Appunti di Analisi Matematica 1

versione: 1.0.5

Marco Morandotti

Politecnico di Torino

Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

con esercizi proposti da

Leonardo Massai

Politecnico di Torino

Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

e

Federico Gerbino

Politecnico di Torino

Segnalare eventuali errori a `marco.morandotti@polito.it`.

22 ottobre 2023

Indice

Capitolo 1

Concetti di base

In questo capitolo vedremo i concetti di base riguardanti la logica delle proposizioni e dei predicati e la teoria degli insiemi. Presenteremo le operazioni sulle proposizioni e sugli insiemi e vedremo le analogie tra loro. A partire da questi, e dall'introduzione del principio di induzione, descriveremo i metodi di dimostrazione diretta, per assurdo e per induzione. Studieremo il concetto di funzione tra insiemi e chiuderemo il capitolo con gli insiemi numerici e le loro proprietà. Spesso si paragona la matematica ad una lingua: per poterla comprendere e parlare, è necessario apprenderne i vocaboli e la grammatica. Questo capitolo fissa le basi necessarie per poter affrontare i successivi capitoli.

1.1 Insiemi

Assumeremo come primitivo il concetto di *insieme* e penseremo ad un insieme come una collezione. Formano un insieme la collezione delle stelle del cielo, delle cellule del nostro corpo, dei numeri multipli di tre, gli abitanti dell'Illinois, i sette nani, i quarantaquattro gatti, ...

Ogni membro di un insieme si chiama *elemento* e si dice che esso *appartiene* all'insieme. Useremo lettere maiuscole per indicare gli insiemi e lettere minuscole per indicare i loro elementi. In questo modo, se a è un elemento dell'insieme A, si dice che a appartiene ad A e si scrive

$$a \in A;$$

per denotare che *a non appartiene* ad A si usa il simbolo $a \notin A$.[1] È utile per fini teorici considerare due particolari insiemi: l'*insieme universo* $\mathcal{U}$, che possiamo pensare come un grande contenitore che contiene ogni cosa, e l'*insieme vuoto* $\emptyset$, ovvero l'insieme che non contiene alcun elemento.

Vi sono essenzialmente due modi per rappresentare un insieme, ovvero per descrivere gli elementi che vi appartengono. Il primo è detto *per elencazione*: sono insiemi rappresentati per elencazione

$$\{\text{Brontolo, Cucciolo, Dotto, Eolo, Gongolo, Mammolo, Pisolo}\},$$
$$\{\text{AL, AT, BI, CN, NO, TO, VB, VC}\},$$
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\},$$

[1] In matematica si usa una barra sopra un simbolo per denotare la sua negazione.

rispettivamente, i sette nani, le (sigle delle) province del Piemonte e i numeri primi più piccoli di cinquanta. È chiaro che elencare i numeri primi più piccoli di un milione sarebbe un lavoro molto tedioso, così come rappresentare per elencazione insiemi contenenti molti elementi. Ecco che il secondo modo ci viene in aiuto: è possibile rappresentare un insieme nella forma

$$\{x \in \mathcal{U} : p(x)\}, \tag{1.1}$$

ovvero l'insieme degli elementi (dell'insieme universo) tali per cui una certa proprietà p è soddisfatta. In questo modo, se, per esempio, l'espressione di $p(x)$ fosse $x^2 - 1 = 0$ (e se $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, l'insieme dei numeri reali), l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : p(x)\}$ sarebbe $\{-1, +1\}$. Lasceremo alla Sezione 1.2 una più approfondita analisi delle espressioni $p(x)$.

Dati due insiemi A e B se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B, si dice che *A è incluso in B*, o che *A è un sottoinsieme di B*, e si scrive

$$A \subseteq B.$$

Con questa scrittura, intendiamo che ogni elemento di A è anche un elemento di B e che ci potrebbe essere un elemento di B che non è elemento di A. Per descrivere che ogni elemento di A è anche un elemento di B e che effettivamente esiste un elemento di B che non è elemento di A, useremo la notazione $A \subset B$,[2] che si legge *A è (strettamente) incluso in B* oppure *A è un sottoinsieme (stretto) di B*.

Se contemporaneamente $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ (ovvero ogni elemento di A è anche elemento di B e ogni elemento di B è anche elemento di A), si dice che *A è uguale a B* e si scrive

$$A = B.$$[3]

Veniamo ora alle operazioni che si possono fare in presenza di due o più insiemi.

Sia A un insieme: questo può essere scritto, in maniera formalmente corretta, benché pleonastica, come $A = \{x \in \mathcal{U} : x \in A\}$ (ovvero A consiste degli elementi dell'insieme universo che appartengono ad A). Raccogliamo in un'unica definizione le operazioni che si possono fare sugli insiemi e rimandiamo alla Figura 1.1 per una visualizzazione grafica.

Definizione 1.1.1 (operazioni sugli insiemi). *Siano $A, B \subseteq \mathcal{U}$ due insiemi. Sono definite le seguenti operazioni:*

- *il* complementare *di A è l'insieme i cui elementi non appartengono ad A:*

$$A^{c} := \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\} \tag{1.2}$$

  (si può denotare anche con $\complement A$ o $C(A)$);

- *l'*unione *di A e B è l'insieme i cui elementi sono elementi di A oppure elementi di B:*

$$A \cup B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \textit{ oppure } x \in B\}; \tag{1.3}$$

[2]La notazione non è universalmente accettata nella comunità matematica. La scelta fatta qui ha il vantaggio di essere analoga a quella per la relazione di disuguaglianza. In alcuni casi, per evidenziare che l'inclusione è stretta, si può scrivere $A \subsetneq B$.

[3]Cogliamo l'occasione di notare che una strategia molto usata in matematica per dimostrare l'uguaglianza tra due insiemi A e B è quella di dimostrare le due inclusioni (evidentemente non strette!) $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

- *l'*intersezione *di A con B è l'insieme i cui elementi appartengono sia ad A che a B:*

$$A \cap B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\}; \tag{1.4}$$

due insiemi la cui intersezione è l'insieme vuoto $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti*;*

- *la* differenza *tra A e B è l'insieme i cui elementi appartengono ad A ma non a B:*

$$A \setminus B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \notin B\}, \tag{1.5}$$

ed è facile vedere che $A \setminus B = A \cap B^c$ (a questo punto, notiamo che $A^c = \mathcal{U} \setminus A$);

- *la* differenza simmetrica *tra A e B è l'insieme i cui elementi appartengono ad A oppure a B, ma non ad entrambi gli insiemi:*

$$A \triangle B := \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \notin B \text{ oppure } x \in B \text{ e } x \notin A\}; \tag{1.6}$$

- *il* prodotto cartesiano *tra A e B è l'insieme i cui elementi sono le* coppie ordinate *formate da un elemento di A e da uno di B:*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}; \tag{1.7}$$

- *l'*insieme delle parti *di un insieme A è l'insieme i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di elementi di A:*

$$\wp(A) := \{B \subseteq \mathcal{U} : B \subseteq A\}. \tag{1.8}$$

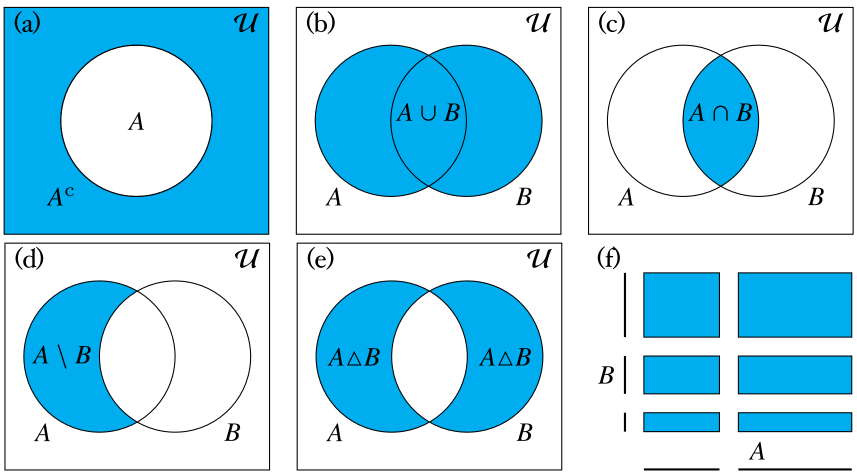


Figura 1.1: (a) l'insieme complementare A^c; (b) l'insieme unione $A \cup B$; (c) l'insieme intersezione $A \cap B$; (d) l'insieme differenza $A \setminus B$; (e) l'insieme differenza simmetrica $A \triangle B$; (f) l'insieme prodotto cartesiano $A \times B$.

Osservazione 1.1.2. Facciamo le seguenti osservazioni.

1. Osserviamo che le operazioni di unione, intersezione e differenza simmetrica sono *commutative*: cambiare l'ordine degli insiemi ai lati dei simboli $\cup$, $\cap$ e $\triangle$ non altera il risultato. Le operazioni di differenza e di prodotto cartesiano, al contrario, non lo sono: $A \setminus B \neq B \setminus A$ (se così non fosse, non ci sarebbe la necessità di definire la differenza simmetrica (1.6)) e $A \times B \neq B \times A$ (il primo insieme è definito nella (1.7) e, analogamente, $B \times A = \{(b, a) : b \in B, a \in A\}$, che è un insieme differente in quanto $(b, a) \neq (a, b)$).

2. Relativamente all'operazione di differenza simmetrica (1.6), è facile notare che
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

3. Notiamo anche che l'elemento generico del prodotto cartesiano tra insiemi è di natura differente dagli elementi degli insiemi con sui si costruisce $A \times B$: si tratta di una coppia ordinata di elementi, ovvero qualcosa formato da un elemento preso dal primo insieme e da un elemento preso dal secondo insieme. La coppia si dice *ordinata* perché è importante distinguere quale elemento va al primo posto e quale va al secondo. Anche l'elemento generico dell'insieme delle parti $\wp(A)$ è di natura differente dagli elementi di A, trattandosi di un sottoinsieme di A, ovvero di un insieme esso stesso. L'insieme $\wp(A)$ è dunque un insieme di insiemi e, nel caso semplice in cui $A = \{a, b, c\}$ è un insieme di tre elementi, abbiamo
$$\wp(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}.$$

4. Infine notiamo che le operazioni di intersezione ed unione si possono estendere ad un numero finito di intersecandi e riunendi $A_1, \ldots, A_n$. Gli insiemi
$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \qquad \text{e} \qquad A_1 \cup \cdots \cup A_n$$
sono ottenuti sfruttando la proprietà associativa delle operazioni ed eseguendole a due a due. Nella Figura 1.2 si possono apprezzare i risvolti pratici di un'applicazione alla geopolitica.

Esercizio 1.1.3. Dati gli insiemi A e B come nei due grafici in Figura 1.3, determinare il complementare di A e l'unione, l'intersezione, la differenza e la differenza simmetrica di A e B.

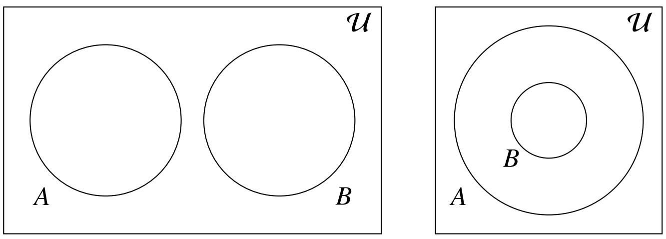


Figura 1.3: Gli insiemi A e B dell'Esercizio 1.1.3.

Esercizi 1.1.4. Dati i seguenti sottoinsiemi del piano, trovare la loro unione, la loro intersezione, la loro differenza e la loro differenza simmetrica:
(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}$;
(b) $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ e $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$.

Esercizio 1.1.5. Dimostrare le *leggi di De Morgan* : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. [Suggerimento: mostrare l'uguaglianza degli insiemi tramite le doppie inclusioni (si veda la Nota 3).]

Definizione 1.1.6. *Dato un insieme A, la* cardinalità *di A, in simboli $\#(A)$, oppure $|A|$, è il numero degli elementi contenuti in A. Se $\#(A) = n \in \mathbb{N}$, si dice che A ha cardinalità finita.*

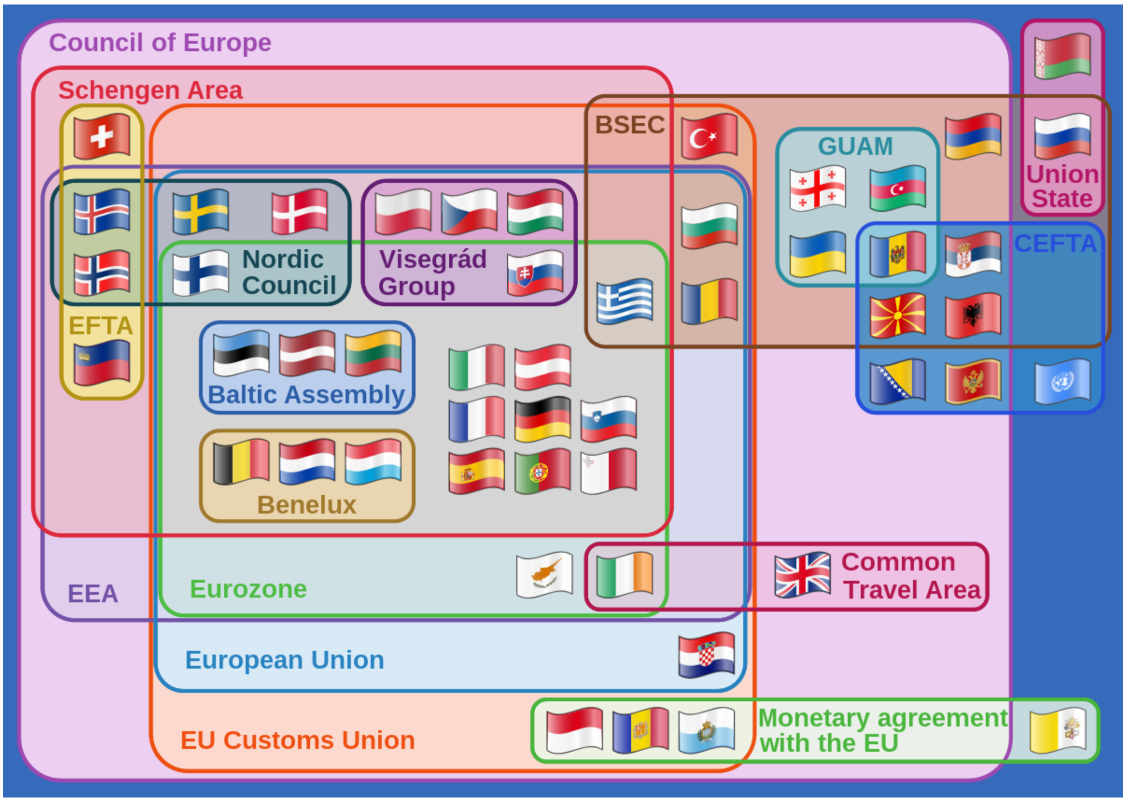


Figura 1.2: Varie entità in cui sono raggruppati gli stati europei (fonte: Wikipedia).

Esercizio 1.1.7. Dimostrare che se A è un insieme tale che $\#(A) = n$ (ovvero se A ha cardinalità finita), la cardinalità dell'insieme delle parti di A, $\wp(A)$, è $2^{\#(A)}$, in formule,

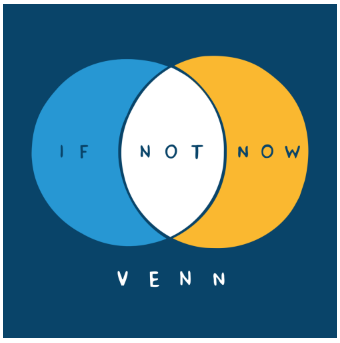
$$\#(\wp(A)) = 2^{\#(A)}.$$

[Suggerimento: usare la formula (1.68)] Cogliamo l'occasione per notare che questa proprietà giustifica la notazione, talvolta usata, 2^A per indicare l'insieme $\wp(A)$.

1.2 Logica delle proposizioni e dei predicati

Spesso l'appartenenza ad un insieme è stabilita attraverso una condizione del tipo (1.1), ovvero raccogliendo tutti gli elementi che soddisfano una certa proprietà. Alla luce delle operazioni definite nella Definizione 1.1.1, è utile avere strumenti di calcolo che permettano di tradurre le operazioni su insiemi in operazioni sulle proprietà che definiscono gli insiemi stessi. Sono fondamentali i concetti contenuti nella seguente definizione.

