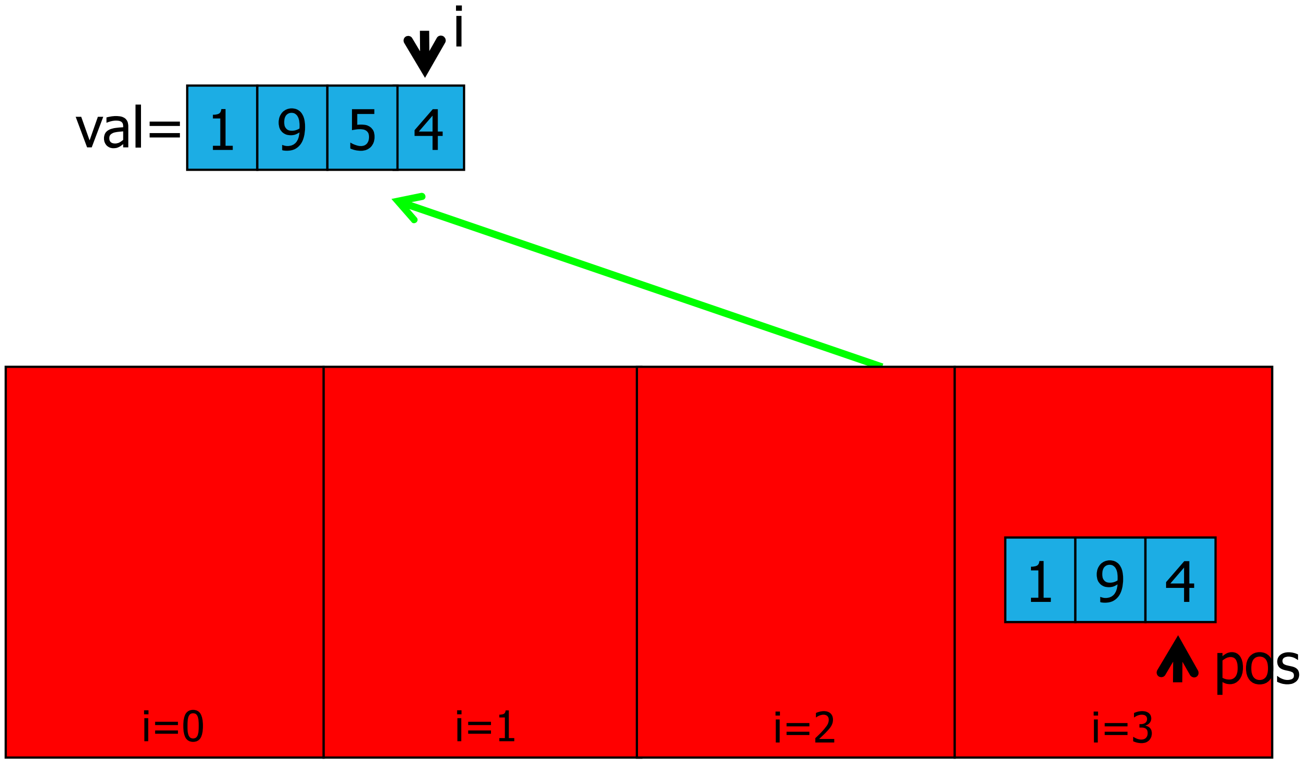


ricorsione
con pos=3 e start=4

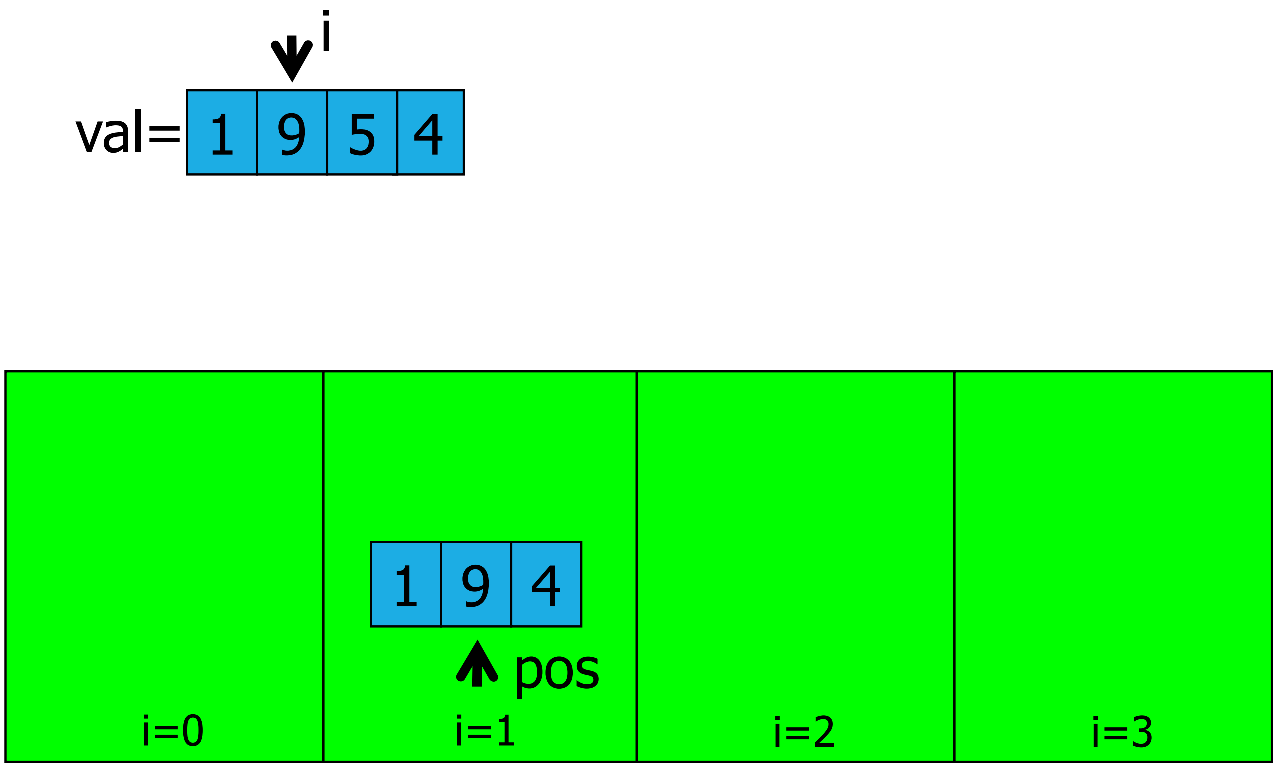


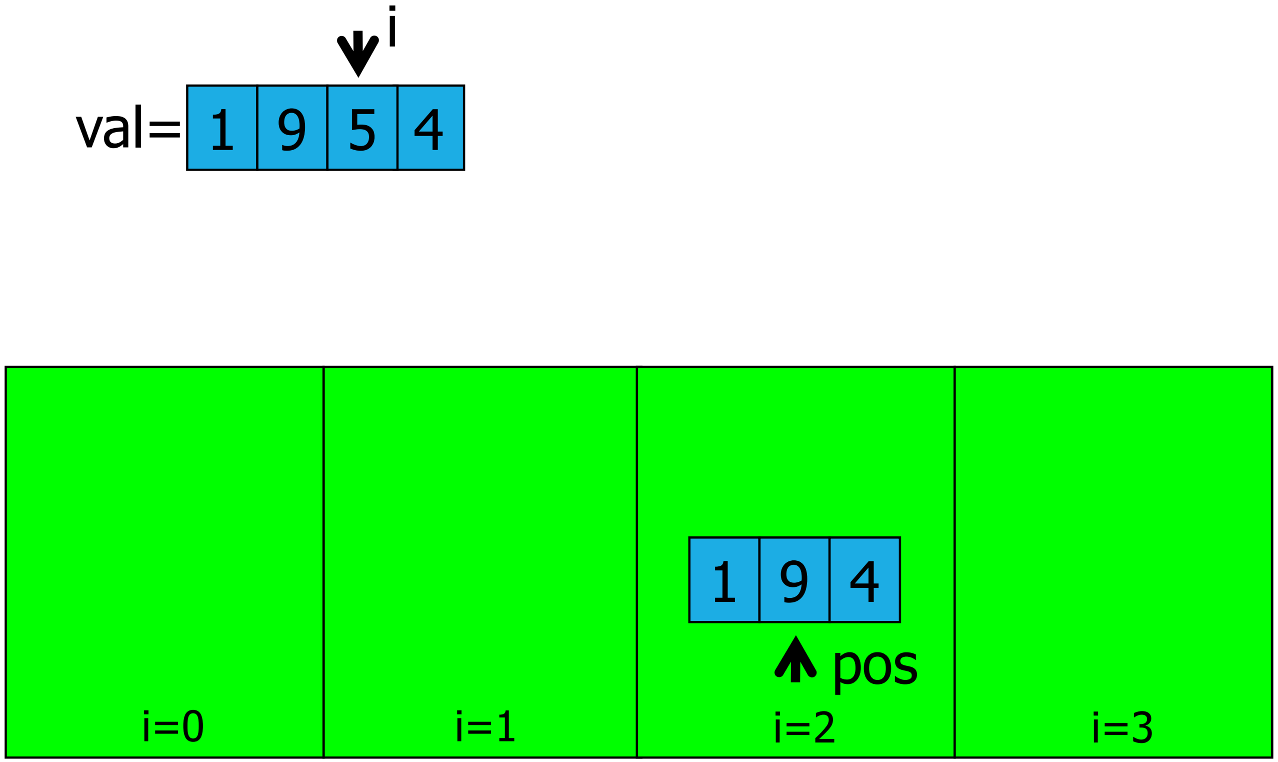
sol= 1 9 4

terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna

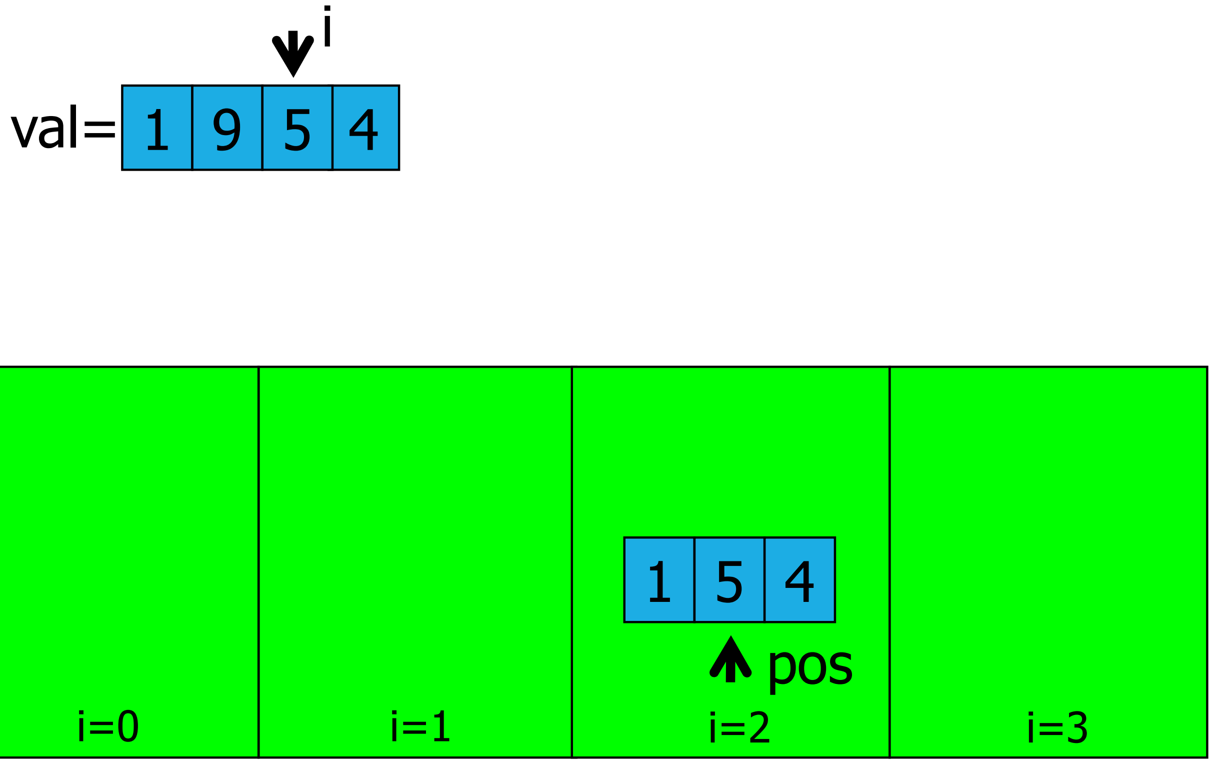


ciclo for terminato, ritorna

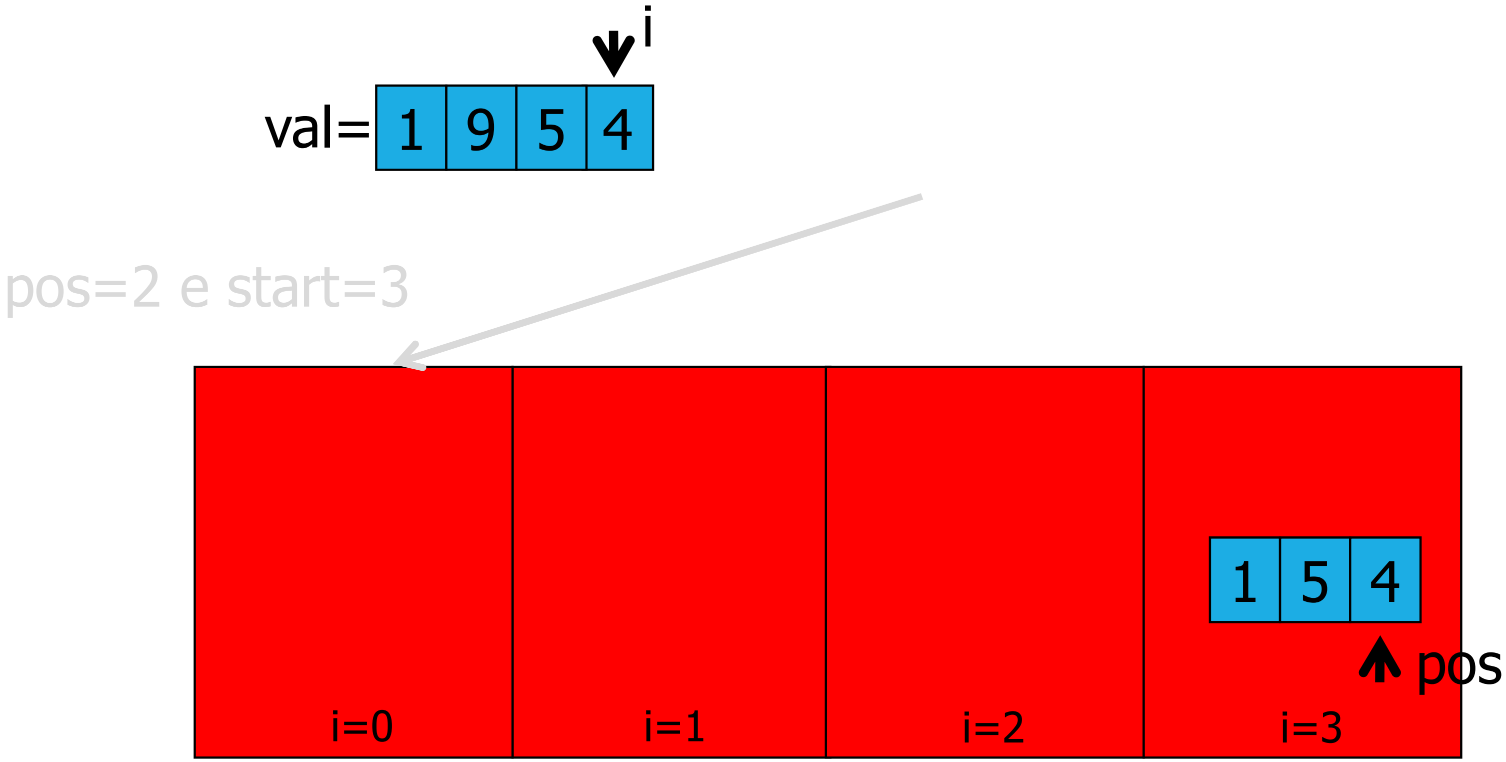

i
val=
1
9
5
4
1
9
4
pos
i=0
i=1
i=2
i=3



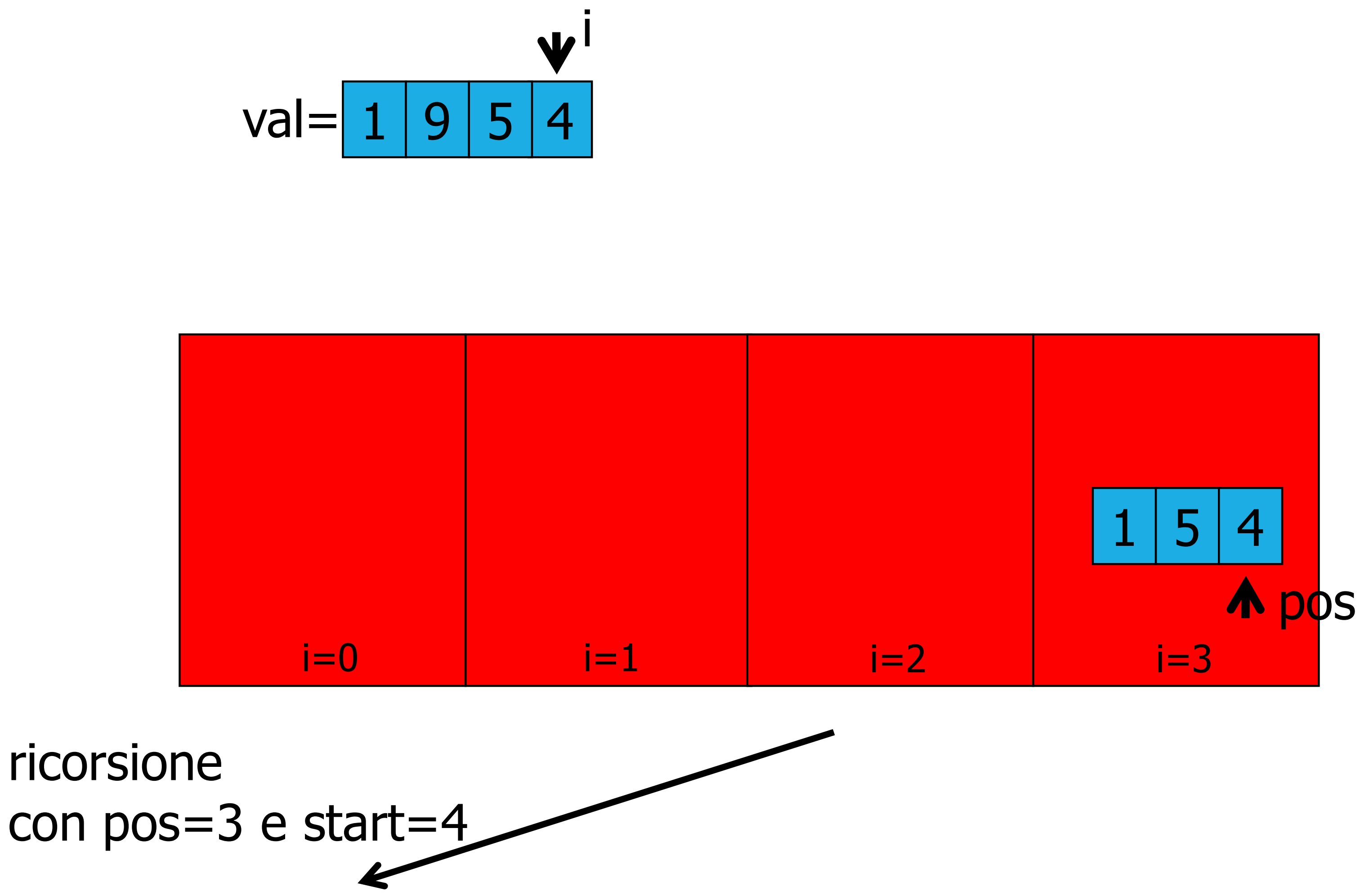
sol[pos] = val[i]

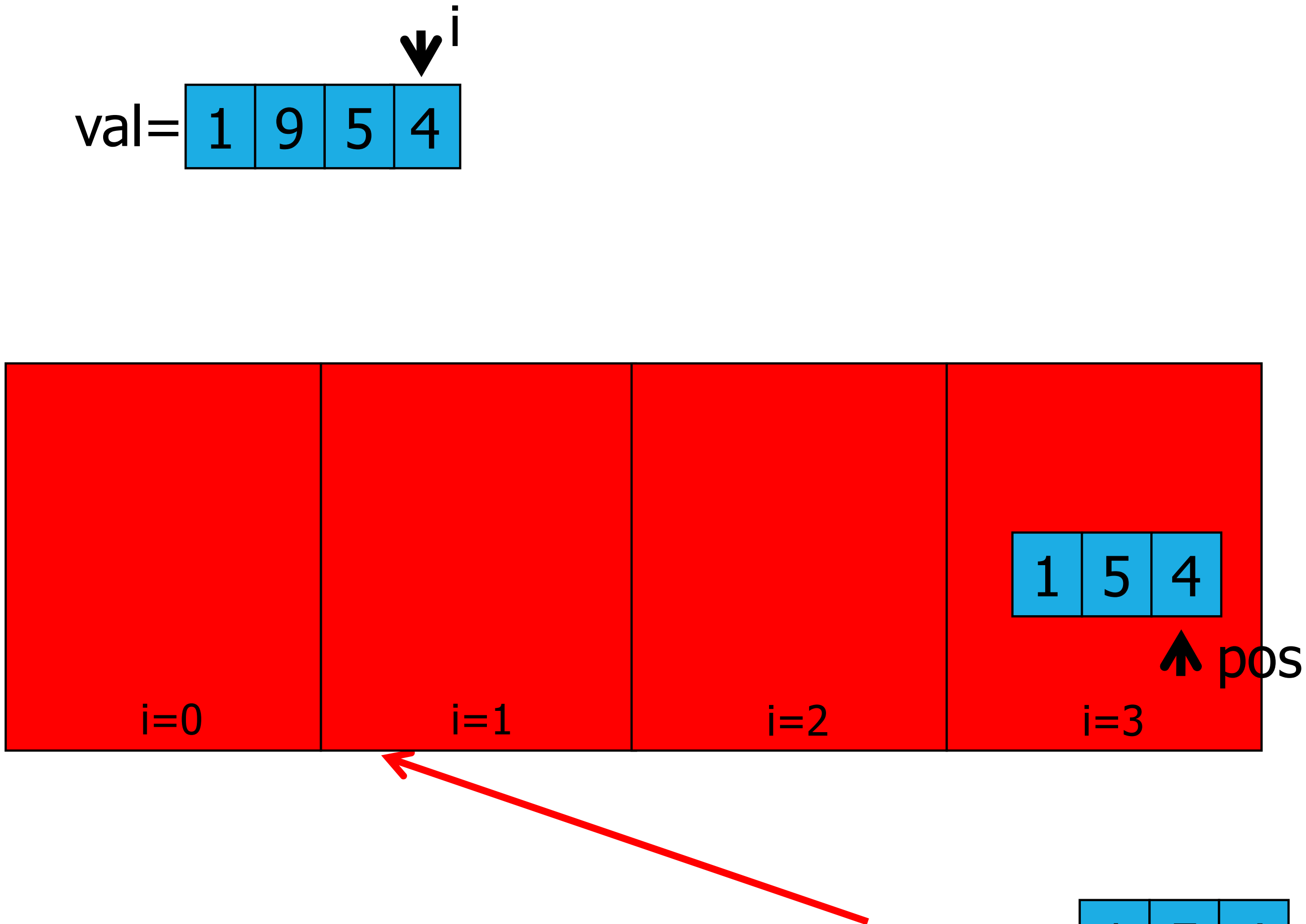


ricorsione
con pos=2 e start=3

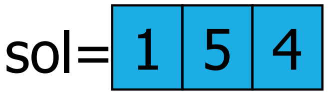


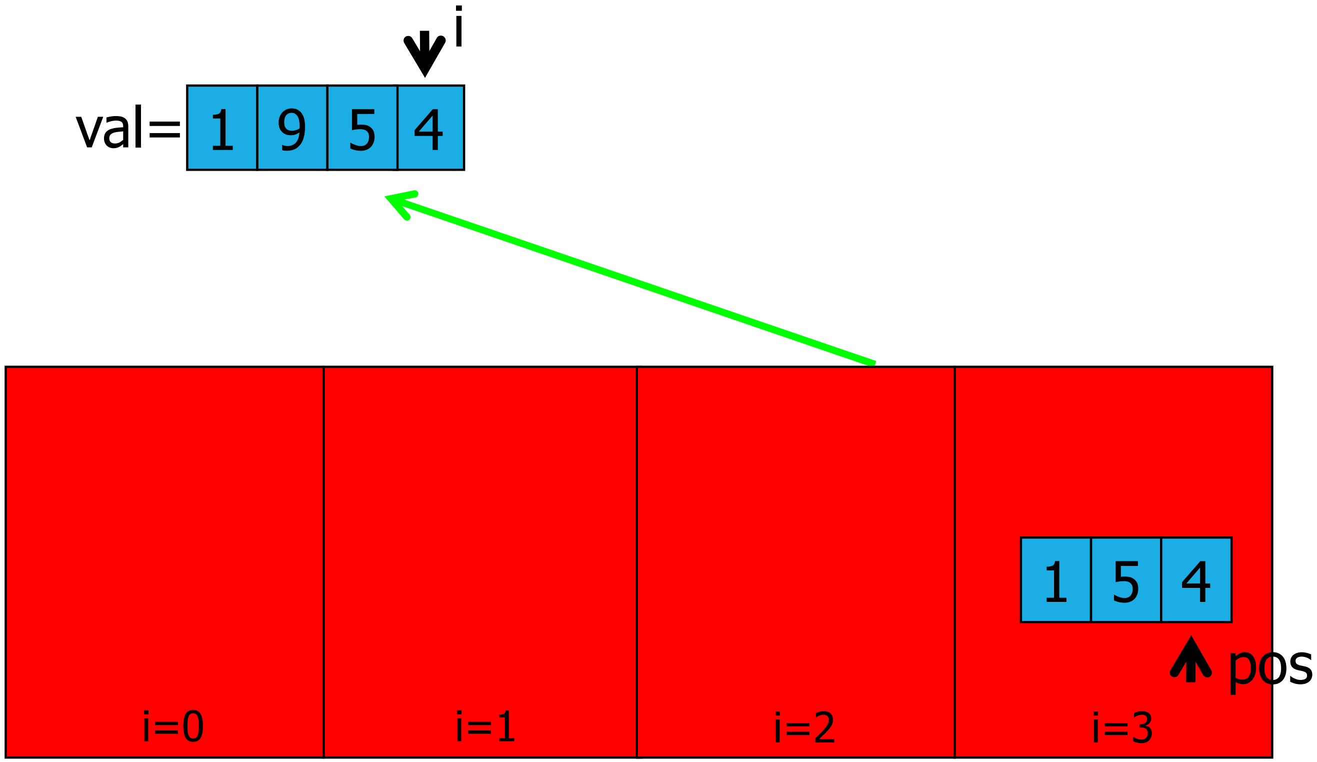
sol[pos] = val[i]


i
val=
1
9
5
4
1
5
4
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
ricorsione
con pos=3 e start=4

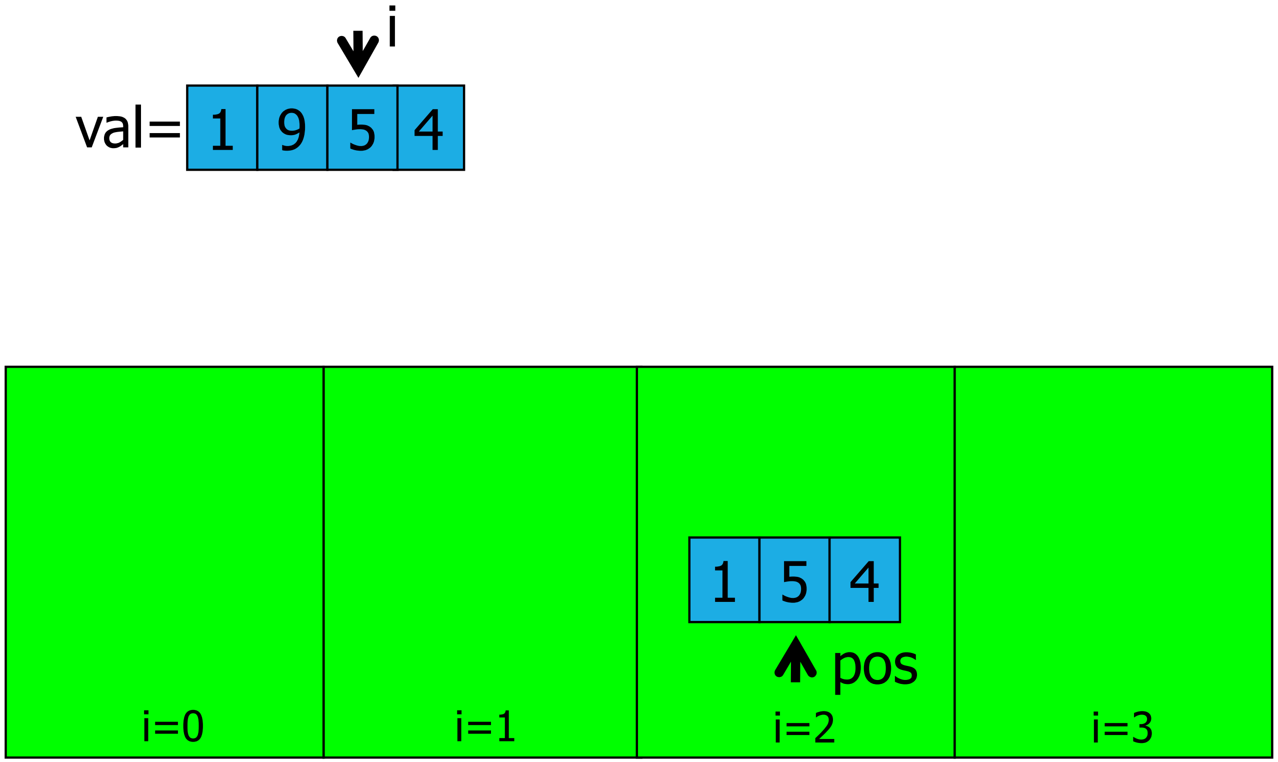


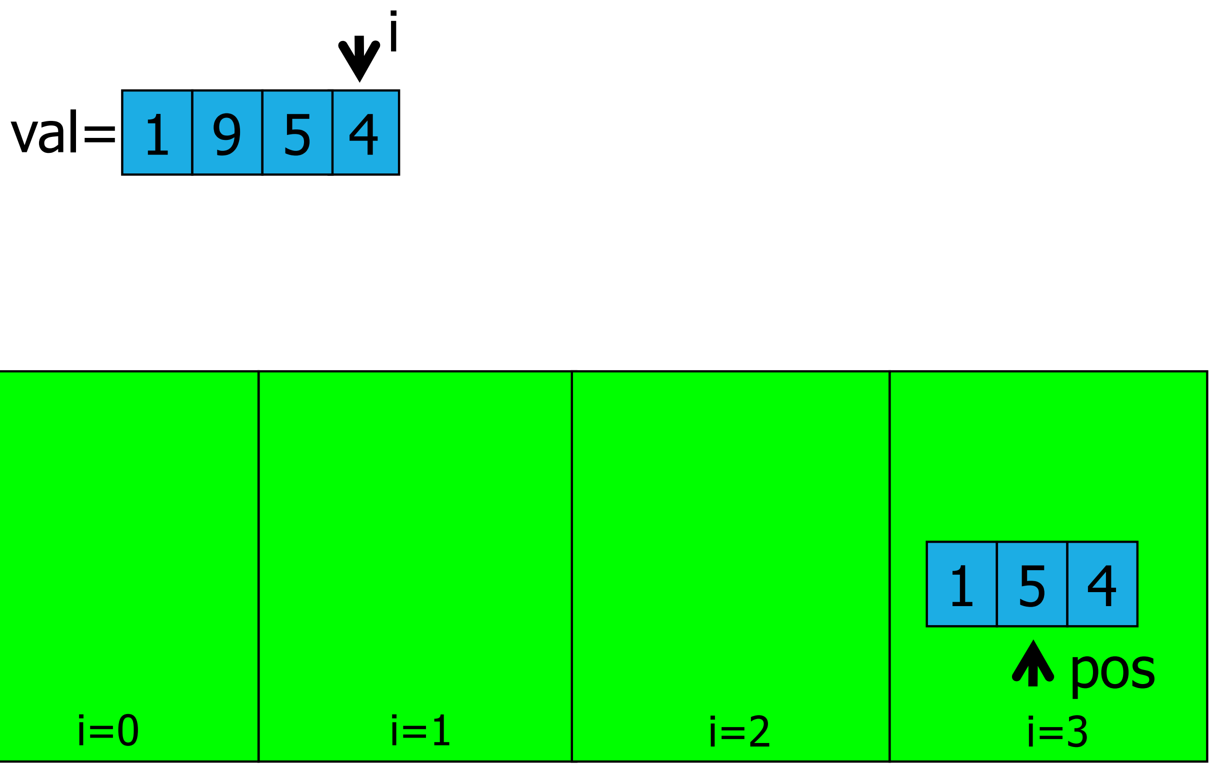
terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna



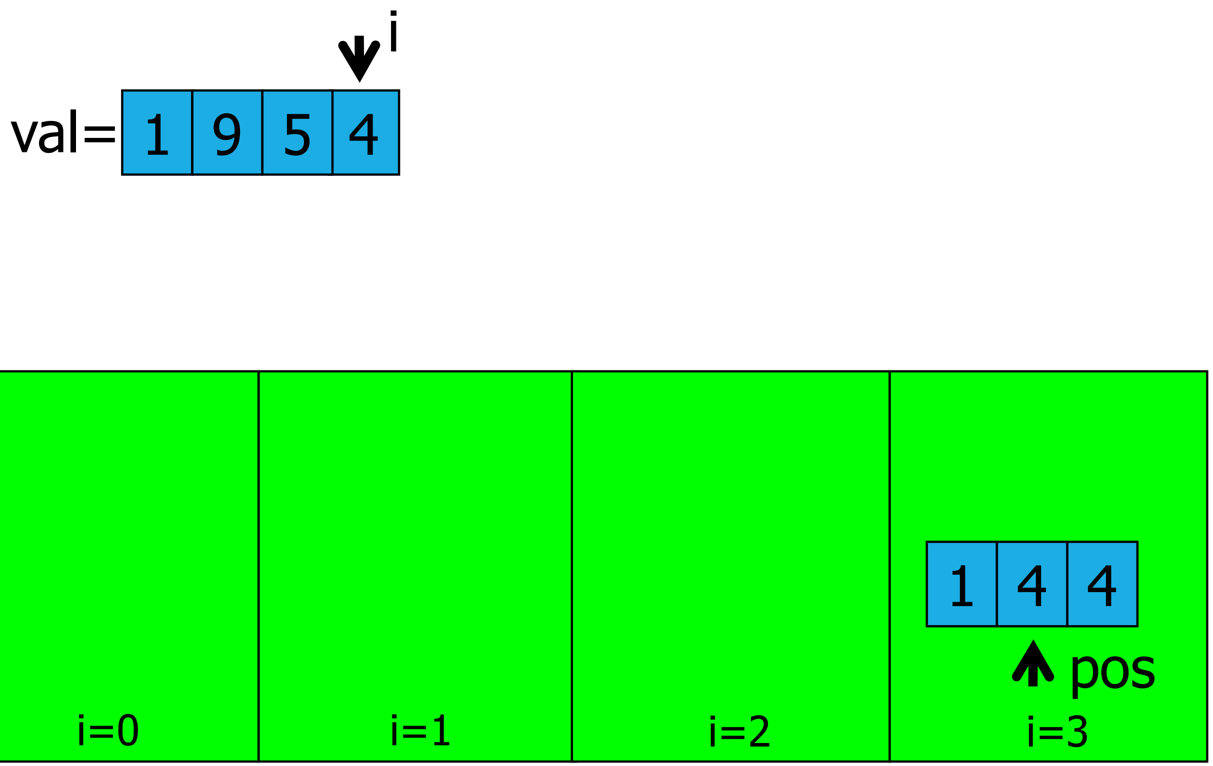


ciclo for terminato, ritorna

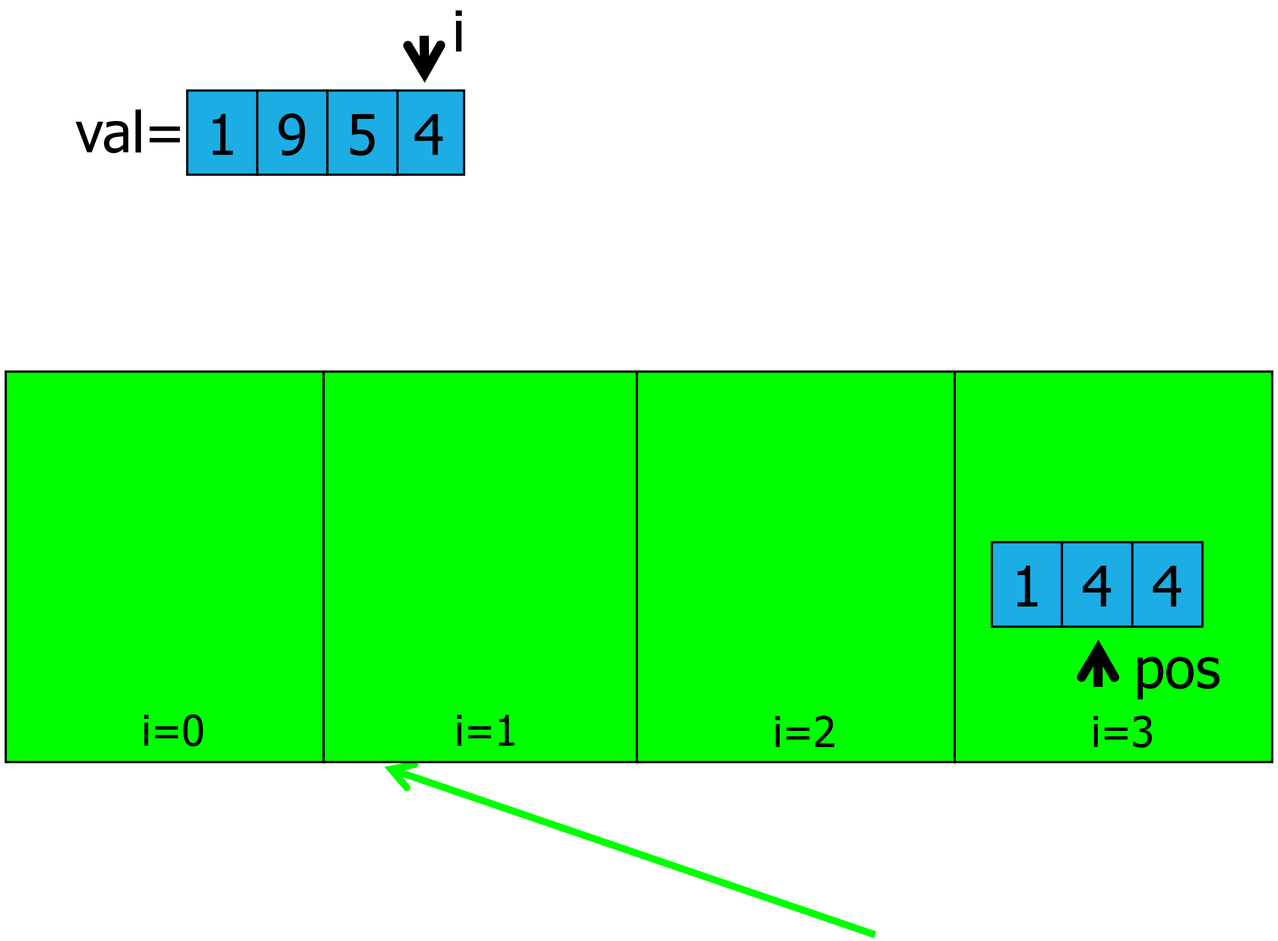

i
val=
1
9
5
4
1
5
4
pos
i=0
i=1
i=2
i=3



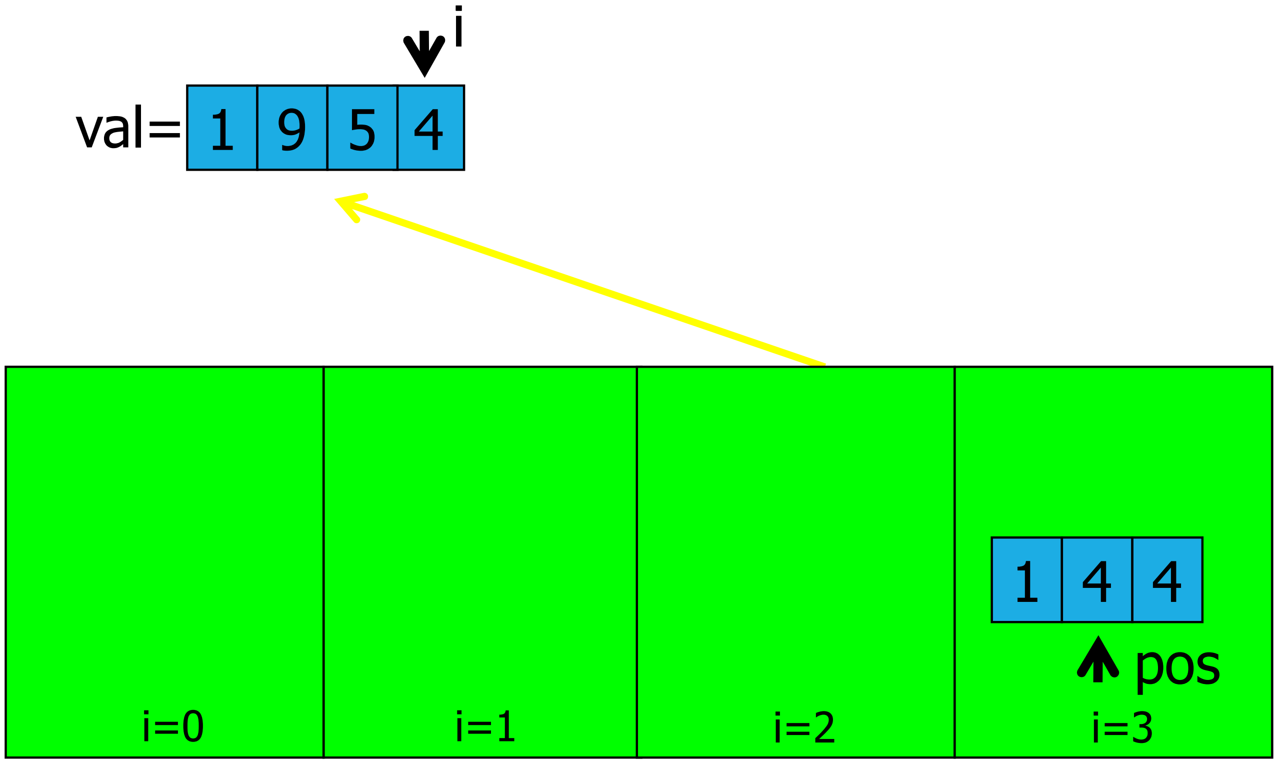
sol[pos] = val[i]



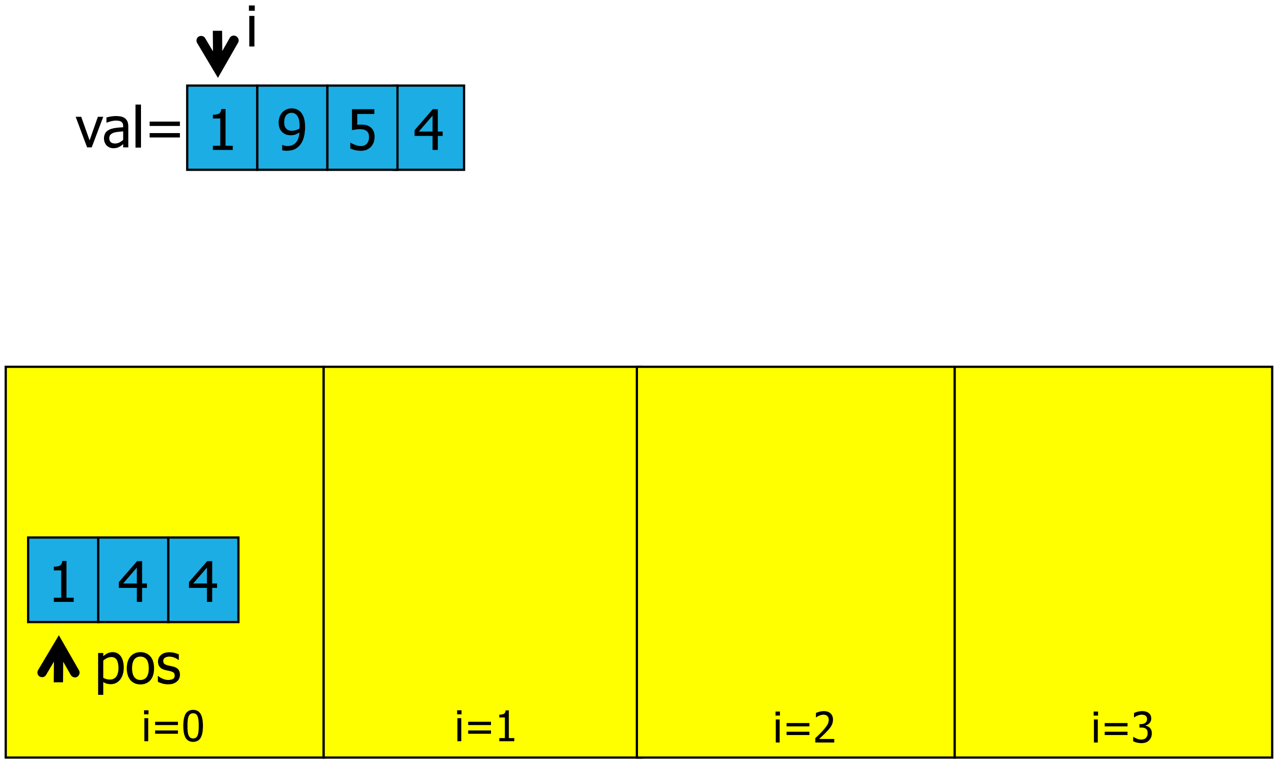
ricorsione
con pos=2 e start=4

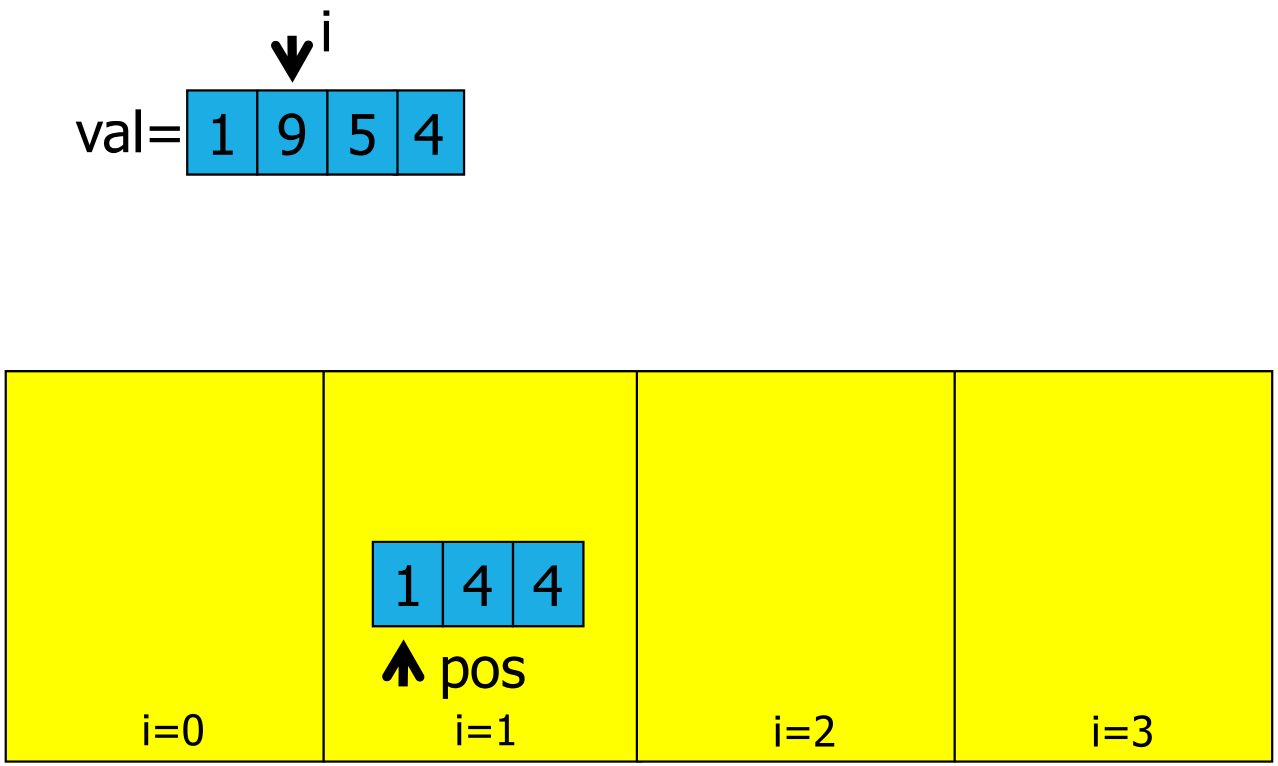


il ciclo for non inizia nemmeno
ritorna

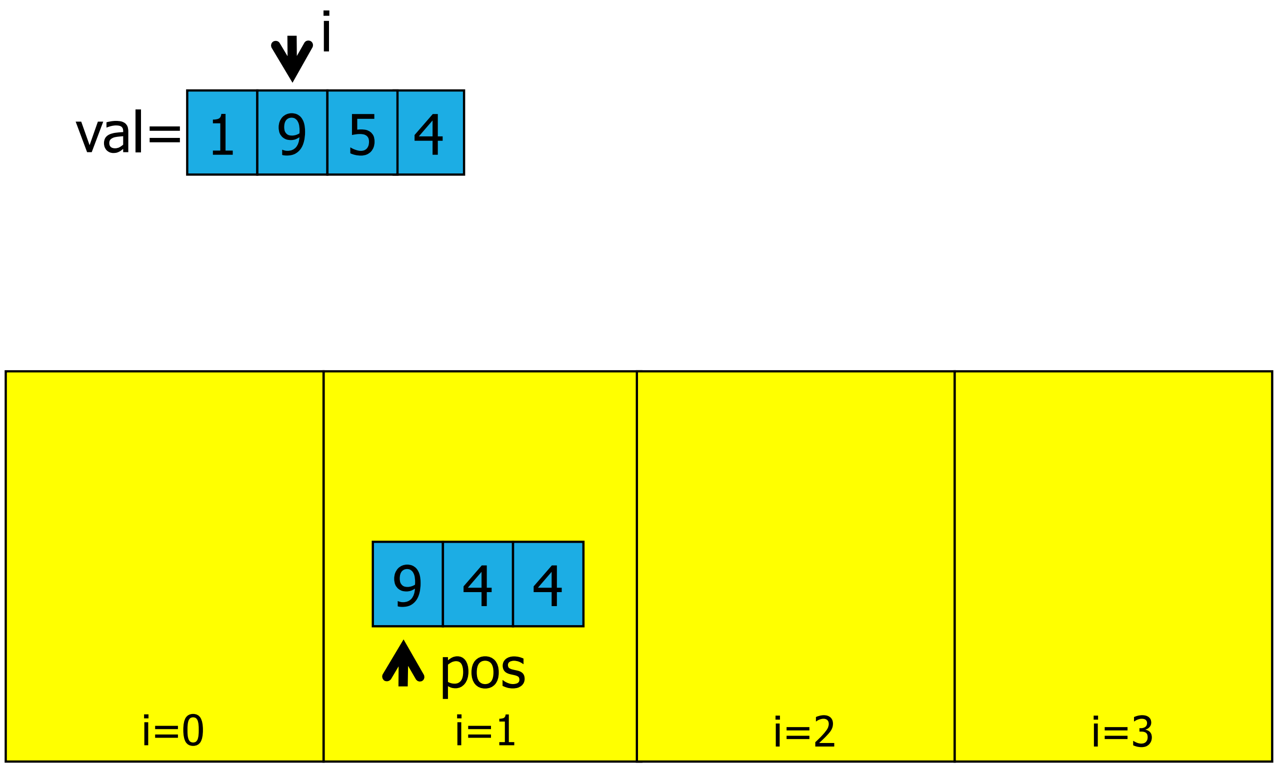


ciclo terminato, ritorna


i
val=
1
9
5
4
1
4
4
pos
i=0
i=1
i=2
i=3



sol[pos] = val[i]



ricorsione
con pos=1 e start=2

etc. etc.

Combinazioni ripetute

Come per le combinazioni semplici ma:

- la ricorsione avviene solo per pos+1 e non per i+1
- l'indice start viene incrementato quando termina la ricorsione
- cnt registra il numero di soluzioni.

```c
int comb_r(int pos,int *val,int *sol,int n,int k,int start,int cnt) {
  int i, j;
  if (pos >= k) {
    for (i=0; i<k; i++)
      printf("%d ", sol[i]);
    printf("\n");
    return cnt+1;
  }
  for (i=start; i<n; i++) {
    sol[pos] = val[i];
    cnt = comb_r(pos+1, val, sol, n, k, start, cnt);
    start++;
  }
  return cnt;
}
```

terminazione

iterazione sulle scelte

scelta: sol[pos] riempito con i valori possibili di `val` da `start` in poi

ricorsione su prossima posizione

aggiornamento di start

```c
val = malloc(n * sizeof(int));
sol = malloc(k * sizeof(int));
```

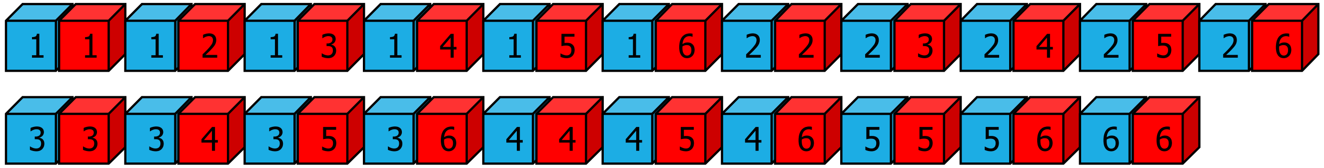
Esempio

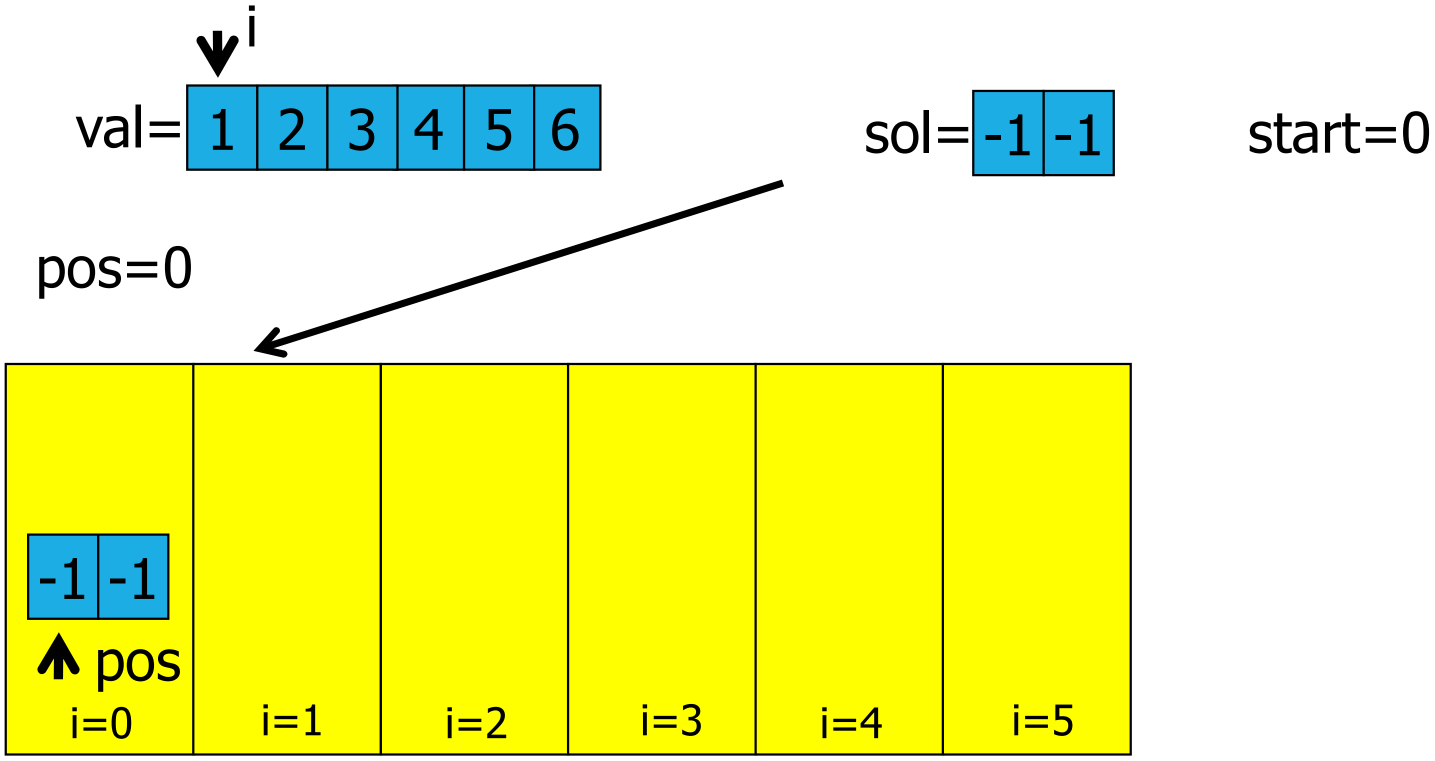
Lanciando contemporaneamente 2 dadi , quante
sono le composizioni con cui si possono presentare le facce?