Definizione 1.2.1. *Si dice* proposizione *ogni frase che abbia senso compiuto e della quale si può dire se è vera o falsa.*
Si dice predicato *ogni frase che dipende da una o più variabili e che diventa una proposizione quando i valori delle variabili sono specificati.*



In generale, quindi, il simbolo $p(x)$ che compare nella (1.1) è un predicato che dipende dalla variabile x. Sono proposizioni affermazioni quali "a Torino c'è il sole", "il Po sfocia nel Mare Adriatico", "la Bulgaria confina con la Francia", mentre sono predicati frasi quali "lo stato x confina con la Francia", "nella città x c'è il sole", "lo studente x proviene dalla regione y".

È possibile negare una proposizione, così come è possibile, in presenza di più proposizioni, legarle in determinate maniere per ottenere delle nuove proposizioni (evidentemente più complesse) alle quali è possibile assegnare un valore di verità, ovvero stabilire se sono vere o false. Le *tavole di verità* sono un utile strumento per studiare i valori di verità delle proposizioni e di quelle generate dalle operazioni logiche.

Definizione 1.2.2. *Siano p, q due proposizioni. Sono definite le seguenti operazioni:*

- *la* negazione *di p è la proposizione che risulta vera quando p è falsa e risulta falsa quando p è vera; si indica con $\bar{p}$ oppure $\neg p$ (useremo la prima notazione, quella con la barra) e la sua tavola di verità è la seguente*

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

(1.9)

- *la* disgiunzione (inclusiva) *di p e q è la proposizione che risulta vera quando almeno una delle due tra p e q è vera; si indica con $p \vee q$ e la sua tavola di verità è la seguente*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(1.10)

- *la* congiunzione *tra p e q è la proposizione che risulta vera quando sia p che q sono vera; si indica con $p \wedge q$ e la sua tavola di verità è la seguente*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(1.11)

- *la* disgiunzione (esclusiva) *di p e q è la proposizione che risulta vera quando solo una delle due tra p e q è vera; si indica con $p\dot{\vee}q$ e la sua tavola di verità è la seguente*

$$\begin{array}{c|c|c} p & q & p\dot{\vee}q \\ \hline V & V & F \\ V & F & V \\ F & V & V \\ F & F & F \end{array} \tag{1.12}$$

- *l'*implicazione *"p implica q", in cui p si chiama* antecedente *e q* conseguente*, è la proposizione che risulta vera o quando sia antecedente che conseguente sono veri, oppure quando l'antecedente è falso; si indica con $p \Rightarrow q$ e la sua tavola di verità è la seguente*

$$\begin{array}{c|c|c} p & q & p \Rightarrow q \\ \hline V & V & V \\ V & F & F \\ F & V & V \\ F & F & V \end{array} \tag{1.13}$$

  in questo costrutto, si dice anche che p è condizione sufficiente *per q e che q è* condizione necessaria *per p;*
- *la* doppia implicazione *(o* equivalenza logica*) "p se e solo se q" è la proposizione che risulta vera quando p e q hanno lo stesso valore di verità; si indica con $p \Leftrightarrow q$ e la sua tavola di verità è la seguente*

$$\begin{array}{c|c|c} p & q & p \Leftrightarrow q \\ \hline V & V & V \\ V & F & F \\ F & V & F \\ F & F & V \end{array} \tag{1.14}$$

  *in questo costrutto, $p \Leftrightarrow q$ si legge anche "*condizione necessaria e sufficiente *affinché p (sia vera) è (che) q (sia vera)", oppure "p è* condizione necessaria e sufficiente *per q" (e chiaramente il ruolo di p e q può essere scambiato).*

Un costrutto logico il cui valore di verità è sempre vero si dice tautologia*, mentre un costrutto logico il cui valore di verità è sempre falso si dice* contraddizione.

Osservazione 1.2.3. Nelle tavole di verità delle operazioni binarie tra proposizioni ci sono quattro righe per esaurire tutte le combinazioni di V/F tra le proposizioni. Se si stesse studiando una frase con tre proposizioni, le possibilità sarebbero 8 e quindi il numero di colonne andrebbe adeguato. È facile rendersi conto che se in un costrutto logico ci sono n proposizioni differenti, allora le righe della tavola di verità saranno 2^n, per poter contemplare tutte le combinazioni dei valori di verità di ciascuna proposizione. □

Esercizi 1.2.4. 1) Confrontando le tavole di verità, dimostrare che:

- $p \Leftrightarrow q = \overline{p\dot{\vee}q}$ e $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$;
- (leggi di De Morgan) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ e $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$.

2) Scrivere la tavola di verità di $(p \Rightarrow q) \vee \bar{r}$ e quella di $\overline{p \wedge q} \vee \big((p \Leftrightarrow r) \wedge \bar{s}\big)$.

Con le operazioni introdotte nella Definizione 1.2.2 è possibile scrivere la struttura logica di due processi molto importanti in matematica, la dimostrazione diretta e la dimostrazione per assurdo. Essi vanno sotto il nome di *modus ponens* e *modus tollens*, rispettivamente, e sono formulati nel seguente modo.

- (modus ponens)

$$\big((p \Rightarrow q) \wedge p\big) \Rightarrow q.$$

Questa è la struttura logica di come si utilizzano i teoremi in matematica: essi affermano che in presenza di determinate condizioni, p, si hanno determinate conseguenze, q. Il modus ponens afferma che se questo è il caso *e* siamo in una situazione in cui le ipotesi sono verificate $(p \Rightarrow q) \wedge p$, allora necessariamente le tesi devono valere "$\Rightarrow q$". A prova di ciò, è facile verificare, con le tavole di verità, che il modus ponens è una tautologia:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$\big((p \Rightarrow q) \wedge p\big) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- (modus tollens)

$$\big((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}\big) \Rightarrow \bar{p}.$$

Questa è la struttura logica della dimostrazione per assurdo: in presenza di un teorema che stabilisce che sotto determinate condizioni, p, si hanno determinate conseguenze, q, e tali conseguenze sono negate, $\bar{q}$, allora necessariamente le ipotesi sono negate, $\bar{p}$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}$	$\bar{p}$	$\big((p \Rightarrow q) \wedge \bar{q}\big) \Rightarrow \bar{p}$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Come esempio di utilizzo di una dimostrazione per assurdo, proponiamo il seguente teorema.

Teorema 1.2.5 (irrazionalità di $\sqrt{2}$)**.** *Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale, ovvero non esistono due interi m, n (con $n \neq 0$) tali che $\sqrt{2} = m/n$.*

Dimostrazione. La dimostrazione viene effettuata assumendo, *per assurdo*, che il numero $\sqrt{2}$ sia razionale e cadendo in contraddizione. A tale scopo, quindi assumiamo che sia possibile scrivere $\sqrt{2}$ come frazione, ovvero che esistano m, n interi con $n \neq 0$ tali che $\sqrt{2} = m/n$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini, ovvero che m e n non abbiano divisori comuni (se così non fosse, potremmo semplificare la frazione) e questa richiesta può essere assurta a parte delle ipotesi. Abbiamo allora le seguente concatenazione di implicazioni:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{2}n \quad \Rightarrow m^2 = 2n^2,$$

dalla quale deduciamo che m^2 è pari e dunque anche m lo è[4]: esiste dunque un numero k tale per cui $m = 2k$. Allora, sostituendo nell'ultima uguaglianza trovata, otteniamo

$$(2k)^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = n^2,$$

da cui si deduce che n^2 è pari, e quindi, per lo stesso ragionamento di poc'anzi, anche n lo è. Esiste dunque h tale che $n = 2h$. Ma ciò contraddice il fatto che abbiamo supposto che m e n siano primi tra loro (che è equivalente a chiedere che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini). Questo è conseguenza di avere supposto che $\sqrt{2}$ fosse razionale, e pertanto segue che $\sqrt{2}$ non è razionale. □

Note le operazioni sulle proposizioni, è ora il momento di dedicarci allo studio dei predicati. Siccome un predicato $p(x)$ assume valore di verità a seconda di x, ha senso chiedersi se sia possibile classificare quali x rendono $p(x)$ vero o falso. In particolare, è importante avere un modo di indicare quando c'è almeno un valore della variabile x tale che $p(x)$ sia vero e un modo di indicare quando tutti i valori della variabile x (in un certo insieme X) rendono $p(x)$ vero. Questi compiti sono assolti dai *quantificatori*:

- il *quantificatore esistenziale* $\exists$: si usa in espressioni con la struttura

$$\exists x \in X : p(x) \tag{1.15a}$$

  e si legge "esiste (almeno) un elemento x nell'insieme X tale che $p(x)$ è vero" (oppure "che gode della proprietà $p(x)$"). Si usa la scrittura $\exists!$ se si vuole sottolineare l'unicità dell'elemento x, come spesso è necessario fare.
- il *quantificatore universale* $\forall$: si usa in espressioni con la struttura

$$\forall x \in X, p(x) \tag{1.15b}$$

  e si legge "per ogni elemento x nell'insieme X, $p(x)$ è vero".

In matematica gli enunciati dei teoremi appaiono come predicati scritti con i quantificatori; è importante sapere come si nega un'espressione come quelle nelle (1.15). Il linguaggio ci aiuta: negare che esista un elemento con una data proprietà è equivalente ad affermare che ogni elemento non gode di quella proprietà, pertanto

$$\neg(\exists x \in X : p(x)) = \forall x \in X, \neg p(x)$$

o, equivalentemente,

$$\overline{\exists x \in X : p(x)} = \forall x \in X, \overline{p(x)}.$$

Viceversa, negare che ogni elemento goda di una data proprietà è equivalente ad affermare che ce n'è almeno uno che non ne gode, pertanto

$$\neg(\forall x \in X, p(x)) = \exists x \in X : \neg p(x)$$

o, equivalentemente,

$$\overline{\forall x \in X, p(x)} = \exists x \in X : \overline{p(x)}.$$

Si intende che il predicato p può essere a sua volta complesso e sarà possibile portare la negazione "il più all'interno possibile" una volta nota l'espressione di p, per esempio usando le leggi di De Morgan.

[4] Per dimostrare che se il quadrato di un numero è pari allora anche la base lo è, procediamo per assurdo: se m fosse dispari, si potrebbe scrivere $m = 2k + 1$ per un certo numero k; ma allora avremmo che $m^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2 + 4k + 1$ che risulta esso stesso dispari, in quanto somma di $4k^2 + 4k$, che è pari (contiene il fattore 2), e 1, che è dispari.

Esempio 1.2.6. Se volessimo negare l'espressione

$$\forall x \in X, \exists y \in Y : p(x) \wedge q(x, y),$$

avremmo

$$\begin{aligned}
&\neg\big(\forall x \in X, \exists y \in Y : p(x) \wedge q(x,y)\big)\\
&= \exists x \in X : \neg\big(\exists y \in Y : p(x) \wedge q(x,y)\big)\\
&= \exists x \in X : \forall y \in Y, \neg\big(p(x) \wedge q(x,y)\big)\\
&= \exists x \in X : \forall y \in Y, \overline{p(x) \wedge q(x,y)}\\
&= \exists x \in X : \forall y \in Y, \overline{p(x)} \vee \overline{q(x,y)},
\end{aligned}$$

e qui il processo di negazione della frase termina.

Confrontando le Definizioni 1.1.1 e 1.2.2 ci si rende facilmente conto che c'è un parallelo tra le operazioni sugli insiemi e quelle sulle proposizioni. In particolare, se l'appartenenza di un elemento x all'insieme A è determinata dal fatto che la proprietà $p(x)$ abbia valore di verità V e l'appartenenza di un elemento x all'insieme B è determinata dal fatto che la proprietà $q(x)$ abbia valore di verità V, possiamo scrivere

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in \mathcal{U} : q(x)\}.$$

È allora possibile notare le seguenti uguaglianze ed equivalenze

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{c}} &= \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\} = \{x \in \mathcal{U} : \overline{p(x)}\},\\
A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ oppure } x \in B\} = \{x \in \mathcal{U} : p(x) \vee q(x)\},\\
A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\} = \{x \in \mathcal{U} : p(x) \wedge q(x)\},\\
A \triangle B &= \{x \in \mathcal{U} : \text{ o } x \in A \text{ o } x \in B\} = \{x \in \mathcal{U} : p(x) \dot\vee q(x)\},\\
A &\subseteq B \text{ corrisponde a } p(x) \Rightarrow q(x),\\
A &= B \text{ corrisponde a } p(x) \Leftrightarrow q(x).
\end{aligned}$$

1.3 Relazioni

Le relazioni tra enti matematici sono di estrema importanza per stabilire i rapporti tra loro, sia a livello teorico che in vista delle applicazioni. Ricordiamo la (1.7) e diamo subito la definizione di relazione.

Definizione 1.3.1. *Sia A un insieme non vuoto. Una* relazione $\mathcal{R}$ su A *è un sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times A$. Data $\mathcal{R}$, l'elemento x è in relazione con l'elemento y se $(x, y) \in R$, e si indica con $x\mathcal{R}y$.*

La definizione è alquanto generale, siccome un *qualunque* sottoinsieme di $A \times A$ è una relazione. Data la struttura intrinsecamente non commutativa del prodotto cartesiano, $(x, y) \in R$ non implica necessariamente che $(y, x) \in R$, ovvero non è detto che se $x\mathcal{R}y$ allora $y\mathcal{R}x$. Esistono due particolari tipi di relazione che sono di importanze fondamentale in matematica, le *relazioni di equivalenza* e le *relazioni d'ordine*, che ora studiamo più approfonditamente.

Definizione 1.3.2. *Una relazione $\mathcal{R}$ su A è una* relazione di equivalenza *se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$x\mathcal{R}x$ per ogni $x \in A$;* (riflessiva)
2. *$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ per ogni $x, y \in A$;* (simmetrica)
3. *$(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ per ogni $x, y, z \in A$.* (transitiva)

Una generica relazione di equivalenza è solitamente indicata dal simbolo $\sim$, e si scrive $x \sim y$ in luogo di $x\mathcal{R}y$.

L'esempio prototipico di una relazione di equivalenza è la relazione = di uguaglianza, per la quale è immediato verificare che le proprietà della Definizione 1.3.2 sono soddisfatte. Un altro esempio è dato dalla relazione "provenire dalla stessa regione", che si tratta di una relazione su un insieme di persone. Allora $x \sim y$ se e solo se la persona x proviene dalla stessa regione della persona y; anche in questo è di facile verifica che le proprietà della Definizione 1.3.2 sono soddisfatte.

In questo contesto, ovvero se abbiamo un insieme A sul quale c'è una relazione di equivalenza $\sim$, ha senso cercare di estrapolare informazioni macroscopiche: dal punto di vista della relazione, si possono separare gli elementi di A in classi di equivalenza, in ciascuna delle quali ci sono tutti gli elementi che sono in relazione tra loro. Ciascuno di essi rappresenta al pari degli altri la classe di equivalenza.

Definizione 1.3.3. *Sia A un insieme non vuoto e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su A. Dato $x \in A$ si definisce la* classe di equivalenza *di x l'insieme*

$$[x] := \{y \in A : y \sim x\} \tag{1.16}$$

degli elementi di A che sono in relazione con x. Si chiama insieme quoziente *e si denota con*

$$Q := A/\!\sim = \{[x] : x \in A\}$$

l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza.

Esempio 1.3.4. Tornando alla relazione $\sim$ = "provenire dalla stessa regione", dato x, le classi di equivalenza $[x]$ sono formate da tutti i corregionali di x. È immediato vedere che se $x \nsim y$, allora $[x] \neq [y]$, così come che, nell'esempio specifico, ogni classe di equivalenza distinta può essere associata ad una regione. Restringendo il nostro orizzonte geografico all'Italia, si ha che Q è (un sottoinsieme del)l'insieme delle venti regioni. Può essere un sottoinsieme proprio, ovvero strettamente contenuto nell'insieme delle regioni italiane se nell'insieme A mancano individui provenienti da qualche regione.

Definizione 1.3.5. *Una relazione $\mathcal{R}$ su A è una* relazione d'ordine (parziale) *se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$x\mathcal{R}x$ per ogni $x \in A$;* (riflessiva)
2. *$(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ per ogni $x, y \in A$;* (antisimmetrica)
3. *$(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ per ogni $x, y, z \in A$.* (transitiva)

Una generica relazione di ordine parziale è solitamente indicata dal simbolo $\preccurlyeq$, e si scrive $x \preccurlyeq y$ in luogo di $x\mathcal{R}y$.
Una relazione d'ordine si dice totale *se per ogni $x, y \in A$ o $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, ovvero se ogni due elementi possono essere confrontati.*

Esempi prototipici di relazione d'ordine sono la relazione $\leq$ tra numeri, la relazione di inclusione $\subseteq$ tra insiemi o la relazione $\preccurlyeq$ tra i nodi di un grafo ad albero (in cui si dice che il nodo a precede il nodo b, in simboli $a \preccurlyeq b$, se b "è figlio" di a). Di queste, solo la relazione di $\leq$ tra numeri è un ordinamento totale (e per questo la prediligeremo sulle altre), mentre né $\subseteq$, né $\preccurlyeq$ lo sono, come non è difficile vedere: due insiemi che hanno una differenza simmetrica non banale non possono essere messi in relazione tra loro, così come due nodi di un albero in cui uno non discende dall'altro (si pensi ai cugini in un albero genealogico).

1.4 Funzioni

Ora che abbiamo definito le operazioni sugli insiemi, vediamo in questa sezione come mettere in comunicazione insiemi diversi tramite una regola che metta in corrispondenza gli elementi di un insieme con quelli di un altro. Definiamo il concetto di funzione, probabilmente il più importante in questo corso.

Definizione 1.4.1. *Una* funzione *è una terna* (f, A, B) *composta da due insiemi non vuoti, A detto* dominio *e B detto* codominio*, e da una legge, f, che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B, ovvero tale che*

$$\forall\, a \in A, \exists!\, b \in B : b = f(a). \tag{1.17}$$

Si usa scrivere $f\colon A \to B$ per indicare la funzione e $a \mapsto b = f(a)$ per indicare l'associazione di a a b. L'elemento $b \in B$ della (1.17) si chiama immagine *di a attraverso f.*

La definizione appena data, benché formale e corretta, è volutamente vaga, in quanto il termine *legge* non ha un vero significato matematico, ma indica che il concetto di funzione è il modo di formalizzare come gli elementi di due insiemi vengono messi in associazione. La generalità del concetto di funzione presentato nella Definizione 1.4.1 ha il vantaggio di essere applicabile ad un vasto numero di situazioni. È chiaro che un concetto così ampio rischia di essere poco maneggevole se non si individuano dei casi particolari, ovvero delle funzioni con particolari proprietà che le rendono più adatte alla modellizzazione di alcuni problemi.

Prima di introdurre tre classi di funzioni, facciamo le seguenti osservazioni. Se $I \subseteq A$ è un sottoinsieme del dominio, si usa scrivere $f(I)$ per indicare il sottoinsieme del codominio che contiene le immagini degli elementi di I, ovvero

$$f(I) \coloneqq \{b \in B : b = f(a), a \in I\} \subseteq B; \tag{1.18}$$

l'insieme $f(I)$ si chiama anche l'*immagine* di I attraverso f. Inoltre, dati $f\colon A \to B$ e $I \subseteq A$, la funzione $f|_I\colon I \to B$ tale che $I \ni a \mapsto f|_I(a) = f(a)$ si chiama *restrizione* di f ad I. La restrizione $f|_I$ di una funzione f ad un sottoinsieme I del dominio A è formalmente una funzione differente, poiché come dominio ha il sottoinsieme. Usando la notazione con la terna, fare la restrizione consiste nel passare da (f, A, B) a $(f|_I, I, B)$.

Potendosi prendere $I = A$, la (1.18) diventa

$$\mathrm{im}(f) \coloneqq f(A) = \{b \in B : b = f(a), a \in A\} \subseteq B \tag{1.19}$$

e l'insieme $\mathrm{im}(f) = f(A)$ si chiama *immagine* di f. L'immagine di una funzione è dunque l'insieme di tutti gli elementi del codominio che sono associati ad almeno un elemento del dominio (ricordiamo che invece *ogni* elemento del dominio è associato ad un elemento del codominio – ad un unico elemento, addirittura!) ed è evidente che in generale l'inclusione nella (1.19) è larga, ovvero può essere che $f(A) \subset B$ oppure $f(A) = B$: la distinzione tra questi due casi sarà importante.

Un'altra caratteristica che possono avere le funzioni è se associano elementi distinti del dominio ad elementi distinti del codominio: se questo fosse il caso, allora si potrebbe pensare di costruire una seconda funzione che mette in relazione gli elementi del codominio con quelli del dominio, essenzialmente "tornando indietro". A questo proposito, dato $b \in B$ definiamo la *controimmagine* o *immagine inversa* di b come l'insieme degli elementi del dominio A che hanno immagine b, in simboli

$$f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\} \subseteq A; \tag{1.20}$$

notiamo che questo insieme può essere l'insieme vuoto, se $b \notin f(A)$, può contenere un solo elemento, può contenere più elementi e può anche essere tutto A (come vedremo negli Esempi 1.4.4). Analogamente a quanto considerato poco sopra, se abbiamo un insieme $J \subseteq B$, l'immagine inversa di J è quel sottoinsieme di A che contiene tutti gli elementi che hanno immagine in J:

$$f^{-1}(J) := \{a \in A : f(a) \in J\} \tag{1.21}$$

e si parla di *controimmagine* di B, $f^{-1}(B)$, considerando $J = B$ nella (1.21).

Diamo ora le seguenti definizioni.

Definizione 1.4.2. *Sia $f: A \to B$ una funzione.*

- *Essa si dice* suriettiva *se*

$$\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : b = f(a), \tag{1.22}$$

ovvero se l'immagine coincide con il codominio, ovvero se $\operatorname{im}(f) = f(A) = B$.

- *Essa si dice* iniettiva *se*

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2), \tag{1.23}$$

ovvero se elementi distinti nel dominio hanno immagini distinte.

- *Essa si dice* biunivoca *se è sia iniettiva che suriettiva.*

Osservazione 1.4.3. Notiamo che la (1.23) equivale a chiedere che $\forall\, b \in f(A)$, $f^{-1}(b) = \{a\}$ (ovvero la controimmagine di ogni elemento di $b \in f(A)$ è un singoletto). Per questo motivo, in alcuni testi si dice che una funzione iniettiva è *invertibile*. □

Esempi 1.4.4. Presentiamo qualche esempio di funzioni che soddisfano la Definizione 1.17 e di funzioni che non la soddisfano.

1. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto f(x) = x^2$. Tale funzione non è suriettiva, perché nessun numero negativo è immagine della funzione quadrato, in violazione della (1.22). Inoltre non è iniettiva, perché numeri opposti (e quindi diversi) hanno lo stesso quadrato, in violazione della (1.23). Riassumendo,
   - possiamo scrivere la funzione come $((\cdot)^2, \mathbb{R}, \mathbb{R})$,
   - l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ (segue che f non è suriettiva),
   - per ogni $y \in \mathbb{R}$ (il codominio), la controimmagine è

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y < 0 \\ \{0\} & \text{se } y = 0 \\ \{\pm\sqrt{y}\} & \text{se } y > 0 \text{ (segue che } f \text{ non è iniettiva),} \end{cases}$$

- la controimmagine di f è $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
- la funzione non è biunivoca.

2. Consideriamo la funzione quadrato $f\colon x \mapsto x^2$ definita però a valori in $\mathbb{R}_+$. Essa è suriettiva, perché ogni elemento del codominio $\mathbb{R}_+$ è immagine di qualche elemento del dominio, verificando la (1.22); tuttavia non è iniettiva, siccome, come nel caso precedente, numeri opposti hanno lo stesso quadrato. Riassumendo,
   - possiamo scrivere la funzione come $((\cdot)^2, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$,
   - l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ (segue che f è suriettiva),
   - per ogni $y \in \mathbb{R}_+$ la controimmagine è
   $$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y = 0 \\ \{\pm\sqrt{y}\} & \text{se } y > 0 \text{ (segue che } f \text{ non è iniettiva),} \end{cases}$$
   - la controimmagine di f è $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$,
   - la funzione non è biunivoca.

3. Consideriamo ora la stessa funzione quadrato, ristretta però a $\mathbb{R}_+$, ovvero $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$. Questa è una funzione suriettiva (per lo stesso motivo visto nell'esempio precedente) ed è anche iniettiva, perché numeri positivi distinti hanno i quadrati distinti. Riassumendo,
   - possiamo scrivere la funzione come $((\cdot)^2, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$,
   - l'immagine di f è $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ (segue che f è suriettiva),
   - per ogni $y \in \mathbb{R}_+$ la controimmagine è $f^{-1}(y) = \{\sqrt{y}\}$ (segue che f è iniettiva),
   - la controimmagine di f è $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$,
   - la funzione è biunivoca.

Facciamo notare che, se si conosce l'espressione esplicita di una funzione, l'iniettività si può scrivere invertendo la (1.23), ovvero

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2, \tag{1.24}$$

che si legge dicendo che se le immagini $f(a_1), f(a_2)$ di due elementi $a_1, a_2 \in A$ coincidono allora necessariamente devono coincidere anche a_1 e a_2.

Cogliamo l'occasione per sottolineare che benché le tre funzioni descritte sopra possano sembrare la stessa funzione, siccome tutte e tre elevano al quadrato il numero di base, esse tuttavia non lo sono secondo la Definizione 1.4.1, siccome le terne $((\cdot)^2, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $((\cdot)^2, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ e $((\cdot)^2, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ sono diverse perché cambiano gli insiemi dominio e codominio.

4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione costante, ovvero quella che associa ad ogni valore $x \in \mathbb{R}$ (nel dominio) un valore fissato $k \in \mathbb{R}$. Possiamo scrivere $f(x) = k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Siccome ogni valore diverso da k (nel codominio) non è immagine di nessun valore del dominio, la funzione non è suriettiva perché la (1.22) non è soddisfatta. Siccome poi ogni valore del dominio ha la stessa immagine, nemmeno la (1.23) è soddisfatta, quindi la funzione non è iniettiva. Riassumendo,
   - possiamo scrivere la funzione come $(f, \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

- l'immagine di f è $f(\mathbb{R}) = \{k\}$ (segue che f non è suriettiva),
- per ogni $y \in \mathbb{R}$ la controimmagine è

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \neq k \\ \mathbb{R} & \text{se } y = k \text{ (segue che } f \text{ non è iniettiva),} \end{cases}$$

- la controimmagine di f è $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,
- la funzione non è biunivoca.

5. Un'altra funzione molto importante, anche se sembra banale, è la ***funzione identità***, ovvero quella funzione che associa ad ogni elemento $a \in A$ esso stesso. Per questo, serve che $A = B$, o almeno che $A \subseteq B$. In entrambi i casi si ha $\mathrm{id}_A \colon A \to B$ definita da $a \mapsto \mathrm{id}_A(a) = a$. È immediato vedere che la funzione è iniettiva: se $a_1 \neq a_2$ allora anche le loro immagini, che sono a_1 e a_2 stessi, sono diverse, e questo dimostra la (1.23). Se poi $A \subset B$ la funzione non è suriettiva, mentre se $A = B$ la funzione è anche suriettiva. Riassumendo, se $A \subset B$,

   - possiamo scrivere la funzione come (id_A, A, B),
   - l'immagine di id_A è $\mathrm{id}_A(A) = A \subset B$ (segue che f non è suriettiva),
   - per ogni $b \in B$ la controimmagine è

   $$\mathrm{id}_A^{-1}(b) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b \notin A \\ \{b\} & \text{se } b \in A \text{ (segue che } f \text{ è iniettiva),} \end{cases}$$

   - la controimmagine di id_A è $\mathrm{id}_A^{-1}(B) = A$,
   - la funzione non è biunivoca.

   Se invece $A = B$,

   - possiamo scrivere la funzione come (id_A, A, A),
   - l'immagine di id_A è $\mathrm{id}_A(A) = A$ (segue che f è suriettiva),
   - per ogni $b \in A$ la controimmagine è $\mathrm{id}_A^{-1}(b) = \{b\}$ (segue che f è iniettiva),
   - la controimmagine di id_A è $\mathrm{id}_A^{-1}(A) = A$,
   - la funzione è biunivoca.

   Può sembrare pedante, ma è importante distinguere in quale insieme la funzione identità agisce: questo giustifica il pedice nella notazione id_A.

Sia nelle (1.20) e (1.21) che negli Esempi 1.4.4 abbiamo iniziato a vedere come andare nella "direzione inversa" ovvero cercare di capire se, data una funzione $f \colon A \to B$ si possono avere informazioni sulla funzione che ha come dominio B e codominio A e che ha l'effetto di "riportare indietro" le immagini della f. Affinché tale legge sia una funzione $B \to A$, è necessario che *ogni* valore di B abbia *uno ed un solo* corrispondente in A, come prescritto dalla (1.17) nella Definizione 1.4.1. Per far sì che ogni valore di B abbia un'immagine in A, è necessario che $\mathrm{im}(f) = B$, ovvero che f sia suriettiva, mentre per far sì che tale immagine sia unica è necessario che f sia iniettiva (ricordando, per entrambe le richieste, la Definizione 1.4.2 e l'Osservazione 1.4.3). Fatte queste richieste, ovvero richiesto che la funzione (f, A, B) sia biunivoca, possiamo definire formalmente la funzione inversa (f^{-1}, B, A).

Definizione 1.4.5. *Sia $f\colon A \to B$ una funzione biunivoca. Allora la funzione f è invertibile e la* funzione inversa *$f^{-1}\colon B \to A$ è quella funzione che associa ad ogni elemento $b \in B$ l'elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$, in simboli*

$$B \ni b \mapsto f^{-1}(b) = a, \quad \textit{dove } a \in A \textit{ è l'unico elemento tale che } f(a) = b. \tag{1.25}$$

Con riferimento alle funzioni $x \mapsto x^2$ e $a \mapsto \mathrm{id}_A(a)$, che sono le uniche due funzioni biunivoche degli Esempi 1.4.4 (punti 3 e 5), le loro funzioni inverse sono $\mathbb{R}_+ \ni y \mapsto \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$ e $A \ni b \mapsto b \in A$, rispettivamente.

Esercizio 1.4.6. Dimostrare che la funzione inversa f^{-1} è biunivoca.

Date più funzioni (faremo gli esempi per due funzioni, ma il discorso si può generalizzare ad un numero arbitrario, purché finito, di funzioni) è interessante "combinarle" tra loro. Questo può essere fatto in due modi, a seconda della situazione. Supponiamo di avere due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon A \to B$ e che su B sia definita un'operazione $\star\colon B \times B \to B$. Allora è possibile definire l'operazione $\star$ sulle funzioni come quella funzione che associa ad un elemento $a \in A$ l'operazione $\star$ sulle immagini di a attraverso f e g, in simboli

$$f \star g\colon A \to B \quad A \ni a \mapsto (f \star g)(a) := f(a) \star g(a). \tag{1.26}$$

In particolare, se B è un insieme numerico sul quale sono definite una legge di somma (e quindi di differenza) e di prodotto (e quindi di divisione), è possibile parlare di funzione somma (o differenza) e funzione prodotto (o quoziente), che sono definite nel seguente modo

$$\begin{aligned} f \pm g\colon A \to B &\quad \text{è definita da} \quad A \ni a \mapsto (f \pm g)(a) := f(a) \pm g(a) \in B, \\ fg\colon A \to B &\quad \text{è definita da} \quad A \ni a \mapsto (fg)(a) := f(a) \cdot g(a) \in B, \\ \frac{f}{g}\colon A \to B &\quad \text{è definita da} \quad A \ni a \mapsto \frac{f}{g}(a) := \frac{f(a)}{g(a)} \in B, \end{aligned} \tag{1.27}$$

qualora sia possibile effettuare la divisione. Le operazioni ai membri destri delle definizioni (1.27) sono le operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione nell'insieme B. Basti pensare a B come l'insieme dei numeri reali con le quattro operazioni: la (1.27) dice che

la funzione somma $f + g$ calcolata su a restituisce la somma $f(a) + g(a)$ delle immagini, come elementi di B,

la funzione differenza $f - g$ calcolata su a restituisce la differenza $f(a) - g(a)$ delle immagini, come elementi di B,

la funzione prodotto fg calcolata su a restituisce il prodotto $f(a) \cdot g(a)$ delle immagini, come elementi di B,

la funzione quoziente f/g calcolata su a restituisce il quoziente $f(a)/g(a)$ delle immagini, come elementi di B (qualora $g(a) \neq 0$).

Se abbiamo due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$, abbiamo un secondo modo di combinare f e g tra loro: preso un elemento $a \in A$ si può ottenere la sua immagine $b = f(a)$ attraverso f e siccome b è un elemento del dominio di g, se ne può a sua volta fare l'immagine attraverso g, ovvero $c = g(b) = g(f(a))$. Ecco allora che si è trovato un modo per associare un elemento $a \in A$ ad un elemento $c \in C$.