Modello: combinazioni con ripetizione

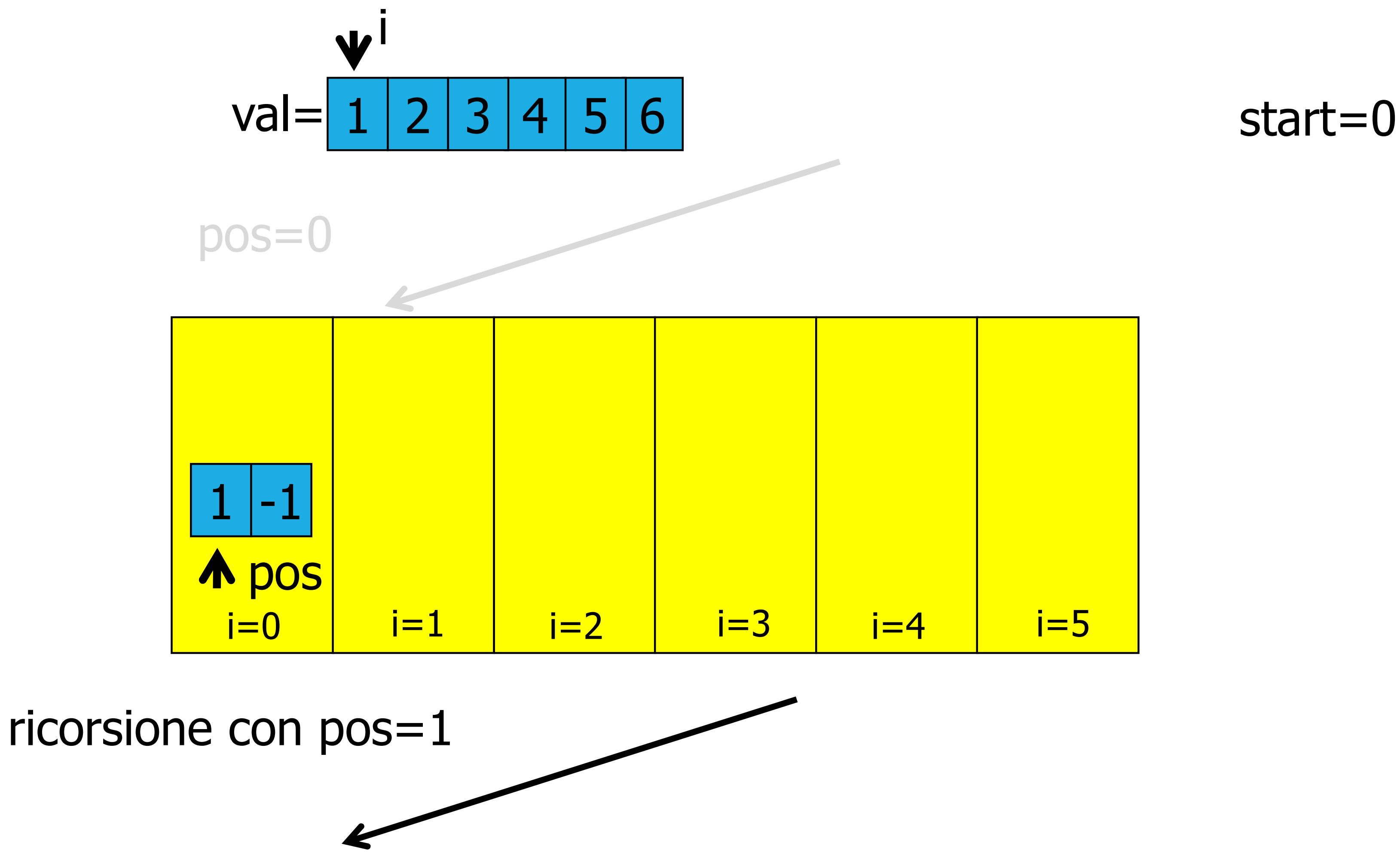
$C'_{6,\,2} = (6 + 2 - 1)!/2!(6-1)! = 21$

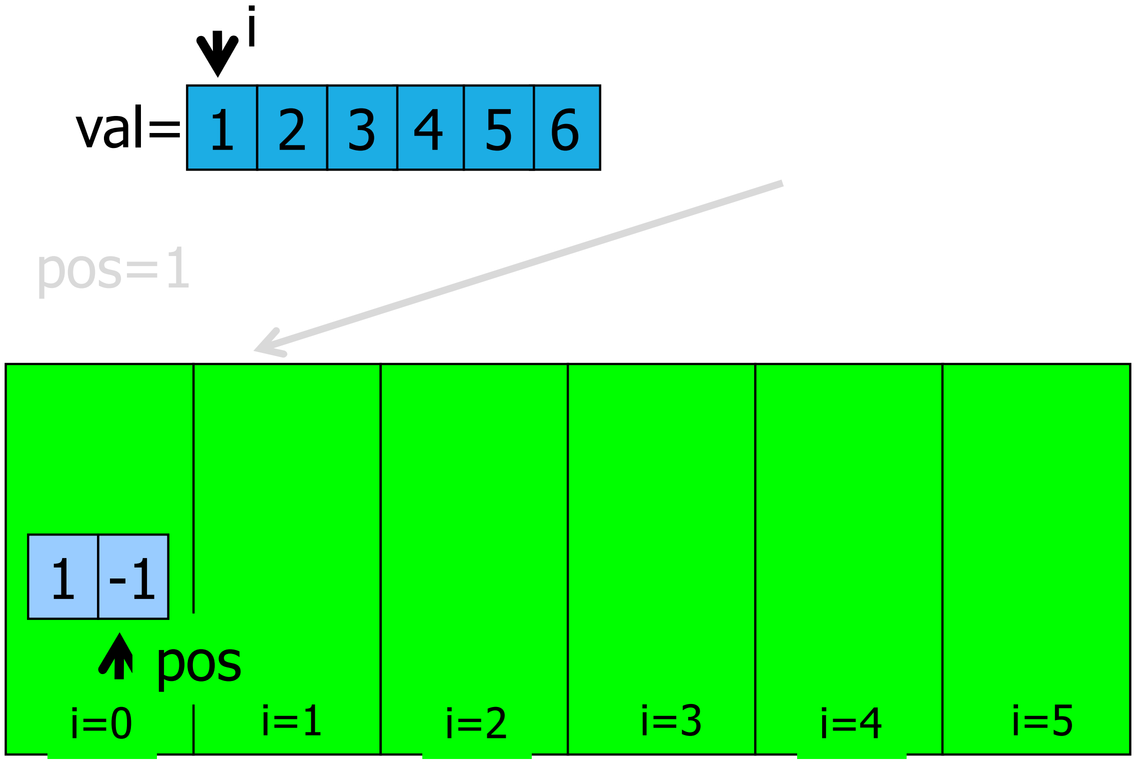
Soluzione





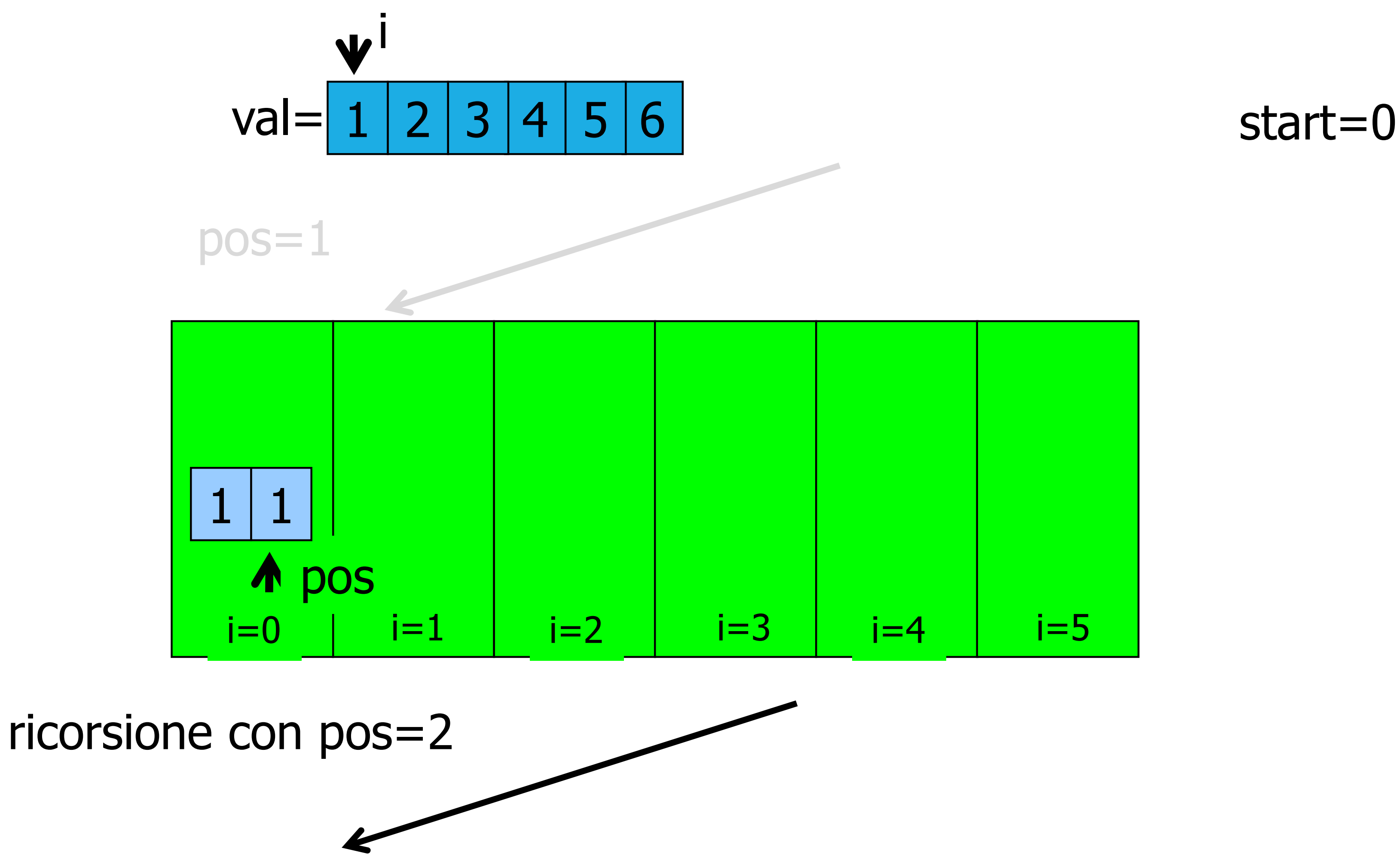
sol[pos] = val[i]

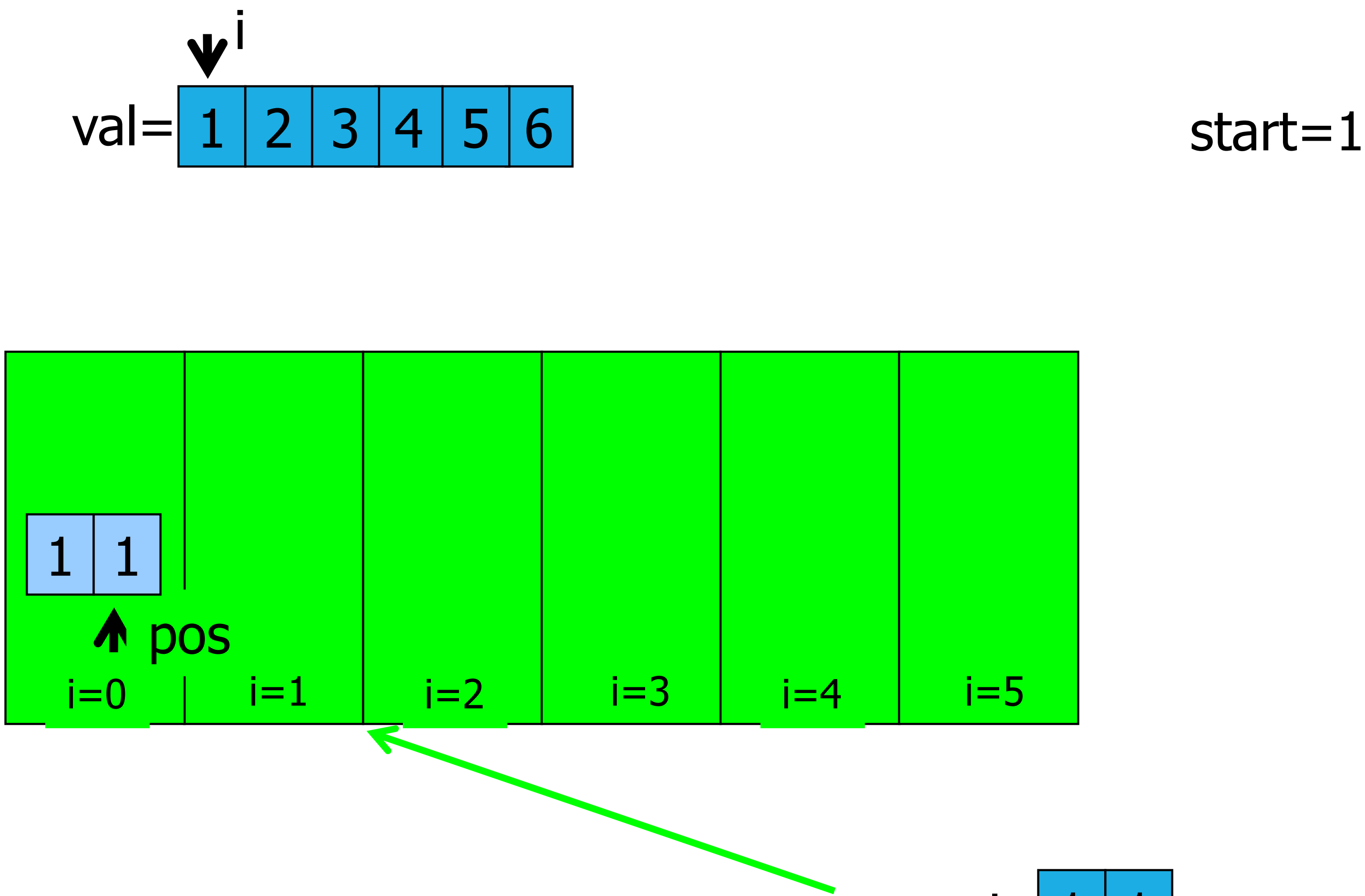

i
val=
1
2
3
4
5
6
start=0
pos=0
1
-1
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=1



start=0

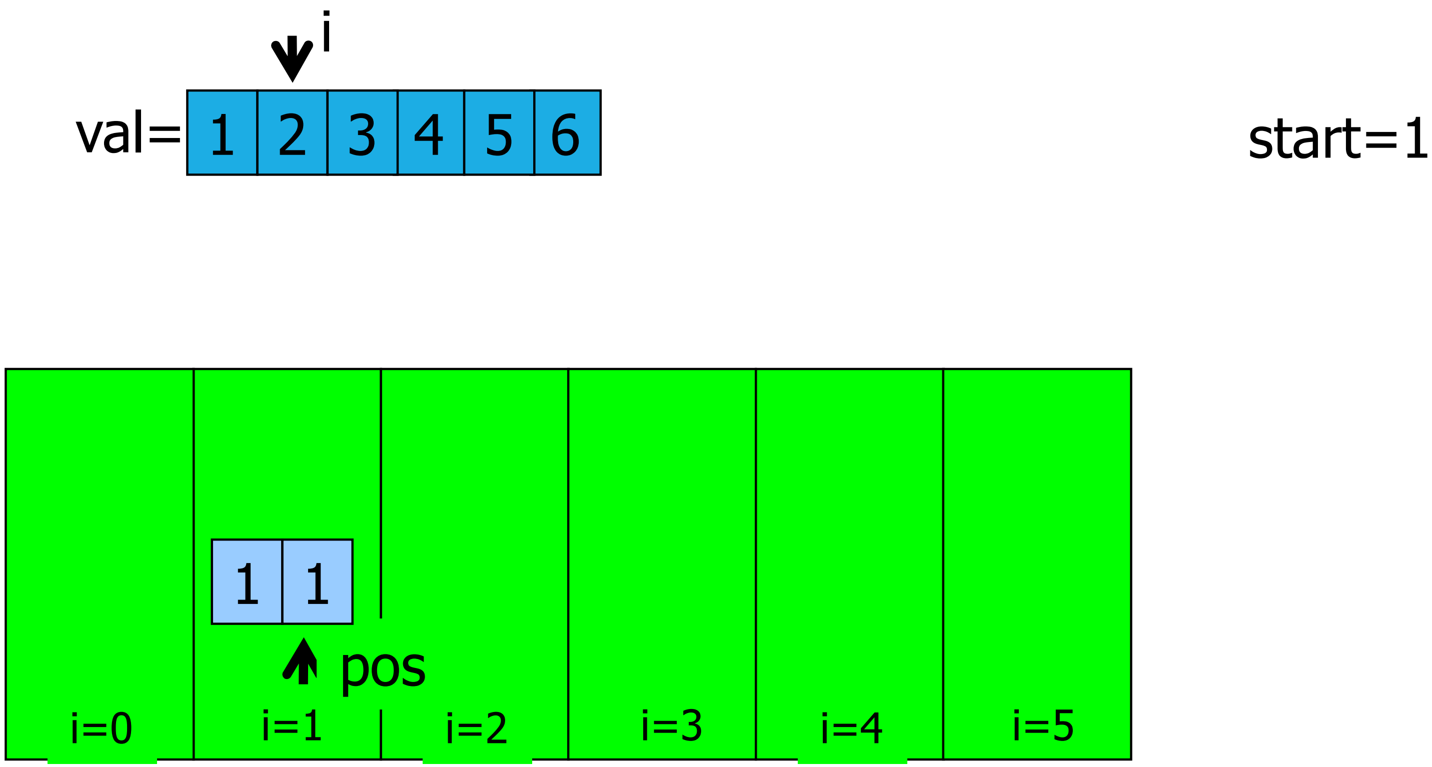
sol[pos] = val[i]


i
val=
1 2 3 4 5 6
start=0
pos=1
1 1
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=2

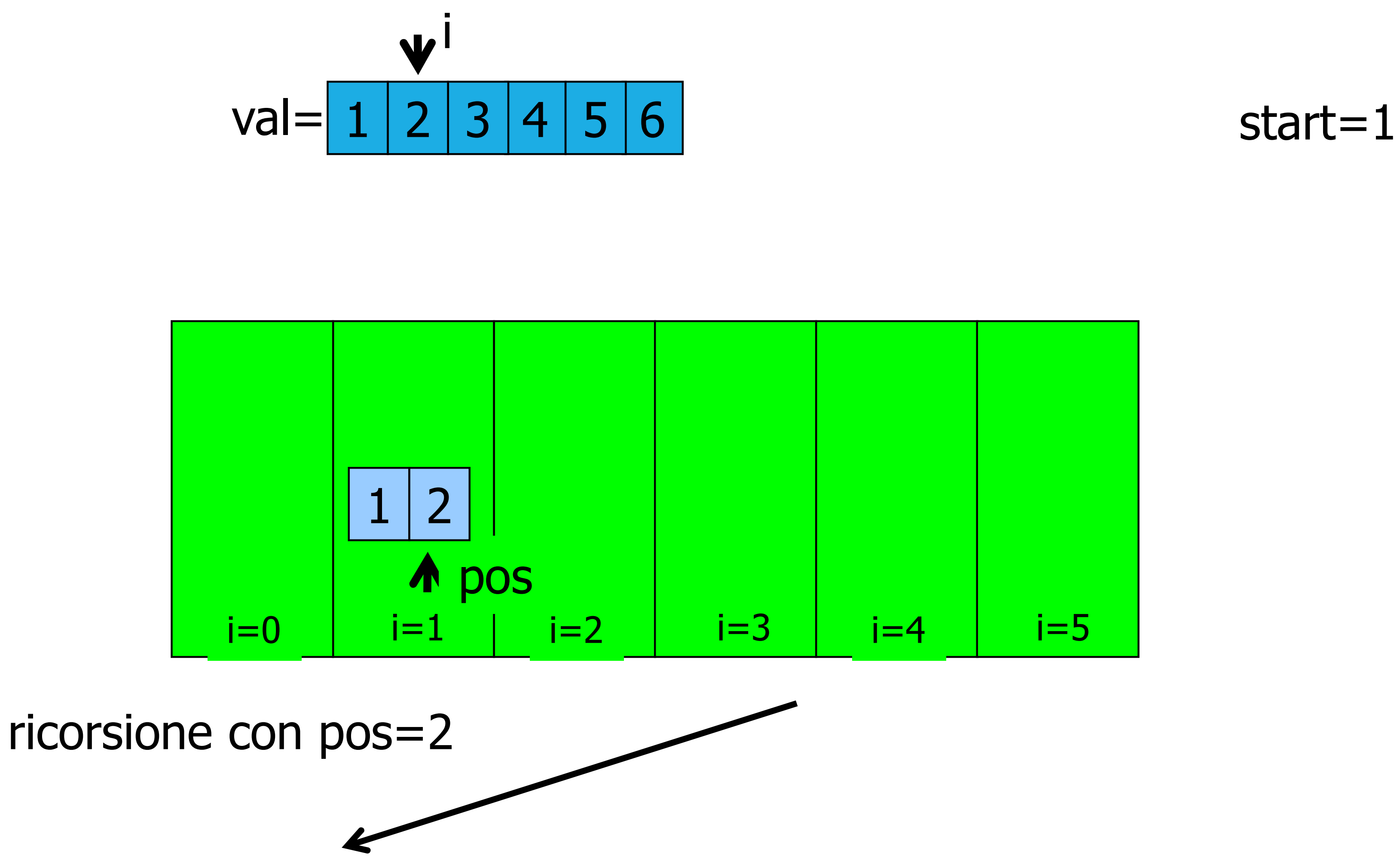


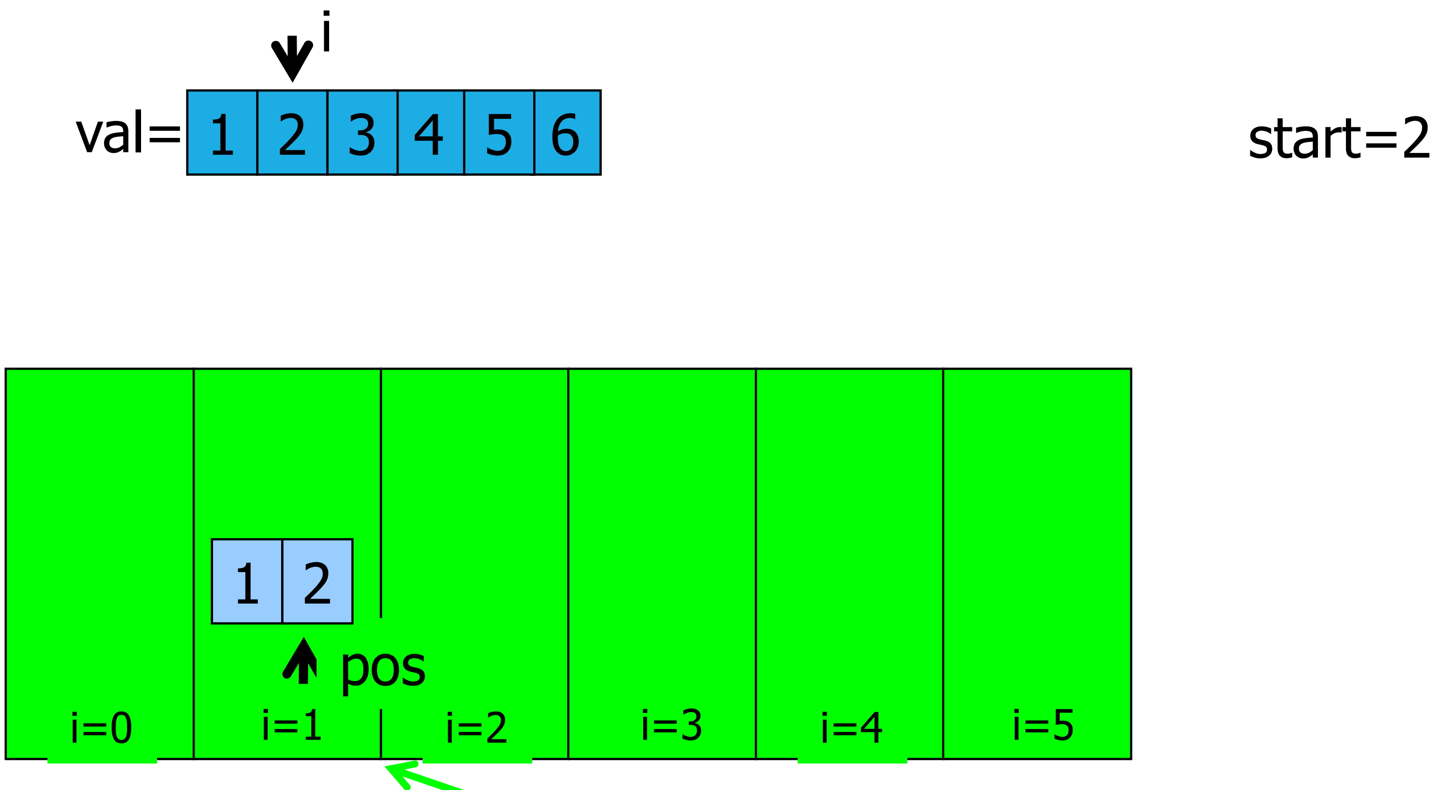
terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start

sol= 1 1

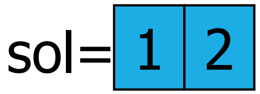


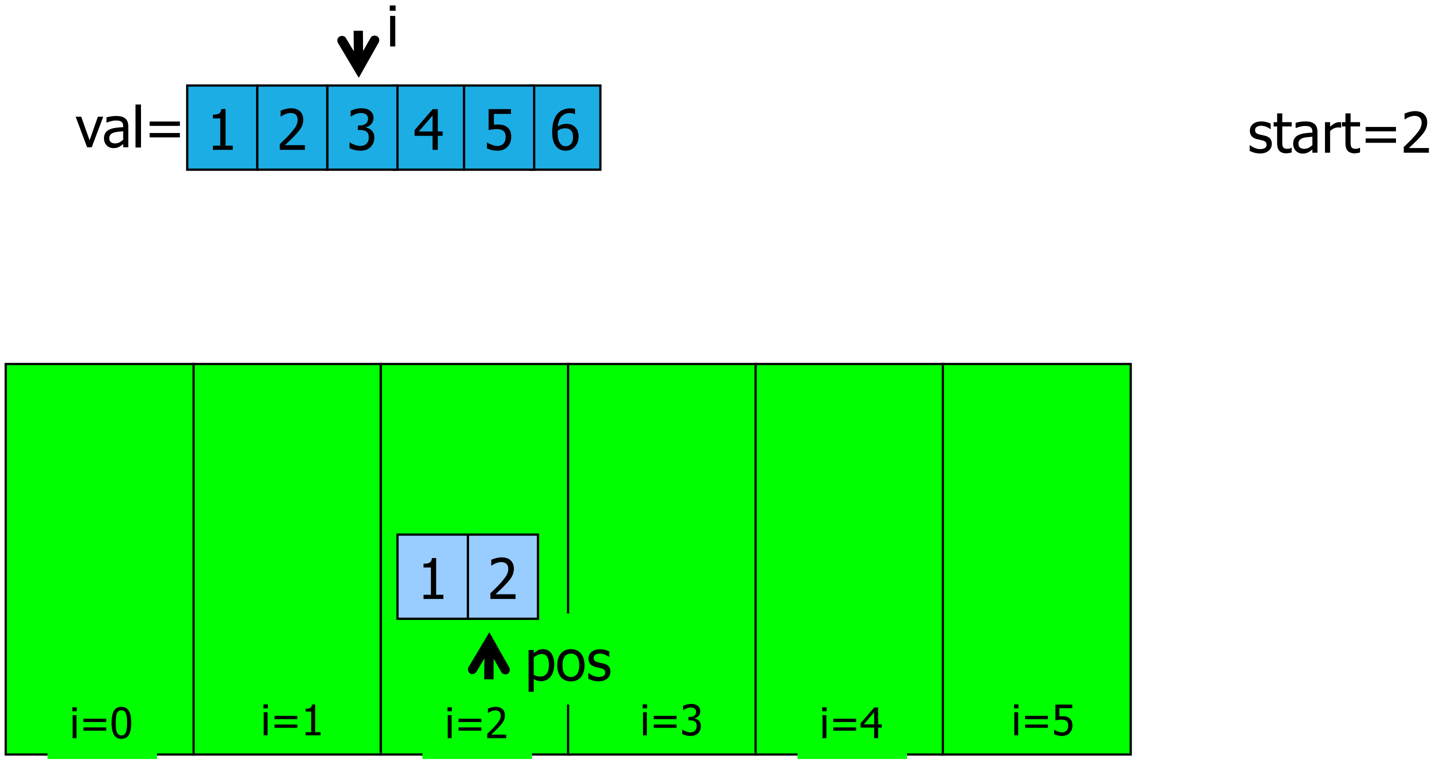
sol[pos] = val[i]


i
val=
1
2
3
4
5
6
start=1
1
2
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=2

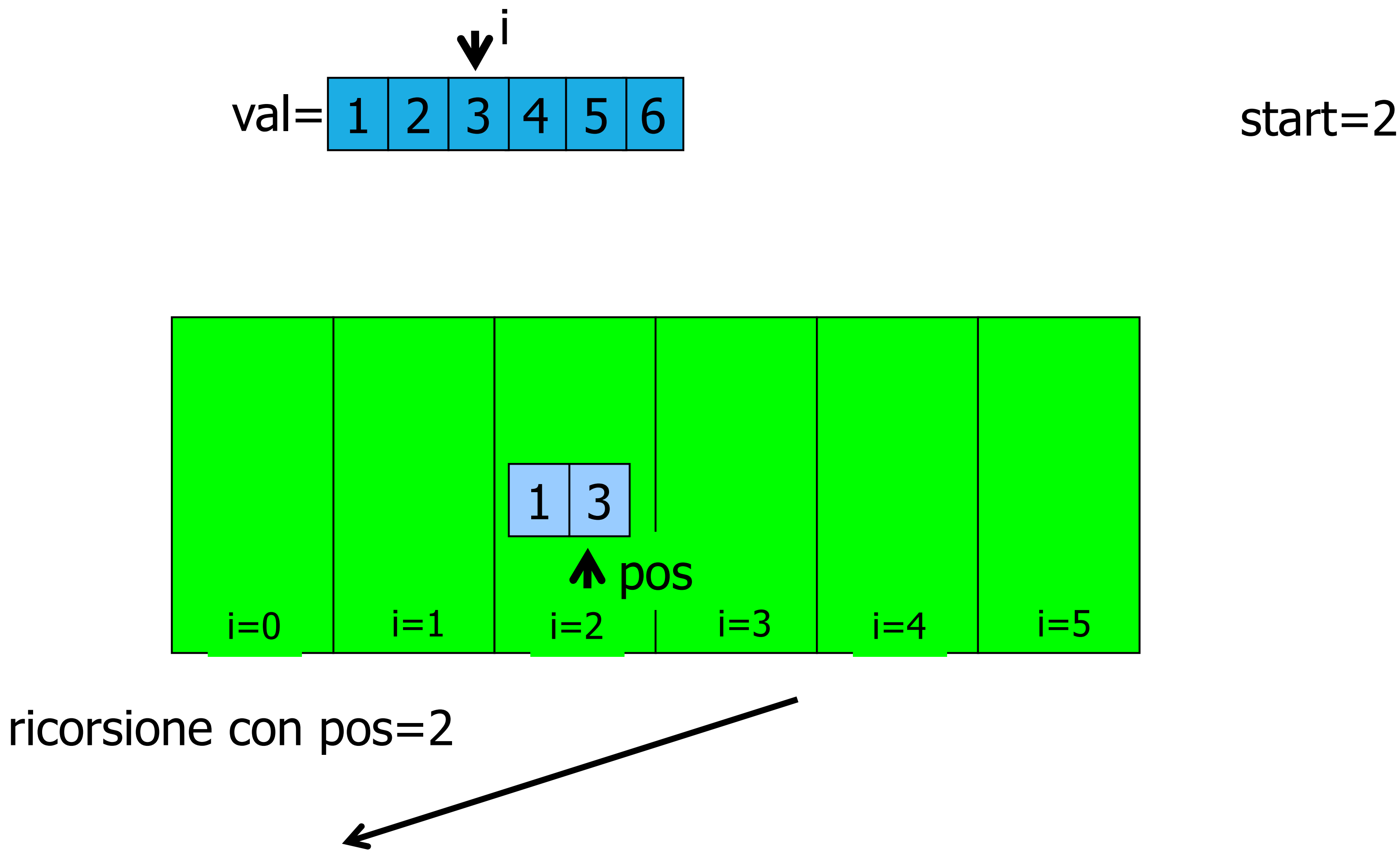


terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start

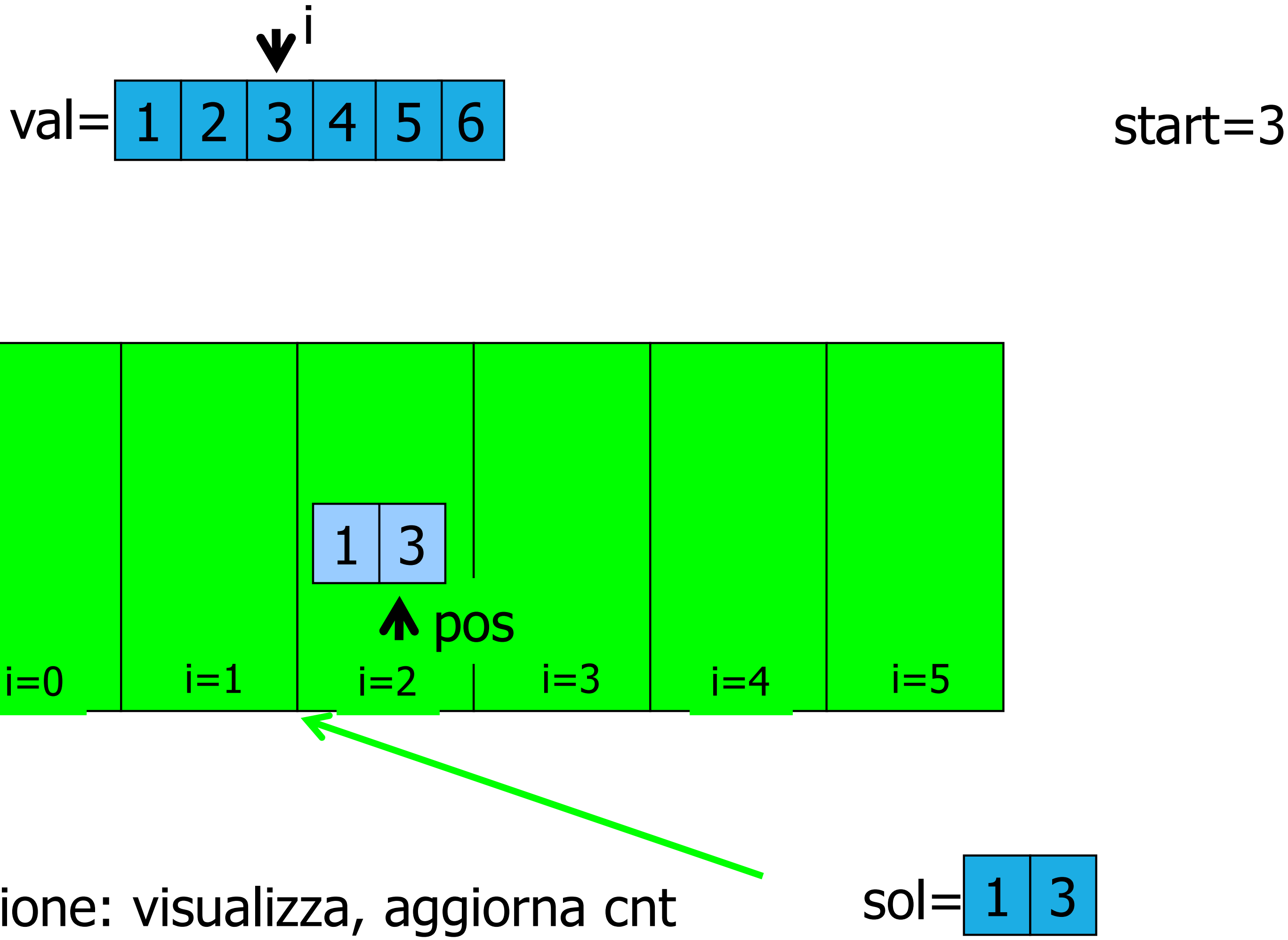




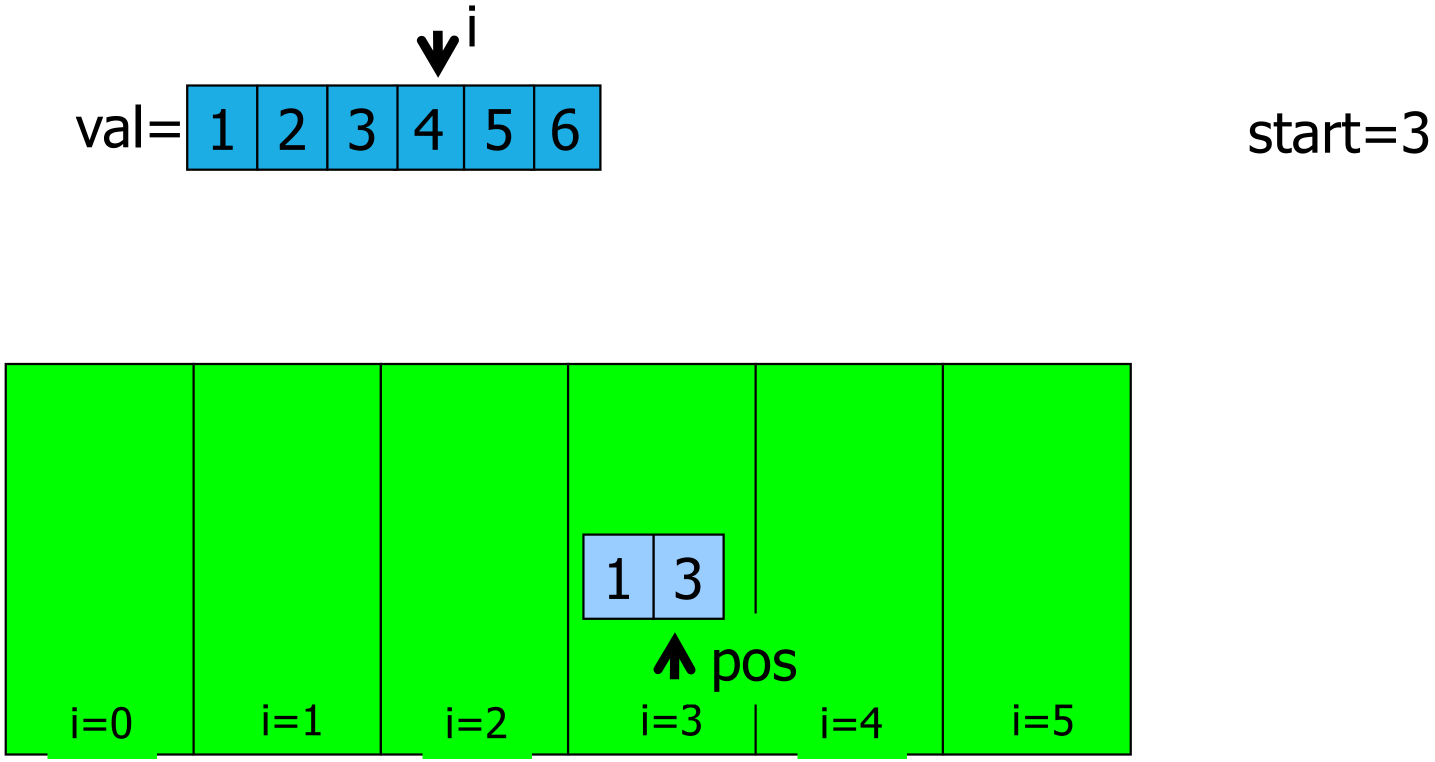
sol[pos] = val[i]



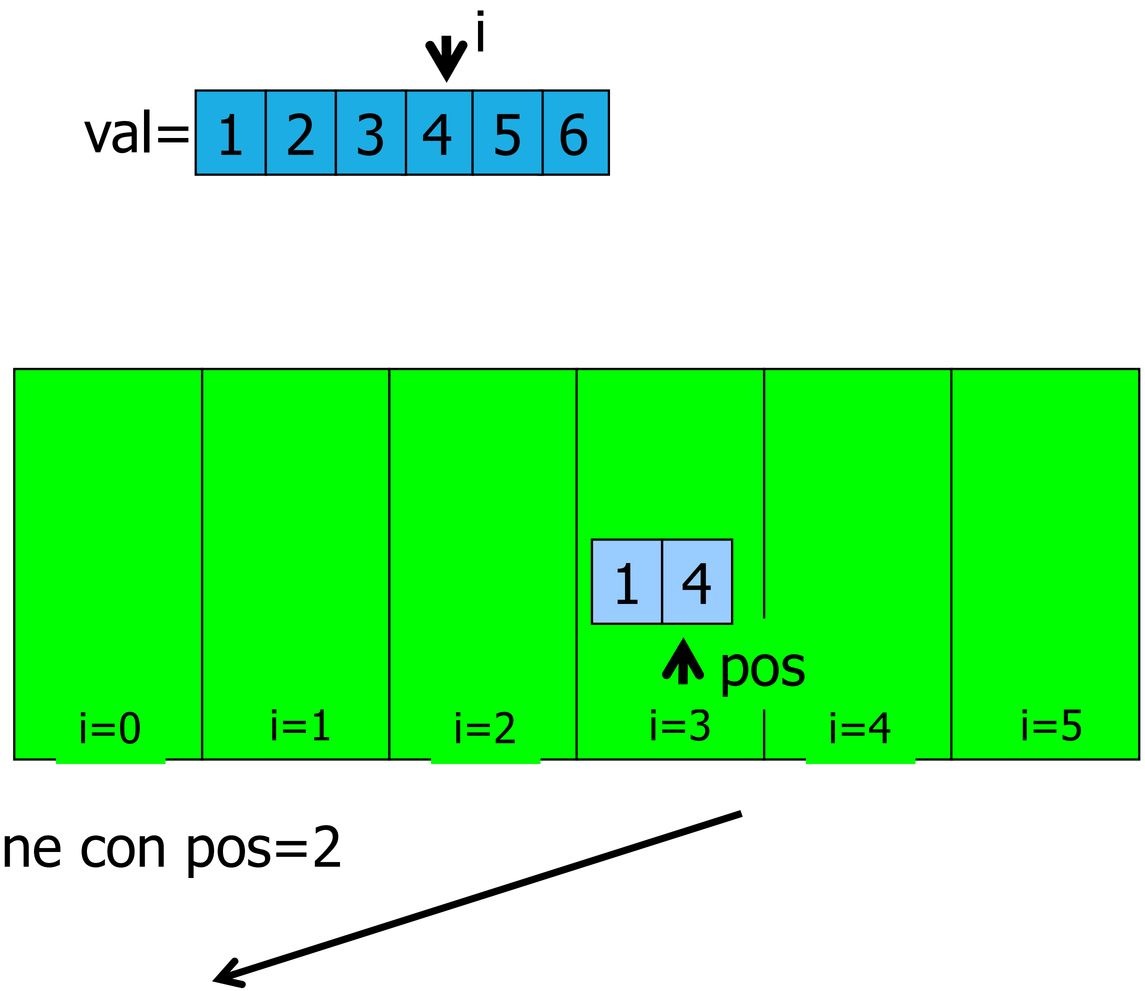
i
val=
1 2 3 4 5 6
start=2
1 3
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=2



terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start

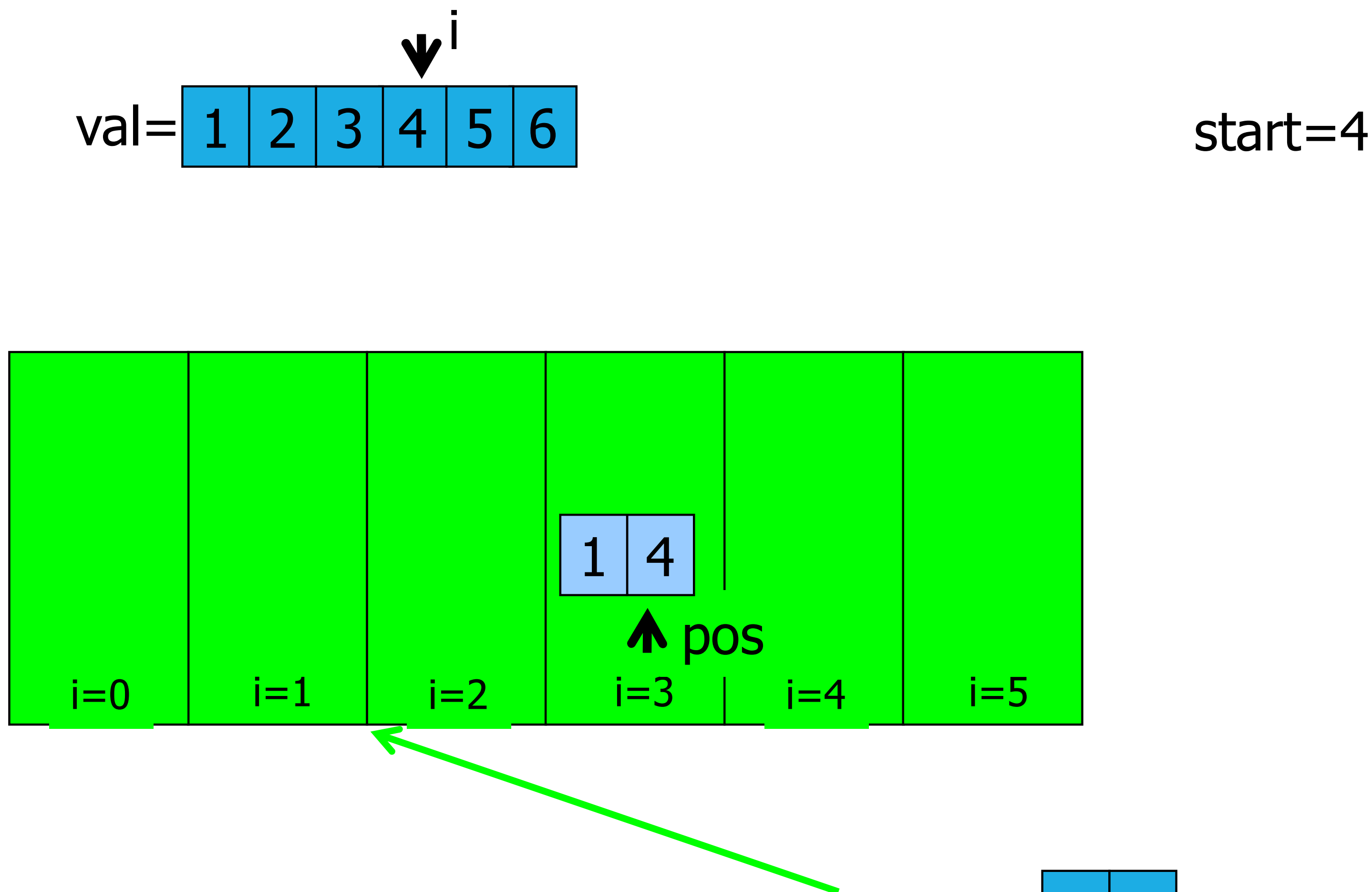


sol[pos] = val[i]



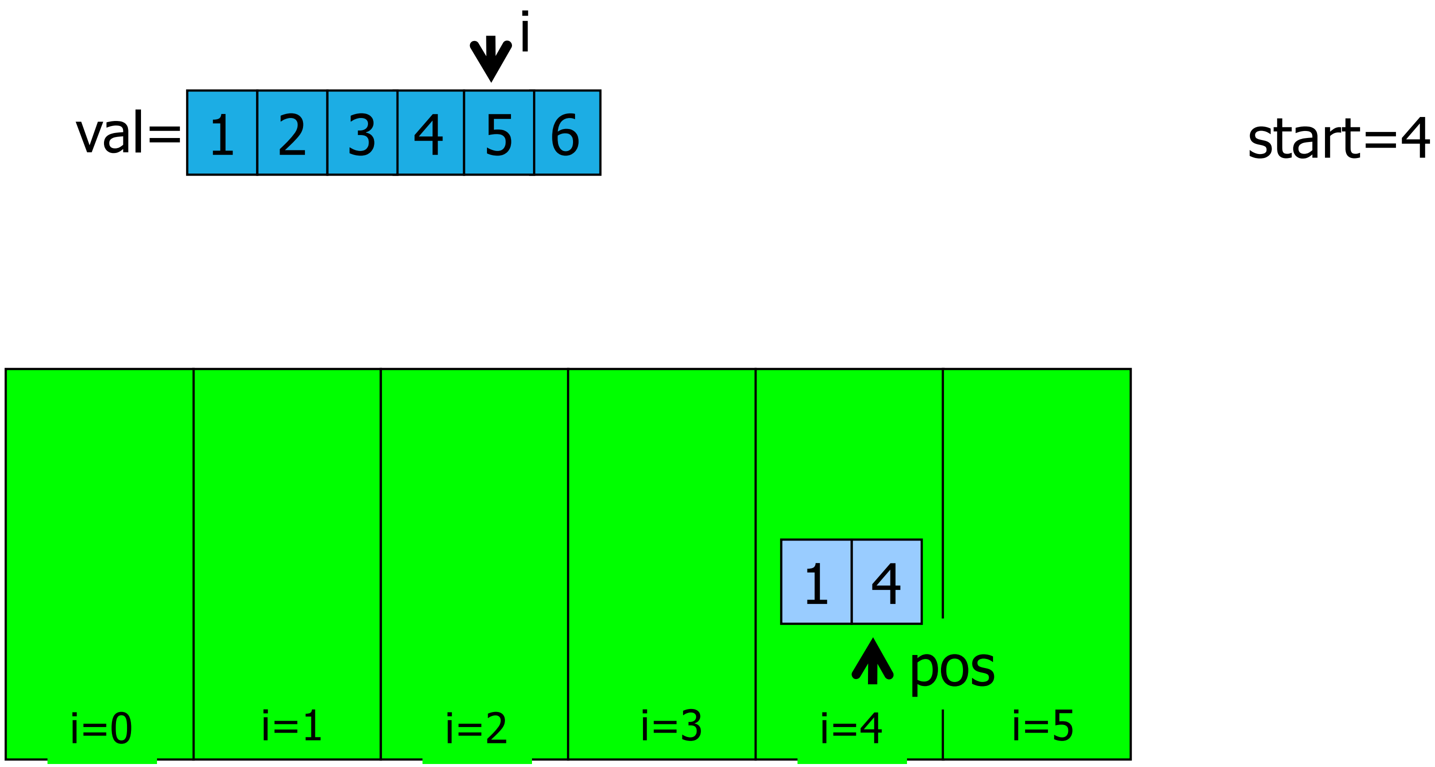
start=3

ricorsione con pos=2

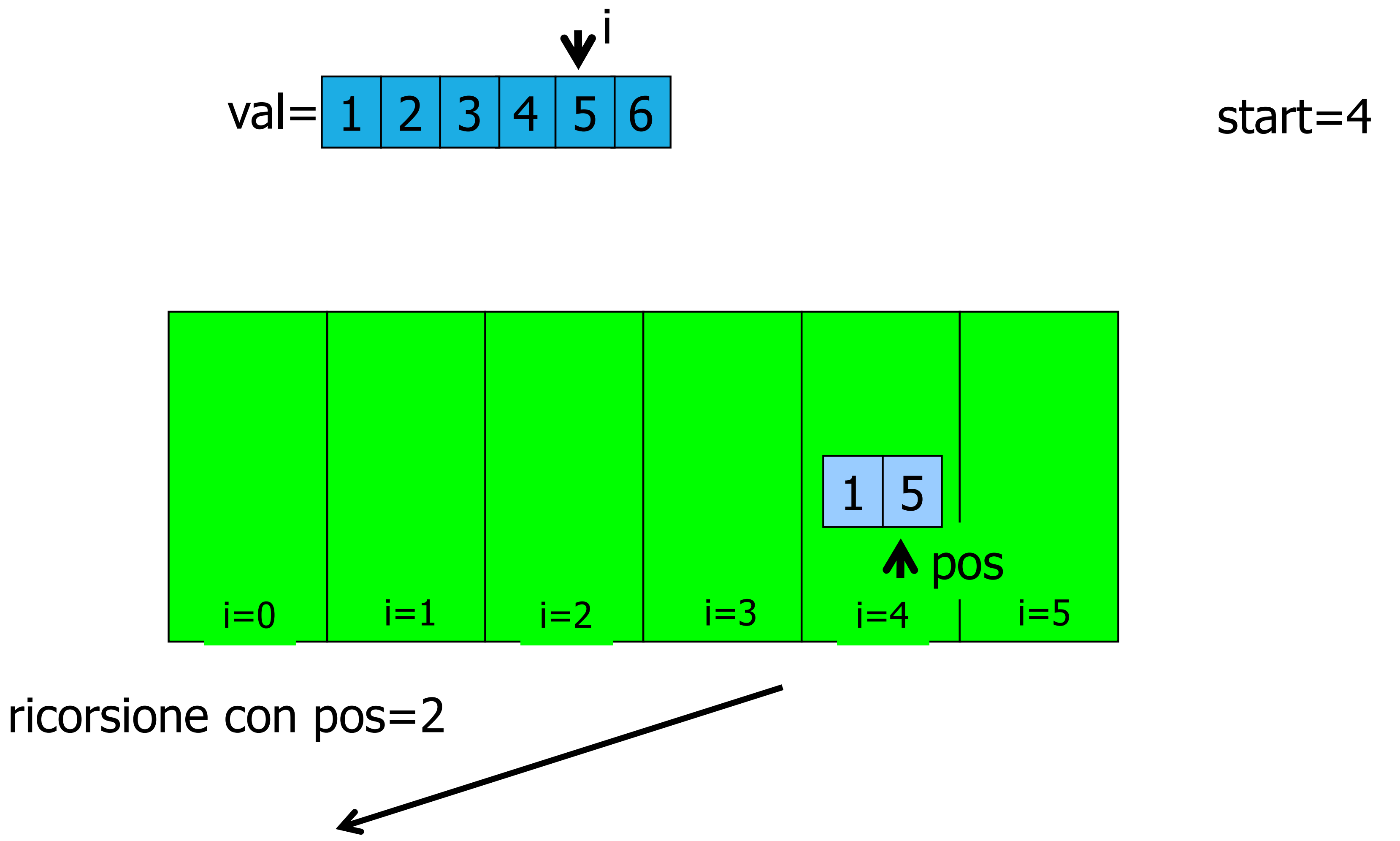


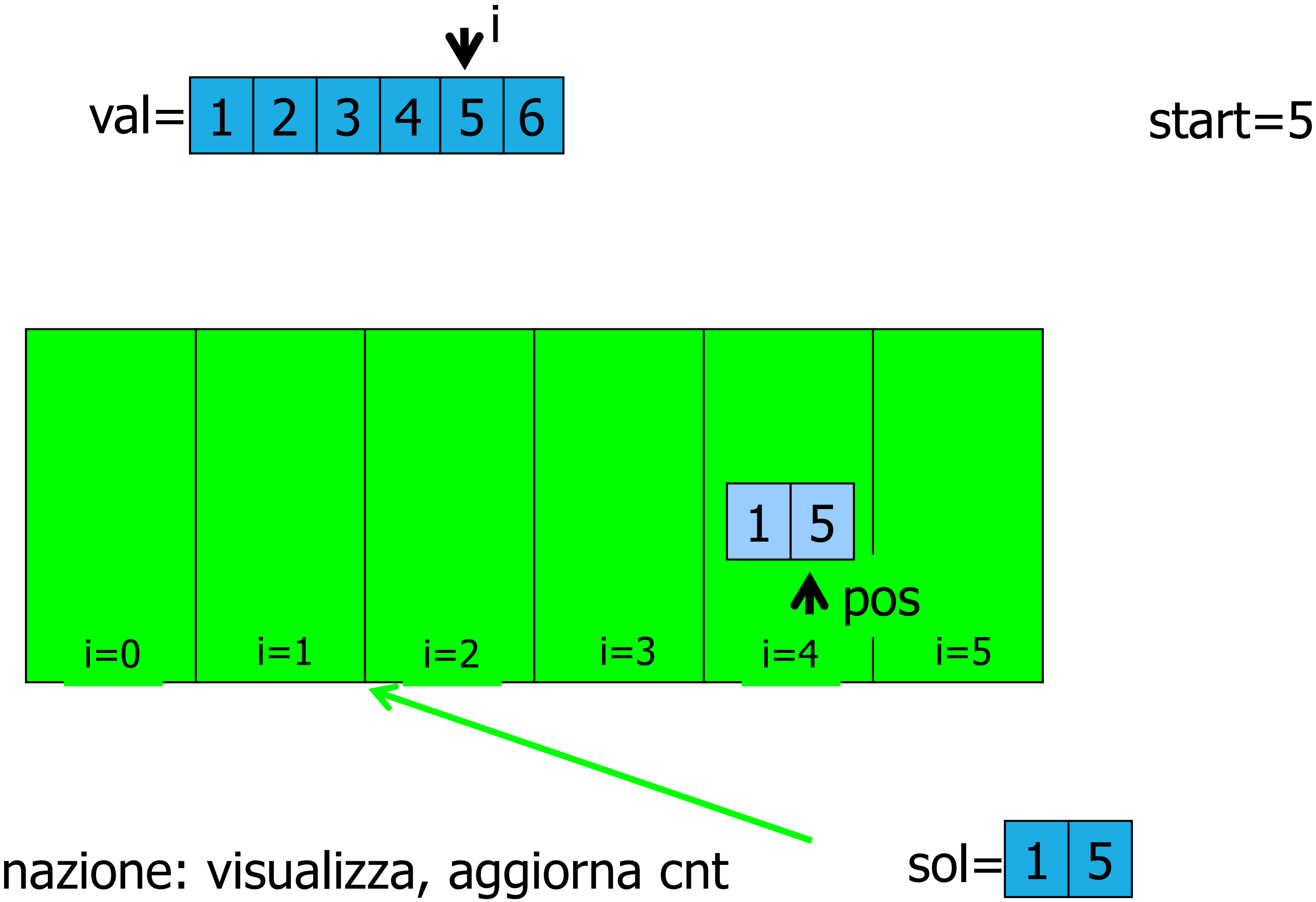
terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start

sol= 1 4

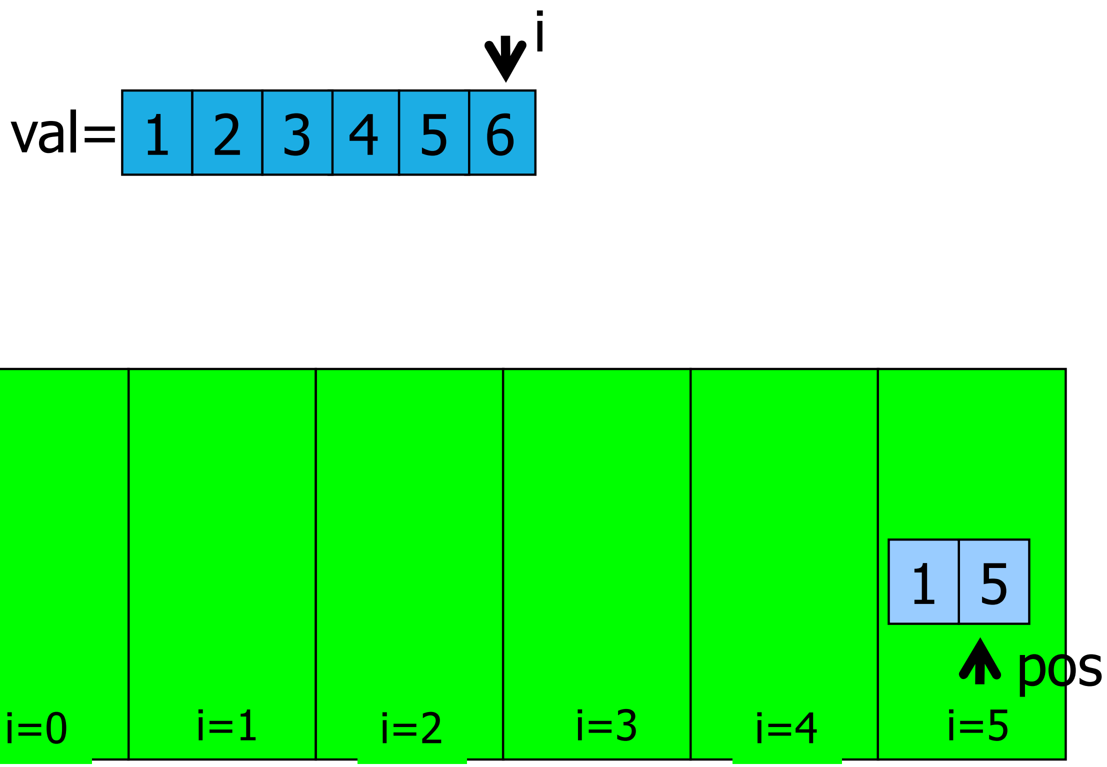


sol[pos] = val[i]


i
val= 1 2 3 4 5 6
start=4
1 5
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=2