Definizione 1.4.7. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Si definisce la* composizione *di f con g la funzione $g \circ f\colon A \to C$ che associa ad ogni elemento $a \in A$ l'unico elemento $c \in C$ ottenuto come $c = g(f(a))$, in simboli,*

$$g \circ f\colon A \to C \quad \textit{è definita da} \quad A \ni a \mapsto c = (g \circ f)(a) := g(f(a)) \in C. \tag{1.28}$$

La notazione $g \circ f$ è scelta per mettere in evidenza che agisce per prima la funzione più vicina all'argomento: nella scrittura $(g \circ f)(a)$, la f è più vicina ad a, allora prima si calcola $f(a)$ e poi il risultato diventa l'argomento della g. Notiamo che l'operazione di composizione ***non*** è in generale commutativa, ovvero $g \circ f \neq f \circ g$. Se ciò fosse sfuggito, basti notare che, se A e C non hanno relazioni tra loro, il codominio di g non ha nulla a che vedere con il dominio di f, pertanto non avrà senso definire $f(g(b))$.

Osservazione 1.4.8. In generale, data $f\colon A \to B$ biunivoca e detta $f^{-1}\colon B \to A$ la sua inversa, è possibile effettuare sia la composizione $f^{-1} \circ f\colon A \to A$ che la composizione $f \circ f^{-1}\colon B \to B$. Esse sono le funzioni identità sui propri domini, ovvero $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, come è facile verificare. Mettiamo in evidenza che, benché l'effetto di entrambe le funzioni sia quello di restituire l'argomento stesso, formalmente sono due funzioni differenti, in quanto si possono scrivere come (id_A, A, A) e (id_B, B, B), rispettivamente. □

Esercizio 1.4.9. Dimostrare che se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ sono iniettive allora anche la composizione $g \circ f$ lo è; dimostrare che se sono suriettive allora anche la composizione $g \circ f$ lo è. Osservare, in particolare, che se f e g sono biunivoche allora anche la composizione $g \circ f$ lo è.

In virtù del risultato dell'Esercizio 1.4.9, ha senso cercare l'inversa della composizione $g \circ f$, qualora la funzione $g \circ f$ sia biunivoca, ovvero quella funzione $(g \circ f)^{-1}\colon C \to A$ che ad ogni elemento $c \in C$ associa l'unico elemento $a \in A$ tale che $c = (g \circ f)(a)$. Per ricavare la legge di composizione dell'inversa di una composta, sfruttiamo le considerazioni fatte nell'Osservazione 1.4.8. Sappiamo che

$$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$$

e applicando queste due funzioni al generico elemento $a \in A$ abbiamo (scrivendo l'uguaglianza con i membri invertiti)

$$\begin{aligned} a =& \mathrm{id}_A(a) = \big((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f)\big)(a) = \big((g \circ f)^{-1}\big)\big((g \circ f)(a)\big) \\ =& (g \circ f)^{-1}(c), \end{aligned} \tag{1.29}$$

dove abbiamo sfruttato la definizione della composizione $g \circ f$. Serve ora ricavare a in dipendenza da c e a tale scopo manipoliamo la relazione $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$, applicando la funzione g^{-1} ad entrambi i membri. L'uguaglianza viene mantenuta in virtù dell'iniettività di g^{-1} (si veda l'Esercizio 1.4.6). Allora abbiamo

$$g^{-1}(c) = g^{-1}(g(f(a))) = (g^{-1} \circ g)(f(a)) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a);$$

applicando ora f^{-1} ad entrambi i membri, per le stesse considerazioni, abbiamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(g^{-1}(c)) =& f^{-1}(f(a)) = (f^{-1} \circ f)(a) = \mathrm{id}_A(a) = a \\ (f^{-1} \circ g^{-1})(c) & \end{aligned} \tag{1.30}$$

dove abbiamo riscritto il primo membro usando la definizione di composizione; combinando la (1.29) e la (1.30) abbiamo trovato che

$$(g \circ f)^{-1}(c) = a = (f^{-1} \circ g^{-1})(c). \tag{1.31}$$

La (1.31) dice che

> *l'inversa di una composizione di funzioni è la composizione delle inverse prese in ordine invertito.*

L'esempio principe per capire la (1.31) è il seguente: se f è la funzione *mettersi le calze* e g è la funzione *mettersi le scarpe* (e il lettore avrà cura di determinare chi sono i loro domini e codomini), allora la composizione $g \circ f$ è la funzione *(prima) mettersi le calze e (dopo) mettersi le scarpe*. Le inverse sono f^{-1} *togliersi le calze* e g^{-1} *togliersi le scarpe* dunque l'inversa dell'azione descritta da $g \circ f$ è (naturalmente) *(prima) togliersi le scarpe e (dopo) togliersi le calze*, ovvero $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Esercizio 1.4.10. Date le funzioni $f(x) = ax + b$ e $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (la seconda definita per ogni $x \neq -d/c$), dire per quali valori $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (a) esse sono iniettive; (b) esse coincidono con l'inversa.

1.5 Insiemi numerici

In questa sezione presentiamo gli insiemi numerici e li classifichiamo a seconda della struttura che guadagnano quando sono dotato delle operazioni di somma e prodotto. Conviene dapprima definire le strutture algebriche e poi vedere come gli insiemi numerici ne posseggono alcune a seconda delle operazioni che vengono definite su di essi.

Definizione 1.5.1 (monoide)**.** *Siano A un insieme non vuoto e $\bullet\colon A \times A \to A$ un'operazione binaria. La coppia $(A, \bullet)$ si dice* monoide *se valgono le seguenti due proprietà:*

(i) per ogni $a, b, c \in A$ vale *(proprietà associativa)*

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c);$$

(ii) esiste un elemento $e \in A$ tale che per ogni $a \in A$ vale *(elemento neutro)*

$$a \bullet e = e \bullet a = a.$$

Se inoltre la seguente proprietà è valida

(iii) per ogni $a, b \in A$ *(proprietà commutativa)*

$$a \bullet b = b \bullet a$$

la coppia $(A, \bullet)$ si dice monoide commutativo *o* abeliano.

Definizione 1.5.2 (gruppo)**.** *Siano A un insieme non vuoto e $\bullet\colon A \times A \to A$ un'operazione binaria. La coppia $(A, \bullet)$ si dice* gruppo *se valgono le seguenti tre proprietà:*

(i) per ogni $a, b, c \in A$ vale *(proprietà associativa)*

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c);$$

(ii) *esiste un elemento $e \in A$ tale che per ogni $a \in A$ vale* *(elemento neutro)*

$$a \bullet e = e \bullet a = a;$$

(iii) *per ogni $a \in A$ esiste $a^{-1} \in A$ tale che* *(inverso)*

$$a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e.$$

Se inoltre la seguente proprietà è valida

(iv) *per ogni $a, b \in A$* *(proprietà commutativa)*

$$a \bullet b = b \bullet a$$

la coppia $(A, \bullet)$ si dice gruppo commutativo *o* abeliano.

Definizione 1.5.3 (anello)**.** *Siano A un insieme non vuoto e $\bullet \colon A \times A \to A$ e $* \colon A \times A \to A$ due operazioni binarie. La terna $(A, \bullet, *)$ si dice* anello *se $(A, \bullet)$ è un gruppo abeliano, se $(A, *)$ è un monoide e se valgono le proprietà distributive: per ogni $a, b, c \in A$ si ha*

$$\begin{aligned} a * (b \bullet c) &= (a * b) \bullet (a * c), \\ (b \bullet c) * a &= (b * a) \bullet (c * a). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Definizione 1.5.4 (corpo e campo)**.** *Siano A un insieme non vuoto e $\bullet \colon A \times A \to A$ e $* \colon A \times A \to A$ due operazioni binarie. La terna $(A, \bullet, *)$ si dice* corpo *se $(A, \bullet)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro $e_\bullet \in A$, se $(A^*, *)$ è un gruppo con elemento neutro $e_* \in A$ e se valgono le proprietà distributive (1.32) per ogni $a, b, c \in A$, dove abbiamo posto $A^* := A \setminus \{e_\bullet\}$.*
Se l'operazione $*$ è tale da rendere $(A^*, *)$ un gruppo abeliano, allora $(A, \bullet, *)$ si chiama corpo commutativo *o* campo.

Ora cerchiamo di classificare gli insiemi numerici che conosciamo all'interno delle strutture algebriche appena definite.

Proposizione 1.5.5. *Consideriamo l'insieme dei* numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.33}$$

Siano $+ \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $\cdot \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le usuali operazioni di somma e prodotto tra numeri. Allora la coppia $(\mathbb{N}, +)$ è un monoide con elemento neutro $e_+ = 0$; la coppia $(\mathbb{N}, \cdot)$ è un monoide con elemento neutro $e_\cdot = 1$.

Dimostrazione. È facile osservare che le operazioni come le conosciamo fanno sì che $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$ soddisfino la Definizione 1.5.1. □

Si noti come nella (1.33) si è indicato l'insieme dei numeri naturali in maniera intuitiva come l'insieme dei "numeri che si contano con le dita". È possibile dare una definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ per mezzo degli assiomi di Peano: rimandiamo alla Sezione 7.1.1 per un approfondimento in tale direzione.

Proposizione 1.5.6. *Consideriamo l'insieme dei* numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{1.34}$$

Siano $+ \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $\cdot \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ le usuali operazioni di somma e prodotto tra numeri. Allora la terna $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello con elemento neutro $e_+ = 0$ per la somma e $e_\cdot = 1$ per il prodotto. L'inverso rispetto alla somma si chiama opposto. *Notiamo che $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. È facile osservare che le operazioni come le conosciamo fanno sì che $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ soddisfi la Definizione 1.5.3. □

Proposizione 1.5.7. *Consideriamo l'insieme dei* numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}, \tag{1.35}$$

ovvero delle frazioni di numeri interi (in cui il denominatore non sia nullo). Siano $+ \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *e* $\cdot \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *le usuali operazioni di somma e prodotto tra numeri. Allora la terna* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *è un campo con elemento neutro* $e_+ = 0$ *per la somma e* $e_\cdot = 1$ *per il prodotto. L'inverso rispetto alla somma si chiama* opposto*; l'inverso rispetto alla moltiplicazione si chiama* reciproco. *Notiamo che* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. È facile osservare che le operazioni come le conosciamo fanno sì che $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ soddisfi la Definizione 1.5.4. □

Sugli insiemi numerici appena caratterizzati è possibile anche considerare la relazione d'ordine definita da $\leq$ (quella che siamo abituati a considerare fin dalle scuole). L'ordinamento, che ci permette di confrontare elementi di sottoinsiemi di numeri, permetterà anche di caratterizzare quali siano il numero più grande o più piccolo tra quelli considerati. È in un assioma legato a questi elementi che si fonda la differenza tra i numeri razionali ed i numeri reali. Cominciamo con la seguente definizione.

Definizione 1.5.8 (massimo e minimo)**.** *Sia* $(A, \leq)$ *un insieme non vuoto e totalmente ordinato. Si dice che* $\overline{m} \in A$ *è il* massimo *di* A *se* $a \leq \overline{m}$ *per ogni* $a \in A$ *e si denota con* $\overline{m} = \max A$*. Si dice che* $\underline{m} \in A$ *è il* minimo *di* A *se* $\underline{m} \leq a$ *per ogni* $a \in A$ *e si denota con* $\underline{m} = \min A$.

Esempi 1.5.9. Vediamo un paio di esempi.

1. Sia $A = \{0, 7, 25, 132\}$. Allora è facile vedere che $\min A = 0$ e $\max A = 132$.
2. Sia $B = \{r \in \mathbb{Q} : -12 \leq r \leq 145\}$. Anche qui massimo e minimo sono presto individuati: abbiamo $\min B = -12$ e $\max B = 145$.

È chiaramente possibile definire insiemi tramite la relazione di minore stretto $<$ e ciò fa nascere dei problemi.

3. Sia $C = \{r \in \mathbb{Q} : 0 < r \leq 100\}$. Se è facile vedere che $100 = \max C$, in quanto rispetta le richieste della Definizione 1.5.8, non è altrettanto chiaro come classificare 0. Infatti, siccome $0 \notin C$, non possiamo dire che esso sia il minimo di C; d'altra parte, se consideriamo $r \in C$, allora anche $r/2 \in C$, il che ci dice che per ogni elemento che appartiene ad C anche la sua metà vi appartiene: segue che non ci può essere il minimo di C.
4. Un altro esempio è dato dall'insieme $D = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \text{ oppure } r^2 \leq 2\}$: qui non abbiamo minimo, siccome per ogni $r \in D$ con $r < 0$ anche $2r \in D$ e $2r < r$; non abbiamo neppure massimo perché se ci fosse sarebbe tale che il suo quadrato è 2, ma abbiamo visto nel Teorema 1.2.5 che 2 non è il quadrato di nessun numero razionale.

Dagli ultimi due esempi appena presentati si capisce che non è scontato che massimo e minimo di un insieme esistano e che è necessario arricchire i concetti di massimo e minimo dati nella Definizione 1.5.8 per includere i casi degli Esempi 1.5.9-3 e 4. Prima di procedere, dimostriamo una proprietà importante di massimo e minimo.

Proposizione 1.5.10. *Massimo e minimo di A, se esistono, sono unici.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà per il massimo, siccome per il minimo la dimostrazione è identica. Supponiamo per assurdo che esistano *due* massimi distinti di A, ovvero che esistano $m_1, m_2 \in A$ con $m_1 \neq m_2$ tali che $a \leq m_1$ e $a \leq m_2$ per ogni $a \in A$. Ora possiamo scrivere la condizione di massimalità di m_1 usando $a = m_2$: otteniamo $m_2 \leq m_1$; parimenti, possiamo scrivere la condizione di massimalità di m_2 usando $a = m_1$: otteniamo $m_1 \leq m_2$. Segue che $m_1 = m_2$, il che conclude la dimostrazione. □

Definizione 1.5.11 (maggiorante e minorante)**.** *Siano $(M, \leq)$ un insieme non vuoto e totalmente ordinato e $\emptyset \neq A \subseteq M$. Si dice che $m \in M$ è* un maggiorante *per A se $a \leq m$ per ogni $a \in A$. Si dice che $m \in M$ è* un minorante *per A se $m \leq a$ per ogni $a \in A$.*

Abbiamo usato l'articolo indeterminativo nella definizione di maggiorante e minorante perché essi non sono necessariamente unici.

Esercizio 1.5.12. Trovare dei maggioranti e dei minoranti, se possibile, per gli insiemi A, B, C e D degli Esempi 1.5.9. Si noti che non è possibile trovare un minorante per l'insieme D.

Definizione 1.5.13 (estremo superiore ed estremo inferiore)**.** *Siano $(M, \leq)$ un insieme non vuoto totalmente ordinato e $\emptyset \neq A \subseteq M$. Si dice che $\overline{s} \in M$ è l'*estremo superiore *di A, e si indica con $\overline{s} = \sup A$, se*

(i) $a \leq \overline{s}$ per ogni $a \in A$, ovvero $\overline{s}$ è un maggiorante per A;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $b \in A$ tale che $\overline{s} - \varepsilon \leq b$, ovvero $\overline{s}$ è il più piccolo dei maggioranti.

*Si dice che $\underline{s} \in M$ è l'*estremo inferiore *di A, e si indica con $\underline{s} = \inf A$, se*

(i) $\underline{s} \leq a$ per ogni $a \in A$, ovvero $\underline{s}$ è un minorante per A;
(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $b \in A$ tale che $b \leq \underline{s} + \varepsilon$, ovvero $\underline{s}$ è il più grande dei minoranti.

Proposizione 1.5.14. *L'estremo superiore e l'estremo inferiore di A sono unici.*

Dimostrazione. Per le proprietà (ii) della Definizione 1.5.15, $\sup A$ è un minimo e $\inf A$ è un massimo, che sono unici per la Proposizione 1.5.10. □

Definizione 1.5.15. *Siano $(M, \leq)$ un insieme non vuoto totalmente ordinato e $\emptyset \neq A \subseteq M$. Si dice che A è*

- superiormente limitato *se esiste un maggiorante per A;*
- inferiormente limitato *se esiste un minorante per A;*
- limitato *se è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.*
- superiormente illimitato *se non esiste un maggiorante per A, e si scrive $\sup A = +\infty$;*
- inferiormente illimitato *se non esiste un minorante per A, e si scrive $\inf A = -\infty$.*

Infine, si pongono $\sup \emptyset := -\infty$ e $\inf \emptyset := +\infty$.

Proposizione 1.5.16. *Siano $(M, \leq)$ un insieme non vuoto totalmente ordinato e $A \subseteq B \subseteq M$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze*

$$\begin{aligned} \sup A \leq \sup B \qquad &e \qquad \max A \leq \max B \\ \inf A \geq \inf B \qquad &e \qquad \min A \geq \min B. \end{aligned}$$

Si noti che queste proprietà giustificano le definizioni di inf *e* sup *dell'insieme vuoto date nella Definizione 1.5.15.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto intuitivo è lasciata al lettore. □

Esercizi 1.5.17. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Siano $S :=$ {studenti del Politecnico di Torino} e $H = [1, 5/2] \subseteq \mathbb{R}$ e sia data la funzione $f : S \to H$ definita da $f(s) =$ altezza in metri di s.
   (a) Dire se la funzione f è: (a) iniettiva; (b) suriettiva; (c) biunivoca.
   (b) Dire se l'immagine di f, $\mathrm{im}(f)$:
      i. è un intervallo di $\mathbb{R}$;
      ii. ammette minimo;
      iii. ammette massimo;
      iv. è inferiormente limitata ma non ammette minimo;
      v. è superiormente limitata ma non ammette massimo.
2. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi, specificando se siano anche minimo e massimo:
   (a) $\left\{\frac{m}{n} + \frac{n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.
   (b) $\left\{(-1)^n \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

1.5.1 Il sistema dei numeri reali

Per quanto riguarda i numeri reali, daremo qui la definizione assiomatica, rimandando alla Sezione 7.2.2 per vedere come invece essi possano essere *costruiti* (ma per quello servirà avere il concetto di successione di Cauchy che daremo nella Definizione 2.2.22).

Definizione 1.5.18. *Il sistema dei* numeri reali *è la quadrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo;*
2. *$(\mathbb{R}, \leq)$ è un insieme totalmente ordinato;*
3. *ogni insieme $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ e superiormente limitato ammette estremo superiore* $\sup I$ *(parimenti, ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato ammette estremo inferiore).*

È la proprietà 3. a rendere l'insieme $\mathbb{R}$ notevolmente più ricco dell'insieme $\mathbb{Q}$ (si noti che $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ soddisfa le richieste 1. e 2. della Definizione 1.5.18. A questo punto è lecito parlare dei numeri reali; si noterà che tutti gli esempi e gli esercizi proposti in precedenza assumono pieno significato. Come prima cosa, definiamo alcuni tra i sottoinsiemi più importanti di $\mathbb{R}$ ovvero gli intervalli e le semirette.

Definizione 1.5.19. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$. Definiamo gli intervalli*

$$(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad [a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$
$$(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

e le semirette

$$(-\infty, a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \quad (a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$
$$(-\infty, a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad [a, +\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}.$$

Notiamo come i simboli $\pm\infty$ siano qui usati per indicare intervalli non limitati inferiormente o superiormente. L'intervallo che non è limitato né inferiormente né superiormente si indica con $(-\infty, +\infty)$, che è, come si intuisce, tutta la retta reale e per questo è a volte usato come sinonimo di $\mathbb{R}$. A volte è conveniente accrescere l'insieme $\mathbb{R}$ dei simboli $\pm\infty$. A tale proposito definiamo la *retta reale estesa*

$$\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \tag{1.36}$$

con l'intesa che $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Notiamo inoltre che se $a = b$, allora si ha $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$, mentre $[a, a] = \{a\}$.

Tra tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ ve ne sono alcuni che verranno usati per dare definizioni nei capitoli successivi.

Definizione 1.5.20 (intorni)**.** *Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce* intorno *di x_0 ogni insieme U del tipo (a, b), con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a < b$, che contiene x_0.*
2. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si definisce* intorno (simmetrico) di centro x_0 e raggio r *l'insieme*
$$I_r(x_0) \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$
3. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si definisce* intorno (simmetrico) bucato di centro x_0 e raggio r *l'insieme*
$$I_r^\circ(x_0) \coloneqq (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < r\}.$$
4. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si definiscono gli* intorni destro e sinistro di centro x_0 e raggio r *gli insiemi*
$$I_r^+(x_0) \coloneqq (x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - x_0 < r\} \quad e$$
$$I_r^-(x_0) \coloneqq (x_0 - r, x_0) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x_0 - x < r\},$$
rispettivamente.
5. *Se $x_0 \in \{\pm\infty\}$ e $r \in \mathbb{R}$, si definiscono gli* intorni di $+\infty$ e $-\infty$ *gli insiemi*
$$I_r(+\infty) \coloneqq (r, +\infty) \qquad e \qquad I_r(-\infty) \coloneqq (-\infty, r).$$

Indichiamo con $\mathcal{I}_{x_0}$ la famiglia degli intorni di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 1.5.21. *Gli intorni di $x_0 \in \mathbb{R}$ definiti nei punti 1. e 2. della Definizione 1.5.20 sono equivalenti, ovvero per ogni $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ esiste $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \subseteq U$ e esiste $R > 0$ tale che $U \subseteq I_R(x_0)$.*

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \in \mathcal{I}_{x_0}$. Allora, siccome $I_r(x_0)$ è limitato, esistono un minorante $a \in \mathbb{R}$ ed un maggiorante $b \in \mathbb{R}$. Ma allora, $I_r(x_0) \subseteq (a,b) =: U$. Viceversa, sia $U \in \mathcal{I}_{x_0}$: allora esistono $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$ tali che $U = (a,b)$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ (ovvero se entrambi sono finiti), prendiamo $r > 0$ pari a $\min\{x_0 - a, b - x_0\}$ (ovvero la più piccola delle due distanze $x_0 - a$ e $b - x_0$) e $R > 0$ pari a $\max\{x_0 - a, b - x_0\}$ (ovvero la più grande delle due distanze $x_0 - a$ e $b - x_0$). Se uno tra a e b è infinito, prendiamo $r = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$ e $R = +\infty$. Se $a = -\infty$ e $b = +\infty$, allora possiamo prendere $r > 0$ qualunque e $R = +\infty$. In tutti e tre i casi, abbiamo che $I_r(x_0) \subseteq U \subseteq I_R(x_0)$ e la dimostrazione è conclusa. □

Introduciamo ora una delle funzioni più importanti in tutta l'analisi matematica.

Definizione 1.5.22. *È definita la funzione* valore assoluto *(o* modulo*)* $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nel seguente modo*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

Osserviamo che la funzione valore assoluto $(|\cdot|, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ così definita non è né iniettiva né suriettiva. Tuttavia, restringendo il codominio all'immagine $\mathbb{R}_+$, la funzione $(|\cdot|, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ è suriettiva.

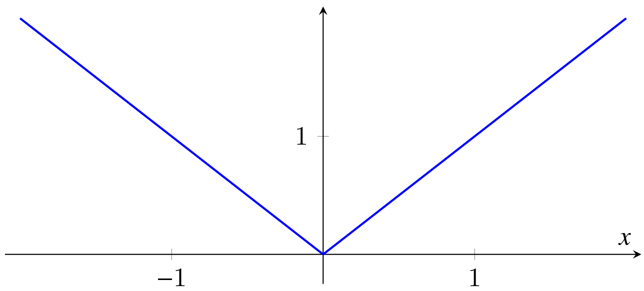


Figura 1.4: Il grafico della funzione valore assoluto.

Proposizione 1.5.23. *Per ogni* $a \in \mathbb{R}_+$ *e per ogni* $X \in \mathbb{R}$*,* $|X| \leq a$ *se e solo se* $-a \leq X \leq a$ *(e ovviamente lo stesso risultato vale con* $<$ *al posto di* $\leq$*).*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando la definizione (1.37). Distinguiamo dunque due casi a seconda del segno di X. Se $X \geq 0$ abbiamo $|X| = X \leq a$ e automaticamente $-a \leq X$; segue che $-a \leq X \leq a$. Se $X < 0$, abbiamo $|X| = -X \leq a$, da cui segue $-a \leq X$. Siccome $X < 0$, automaticamente $X \leq a$ e dunque, ancora $-a \leq X \leq a$. Abbiamo dimostrato che se $|X| \leq a$ allora $-a \leq X \leq a$. L'implicazione inversa è ovvia (basti osservare che $|a| = |-a| = a$ e osservare il grafico della funzione valore assoluto rappresentato in Figura 1.4). □

Proposizione 1.5.24 (proprietà della funzione valore assoluto)**.** *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *valgono*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$; *(disuguaglianza triangolare)*
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$*, in particolare* $|-x| = |x|$*;*
3. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$. *(disuguaglianza triangolare inversa)*

Dimostrazione. Dimostriamo la disuguaglianza triangolare: dato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la Proposizione 1.5.23 con $X = x$ e $a = |x|$. Siccome $|x| \le |x|$, deduciamo

$$-|x| \le x \le |x| \tag{1.38}$$

e analogamente, per $y \in \mathbb{R}$,

$$-|y| \le y \le |y|,$$

da cui, sommando termine a termine, si deduce che

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

che è equivalente a $|x + y| \le |x| + |y|$, considerando $X = x + y$ e $a = |x| + |y|$ nella Proposizione 1.5.23.
Per dimostrare la proprietà 2., studiamo le combinazioni possibili di segni per x e y. Se x e y sono entrambi negativi, il prodotto xy è positivo, quindi $|xy| = xy$; d'altra parte $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy$. Se x e y sono entrambi positivi, allora anche xy lo è e $|xy| = xy$, mentre $|x| \cdot |y| = xy$. Se x e y sono discordi, supponiamo che sia $x < 0$. Allora $xy < 0$ e $|xy| = -xy$; a membro destro abbiamo $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -xy$, e anche in questo caso l'uguaglianza è dimostrate. La seconda parte della proprietà 2. segue scegliendo $y = -1$.
Per dimostrare la proprietà 3., procediamo nel seguente modo, sfruttando la disuguaglianza triangolare:

$$|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \le |x - y|;$$

usando anche la proprietà 2. abbiamo

$$|y| = |y - x + x| = |(y - x) + x| \le |y - x| + |x| \quad \Rightarrow \quad -|x - y| \le |x| - |y|.$$

Applicando la Proposizione 1.5.23 con $X = |x| - |y|$ e $a = |x - y|$, si ottiene la disuguaglianza triangolare inversa. □

Con l'introduzione della funzione valore assoluto abbiamo gli strumenti per dimostrare un importantissimo teorema che afferma che i numeri razionali sono *densi* nei numeri reali. Nella forma che ci interessa, significa che dato un numero reale, esso può essere approssimato bene a piacere da un numero razionale. Alla dimostrazione del teorema premettiamo due lemmi preparatori.

Lemma 1.5.25 (proprietà archimedea dei numeri reali)**.** *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un intero n tale che $n > x$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa, ovvero che esista un numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che per ogni n intero si abbia $n \le \bar{x}$. Ricordando la Definizione 1.5.11, abbiamo che $\bar{x}$ è un maggiorante per l'insieme dei numeri interi di $\mathbb{R}$, insieme che quindi risulta superiormente limitato e per la proprietà 3. della Definizione 1.5.18 ammette estremo superiore, che denotiamo con a. Allora, per ogni $n \in \mathbb{R}$ intero vale che $n \le a$; ma se n è intero, anche $n+1$ lo è e pertanto deve essere $n+1 \le a$, ovvero $n \le a-1$ Il numero $a-1$ risulta quindi un maggiorante per l'insieme degli interi di $\mathbb{R}$, ma ciò è assurdo perché a era il più piccolo di tali maggioranti (per la Definizione 1.5.13 di estremo superiore). Il lemma è quindi dimostrato. □

Lemma 1.5.26. *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un intero n tale che $n \le x < n + 1$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo $|x| \in \mathbb{R}_+$. Per il Lemma 1.5.25 esiste un intero N tale che $|x| < N$ e per la Proposizione 1.5.23 ciò è equivalente alla catena di disuguaglianze $-N < x < N$. Osserviamo che nell'intervallo $(-N, N)$ ci sono un numero finito di interi e tra questi esiste il più grande intero non maggiore di x: esso sarà il numero n cercato. □

Definizione 1.5.27. *Il numero n individuato dal Lemma 1.5.26, che è il più grande intero non maggiore di x, si chiama la* parte intera *di x e si suole denotare con* $[x]$.

Ora possiamo dimostrare il teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5.28 (densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**.** *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \le x < r+\varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$ fissato. Applicando il Lemma 1.5.25 a $1/\varepsilon$, troviamo un intero $q > 0$ tale che $q > 1/\varepsilon$. Da questo segue che $1/q < \varepsilon$. Applichiamo ora il Lemma 1.5.26 al numero reale qx: otteniamo un numero intero p tale che

$$p \le qx < p+1 \quad \text{e dividendo per } q \text{ abbiamo} \quad \frac{p}{q} \le x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{p}{q} + \varepsilon,$$

che è la tesi prendendo $r = p/q$. □

Presentiamo ora due corollari dei risultati visti ora: il primo corollario è una conseguenza del Teorema 1.5.28, il secondo del Lemma 1.5.25.

Corollario 1.5.29. *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (con $a < b$) esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $a < r \le b$.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 1.5.28 a $x = b$ e notando che $b - a > 0$ scegliamo $\varepsilon = b - a$: otteniamo l'esistenza di un numero razionale $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \le b < r + (b-a)$, da cui otteniamo che $a = b - (b-a) < r$. Concatenando queste due disuguaglianze otteniamo la tesi. □

Il Corollario 1.5.29 si può pensare come la versione duale del Teorema 1.5.28: data una coppia di numeri reali, esiste sempre un razionale compreso tra loro.

Corollario 1.5.30. *Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| \le 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $x = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $x \neq 0$. Allora $|x| > 0$ e per il Lemma 1.5.23 applicato a $1/|x|$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > 1/|x|$. Ciò implica che $|x| > 1/\bar{n}$, ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi. Segue che $x = 0$. □

Il corollario appena dimostrato si rivelerà di utilità fondamentale nelle dimostrazioni che seguiranno.

1.5.2 Le funzioni elementari

Una volta definito l'insieme dei numeri reali, introdotti i simboli $\pm\infty$ e le notazioni per gli intervalli di $\mathbb{R}$, possiamo presentare le funzioni elementari. In questo modo si avranno le nozioni di base delle funzioni più semplici, che saranno utili per il seguito, sia come oggetto di studio sia come utile strumento per portare esempi e fare esercizi. Delle funzioni elementari metteremo in evidenza alcune proprietà, che ci accingiamo a definire.

La prima definizione che diamo è quella di monotonia di una funzione: permette di confrontare i valori delle immagini di una funzione se è possibile confrontare i valori nel dominio. Per questo è necessario avere una relazione d'ordine sia sul dominio che sul codominio. Diamo la definizione per relazioni d'ordine qualunque e poi vediamo come queste si declinano considerando funzioni tra insiemi numerici.

Definizione 1.5.31 (monotonia di una funzione astratta). *Siano* $(A, \preceq_A)$ *e* $(B, \preceq_B)$ *due insiemi totalmente ordinati e sia* $f\colon A \to B$ *una funzione. Si dice che* f *è*

- (debolmente) crescente *se* $a_1 \prec_A a_2$ *implica che* $f(a_1) \preceq_B f(a_2)$*;*
- strettamente crescente *se* $a_1 \prec_A a_2$ *implica che* $f(a_1) \prec_B f(a_2)$*;*
- (debolmente) decrescente *se* $a_1 \prec_A a_2$ *implica che* $f(a_1) \succeq_B f(a_2)$*;*
- strettamente decrescente *se* $a_1 \prec_A a_2$ *implica che* $f(a_1) \succ_B f(a_2)$.

Una funzione che verifica una delle proprietà sopra enunciate si dice (strettamente) monotona.

Notiamo che la formalizzazione delle proprietà di monotonia parte sempre dall'avere due elementi di A ordinati in un certo modo e confronta l'ordinamento delle loro immagini: se l'ordinamento è preservato la funzione è crescente, se è invertito la funzione è decrescente. È un facile esercizio osservare che una funzione è sia crescente che decrescente se e solo se è costante. Se gli insiemi A e B sono sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$, le relazioni d'ordine $\preceq_A$ e $\preceq_B$ sono la ben nota relazione $\leq$ e la Definizione 1.5.32 diventa la seguente, che sarà quella che utilizzeremo d'ora in poi.

Definizione 1.5.32 (monotonia di una funzione). *Siano* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $f\colon A \to B$ *una funzione. Si dice che* f *è*

- (debolmente) crescente *se* $x_1 < x_2$ *implica che* $f(x_1) \leq f(x_2)$*;*
- strettamente crescente *se* $x_1 < x_2$ *implica che* $f(x_1) < f(x_2)$*;*
- (debolmente) decrescente *se* $x_1 < x_2$ *implica che* $f(x_1) \geq f(x_2)$*;*
- strettamente decrescente *se* $x_1 < x_2$ *implica che* $f(x_1) > f(x_2)$.