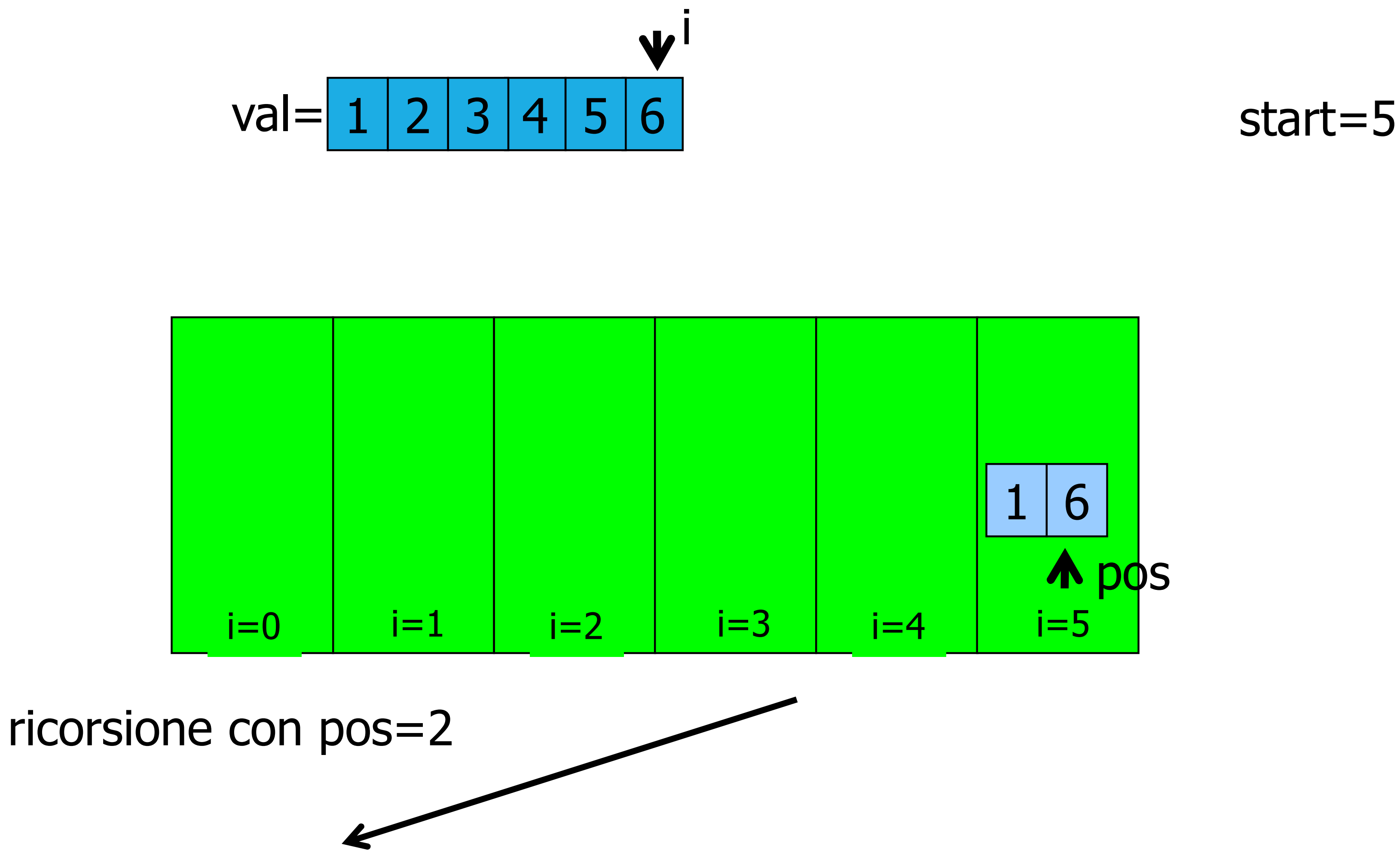


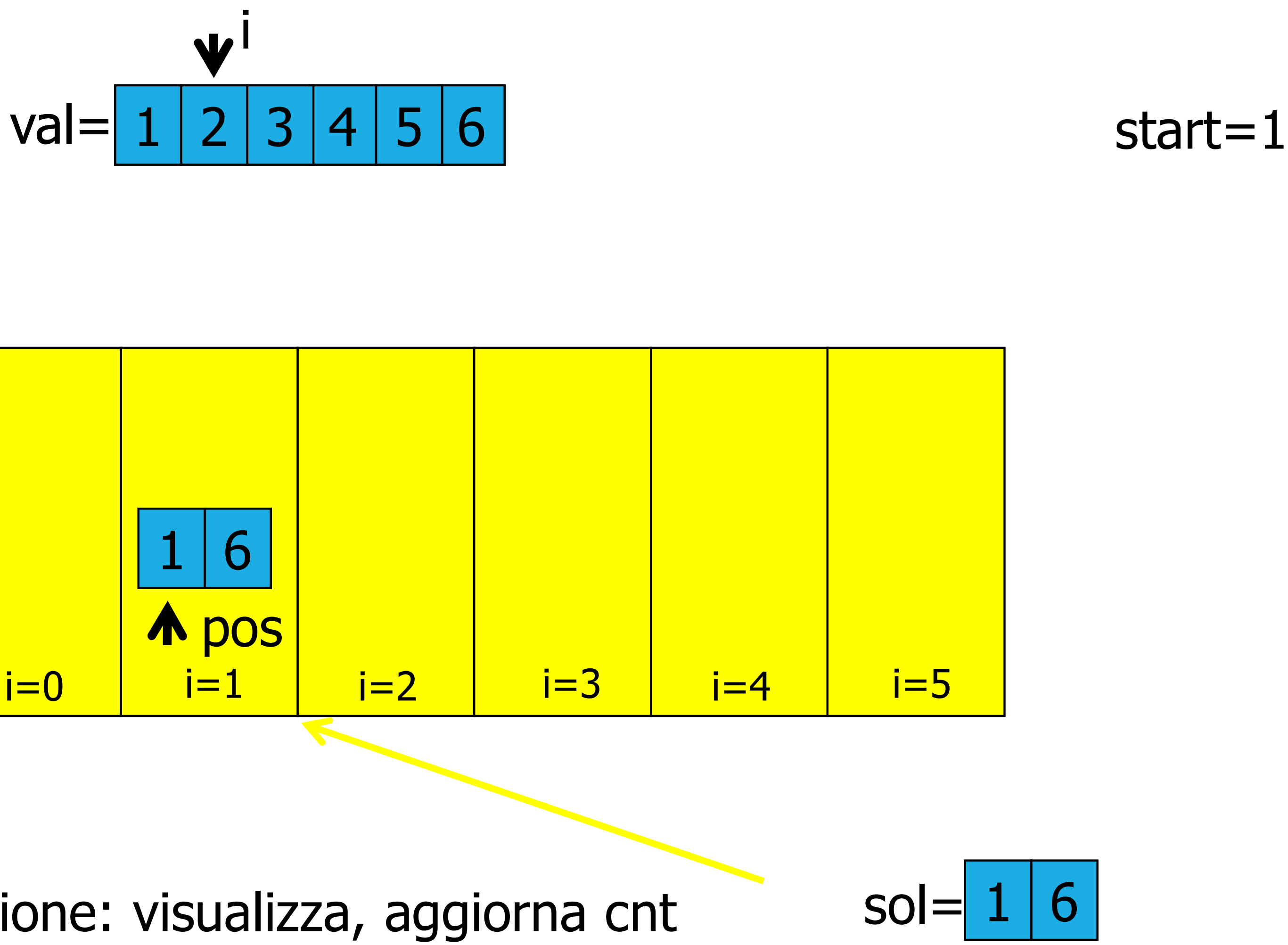
terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start



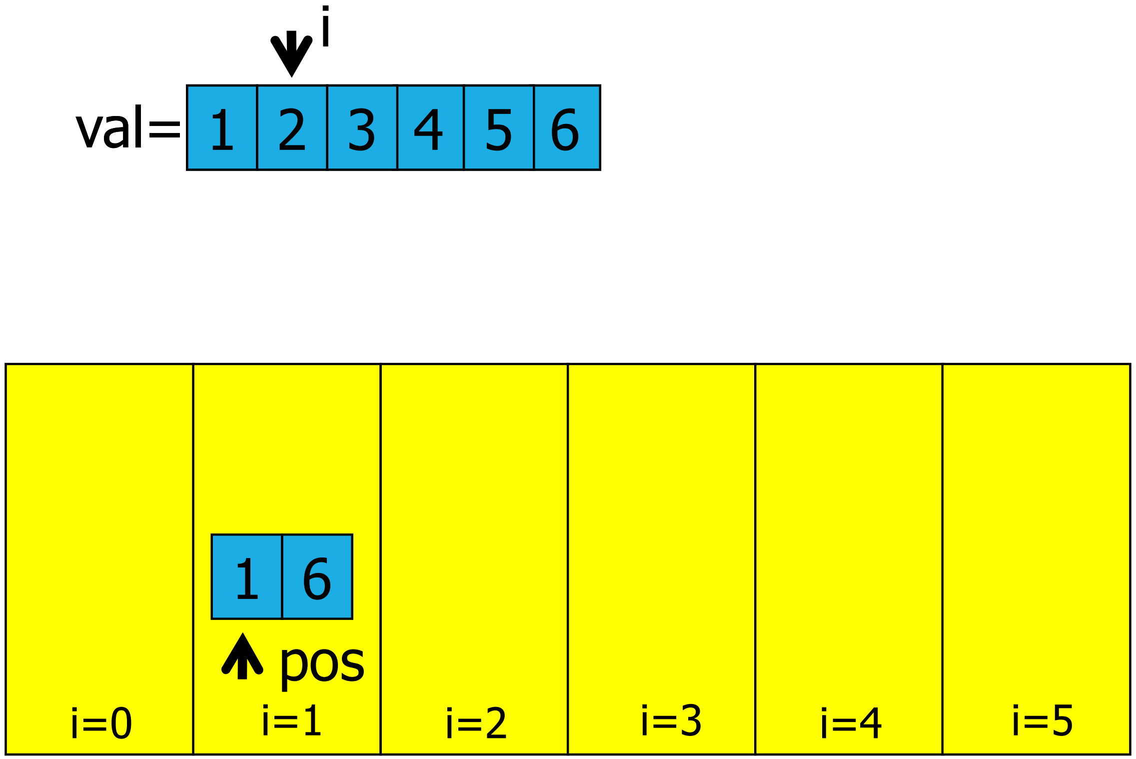
start=5

sol[pos] = val[i]


i
val= 1 2 3 4 5 6
start=5
1 6
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con pos=2

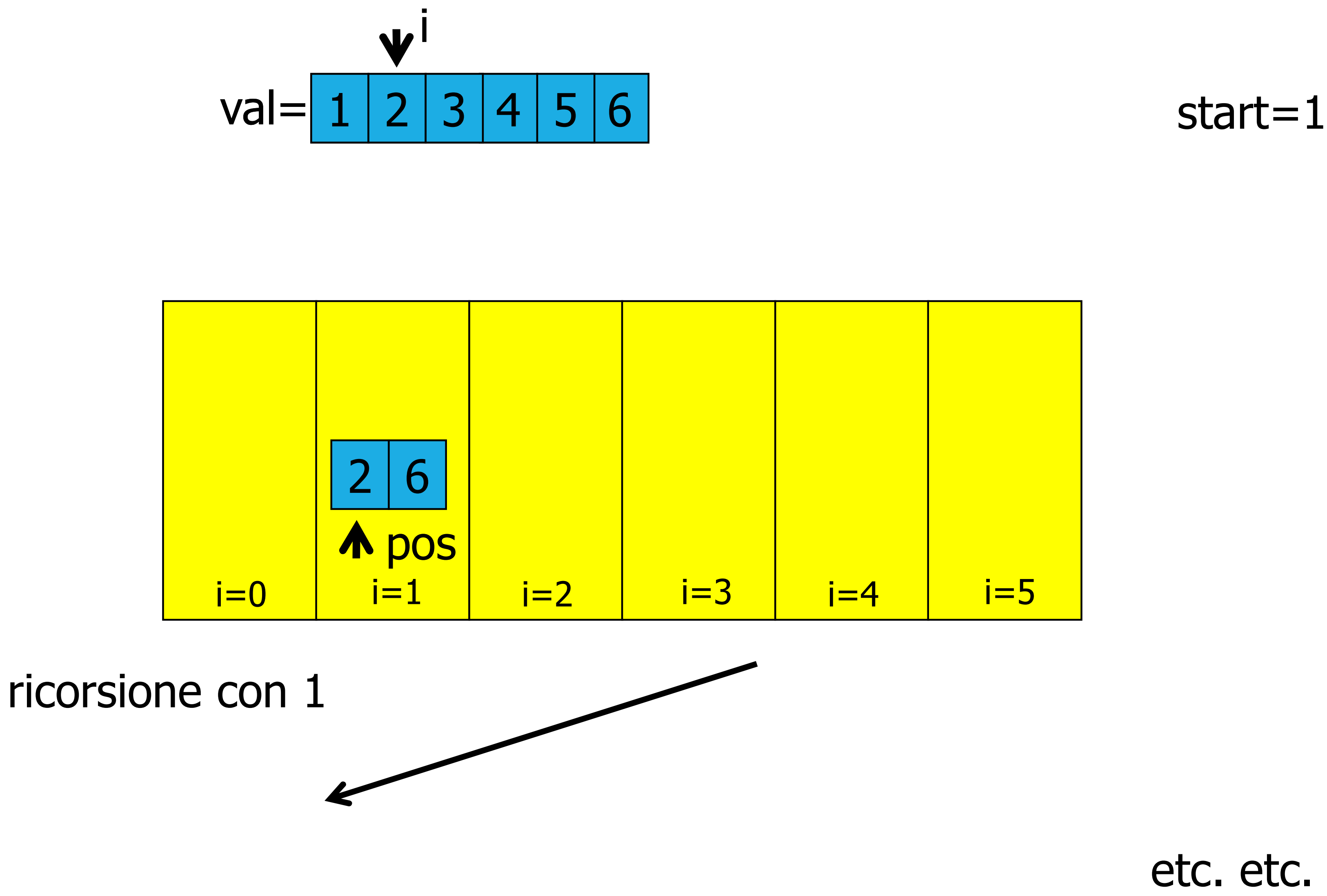


terminazione: visualizza, aggiorna cnt
ritorna e aggiorna start



start=1

sol[pos] = val[i]


i
val=
1
2
3
4
5
6
start=1
2
6
pos
i=0
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
ricorsione con 1
etc. etc.

L’Insieme delle Parti

Dato un insieme S di n elementi, si può calcolare l’insieme delle parti ricorrendo a 3 modelli:

1. paradigma divide et impera
2. disposizioni ripetute
3. combinazioni semplici

Divide et impera

- caso terminale: insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto $\{\varnothing\}$
- caso ricorsivo: insieme formato dall'unione:
  - dall'insieme delle parti $\wp(S_{n-1})$ per n-1 elementi
  - $\forall$i con gli insiemi che risultano dall'unione di ognuno degli insiemi $\not{p}_i$ che appartengono all'insieme delle parti per n-1 elementi $\wp(S_{n-1})$ con l'insieme che contiene l'elemento i-esimo $\{s_i\}$

$$\wp(S_n) = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{se } n = 0 \\ \wp(S_{n-1}) \cup \{\not{p}_i \cup \{s_i\} \mid \not{p}_i \in \wp(S_{n-1})\} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

- Si usano 2 rami ricorsivi distinti, a seconda che l'elemento corrente sia incluso o meno nella soluzione
- in sol si memorizza direttamente l'elemento, non un flag di presenza/assenza
- l'indice start serve per escludere soluzioni simmetriche (quindi già calcolate)
- il valore di ritorno cnt rappresenta il numero totale di insiemi.

```c
int powerset(int pos,int *val,int *sol,int n,int start,int cnt) {
   int i;
   if (start >= n) {
      for (i = 0; i < pos; i++)
         printf("%d ", sol[i]);
      printf("\n");
      return cnt+1;
   }
   for (i = start; i < n; i++) {
      sol[pos] = val[i];
      cnt = powerset(pos+1, val, sol, n, i+1, cnt);
   }
   cnt = powerset(pos, val, sol, n, n, cnt);
   return cnt;
}
```

terminazione: non ci sono più elementi

per tutti gli elementi da start in poi

includi elemento e ricorri

non aggiungere nulla e ricorri

04powerset

Disposizioni ripetute

Ogni sottoinsieme è rappresentato dal vettore della soluzione sol di n elementi:

- l'insieme delle scelte possibili per ogni posizione del vettore è {0, 1}, quindi k = 2. Il ciclo for è sostituito da 2 assegnazioni esplicite
- sol[pos]=0 se l'oggetto pos-esimo non appartiene al sottoinsieme
- sol[pos]=1 se l'oggetto pos-esimo appartiene al sottoinsieme
- nella stessa soluzione 0 e 1 possono comparire più volte

È scambiato il ruolo di n e k rispetto alla definizione di disposizioni ripetute (dove n era il numero di scelte e k la dimensione della soluzione).

```c
int powerset(int pos,int *val,int *sol,int n,int cnt) {
  int j;
  if (pos >= n) {
    printf("{ \t");
    for (j=0; j<n; j++)
      if (sol[j]!=0)
        printf("%d \t", val[j]);
      printf("} \n");
    return cnt+1;
  }
  sol[pos] = 0;
  cnt = powerset(pos+1, val, sol, n, cnt);
  sol[pos] = 1;
  cnt = powerset(pos+1, val, sol, n, cnt);
  return cnt;
}
```

terminazione: stampa soluzione

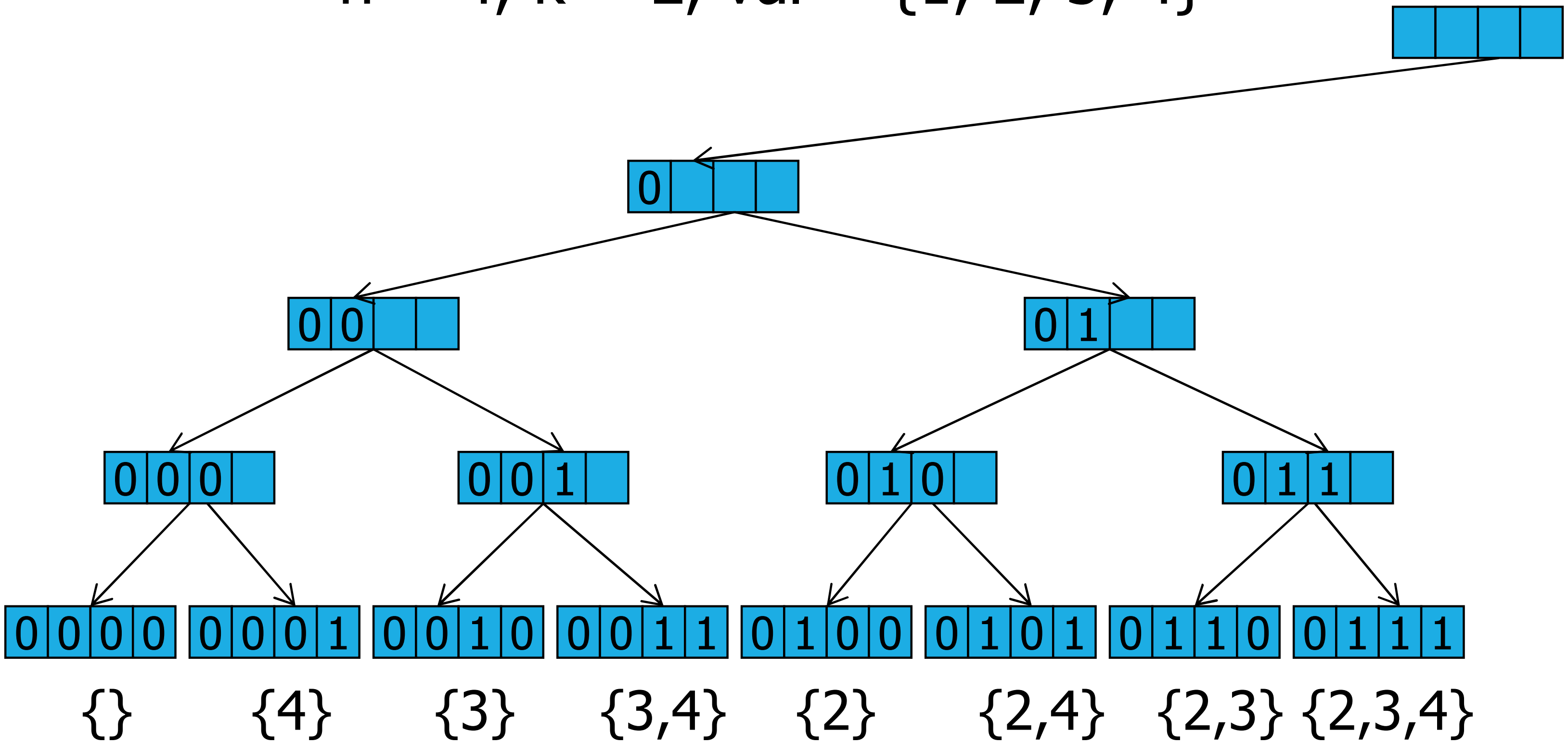
non prendere l'elemento pos

ricorri su pos+1

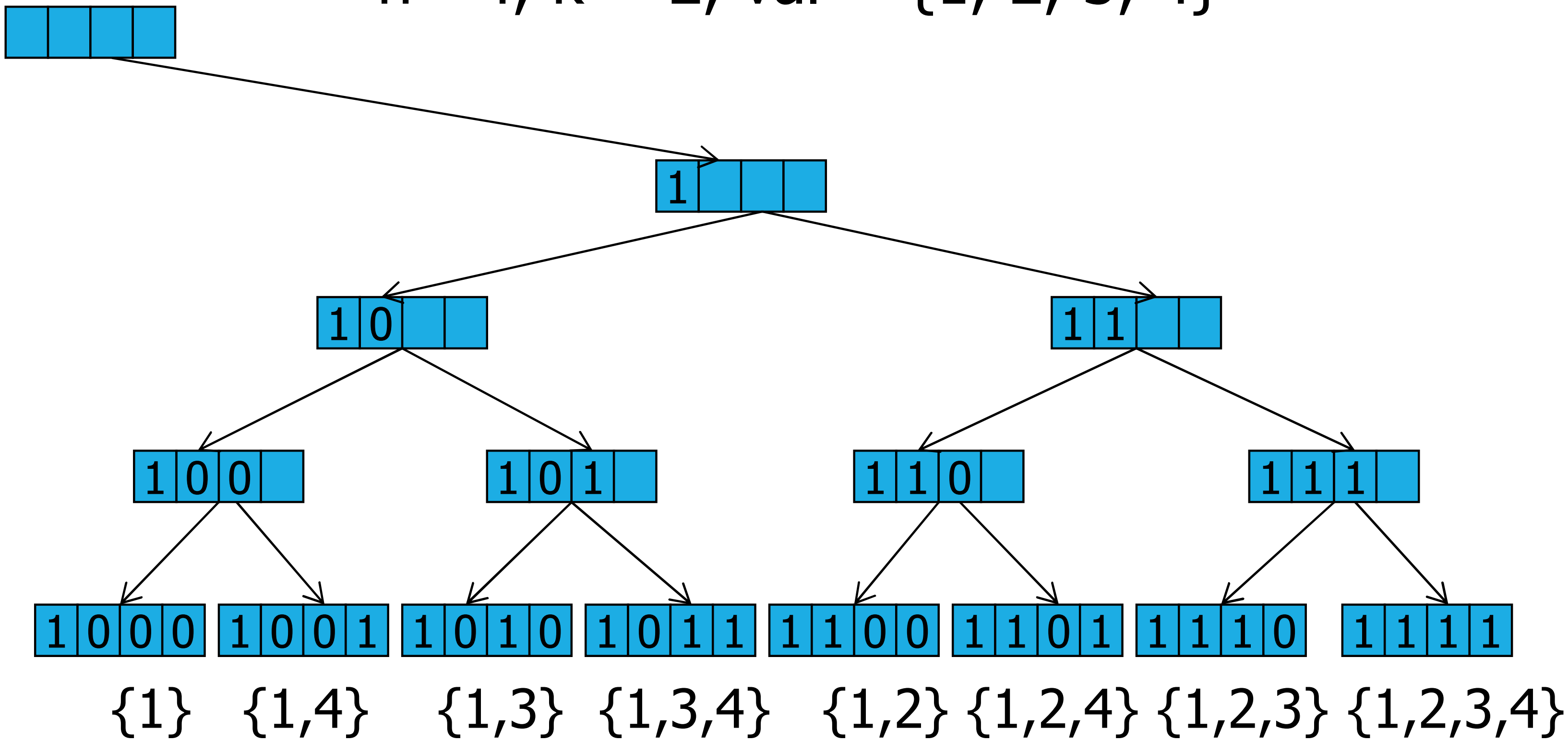
backtrack: prendi l'elemento pos

ricorri su pos+1

n = 4, k = 2, val = {1, 2, 3, 4}



n =4, k = 2, val = {1, 2, 3, 4}



Combinazioni semplici

- Unione di insieme vuoto e insieme delle parti degli insiemi con j = 1, 2, 3, …., n elementi
- Trattandosi di insiemi l'ordine non conta
- Modello: combinazioni semplici di n elementi presi a gruppi di j

$$\wp(S) = \{ \varnothing \} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{ \binom{n}{j} \}$$

- il wrapper si occupa dell'unione dell'insieme vuoto (non generato dalle combinazioni) e dell'iterare la chiamata alla funzione ricorsiva delle combinazioni.

wrapper

```
int powerset(int *val, int n, int *sol){
    int cnt = 0, j;
    printf("{ }\n");
    cnt++;
    for(j = 1; j <= n; j++){
        cnt += powerset_r(val, n, sol, j, 0, 0);
    }
    return cnt;
}
```

insieme vuoto

iterazione delle chiamate ricorsive

```
int powerset_r(int* val, int n, int *sol, int j, int pos,int start){
   int cnt = 0, i;
   if (pos >= j){
      printf("{ ");
      for (i = 0; i < j; i++)
         printf("%d ", sol[i]);
      printf(" }\n");
      return 1;
   }
   for (i = start; i < n; i++){
      sol[pos] = val[i];
      cnt += powerset_r(val, n, sol, j, pos+1, i+1);
   }
   return cnt;
}
```

caso terminale: raggiunto numero prefissato di elementi

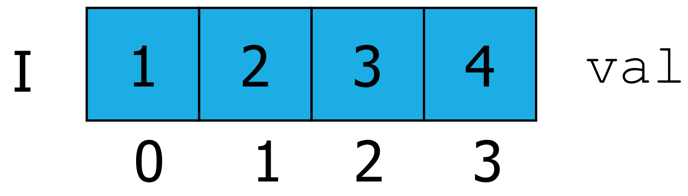
per tutti gli elementi da start in poi

Partizioni di un insieme S

Rappresentazione delle partizioni:

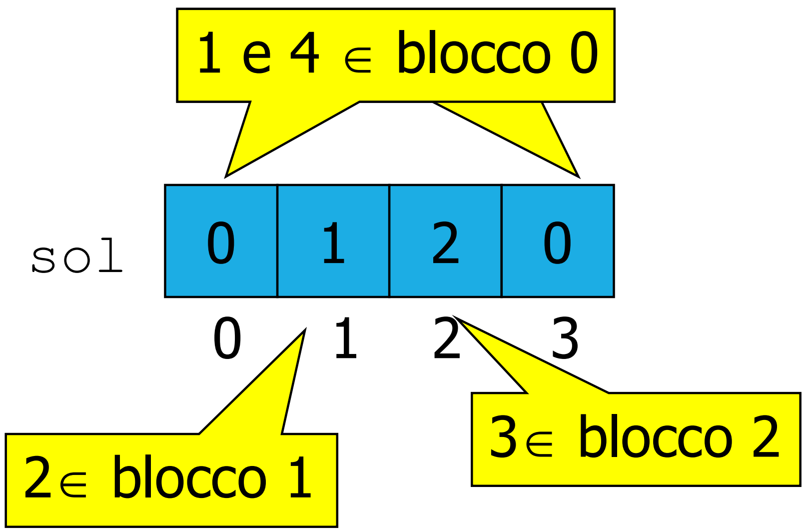
- dato l’elemento, si indica il blocco a cui appartiene univocamente
- dato il blocco, si elencano gli elementi (anche più d’uno) che vi appartengono.

La prima soluzione è preferita in quanto permette di usare vettori di interi.



Esempio

Se I = {1, 2, 3, 4}, n = card(I)=4 e si richiedono partizioni in k = 3 blocchi (i blocchi hanno indice 0, 1 e 2), la partizione {1, 4}, {2}, {3} è rappresentata come:



Problemi

Dati I e n=card(I), determinare:

- una partizione qualsiasi
- tutte le partizioni in k blocchi con k tra 1 e n
- tutte le partizioni in k blocchi.

disposizioni ripetute

algoritmo di Er

Disposizioni ripetute

- Il numero di oggetti memorizzati nel vettore val è n
- Il numero di decisioni da prendere è n, quindi il vettore sol contiene n celle
- Il numero delle scelte possibili per ogni oggetto è il numero di blocchi, che varia tra 1 e k
- Ogni blocco è identificato da un indice i compreso tra 0 e k-1
- sol[pos] contiene l’indice i del blocco cui appartiene l’oggetto di indice corrente pos.

- È scambiato il ruolo di n e k rispetto agli altri esempi (dove n era il numero di scelte e k la dimensione della soluzione)
- Si tratta di una generalizzazione del powerset rimuovendo il vincolo della scelta limitata a 0 oppure 1
- Necessità di un controllo nella condizione di terminazione per evitare blocchi vuoti (calcolo delle occorrenze di ciascun blocco)
- La funzione calcola tutte le partizioni. In seguito si vedrà come fermarsi alla prima.

```c
void disp_ripet(int pos,int *val,int *sol,int n,int k) {
  int i, j, ok=1, *occ;
  if (pos >= n) {
   occ = calloc(k, sizeof(int));
   for (j=0; j<n; j++)
       occ[sol[j]]++;
    i=0;
    while ((i < k) && ok) {
        if (occ[i]==0) ok = 0;
        i++;
    }
    free(occ);
    if (ok == 0) return;
    else { /*STAMPA SOLUZIONE */  }
  }
  for (i = 0; i < k; i++) {
    sol[pos] = i;  disp_ripet(pos+1, val, sol, n, k);
  }
}
```

vettore delle occorrenze dei blocchi

calcolo occorrenze

controllo occorrenze

soluzione scartata

ricorsione

```c
val = malloc(n*sizeof(int));
sol = malloc(n*sizeof(int));
```

05part_semplif

Algoritmo di Er (1987)

Calcolo di tutte le partizioni di n oggetti memorizzati nel vettore val in k blocchi con k compreso tra 1 e n:

- indice pos per scorrere gli n oggetti e terminare la ricorsione quando pos >= n
- indice i per scorrere gli m blocchi utilizzabili in quel passo
- vettore sol di n elementi per la soluzione

- 2 ricorsioni:
  - si attribuisce l’oggetto corrente a uno dei blocchi utilizzabili nel passo corrente (indice i tra 0 e m-1) e si ricorre sul prossimo oggetto (pos+1)
  - si attribuisce l’oggetto corrente al blocco m e si ricorre sul prossimo oggetto (pos+1) e su un numero di blocchi utilizzabili incrementato di 1 (m+1).

```c
void SP_rec(int n,int m,int pos,int *sol,int *val) {
  int i, j;
  if (pos >= n) {
    printf("partizione in %d blocchi: ", m);
    for (i=0; i<m; i++)
      for (j=0; j<n; j++)
        if (sol[j]==i)
          printf("%d ", val[j]);
    printf("\n");
    return;
  }
  for (i=0; i<m; i++) {
    sol[pos] = i;
    SP_rec(n, m, pos+1, sol, val);
  }
  sol[pos] = m;
  SP_rec(n, m+1, pos+1, sol, val);
}
```

condizione di terminazione

ricorsione sugli oggetti

ricorsione su oggetti e blocchi

```c
val = malloc(n*sizeof(int));
sol = calloc(n, sizeof(int));
```

06part_Er

Calcolo di tutte le partizioni di n oggetti memorizzati nel vettore val esattamente in k blocchi:

- come prima, passando il parametro k usato nella condizione di terminazione per “filtrare” le soluzioni accettate.

```
void SP_rec(int n,int k,int m,int pos,int *sol,int *val){
  int i, j;
  if (pos >= n) {
    if (m == k) {
      for (i=0; i<m; i++)
        for (j=0; j<n; j++)
          if (sol[j]==i)
            printf("%d ", val[j]);
      printf("\n");
    }
    return;
  }
  for (i=0; i<m; i++) {
    sol[pos] = i;
    SP_rec(n, k, m, pos+1, sol, val);
  }
  sol[pos] = m;
  SP_rec(n, k, m+1, pos+1, sol, val);
}
```

condizione di terminazione

filtro

ricorsione sugli oggetti

ricorsione su oggetti e blocchi

```
val = malloc(n*sizeof(int));
sol = calloc(n, sizeof(int));
```

07part_k_blocchi_Er

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Automatica e Informatica

Esplorazione esaustiva dello spazio delle soluzioni: singola soluzione

Paolo Camurati

Singola soluzione

La ricorsione è particolarmente utile quando si vogliono elencare tutte le soluzioni e questo è obbligatorio nei problemi di ottimizzazione.

Se ne basta una sola, bisogna far sì che tutte le ricorsioni si chiudano, ricordando che ognuna torna a quella che l'ha chiamata.

È infatti errato pensare di poter «forare» la catena delle ricorsioni, tornando subito a quella iniziale.

Soluzioni:

1. uso di un flag:
    - variabile globale (soluzione sconsigliata)
    - parametro passato by reference
2. funzione ricorsiva che ritorna un valore di successo o fallimento che viene testato.

Uso di flag come parametro by reference:

- si definisce un flag `stop` (inizializzato a 0), il puntatore al quale è passato come parametro alla funzione ricorsiva:
  - in caso di terminazione con successo, `stop` è messo a 1
  - il ciclo sulle scelte ha nella condizione di esecuzione `stop==0`

```c
/* main */
int stop = 0;
.....
funz_ric(.....  , &stop);

void funz_ric(....., int *stop_ptr) {
  .....
  if (condizione di terminazione) {
    .....
    (*stop_ptr) = 1;
    return;
  }
  for (i=0; condizione su i && (*stop_ptr)==0; i++) {
    .....
    funz_ric(....., stop_ptr);
    .....
  }
  return;
}
```

Funzione ricorsiva che ritorna un valore intero di successo/fallimento (versione senza pruning):

- nella condizione di terminazione, se la condizione di accettazione è verificata si ritorna 1, altrimenti si ritorna 0
- nel ciclo di scelta:
  - si effettua la scelta
  - si testa il risultato della chiamata ricorsiva: se c'è successo si ritorna 1
- terminato il ciclo di scelta: si ritorna 0.

nel main

```
if (funz_ric(.....  )==0)
  printf("soluzione non trovata\n");
int funz_ric(.....) {
 if (condizione di terminazione)
   if (condizione di accettazione) {
     .....
     return 1;
   return 0;
   }
 for (ciclo sulle scelte) {
    scelta;
    if (funz_ric(.....))
      return 1;
    .....
  }
  return 0;
}
```

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Automatica e Informatica

Problemi di ottimizzazione

Paolo Camurati

Esplorando esaustivamente lo spazio delle soluzioni, si tiene traccia della soluzione fino al momento ottima, che si aggiorna eventualmente ad ogni passo.

È necessario generare tutte le soluzioni.

Il conto corrente

Input: vettore di interi di lunghezza nota n. Ogni intero rappresenta un movimento distinto su un conto bancario:

- >0: entrata
- <0: uscita.

Dato un ordine per i movimenti, il saldo corrente è il valore ottenuto sommando algebricamente al saldo precedente (inizialmente 0) l’importo del movimento.

Per ogni ordinamento dei movimenti ci sarà un saldo corrente massimo e un saldo corrente minimo, mentre il saldo finale sarà ovviamente lo stesso, qualunque sia l'ordine.

Determinare l'ordine dei movimenti che minimizza la differenza tra saldo corrente massimo e saldo corrente minimo.

Esempio

Dati n=10 e val={-1,-6,3,14,-5,16,7,8,-9,120}

- ordinamento {3,-1,14,-6,-5,16,7,8,-9,120}

corr.	0	3	2	16	10	5	21	28	36	27	147
max	0	3	3	16	16	16	21	28	36	36	147
min	∝	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Δ	0	0	1	14	14	14	19	26	34	34	145

- ordinamento {120,3,-1,14,-6,-5,16,-9,7,8}

corr.	0	120	123	122	136	130	125	141	132	139	147
max	0	120	123	123	136	136	136	141	141	141	147
min	∝	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
Δ	0	0	3	3	16	16	16	21	21	21	27

minimo

- Modello: permutazioni semplici per enumerare gli ordinamenti
- Enumerazione di tutte le soluzioni
- Funzione check per valutare l’ottimalità di ogni soluzione.

Algoritmo:

- algoritmo ricorsivo per le permutazioni semplici
- quando si è raggiunta la condizione di terminazione:
  - si calcola il saldo max e min e della differenza corrente
  - si confronta la differenza corrente con la minima sinora trovata
  - eventualmente si aggiorna la soluzione.
- Ipotesi:
- è noto un limite superiore alla massima differenza minima (= INT_MAX).

variabile globale

```c
// #include anche di <limits.h>
int min_diff = INT_MAX;
void perm(int pos,int *val,int *sol,int *mark,int *fin,int n);
void check(int *sol, int *fin, int n);

int main(void) {
  int i, n, *val, *sol, *mark, *fin;
  printf("Inserisci n: "); scanf("%d", &n);
  // allocazione di val, sol, mark e fin di n interi
  for (i=0; i < n; i++) { sol[i]= -1; mark[i]= 0;}
  // leggi valori in val
  perm(0, val, sol, mark, fin, n);
  // stampa risultato da fin
  // free di val, sol, mark e fin
  return 0;
}
```

08contocorrente

non serve il numero delle permutazioni

```
void perm(int pos,int *val,int *sol,int *mark,int *fin,int n) {
  int i;
  if (pos >= n) {
    check(sol, fin, n);
    return;
  }
  for (i=0; i<n; i++)
    if (mark[i] == 0) {
      mark[i] = 1;
      sol[pos] = val[i];
      perm(pos+1, val, sol, mark, fin, n);
      mark[i] = 0;
    }
  return;
}
```

condizione di terminazione

controllo ottimalità soluzione

generazione delle permutazioni

```
void check(int *sol, int *fin, int n) {
  int i, saldo=0, max_curr=0, min_curr=INT_MAX, diff_curr;
  for (i=0; i<n; i++) {
    saldo += sol[i];
    if (saldo > max_curr)
      max_curr = saldo;
    if (saldo < min_curr)
      min_curr = saldo;
  }
  diff_curr = max_curr - min_curr;
  if (diff_curr < min_diff) {
    min_diff = diff_curr;
    for (i=0; i<n; i++)
      fin[i] = sol[i];
  }
  return;
}
```

calcolo del saldo

aggiornamento massimo e minimo

calcolo della differenza

controllo di ottimalità

aggiornamento soluzione

Lo zaino (discreto)

Dato un insieme di N oggetti ciascuno dotato di peso w_j e di valore v_j e dato un peso massimo cap, determinare il sottoinsieme S di oggetti tali che:

- $\sum_{j \in S} w_j \, x_j \leq \text{cap}$
- $\sum_{j \in S} v_j \, x_j = \text{MAX}$
- $x_j \in \{0,1\}$

Ogni oggetto o è preso (x_j =1) o lasciato (x_j=0). Ogni oggetto esiste in una sola instanziazione.

Esempio

N= 4

cap = 10

item | name | size | value |

3

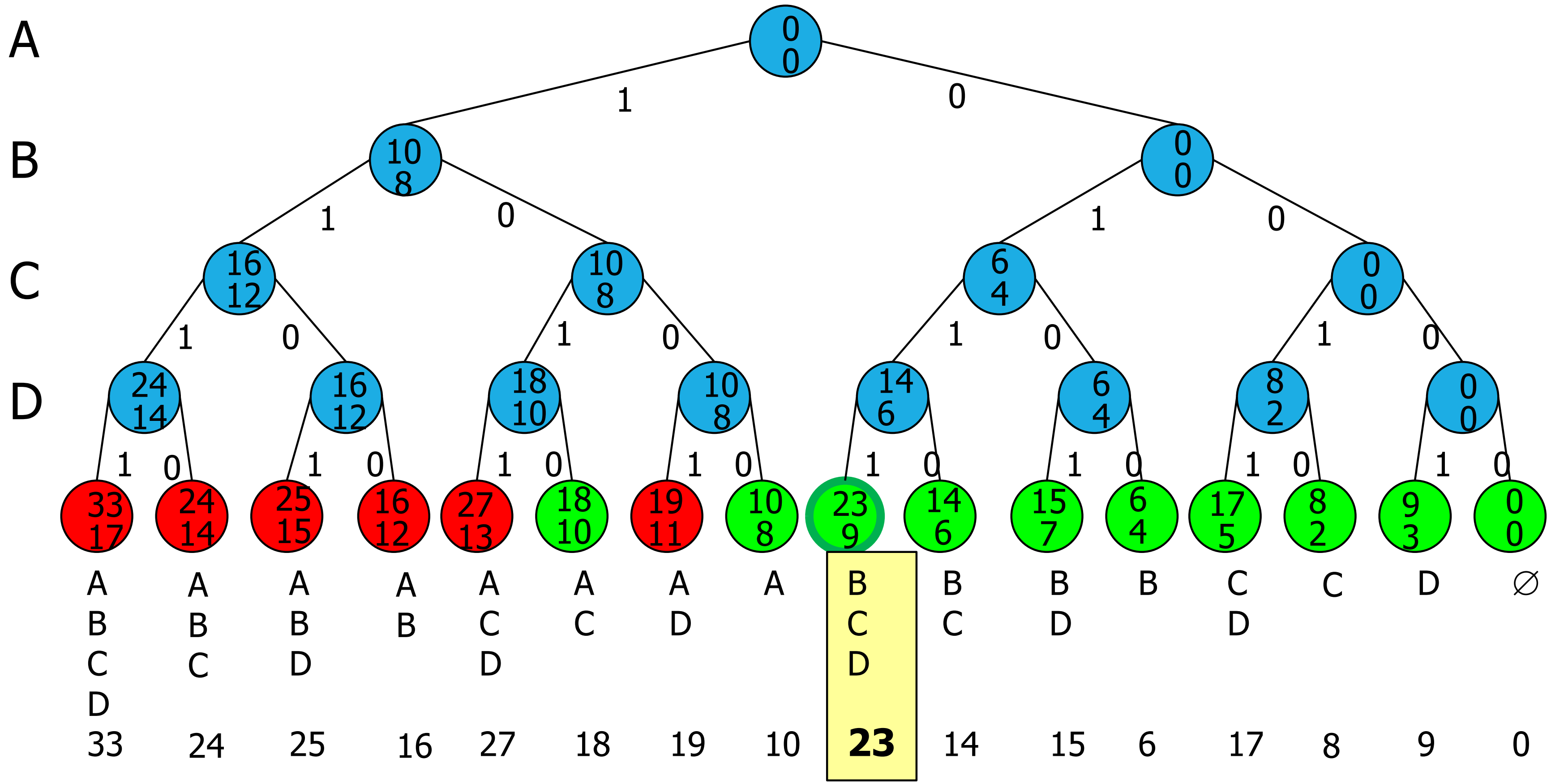
Tipologia 3 nelle slide di programmazione

Nome	A	B	C	D
Valore v_i	10	6	8	9
Peso w_i	8	4	2	3

Soluzione:

insieme {B, C, D} con valore massimo 23

Modello: powerset (disposizioni ripetute)



Strutture dati

- Strutture già viste per le disposizioni ripetute e inoltre:
- Variabili intere:
  - `cap` per la capacità dello zaino
  - `c_val` per il valore corrente (`c` = current)
  - `c_cap` per la capacità usata correntemente
  - `b_val` valore ottimo corrente (`b` = best)
- Vettore di interi `b_sol` per la soluzione ottima corrente.

```
void powerset(int pos,Item *items,int *sol,int k, int cap,
    int c_cap,int c_val,int *b_val, int *b_sol) {

  int j;

  if (pos >= k) {
    if (c_cap <= cap) {
      if (c_val > *b_val) {
        for (j=0; j<k; j++)
          b_sol[j] = sol[j];
        *b_val = c_val;
      }
    }
    return;
  }
```

condizione di terminazione

controllo accettabilità

controllo ottimalità

09knapsack_no_pruning

prendo l’oggetto

aggiorno capacità e valore

ricorro su prossimo oggetto

```
  sol[pos] = 1;
  c_cap += items[pos].size;
  c_val += items[pos].value;
  powerset(pos+1,items,sol,k,cap,c_cap,c_val,b_val,b_sol);

  sol[pos] = 0;
  c_cap -= items[pos].size;
  c_val -= items[pos].value;
  powerset(pos+1,items,sol,k,cap,c_cap,c_val,b_val,b_sol);
}
```

aggiorno capacità e valore

ricorro su prossimo oggetto

lascio l’oggetto

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Automatica e Informatica

Il pruning dello spazio delle soluzioni

Paolo Camurati

- Criterio di accettazione della soluzione espresso mediante vincoli
- Vincoli valutati:
  - direttamente nei casi terminali, senza specifica struttura dati
  - ad ogni chiamata ricorsiva, mediante struttura dati aggiornata dinamicamente
- Crescita molto rapida dello spazio delle soluzioni $\Rightarrow$ inapplicabilità dell'approccio enumerativo

Puzzle di Einstein:

- modello: principio di moltiplicazione
- numero di decisioni da prendere n=5
- scelte disponibili per ogni decisione: permutazioni semplici di 5 alternative (5! scelte)
- dimensione dello spazio di ricerca: $(5!)^5$ = 24.883.200.000
- impossibile valutare i vincoli solo nel caso terminale!

- Osservazioni:
- delle 5! scelte sulla nazionalità, solo (5-1)! hanno il norvegese nella prima casa
- perché considerare anche quelle che certamente porteranno a soluzioni inaccettabili (ad esempio il norvegese non nella prima casa)?
- scartarle non inficia la completezza della ricerca!

⇩

PRUNING

Pruning:

- riduzione dello spazio di ricerca
- nessuna perdita di completezza
- scarto a priori dei rami dell'albero che non possono portare a soluzioni valide/ottime.

I vincoli permettono di:

- escludere a priori strade che non portano a soluzioni accettabili
- anticipare il test di accettazione fatto nella condizione di terminazione in modo da subordinare ad esso la discesa ricorsiva.

La somma di sottoinsiemi

Dato un insieme S di numeri interi positivi distinti e un intero X, determinare tutti i sottoinsiemi Y di S tale che la somma degli elementi di Y sia uguale a X.

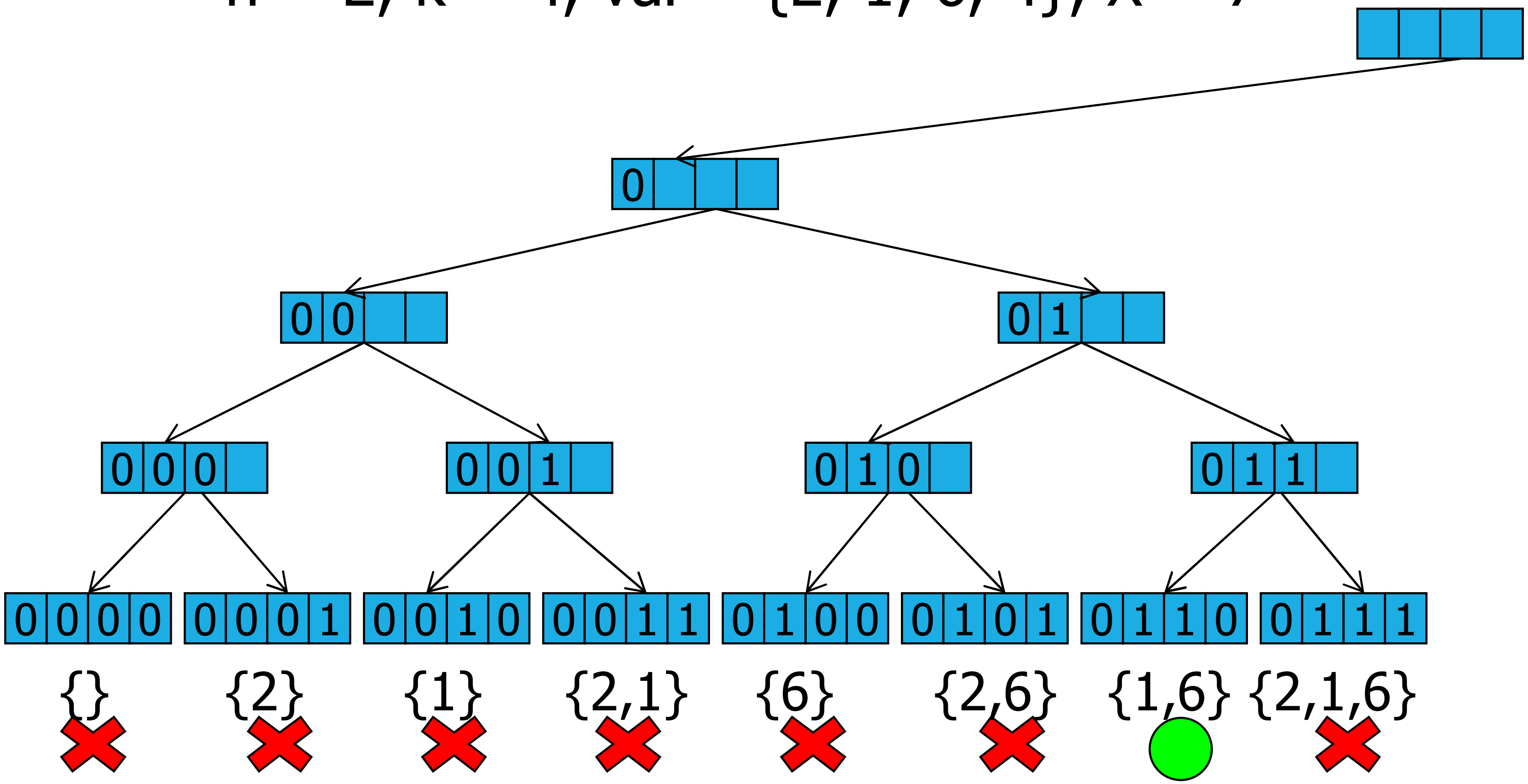
Esempio: S = {2, 1, 6, 4}   X = 7

Soluzione:
Y = { {1,2,4}, {1,6} }

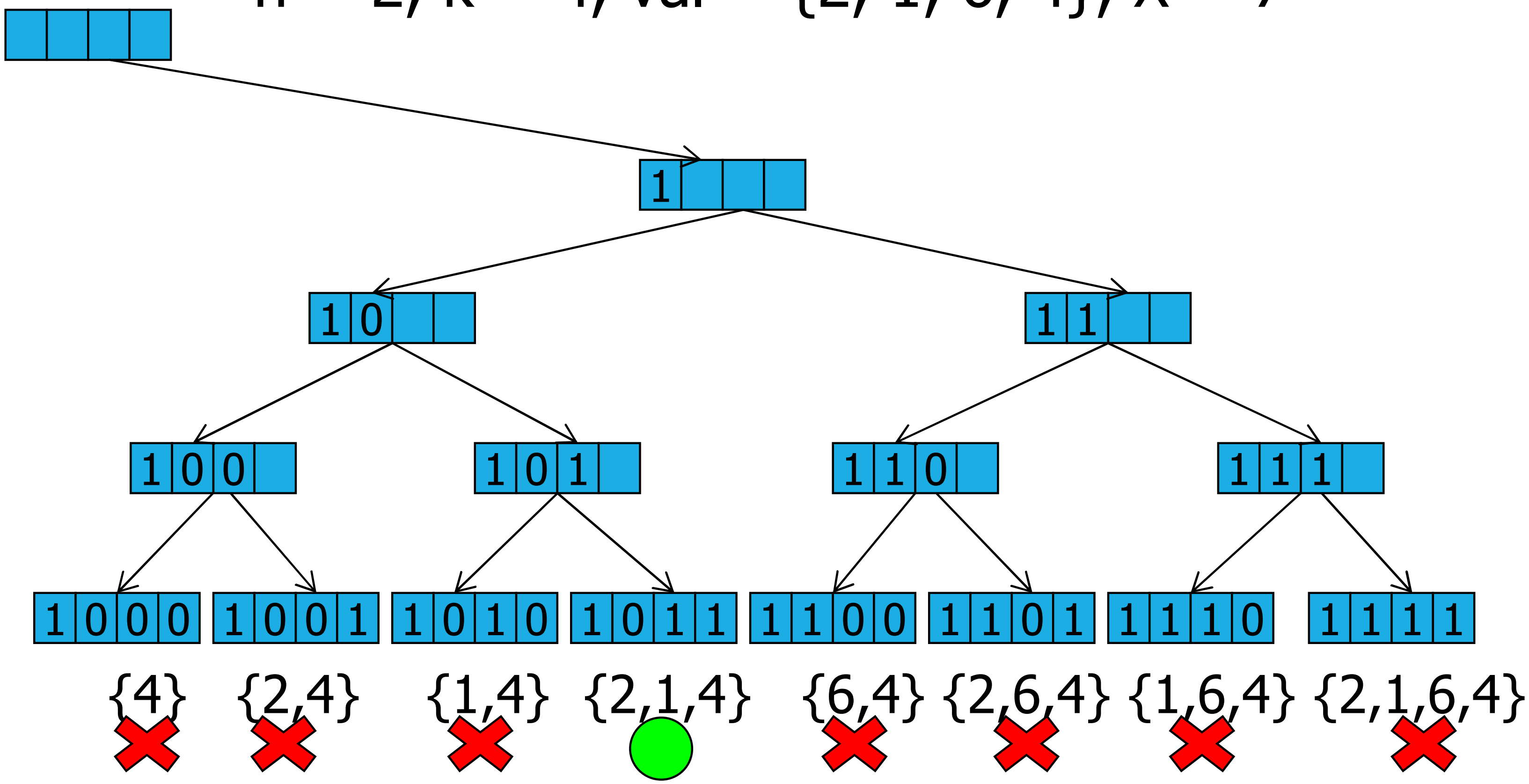
Approccio enumerativo (senza pruning):

- calcolare il powerset $\wp$(val) (disposizioni ripetute)
- per ogni sottoinsieme (condizione di terminazione), verificare se la somma dei suoi elementi è X.

$n = 2$, $k = 4$, $val = \{2, 1, 6, 4\}$, $X = 7$



$n = 2$, $k = 4$, val = {2, 1, 6, 4}, $X = 7$



```c
void powerset(int pos,int *val,int *sol,int k,int X){
  int j, out;
  if (pos >= k) {
    out = check(sol, val, X, k);
    if (out==1) {
    etc.etc.
}

int check(int *sol, int *val, int X, int k) {
  int j, tot=0;
  for (j=k-1; j>=0; j--)
    if (sol[j]!=0)
      tot += val[k-j-1];
  if (tot==X)
    return 1;
  return 0;
}
```

terminazione

verifica soluzione

stampa soluzione

```c
val = malloc(k * sizeof(int));
sol = calloc(k, sizeof(int));
```

10simple_sum_of_subsets

Il Pruning

- Anticipazione della valutazione dei vincoli in uno stato intermedio
- Non c'è una metodologia generale
- Casi tipici:
  - filtro statico sulle scelte: condizioni di accettazione che non dipendono dalle scelte precedenti, ma solo dal problema (ad esempio condizioni ai bordi in una mappa)
  - filtro dinamico sulle scelte: condizioni di accettazione che dipendono dalle scelte precedenti e dal problema (ad esempio la posizione di altri pezzi nel gioco)
  - validazione di una soluzione parziale: valutazione della speranza di raggiungere una soluzione o condizione sufficiente per decidere che la soluzione non può essere raggiunta.