Una funzione che verifica una delle proprietà sopra enunciate si dice (strettamente) monotona.

Definizione 1.5.33. *Un insieme* A *si dice* simmetrico *se per ogni* $a \in A$ *anche* $-a \in A$.

Notare che la definizione ha senso ogniqualvolta si possa considerare l'opposto $-a$ di un elemento $a \in A$. È immediato verificare che nessun sottoinsieme di $\mathbb{N}$ è simmetrico, così come non è necessario che $-a$ sia l'opposto rispetto all'operazione di somma. All'atto pratico, tuttavia, possiamo non addentrarci in queste considerazioni di carattere più teorico e tutti gli insiemi di cui verificheremo la simmetria saranno sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. I più semplici di questi saranno gli intervalli della forma $I = (-a, a)$ con $a \in \mathbb{R}_+$. Anche unioni di intervalli della forma $A = (-a, -b] \cup [-c, c] \cup [b, a)$, con $0 < c < b < a$ sono evidentemente simmetrici. La simmetria di un insieme ci permette di definire le seguenti proprietà per le funzioni.

Definizione 1.5.34 (parità di una funzione). *Siano* A *un insieme simmetrico e* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una funzione. Si dice che* f *è* pari *se* $f(-x) = f(x)$ *per ogni* $x \in A$*; si dice che* f *è* dispari *se* $f(-x) = -f(x)$ *per ogni* $x \in A$.

Notiamo che in genere una funzione pari non è iniettiva, mentre una funzione dispari non banale (ovvero che non sia identicamente nulla) è iniettiva. La loro suriettività dipende dal codominio, così come abbiamo visto negli Esempi 1.4.4.

Proposizione 1.5.35. *Il prodotto di due funzioni pari, così come quello di due funzioni dispari, dà una funzione pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari dà una funzione dispari.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto segue immediatamente dalla definizione. □

Definizione 1.5.36 (funzione periodica)**.** *Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $T \in \mathbb{R}_+$. Si dice che la funzione f è* periodica *di periodo T (o T-periodica) se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il più piccolo di tali T si chiama* periodo fondamentale *ed è definito come*

$$T_{\text{fond}} \coloneqq \inf\{T > 0 : f(x+T) = f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Facciamo notare che il periodo fondamentale può non esistere.

Descriviamo ora le più importanti funzioni che vedremo in questo corso.

Funzioni costanti

Le funzioni costanti sono già state introdotte in Esempi 1.4.4-4. Ricordiamo qui la definizione: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto della retta reale (eventualmente coincidente con la retta reale) e sia $k \in \mathbb{R}$ un numero assegnato; la funzione costante $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa il valore k ad ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero $f(x) = k$. Si nota che f è pari per ogni $k \in \mathbb{R}$ ed è anche dispari se $k = 0$ (in questo caso abbiamo la funzione nulla). È inoltre periodica di ogni periodo $T > 0$, e pertanto non ha periodo minimo.

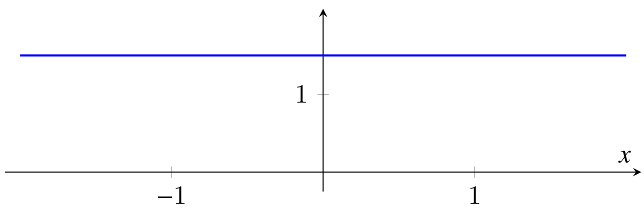


Figura 1.5: Il grafico della funzione $f(x) = 3/2$.

Potenze e radici

Sia $n \in \mathbb{N}_+$ e sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ la funzione *potenza n-esima*. Ricordando la regola dei segni, è facile dimostrare che se l'esponente è pari allora la funzione è pari, ovvero $(-x)^{2k} = x^{2k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre se l'esponente è dispari allora la funzione è dispari, ovvero $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. I nomi *pari* e *dispari* delle proprietà presentate nella Definizione 1.5.34 sono motivati dal caso delle potenze. Tutti i grafici delle potenze pari passano per i punti $(\pm 1, 1)$, mentre tutti i grafici delle potenze dispari passano per i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$. Tutte le potenze passano per l'origine. La potenza

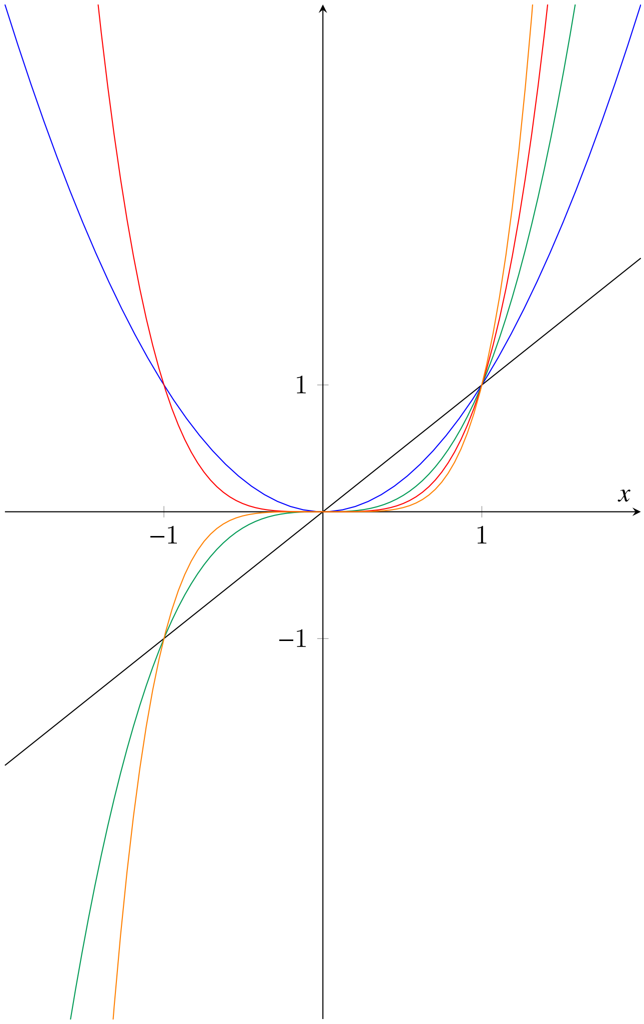


Figura 1.6: I grafici delle funzioni potenza di esponenti $n = 1$ (nero), $n = 2$ (blu), $n = 3$ (verde), $n = 4$ (rosso) e $n = 5$ (arancione).

di esponente zero è la funzione costante $y = 1$[5]. Inoltre possiamo notare che le potenze sono, in un certo senso, ordinate:

- su $(0, 1)$, si ha $x^n > x^m$ se $n < m$;
- su $(1, +\infty)$, si ha $x^n > x^m$ se $n > m$.

Le funzioni potenze di esponente pari ristrette all'intervallo $[0, +\infty)$ e le funzioni dispari su tutto $\mathbb{R}$ sono biunivoche e pertanto invertibili: le loro inverse sono le

[5]Per definite la potenza di esponente zero c'è un problema nell'origine, dove si avrebbe 0^0. L'espressione in matematica non è ben definita, perché fonte di ambiguità: se la si vede come potenza zeresima di un numero, conviene stabilire che $0^0 = 1$ (scelta che forse conviene fare in questo caso); se la si vede come potenza del numero 0, conviene stabilire che $0^0 = 0$ (posizione che si sceglie in altri contesti, per esempio nello studio delle serie di potenze).

funzioni *radici n-esime*. Le radici di indice pari non sono funzioni pari, mentre le radici di indice dispari sono funzioni dispari.

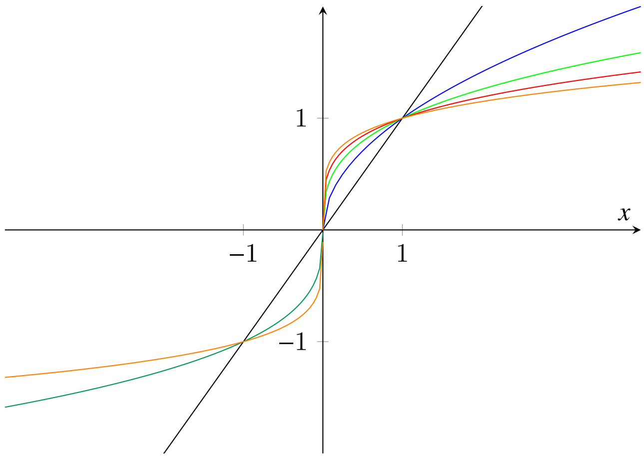


Figura 1.7: I grafici delle funzioni radice di indici $n = 1$ (nero), $n = 2$ (blu), $n = 3$ (verde), $n = 4$ (rosso) e $n = 5$ (arancione).

Sono quindi definite $\sqrt[2k]{\cdot}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, con $k \in \mathbb{N}$ le radici di indice pari e $\sqrt[2k+1]{\cdot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $k \in \mathbb{N}$ le radici di indice dispari. Tutte le funzioni radice passano dall'origine e da $(1, 1)$; le radici di indice dispari passano anche da $(-1, -1)$. I grafici sono ordinati in maniera coerente con quella delle potenze:

- su $(0, 1)$, si ha $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$ se $n > m$;
- su $(1, +\infty)$, si ha $\sqrt[n]{x} > \sqrt[m]{x}$ se $n < m$.

Ponendo $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, si può estendere la definizione di funzione potenza ad esponenti razionali, dando senso alle funzioni $(\cdot)^{m/n}\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definite da $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Per approssimazione si possono definire le potenze di esponente reale.

Esponenziali e logaritmi

Mantenendo fissa la base e facendo variare l'esponente tra i numeri reali si ottengono le *funzioni esponenziali*. Dato $a > 0$, esse sono funzioni definite da $\mathbb{R}$ a valori in $(0, +\infty)$ definite mediante il simbolo a^x. Si possono distinguere tre casi, al variare di a. Se $a = 1$, abbiamo la funzione $1^x \equiv 1$, che quindi risulta costante. Restano dunque i casi $a > 1$ e $0 < a < 1$. Se $a > 1$, quando viene elevato ad una potenza positiva si ha $a^x > 1$, mentre quando viene elevato ad una potenza negativa si ha $0 < a^x < 1$. Il comportamento nel caso $0 < a < 1$ è invertito e per le proprietà delle potenze è speculare rispetto all'asse y. I grafici delle funzioni esponenziali sono riportati in Figura 1.8. Tutte le funzioni esponenziali (di qualunque base) passano dal punto $(0, 1)$; non sono né pari, né dispari, né periodiche. Le funzioni esponenziali risultano biunivoche quando definite $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ e le loro inverse si chiamano *funzioni logaritmiche*: data la base $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, è definita la funzione $\log_a(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Il logaritmo in base a di un numero x è l'esponente che si deve dare ad a per ottenere x. I grafici delle funzioni logaritmiche sono riportati in Figura 1.9. Tutte

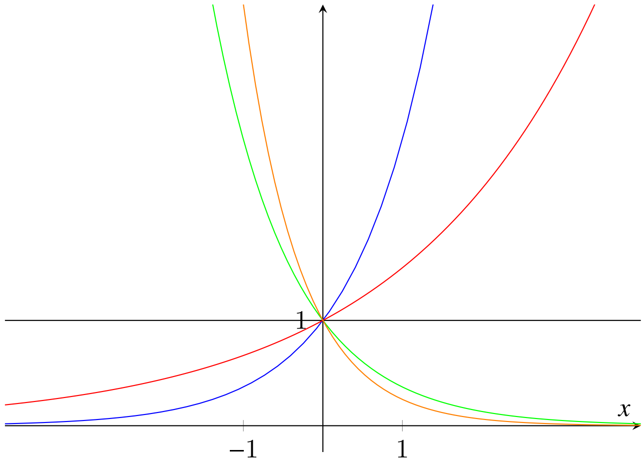


Figura 1.8: I grafici delle funzioni esponenziali con $a = 1$ (nero), $a = e$ (blu), $a = 1/e$ (verde), $a = 3/2$ (rosso) e $a = 1/4$ (arancione).

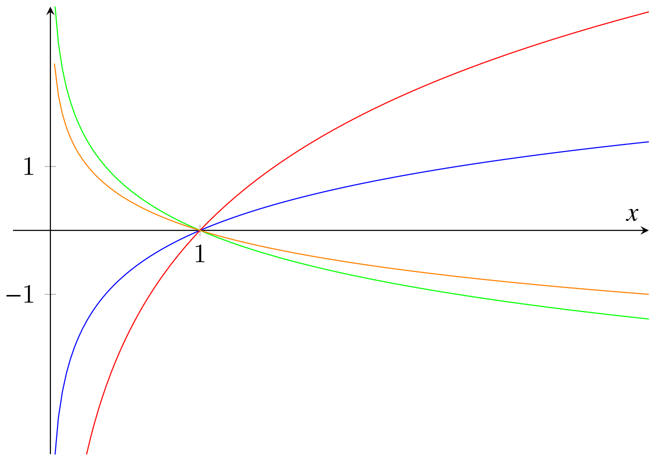


Figura 1.9: I grafici delle funzioni logaritmo in base a, con $a = e$ (blu), $a = 1/e$ (verde), $a = 3/2$ (rosso) e $a = 1/4$ (arancione).

le funzioni logaritmiche (di qualunque base) passano dal punto $(1, 0)$; non sono né pari né dispari né periodiche.

Funzioni trigonometriche

Consideriamo la *circonferenza goniometrica*, ovvero la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine degli assi cartesiani (essa ha equazione $x^2 + y^2 = 1$) ed un punto $P = (x_P, y_P)$ su di essa. Le coordinate di P soddisfano dunque l'equazione della circonferenza: $x_P^2 + y_P^2 = 1$. Consideriamo ora il raggio OP e chiamiamo α l'angolo che esso forma con il semiasse positivo delle ascisse, aprendosi in senso antiorario.

Definizione 1.5.37 (radiante)**.** *Si consideri una circonferenza di raggio R. Un angolo α al centro della circonferenza misura* un radiante *quando sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio.*

Dalla definizione di radiante, si ha immediatamente che l'angolo giro è ampio 2π radianti (in quanto l'arco di circonferenza sotteso da tale angolo è tutta la circonferenza, la cui misura è $2\pi R$); l'angolo piatto misura di conseguenza π radianti, l'angolo retto $\pi/2$ radianti e così via[6]. In matematica gli angoli si misurano in radianti, che sono *numeri puri*, ovvero senza unità di misura. L'angolo di 1 radiante è $180°/\pi \approx 57,296°$ ed è rappresentato in Figura 1.10(a).

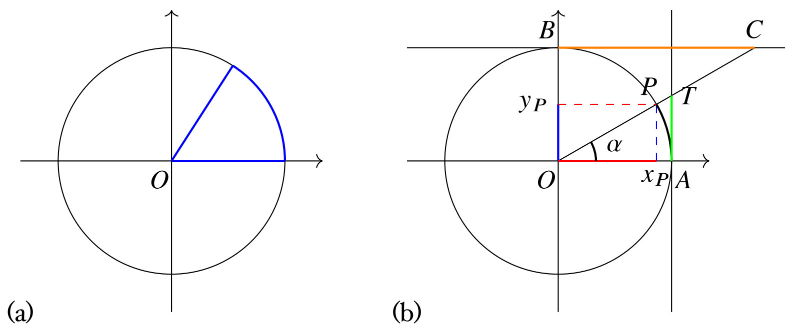


Figura 1.10: (a) L'angolo di 1 radiante. (b) Le funzioni elementari seno (blu), coseno (rosso), tangente (verde) e cotangente (arancione) associate all'angolo α.