La somma di sottoinsiemi

Approccio con pruning: strategia basata sulla valutazione della speranza:

- si ordina in modo crescente val
- p è la somma corrente (p = partial sum), inizialmente 0
- r, inizialmente pari alla somma di tutti i valori di val, contiene la somma dei valori non ancora presi, quindi ancora disponibili (r = remaining sum)
- ad ogni passo si prende in considerazione un elemento di val solo se “promettente”.

Un elemento di val è promettente se:

- la soluzione parziale + i valori che restano sono >= della somma cercata

  p + r >= X

  &&

- la soluzione parziale + il valore di val è <= della somma cercata

  p + val[pos]<= X

Se l’elemento è promettente:

- lo si prende (`sol[pos]=1`)
- si ricorre sul prossimo (`pos+1`), aggiornando `p` (`p+val[pos]`) e `r` (`r-val[pos]`)
- in fase di backtrack, non lo si prende (`sol[pos]= 0`)
- si ricorre sul prossimo (`pos+1`), `p` resta invariato, `r` viene aggiornato (`r-val[pos]`)

deciso di non prendere l’elemento

Se l’elemento non è promettente, essendo il vettore `val` ordinato, anche tutti gli elementi che lo seguono sono «a fortiori» non promettenti:

- se `p + r < X` tale somma non potrà aumentare considerando il prossimo elemento, indipendentemente dall’ordine
- se `p + val[pos] > X`, poiché l’elemento successivo è > di quello corrente, la condizione $\leq X$ non potrà mai essere soddisfatta.

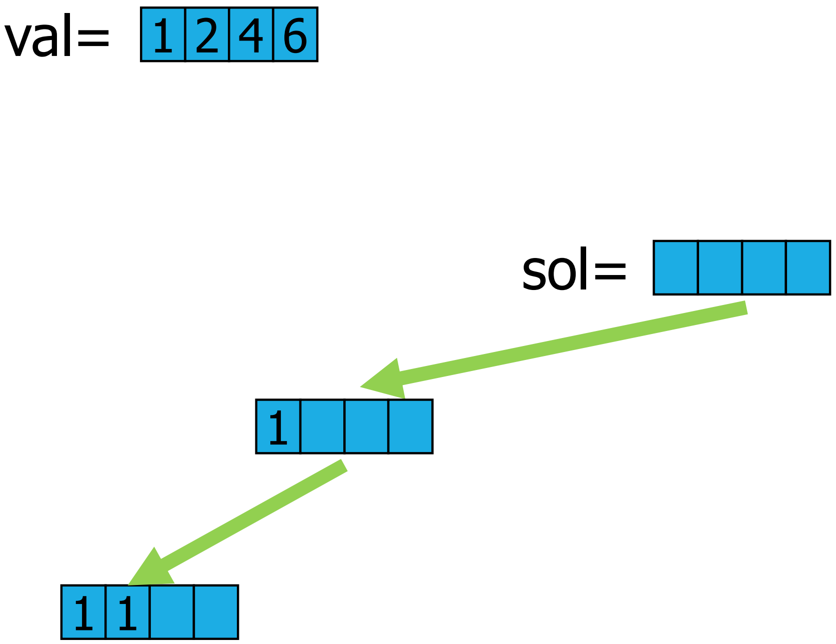
val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

```
pos=0      val[pos]=1
p=0        r=13
0+13>=7 && 0+1<=7
```

sol= | | | | |

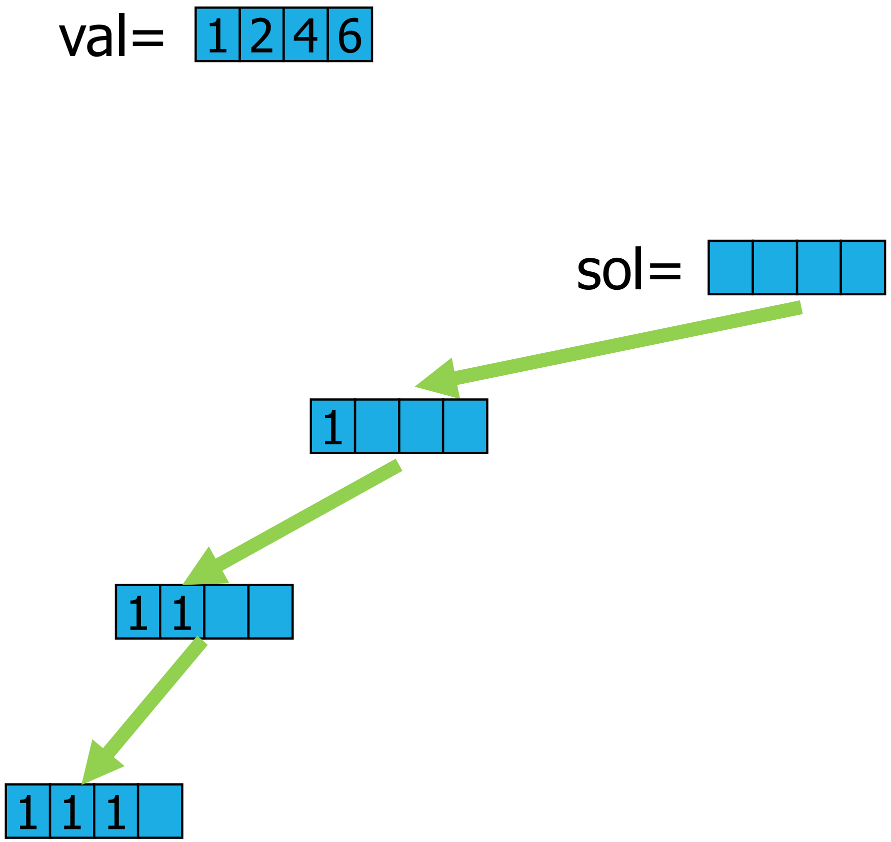
| 1 | | | |

Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`



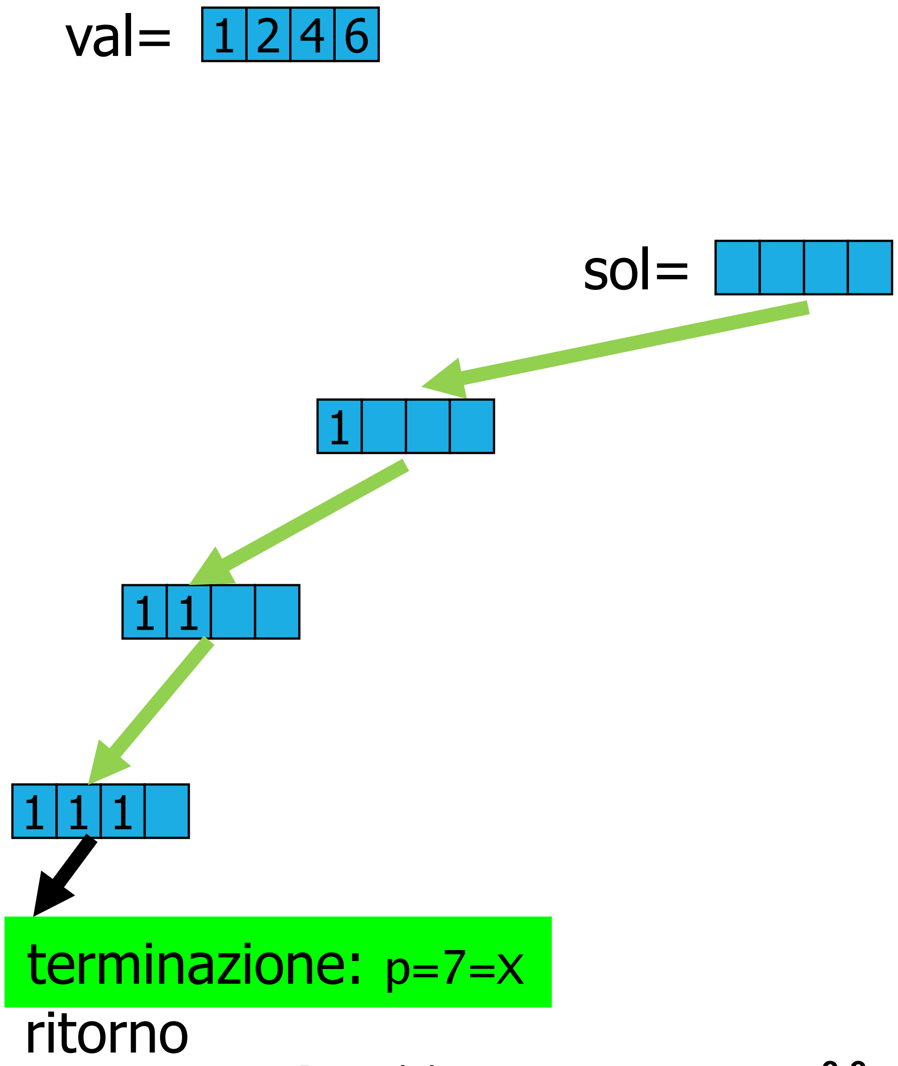

```
pos=1      val[pos]=2
p=1        r=12
1+12>=7 && 1+2<=7
```

Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`



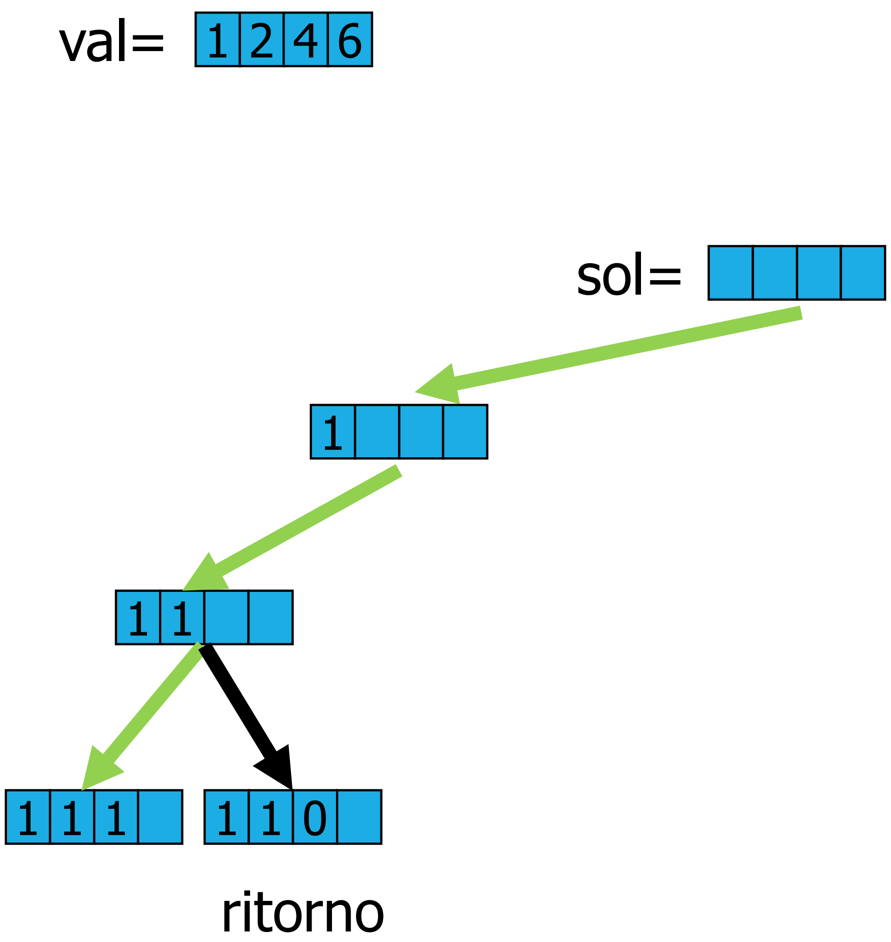

```
pos=2      val[pos]=4
p=3        r=10
3+10>=7  && 3+4<=7
```

Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

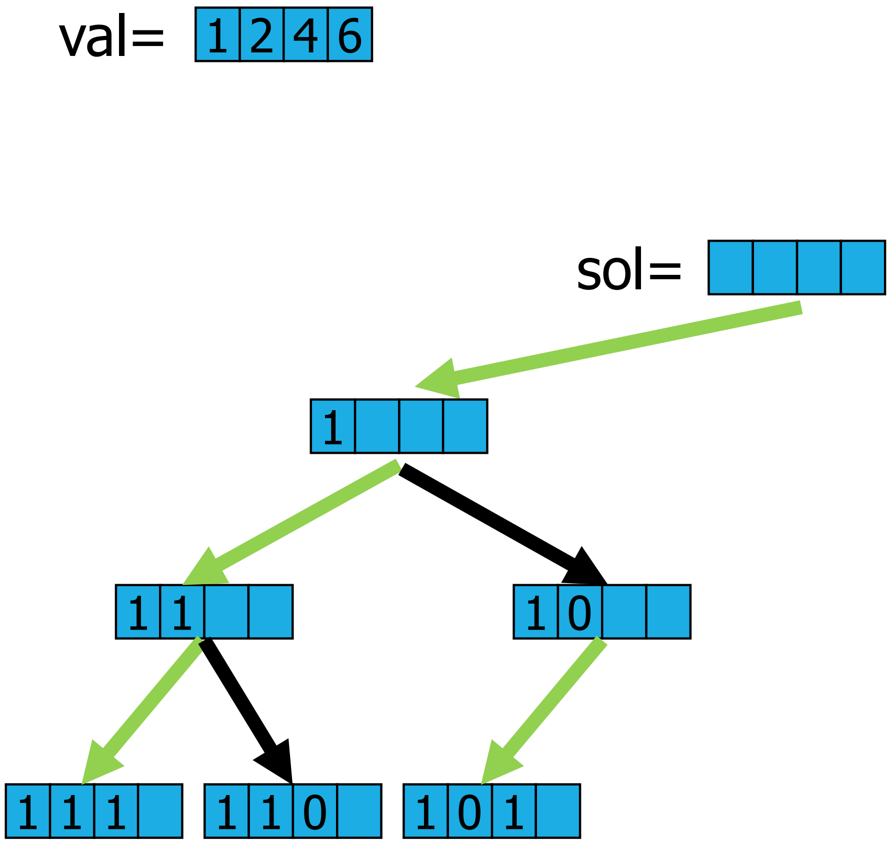


Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

```
pos=3      val[pos]=6
p=3        r=6
3+6>=7  && 3+6>7
```



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

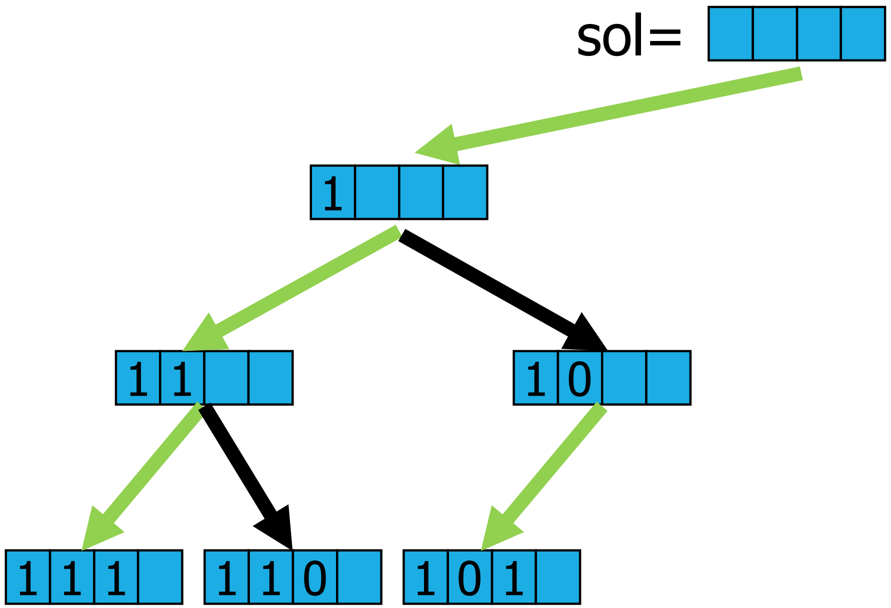



```
pos=2      val[pos]=4
p=1        r=10
1+10>=7  && 1+4<=7
```

Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= 1 2 4 6

```
pos=3      val[pos]=6
p=5        r=6
5+6 >= 7 && 5+6>7
```

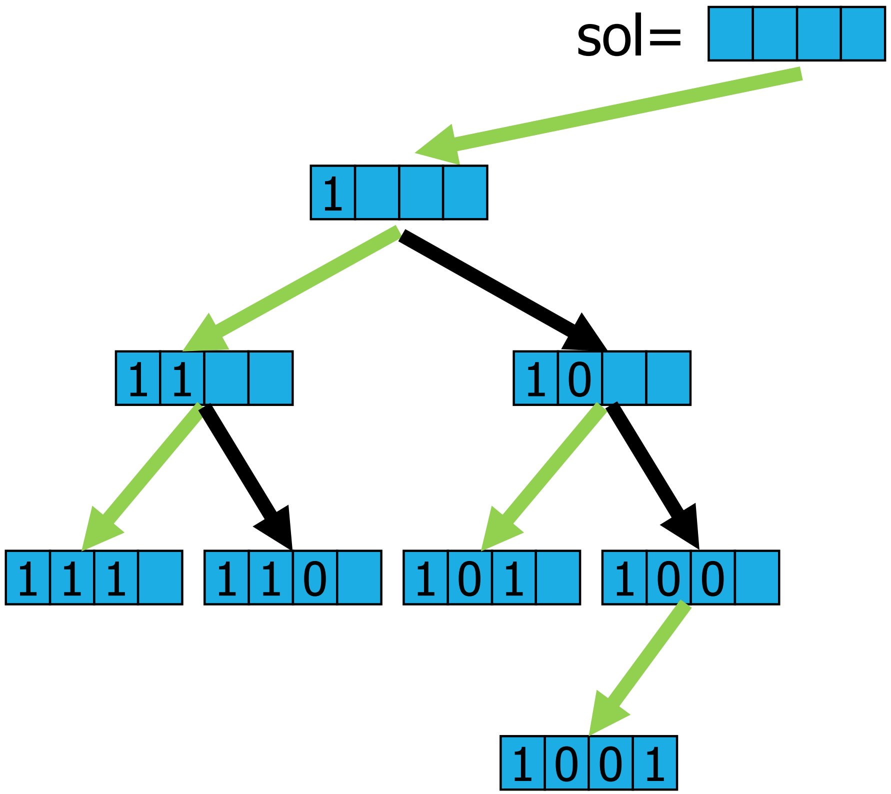


ritorno

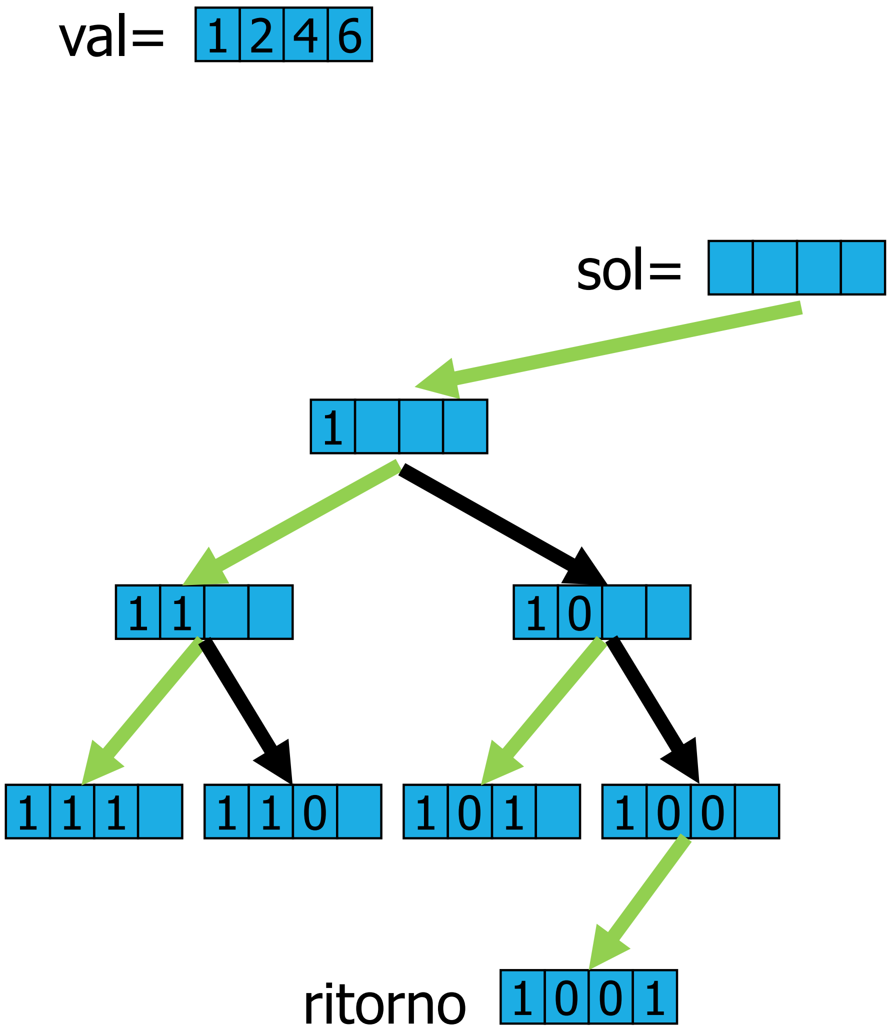
Promising: `p + r >= x && p + val[pos]<= x`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

```
pos=3      val[pos]=6
p=1        r=6
1+6>=7  && 1+6<=7
```

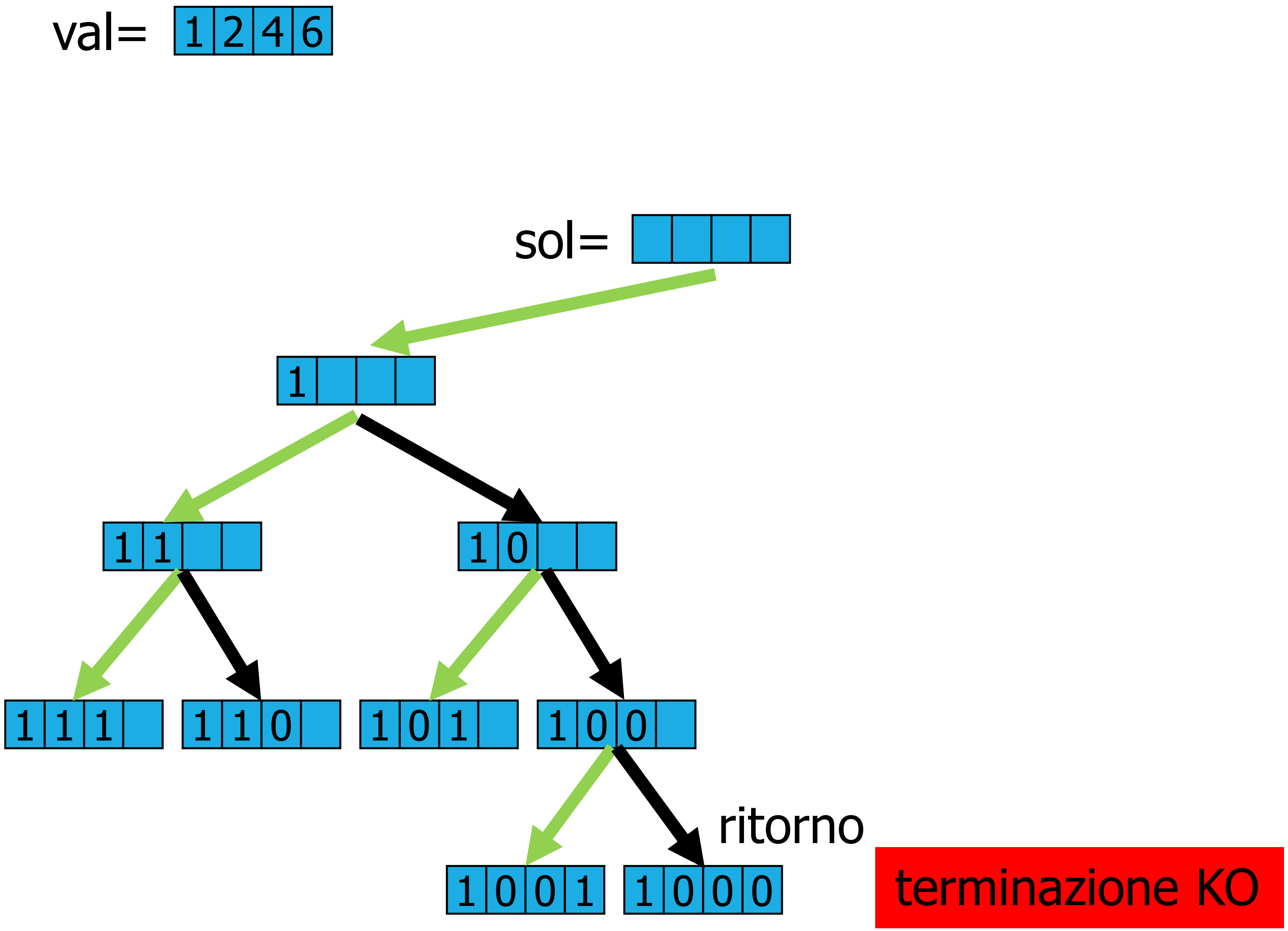


Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`



terminazione: p=7=X

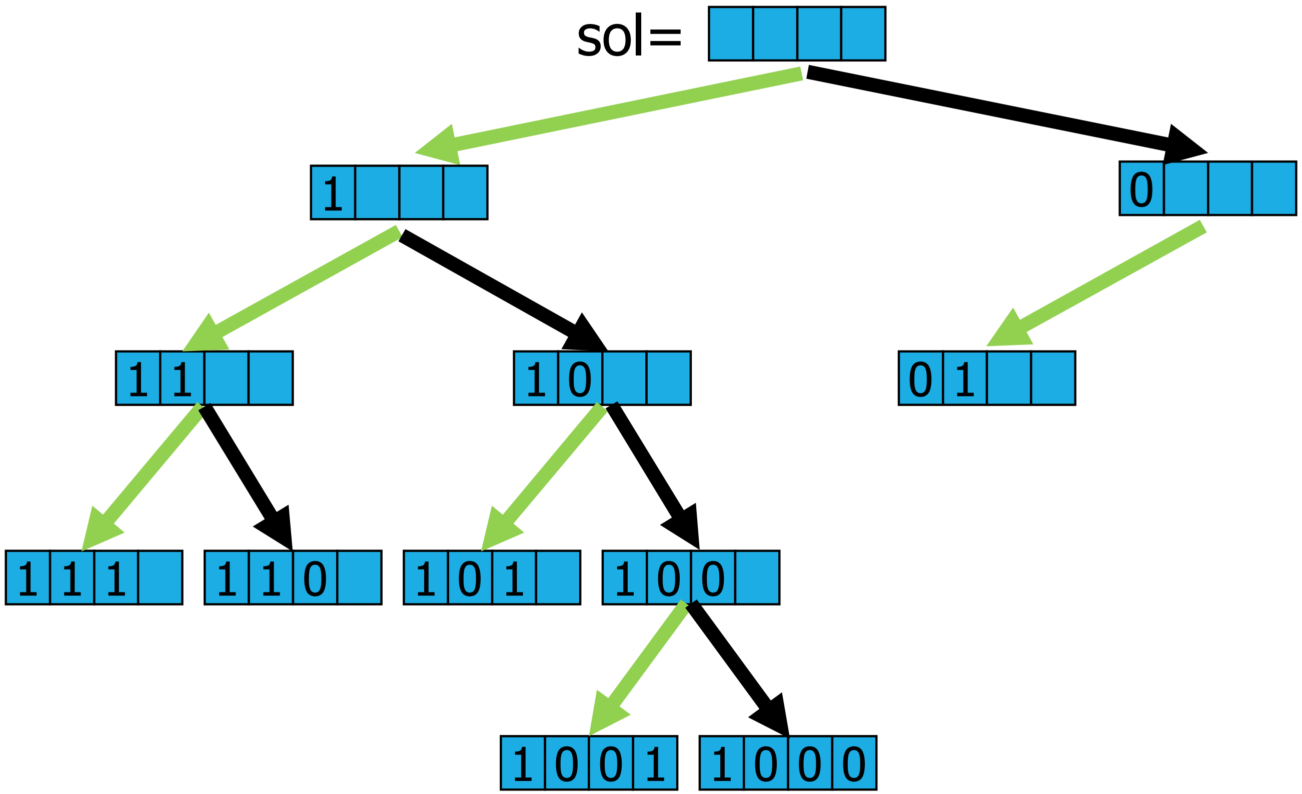
Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