Definizione 1.5.38 (seno, coseno, tangente e cotangente)**.** *Si consideri un punto $P = (x_P, y_P)$ sulla circonferenza goniometrica e sia α l'angolo formato da OP con il semiasse positivo delle ascisse, aperto in senso antiorario. Si definisce* coseno *dell'angolo α l'ascissa di P; si definisce* seno *dell'angolo α l'ordinata di P, ovvero*

$$\cos\alpha := x_P, \qquad \sin\alpha := y_P.$$

Si definisce tangente *dell'angolo α l'ordinata del punto T ottenuto intersecando il prolungamento del raggio OP con la retta verticale tangente alla circonferenza nel punto $A = (1,0)$. Si definisce* cotangente *l'ascissa del punto C ottenuto intersecando il prolungamento del raggio OP con la retta orizzontale tangente alla circonferenza nel punto $B = (0,1)$ (si veda la Figura 1.10(b)).*

L'appartenenza di P alla circonferenza e la geometria elementare (similitudini tra triangoli), dànno immediatamente le seguenti relazioni

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1.39}$$

Penando di percorrere la circonferenza in senso orario o antiorario e potendo fare un percorso lungo a piacere, si definiscono le funzioni trigonometriche per ogni numero reale. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} &\sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \qquad \cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1], \\ &\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad \cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

[6] Dalla relazione π=angolo giro=180°, si può stabilire immediatamente la proporzione che permette di convertire l'ampiezza di un angolo da gradi a radianti e viceversa.

i cui grafici sono riportati in nelle Figure 1.11 e 1.12. La funzione coseno è pari,

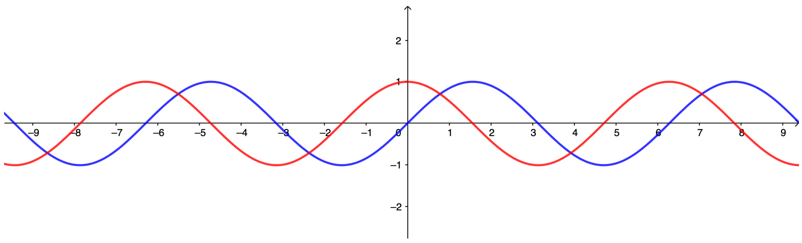


Figura 1.11: I grafici delle funzioni seno (blu) e coseno (rosso).

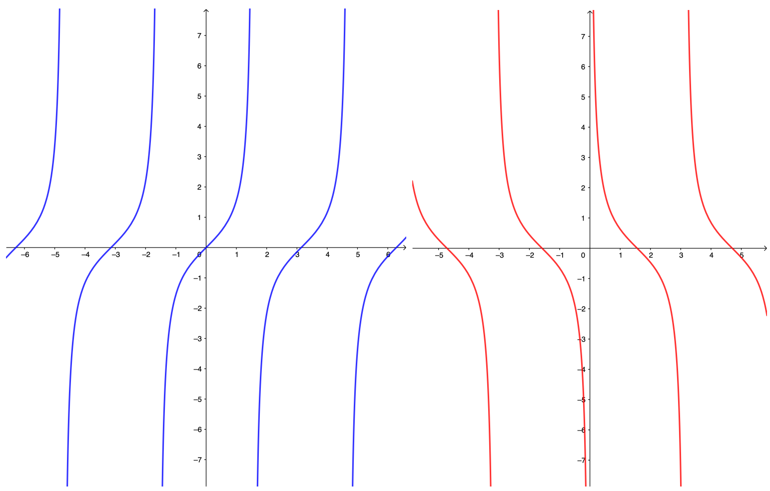


Figura 1.12: I grafici delle funzioni tangente (blu) e cotangente (rosso).

mentre la funzione seno è dispari: di conseguenza, per la Proposizione 1.5.35, le funzioni tangente e cotangente sono funzioni dispari. Le funzioni seno e coseno sono 2π-periodiche, mentre le funzioni tangente e cotangente sono π-periodiche. Nessuna delle funzioni definite nelle (1.40) è iniettiva, ma restringendo il dominio è possibile ovviare a questo fatto e definire in tal modo le funzioni inverse. Se definiamo

$$\begin{aligned} &\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos\colon [0,\pi] \to [-1,1], \\ &\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

è possibile definire le funzioni inverse

$$\begin{aligned} &\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \qquad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi], \\ &\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \qquad \operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi), \end{aligned} \tag{1.42}$$

i cui grafici sono riportati in Figura 1.13. Si nota immediatamente che per ogni $x \in \mathbb{R}$

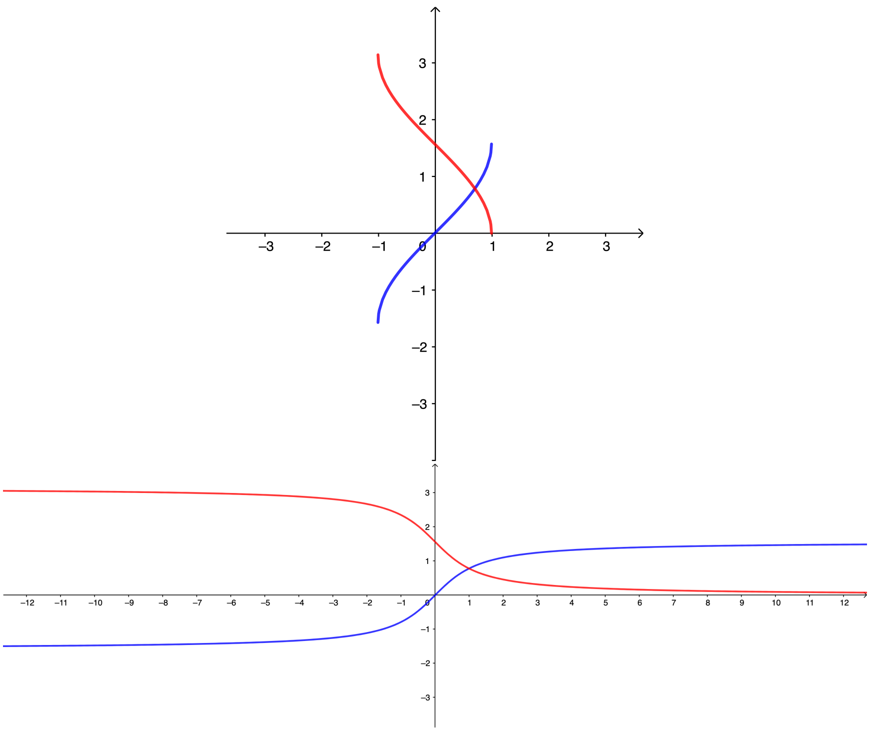


Figura 1.13: I grafici delle funzioni inverse: arcoseno (in blu) e arcocoseno (in rosso) sopra e arcotangente (in blu) e arcocotangente (in rosso) sotto.

si ha $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, il che rende la funzione arcocotangente ridondante.

Funzioni iperboliche

Partendo falla funzione esponenziale, si possono definire le *funzioni iperboliche*. Esse sono il seno iperbolico, il coseno iperbolico e la tangente iperbolica e sono definite come

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty), \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

dalle formule

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

L'aggettivo "iperboliche" viene dal fatto che è soddisfatta la relazione

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \tag{1.43}$$

ovvero definendo nuove coordinate $X := \cosh(x)$ e $Y := \sinh(x)$, si ha $X^2 - Y^2 = 1$, che è l'equazione di un'iperbole. I loro grafici sono rappresentati in Figura 1.14. La funzione coseno iperbolico è pari, mentre la funzione seno iperbolico, e di conseguenza anche la tangente iperbolica, è dispari. Nessuna è periodica.

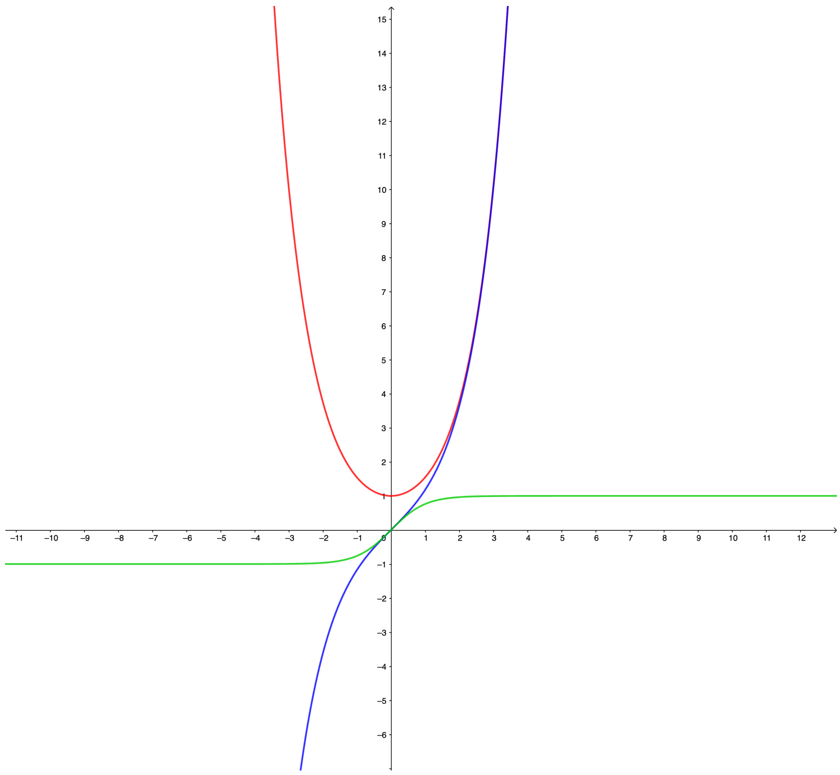


Figura 1.14: I grafici delle funzioni iperboliche: seno iperbolico (in blu) coseno iperbolico (in rosso) e tangente iperbolica (in verde).

Traslazioni e omotetie

Annoveriamo tra le funzioni elementari anche le *traslazioni*, definite da

$$\tau_h(x) := x - h \tag{1.44}$$

che hanno l'effetto di traslare il grafico della funzione. La traslazione è a destra della quantità h se τ_h è applicata prima della funzione, mentre è verso il basso se è applicata dopo la funzione. Dati $h, k > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, la funzione

$$(\tau_{-k} \circ f \circ \tau_h)(x) = \tau_{-k}(f(\tau_h(x))) = f(x - h) + k$$

ha lo stesso grafico di f traslato a destra di h e verso l'alto di k.

Le *omotetie* (o riscalamenti)

$$\omega_a(x) = ax \qquad a > 0$$

hanno invece l'effetto di comprimere di a il grafico della funzione (se $a > 1$) o di dilatarlo (se $0 < a < 1$).

Altre funzioni meno elementari

Ci sembra opportuno presentare anche altre funzioni meno elementari. Iniziamo con la funzione *parte intera*, ovvero quella funzione che, dato un numero $x \in \mathbb{R}$, restituisce $[x] \in \mathbb{N}$, il più grande intero non maggiore di x (abbiamo visto che questo numero esiste nel Lemma 1.5.26). La funzione è $[\cdot] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ e il suo grafico è in blu nella Figura 1.15. Il grafico in rosso nella stessa figura è quello della funzione ***parte decimale*** o ***mantissa***, ovvero la funzione $\mathrm{mant} \colon \mathbb{R} \to [0, 1)$ definita da

$$\mathrm{mant}(x) \coloneqq x - [x]. \tag{1.45}$$

La funzione mantissa è 1-periodica.

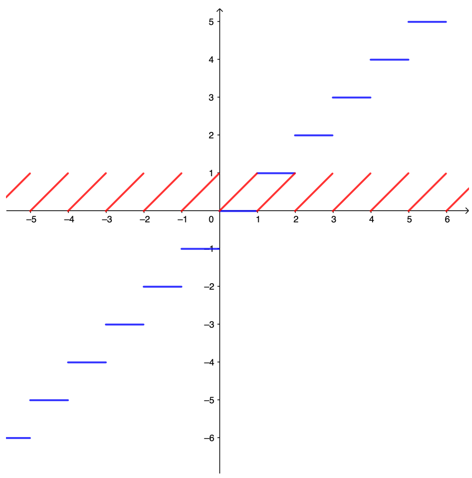


Figura 1.15: I grafici delle funzioni parte intera (in blu) e mantissa (in rosso).

Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, le funzioni ***massimo*** e ***minimo*** restituiscono il più grande ed il più piccolo, rispettivamente, tra x e y e si indicano con $\max\{x, y\}$ e $\min\{x, y\}$[7]. Le operazioni di massimo e minimo si possono estendere ad un numero finito di numeri e la notazione è $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\min\{x_1, \dots, x_n\}$. Il confronto si può estendere alle funzioni: date $f, g \colon A \to \mathbb{R}$, possiamo definire due funzioni, $m, M \colon A \to \mathbb{R}$ tramite le formule

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} = (f \wedge g)(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \{x \in A : f(x) \le g(x)\} \\ g(x) & \text{se } x \in \{x \in A : g(x) \le f(x)\} \end{cases}$$

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\} = (f \vee g)(x) \coloneqq \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \{x \in A : f(x) \ge g(x)\} \\ g(x) & \text{se } x \in \{x \in A : g(x) \ge f(x)\} \end{cases}$$

che confrontano puntualmente[8] i valori assunti da f e g; è evidente che la definizione di può estendere ad un confronto di un numero finito di funzioni $f_1, \dots, f_n$.

Confrontando una funzione con la funzione identicamente nulla, è possibile selezionare o mettere in evidenza dove una funzione è positiva o negativa. Si definiscono così le funzioni ***parte positiva*** e ***parte negativa*** $(\cdot)^+, (\cdot)^- \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ come

[7]Notazioni alternative sono date da $x \vee y = \max\{x, y\}$ e $x \wedge y = \min\{x, y\}$, ma poco si prestano ad essere estese per confronti tra più di due numeri.

[8]Una proprietà si dice *puntuale* quando vale in un punto del dominio di una funzione (o nelle sue vicinanze); si dice *globale* quando vale in tutto il dominio.

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.46a}$$

$$f^-(x) := -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.46b}$$

(dove si nota che sono entrambe funzioni non negative). Le funzioni parte positiva e parte negativa hanno uno stretto legame con la funzione originaria e con la funzione valore assoluto; valgono infatti le uguaglianze

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{e} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \qquad \text{per ogni } x \in A, \tag{1.47}$$

dalle quali si possono ricavare

$$f^{\pm}(x) = \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2} \qquad \text{per ogni } x \in A.$$

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, la *funzione caratteristica* di A è quella funzione che, calcolata in un punto, restituisce il valore 1 se il punto appartiene ad A e restituisce il valore 0 se il punto non appartiene A. La notazione comune è χ_A e abbiamo

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Definiamo la funzione *segno*, $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, come quella funzione che restituisce 1 se l'argomento è positivo, -1 se l'argomento è negativo, e 0 se l'argomento è 0, in formule

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1.48}$$

e ne rappresentiamo il grafico nella Figura 1.16. La funzione segno è dispari.

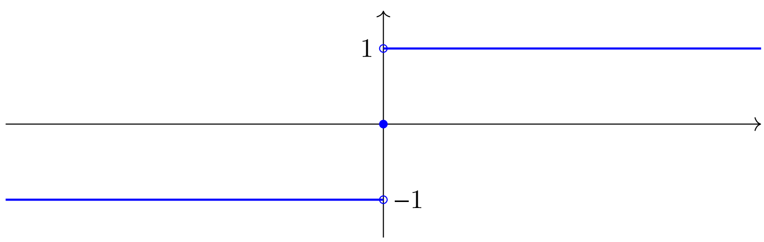


Figura 1.16: Il grafico della funzione $\operatorname{sgn}(x)$.

Chiudiamo la sezione presentando due funzioni *mostro*. La *funzione di Dirichlet* può essere definita come la caratteristica dei numeri irrazionali. Definiamo quindi $f_D\colon \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ come

$$f_D(x) := \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.49}$$

Infine presentiamo la *funzione di Cantor-Vitali*, nota anche con il nome pittoresco di *scala del diavolo* per le curiose proprietà di cui gode (faremo qualche cenno nelle sezioni successive). Si tratta della funzione $f_{CV}\colon [0,1] \to [0,1]$ che si costruisce in maniera iterativa procedendo nel seguente modo: si considera l'intervallo $[0,1]$ e lo si divide in tre parti uguali. Nel terzo centrale si pone la funzione uguale a $1/2$ e si ripete la procedura di divisione ternaria in ciascuno dei due terzi (il primo ed il terzo) rimanenti. Nel nono centrale ricavato dal primo terzo si pone la funzione uguale a $1/4$, nel nono centrale ricavato dal terzo terzo si pone la funzione uguale a $3/4$, e così via. Il grafico è presentato in Figura 1.17.

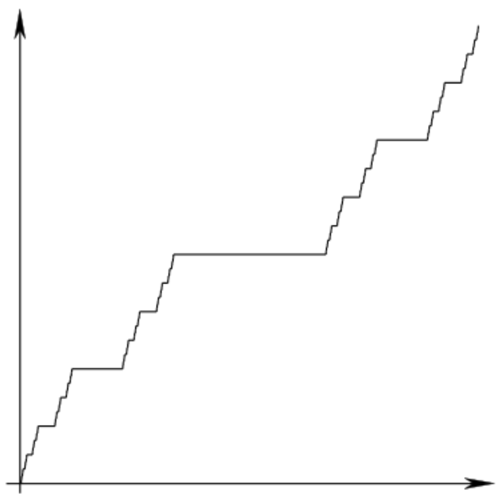


Figura 1.17: Il grafico della funzione di Cantor-Vitali.