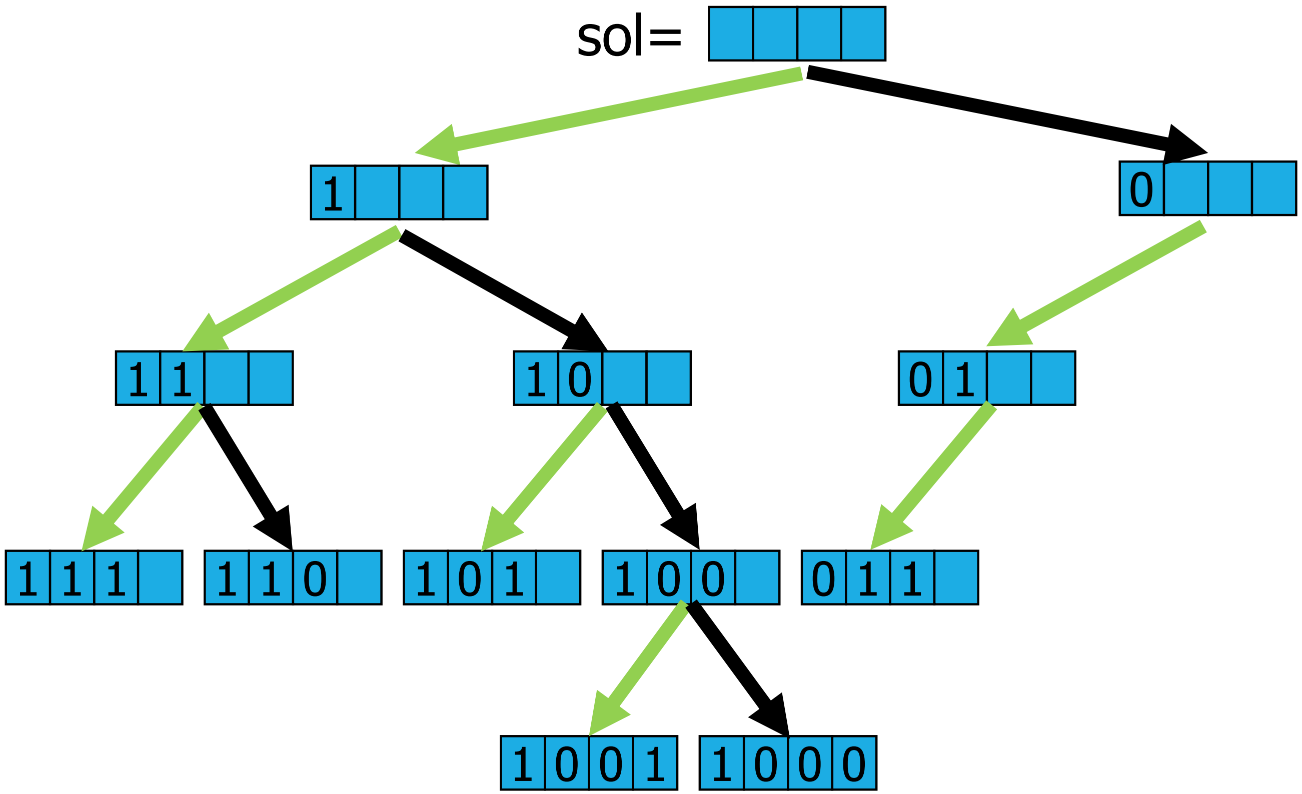
```
pos=1     val[pos]=2
p=0       r=12
0+12 >= 7 && 0+2<=7
```



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

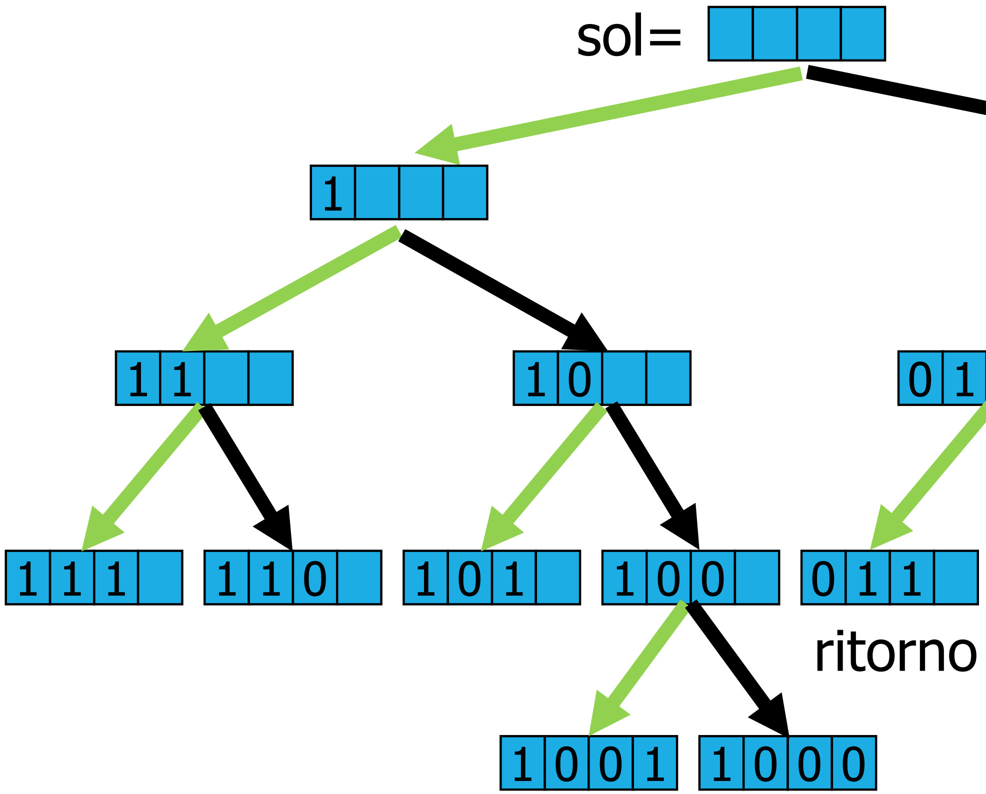
```
pos=2      val[pos]=4
p=2        r=10
2+10 >= 7 && 2+4<=7
```



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

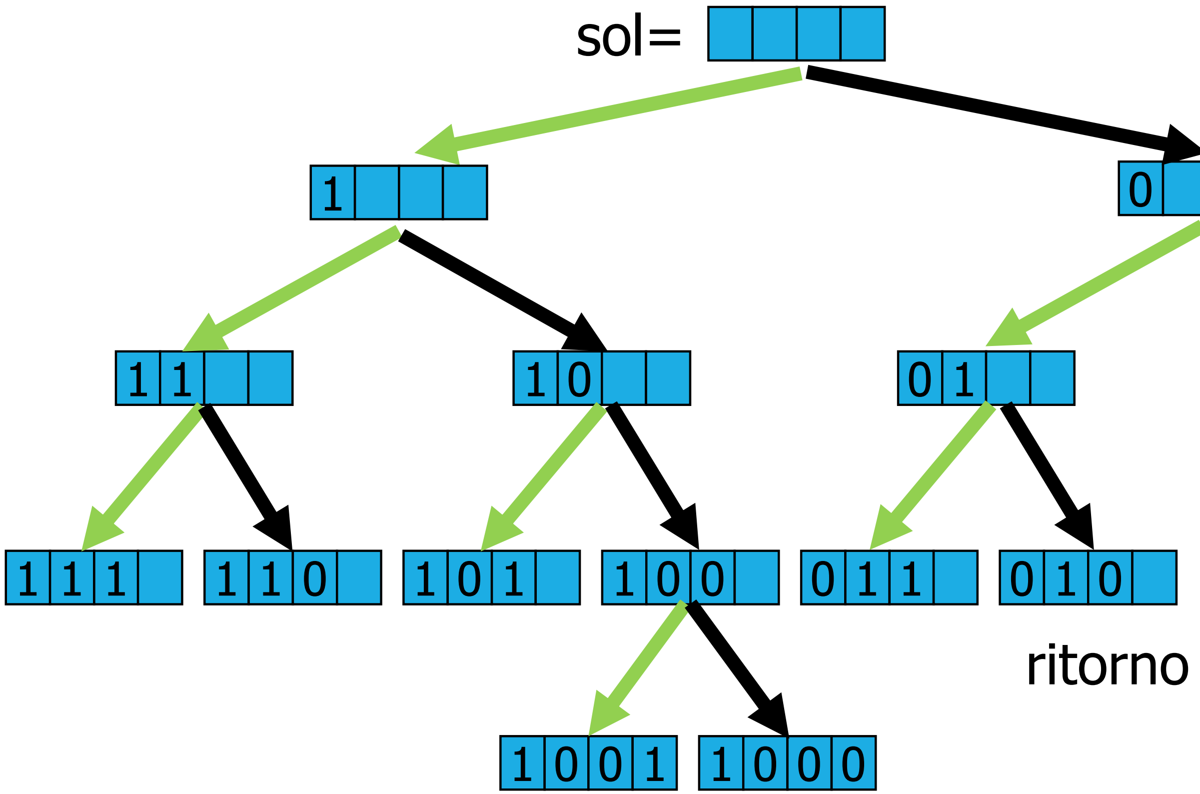
```
pos=3      val[pos]=6
p=6        r=6
6+6 >= 7  && 6+6>7
```



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= 1 2 4 6

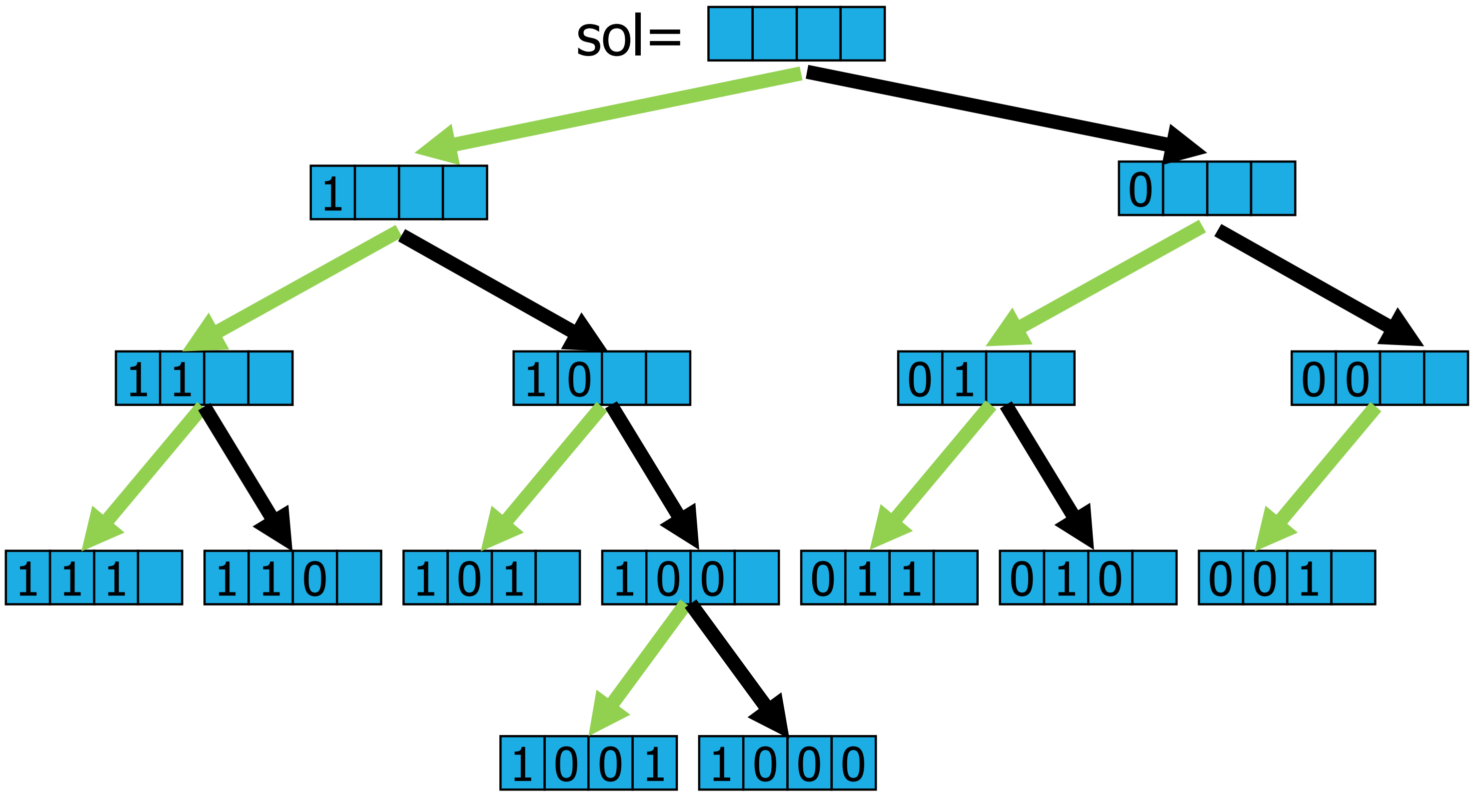
```
pos=3     val[pos]=6
p=2       r=6
2+6 >= 7 && 2+6>7
```



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

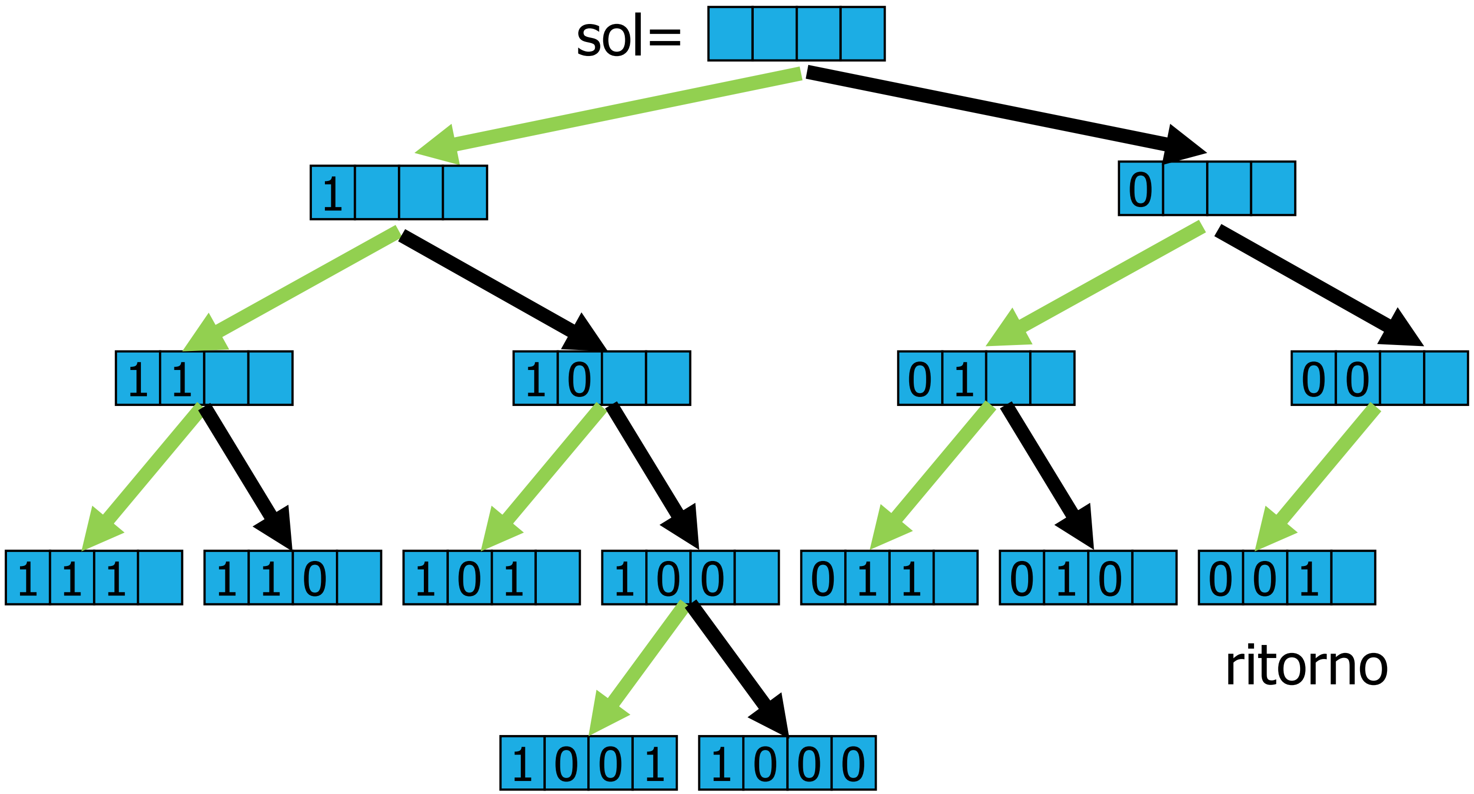
```
pos=2      val[pos]=4
p=0        r=10
0+10>=7  && 0+4<=7
```



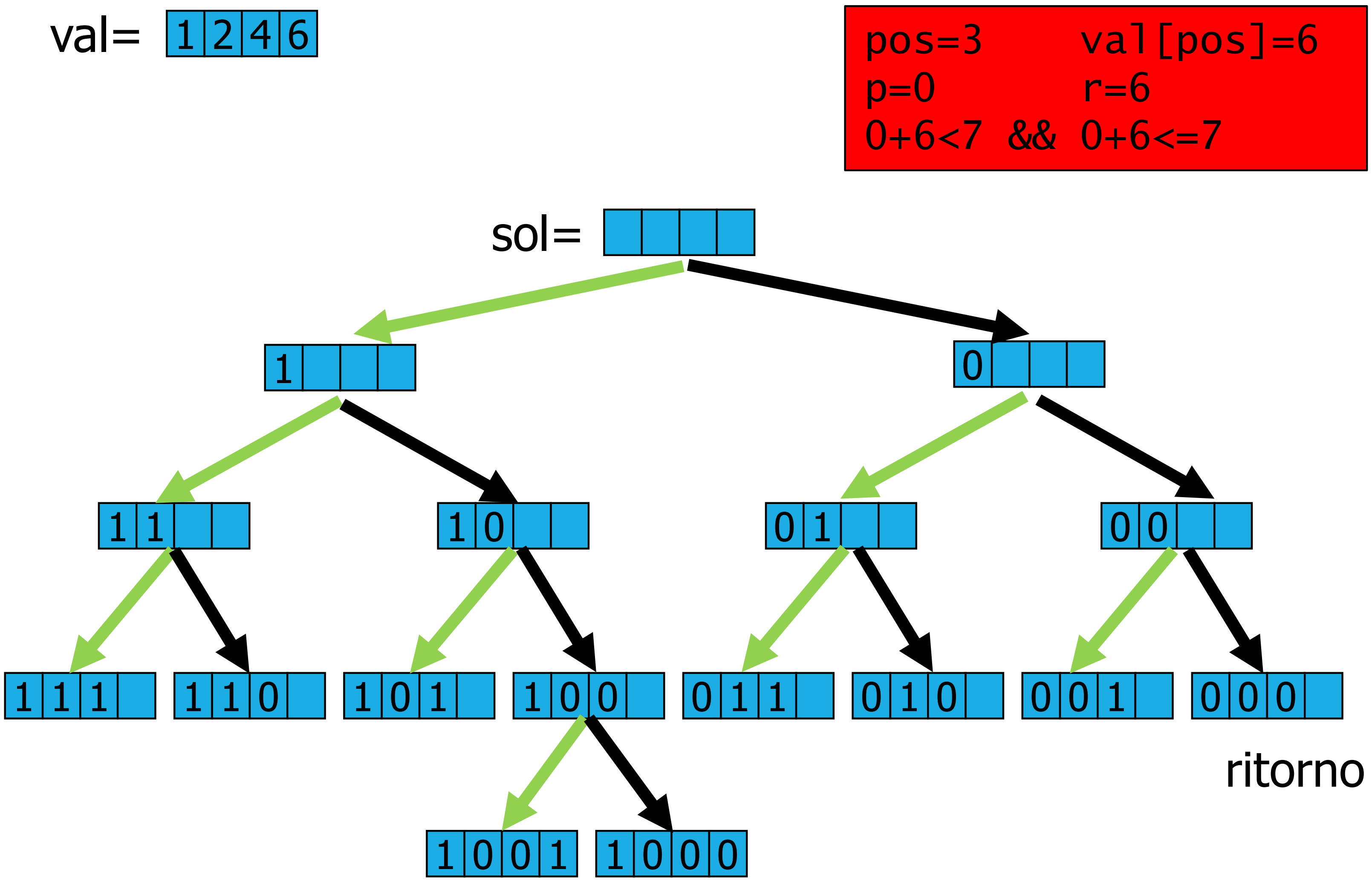
Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

val= | 1 | 2 | 4 | 6 |

pos=3 val[pos]=6
p=4 r=6
4+6>=7 && 4+6>7



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`



Promising: `p + r >= X && p + val[pos]<= X`

```c
void sumset(int pos,int *val,int *sol,int p,int r,int X) {
  int j;
  if (p==X) {
    printf("\n{\t");
    for(j=0;j<pos;j++)
      if(sol[j])
        printf("%d\t",val[j]);
      printf("}\n");
      return;
  }
  if(promising(val,pos,p,r,X)){
    sol[pos]=1;
    sumset(pos+1,val,sol,p+val[pos],r-val[pos],X);
    sol[pos]=0;
    sumset(pos+1,val,sol,p, r-val[pos],X);
  }
}
```

terminazione

stampa soluzione

controlla se promettente

prendi

ricorri

non prendere

ricorri

```c
val = malloc(k*sizeof(int));
sol = malloc(k*sizeof(int));
```

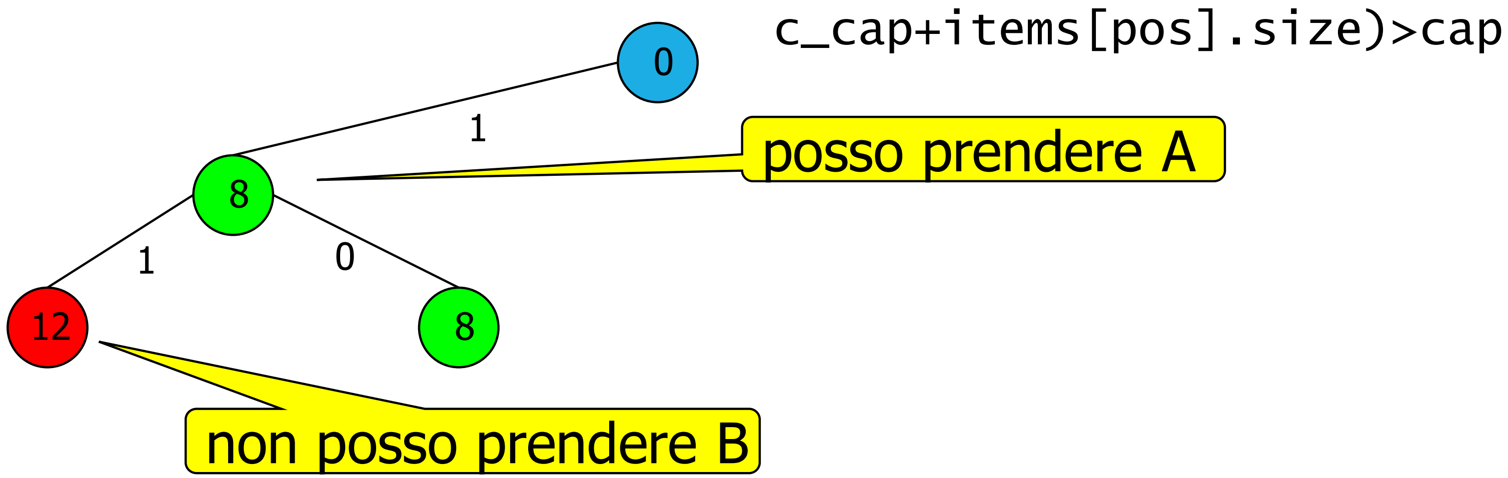
11sum_of_subsets

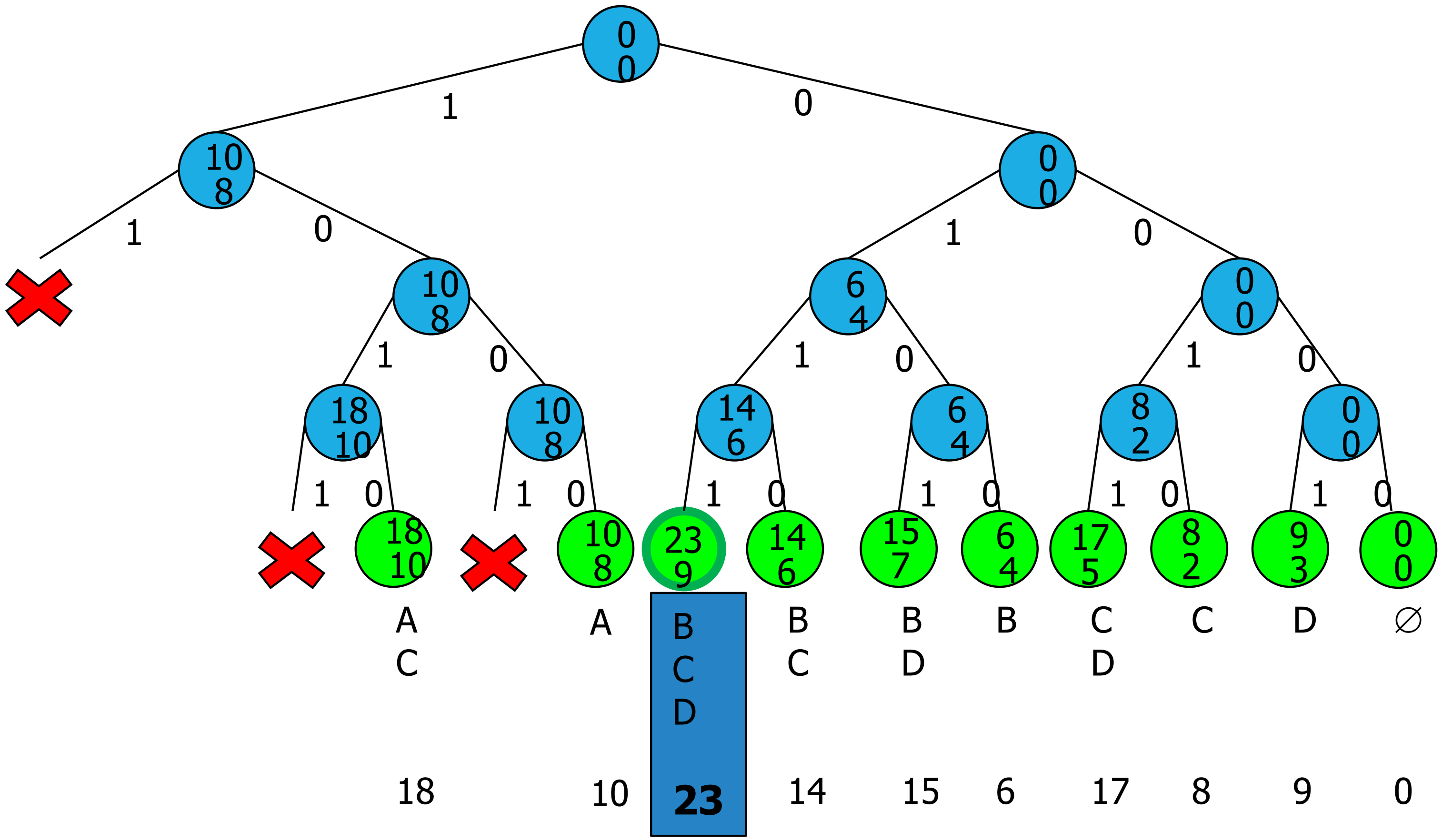
```c
int promising(int *val,int pos,int p,int r,int X) {
    return (p+r > =X)&&(p+val[pos]<=X);
}
```

Lo zaino (discreto)

Approccio con pruning: disposizioni ripetute (powerset)

funzione di pruning: se, prendendo un oggetto, la capacità utilizzata eccede quella massima, l'oggetto non viene scelto




0
0
1
0
10
8
0
0
1
0
1
0
10
8
6
4
0
0
1
0
1
0
1
0
18
10
10
8
14
6
6
4
8
2
0
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
18
10
10
8
23
9
14
6
15
7
6
4
17
5
8
2
9
3
0
0
A
C
A
B
C
D
B
C
B
D
B
C
D
C
D
∅
18
10
23
14
15
6
17
8
9
0

```c
void powerset(int pos,Item *items,int *sol,int k,int cap,
     int c_cap,int c_val,int *b_val,int *b_sol) {
  int j;
  if (pos >= k) {
    if (c_val > *b_val) {
      for (j=0; j<k; j++)
        b_sol[j] = sol[j];
      *b_val = c_val;
    }
    return;
  }
  if ((c_cap + items[pos].size) > cap) {
    sol[pos] = 0;
    powerset(pos+1,items,sol,k,cap,c_cap,c_val,b_val,b_sol);
    return;
  }
```

terminazione

controllo ottimalità

controllo pruning

lascio oggetto

ricorro su prossimo oggetto

ritorno

12knapsack_pruning

```c
 sol[pos] = 1;
 c_cap += items[pos].size;
 c_val += items[pos].value;
 powerset(pos+1,items,sol,k,cap,c_cap,c_val,b_val,b_sol);

 sol[pos] = 0;
 c_cap -= items[pos].size;
 c_val -= items[pos].value;
 powerset(pos+1,items,sol,k,cap,c_cap,c_val,b_val,b_sol);
}
```

prendo oggetto

aggiorno capacità e valore

ricorro su prossimo oggetto

lascio oggetto

aggiorno capacità e valore

ricorro su prossimo oggetto

Riferimenti

- Backtracking
  - Bertossi 16
- Permutazioni e sottoinsiemi
  - Bertossi 16.3