Esercizio 1.5.39. Dedurre tutte le proprietà delle funzioni finora presentate.

Esercizio 1.5.40.

1. Risolvere l'equazione $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$.
2. Calcolare le funzioni inverse di $\sinh x$, $\cosh x$ e $\tanh x$.

1.5.3 I numeri complessi

Introduciamo ora l'ultimo insieme numerico che sarà utile per il nostro corso, l'insieme dei *numeri complessi*. Partiamo considerando l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, e definiamo delle operazioni di somma e prodotto in questo insieme. Siccome ogni elemento di $\mathbb{R}^2$ è una coppia (x,y) di numeri con $x, y \in \mathbb{R}$, sarà necessario definire una legge di somma e una di moltiplicazione per le coppie. Definiamo le due operazioni binarie $\oplus\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\odot\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di somma e moltiplicazione nel seguente modo:

$$(a,b) \oplus (c,d) := (a+c, b+d) \quad \text{e} \quad (a,b) \odot (c,d) := (ac - bd, ad + bc). \tag{1.50}$$

Lasciamo come esercizio la dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 1.5.41. *La terna* $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ *è un campo, secondo la Definizione 1.5.4. L'elemento neutro per la somma è la coppia* $(0,0)$*; l'elemento neutro per il prodotto è la coppia* $(1,0)$. □

Osserviamo che, in virtù degli elementi neutri per somma e prodotto, possiamo scrivere ogni elemento $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ come $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. L'elemento $i := (0,1)$ ha la seguente particolarità: elevandolo al quadrato, ovvero moltiplicandolo per se stesso con la legge $\odot$, restituisce il valore -1, com'è facile notare svolgendo il calcolo

$$i^2 = i \odot i = (0,1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -(1,0).$$

Notando che la moltiplicazione per coppie della forma $(a,0)$ segue le regole più usuali delle moltiplicazione tra numeri, e sfruttando quanto osservato sulla decomposizione degli elementi di $\mathbb{R}^2$, chiamiamo $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ l'insieme dei numeri complessi con le operazioni di somma e prodotto definite dalla (1.50) e d'ora in poi lo indichiamo semplicemente con $\mathbb{C}$, e torniamo alle notazioni usuali per somma e prodotto, fermo restando che le leggi (1.50) sono quelle che rendono $\mathbb{C}$ un campo. Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, esso corrisponderà ad una coppia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e si potrà scrivere come $z = (a,b)$ oppure come $z = a + ib$: quest'ultima forma è nota come la *forma algebrica dei numeri complessi*. Il numero $a \in \mathbb{R}$ si dice *parte reale* del numero complesso z e si può indicare con $\Re(z)$; il numero $b \in \mathbb{R}$ si dice *parte immaginaria* del numero complesso z e si può indicare con $\Im(z)$. Il numero i prende il nome di *unità immaginaria*.

Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, di definisce il *coniugato* quel numero che ha la stessa parte reale di z e la parte immaginaria di segno opposto; si indica con $\bar{z}$ e se $z = a + ib$ si ha $\bar{z} = a - ib$. È immediato vedere che

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Si definisce *norma* di un numero complesso $\mathbb{C} \ni z = a + ib$ il valore $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$, che misura, attraverso un'elementare applicazione del teorema di Pitagora, la distanza di z dal numero 0 (ovvero la distanza del punto del piano di coordinate (a,b) dal centro del piano). Un rapido calcolo conferma che $|z|^2 = z\bar{z}$ e che, se $w \in \mathbb{C}$ è un altro numero complesso, $|zw| = |z| \cdot |w|$. Quest'ultima osservazione ci permette di avere tutto ciò che serve per calcolare l'inverso (moltiplicativo) di un numero complesso: infatti, dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vogliamo trovare quel numero $w \in \mathbb{C}$ tale che $zw = 1$. Se poniamo $z = a + ib = (a,b)$ e $w = c + id = (c,d)$, la legge moltiplicativa (1.50) dice che

$$zw = (a + ib)(c + id) = (a,b) \odot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

e questo numero risulta uguale ad $1 = (1,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

e risolvendo il sistema nelle incognite c e d, e notando che deve essere $c^2 + d^2 = |w|^2 = 1/|z|^2 = 1/(a^2 + b^2)$, si ottiene che il reciproco di $z = a + ib$ è

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = w = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Avendo notato che $|z|$ misura la distanza dall'origine, possiamo rappresentare un punto nel piano tramite questa informazione radiale $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e l'informazione angolare data dall'angolo ϑ che il segmento Oz forma con il semiasse positivo delle ascisse. Ricordando la trigonometria elementare, abbiamo dunque le seguenti relazioni

$$\begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

cosicché il numero complesso $z = a + ib$ si può scrivere nella forma

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \tag{1.51}$$

che si chiama *forma trigonometrica* del numero complesso z. I numeri ρ e ϑ si chiamano *modulo* e *anomalia*, rispettivamente, del numero complesso z. Dati ρ e ϑ abbiamo visto come determinare a e b; viceversa, dati a e b, sappiamo come determinare ρ; per determinare ϑ, notiamo che $\tan \vartheta = y/x$. È conveniente introdurre la *formula di Eulero*

$$e^{i\vartheta} := \cos \vartheta + i \sin \vartheta, \tag{1.52}$$

che definisce l'*esponenziale complesso*. È così possibile rappresentare ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ in una terza forma, detta *forma esponenziale*, tramite $z = \rho e^{i\vartheta}$. La forma esponenziale di un numero complesso è la più conveniente per trattare i prodotti (invece che usare la definizione (1.50)): dati $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\varphi}$, abbiamo

$$zw = \rho r e^{i(\vartheta+\varphi)}, \tag{1.53}$$

dove si è sfruttata solamente la proprietà delle potenze. Allora, il prodotto di due numeri complessi è quel numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per anomalia la somma delle anomalie dei numeri complessi che si stanno moltiplicando. Il vantaggio nello sfruttare la forma esponenziale è che si trasformano prodotti in somme[9].

Consideriamo un numero complesso z scritto in forma esponenziale, $z = \rho e^{i\vartheta}$. Se $\rho \neq 0$ (ovvero se $z \neq 0$), si può considerare il numero $s = \log \rho \in \mathbb{R}$ e scrivere $z = e^s e^{i\vartheta} = e^{s+i\vartheta}$, dove si sono sfruttate le proprietà delle potenze. Siccome $s, \vartheta \in \mathbb{R}$, segue $s + i\vartheta \in \mathbb{C}$ e la relazione appena trovata ci sta dicendo che è possibile calcolare l'esponenziale di un numero complesso e che questo è ancora un numero complesso. È dunque possibile estendere la funzione esponenziale e definirla come $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da

$$z \mapsto \exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1.54}$$

L'esponenziale di un numero complesso è il numero complesso che ha per modulo l'esponenziale della parte reale e per anomalia la parte immaginaria del numero complesso dato.

La forma esponenziale dei numeri complessi ben si presta al calcolo delle potenze e delle radici. Applicando la (1.53) con $w = z$ otteniamo

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\vartheta} = \rho^2(\cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta))$$

[9] Questo è lo stesso vantaggio che ha portato all'introduzione dei logaritmi, ed è rispecchiato nelle note proprietà dei logaritmi rispetto a prodotti e divisioni nell'argomento (ed infatti essi si spezzano in somme e differenze dei logaritmi dei singoli fattori: $\log(ab) = \log a + \log b$ e $\log(a/b) = \log a - \log b$).

che si generalizza a

$$z^n = \rho^n e^{in\vartheta} = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.55}$$

La (1.55), che si chiama *formula di De Moivre* e può essere dimostrata per induzione (si veda la Sezione 1.6), è il punto di partenza per il calcolo delle radici n-esime dei numeri complessi. Avendo già visto che $\sqrt{-1} = i \in \mathbb{C}$, ci aspettiamo che sia possibile estrarre la radice di qualunque indice di qualunque numero complesso: qui emerge la necessità algebrica dei numeri complessi, che sarà espressa in tutta la sua potenza nel Teorema 1.5.43.

Affrontiamo ora il problema della ricerca delle radici n-esime di un numero complesso. La formalizzazione del problema è la seguente: dati i numeri complessi $z = \rho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\varphi}$, vogliamo trovare quando w è la radice n-esima di z; ciò corrisponde a trovare i valori di r e φ tali per cui $w^n = z$. Utilizzando la formula di De Moivre (1.55), scriviamo la relazione come

$$\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \rho e^{i\theta} = z = w^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

da cui, uguagliando i moduli e le anomalie e tenendo conto della periodicità delle funzioni trigonometriche, si ottiene

$$\begin{cases} \rho = r^n & \Rightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \vartheta + 2k\pi = n\varphi & \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tenendo conto che se k è multiplo di n interviene la periodicità delle funzioni trigonometriche, ci sono solamente n valori di k che dànno angoli differenti, e sono precisamente i $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Allora, abbiamo scoperto che ad ogni numero complesso z sono associate esattamente n radici n-esime distinte $w_0, \dots, w_{n-1}$ e queste sono determinate da

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{per } k \in \{0, \dots, n-1\}; \tag{1.56}$$

quindi $w_k^n = z$ per ogni $k \in \{0, \dots, n-1\}$. La relazione appena scritta lascia intravedere il seguente fatto: dato un numero complesso $z^* \in \mathbb{C}$, l'equazione $z^n = z^*$ ha esattamente n soluzioni in campo complesso. Siccome $z^n - z^* = 0$ è un'equazione polinomiale in cui si cercano le radici di un polinomio di grado n, possiamo chiederci se ogni polinomio di grado n ammetta n radici in campo complesso. La risposta a questa domanda è affermativa ed è stabilita dal seguente teorema, al quale premettiamo la definizione di zero o radice du una funzione.

Definizione 1.5.42. *Sia f una funzione (definita sui numeri reali o sui numeri complessi). Si dice* zero *o* radice *di f un numero c (appartenente ad $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$) che annulla la funzione, ovvero tale che $f(c) = 0$.*

È noto dalle scuole superiori[10] che se c è una radice di un polinomio $P(z)$, allora esso è divisibile per $z-c$, ovvero esiste un polinomio $Q(z)$ (di grado necessariamente diminuito di uno rispetto a quello di P) tale che $P(z) = Q(z)(z-c)$. È altrettanto noto che non tutti i polinomi su $\mathbb{R}$ hanno radici reali, ma si può dimostrare che tutti i polinomi hanno radici complesse.

[10] Questo risultato, probabilmente noto con il nome di Teorema di Ruffini, sarà poi formalizzato nel corso di Algebra Lineare e Geometria.

Teorema 1.5.43 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ costanti complesse e sia $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ un polinomio di grado n. Allora, esistono esattamente n radici complesse di P, ovvero n soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$ Più precisamente, esistono $\mathbb{N} \ni K \leq n$, $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$ (le radici) e $\mu_1, \dots, \mu_K \in \mathbb{N}$ (dette molteplicità, che soddisfano $\sum_{k=1}^{K} \mu_k = n$) tali che*

$$P(z) = (z - z_1)^{\mu_1} (z - z_2)^{\mu_2} \cdots (z - z_K)^{\mu_K} = \prod_{k=1}^{K} (z - z_k)^{\mu_k}.$$

La dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra fa uso di tecniche più avanzate di quelle disponibili fino a questo momento e verrà presentata nella Sezione 7.3.2. Un corollario importante è il seguente.

Corollario 1.5.44. *Sia $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ un polinomio di grado n a coefficienti reali, ovvero siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora, se P ha radici complesse, esse sono complesse coniugate con la stessa molteplicità. In particolare, se n è dispari, esiste almeno una radice reale di P.*

Esercizi 1.5.45. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Calcolare: (a) $\left[\sqrt{2}(1+i)\right]^{-4}$; (b) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-4}$.
2. Mostrare che $\cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{h=0}^{[n/2]} (-1)^h \binom{n}{2h} (\sin\theta)^{2h} (\cos\theta)^{n-2h}$.
3. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$.
   (a) Mostrare che $\left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right| = 1$.
   (b) Calcolare $\dfrac{z}{\bar{z}}$ e determinare $\operatorname{im}\left(\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)\right)$.
   (c) Esiste un valore di y tale per cui $\dfrac{z}{\bar{z}} = -1$?
4. Siano $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ e $A := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.
   (a) In quale regione di $\mathbb{C}$ vale $\arg(z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi$?

$\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{C} \setminus A$	$\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{C} \setminus \left(A \cup \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0\}\right)$
$\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leq 0\}$	$\boxed{\text{D}}$ $\mathbb{C} \setminus \left(A \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0\}\right)$

   (b) Ricordando che $\arctan(\mathbb{R}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, calcolare per quale regione di $\mathbb{C}$ vale che $\arg(z) = \arctan(\mathbb{R})$.
5. Risolvere l'equazione $(z^2 + |z|^2)^3 + 2iz(z^4 - |z|^4) = 0$.

Esercizi 1.5.46. I seguenti esercizi presentano un grado di difficoltà leggermente superiore (è consigliabile trovare un modo che faccia risparmiare calcoli, invece che affidarsi alla forza bruta).

1. Risolvere il sistema $\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1 \end{cases}$.
2. Trovare le radici complesse dell'equazione $z^2 + iz + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

3. Quali condizioni sui parametri $a, b \in \mathbb{C}$ garantiscono che il sistema

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})(bz - a\bar{z}) = 4 \\ z^2 - |z|^2 = 0 \end{cases}$$

abbia almeno una soluzione complessa?

4. Dato $m \geq 1$ intero, per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} z^m = |z|^m \\ z = \dfrac{1 + it}{1 - it}\bar{z} \end{cases}$$

ha almeno una soluzione non nulla?

5. Risolvere l'equazione $z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0$.

6. Risolvere il sistema $\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$ nelle incognite $z, w \in \mathbb{C}$.

7. Risolvere il sistema $\begin{cases} |z|^3 = (\Re(z))^3 + (\Im(z))^3 \\ |z - i| = |z| \end{cases}$.

8. Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tale che $0 \leq \Im(z) \leq 1/4$, dimostrare che il numero complesso $z^3 - 3z + i$ non è reale.

9. Dimostrare che la funzione esponenziale di variabile complessa $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita in (1.54) estende la funzione esponenziale di variabile reale al campo complesso: in particolare, dimostrare che
   (a) $e^0 = 1$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che $e^z \neq 0$;
   (b) $e^{z+w} = e^z e^w$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;
   (c) $e^{-z} = 1/e^z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
   (d) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

   Che relazione sussiste tra $e^{\bar{z}}$ e e^z?

10. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale $\dfrac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$ e si discuta quando valgono le uguaglianze?

11. Dimostrare che $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.

12. Dato $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$, calcolare $|1 + z^2|^2 + |1 - z^2|^2$.

13. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(-1 + i\sqrt{3})^n + (-1 - i\sqrt{3})^n = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{se } n \text{ è divisibile per } 3, \\ -2^n & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

14. Si determini il numero $z \in \mathbb{C}$ di minimo modulo che risolve l'equazione $|z-i| = |z + 3i + 4|$.

15. Descrivere gli insiemi nel piano complesso determinati dalle equazioni:

$$\frac{|z|}{|z-1|} = 1, \qquad \frac{|z|}{|z-1|} = 2, \qquad |z| + |z-1| = 1, \qquad |z| + |z-1| = 2.$$

16. Dimostrare che se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi per il quale esistono tre interi distinti a, b, c tali che $P(a) = P(b) = P(c) = 5$, allora non esiste un numero intero d tale che $P(d) = 4$.

1.6 Il principio di induzione

Il principio di induzione è uno strumento estremamente potente in matematica. È stato incluso da Giuseppe Peano tra i cinque assiomi che definiscono e caratterizzano l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (si veda la Sezione 7.1.1 per un approfondimento). La formulazione del principio di induzione è la seguente.

Assioma 1.6.1 (Principio di induzione). *Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ un insieme tale che*

(i) $0 \in S$; *(base dell'induzione)*

(ii) se $n \in S$ allora $n + 1 \in S$. *(passo induttivo)*

Allora $S = \mathbb{N}$.

L'insieme S di cui si parla nell'Assioma 1.6.1, a priori, è un qualunque insieme di numeri naturali che contiene, tra gli altri, il numero 0 (richiesta (i)) e gode della proprietà di contenere il numero successivo a qualunque numero esso contenga (richiesta (ii)). Allora l'insieme S non può essere altro che *tutto* l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Infatti,

$$\underbrace{0 \in S}_{(i)} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} 1 \in S \overset{(ii)}{\Longrightarrow} 2 \in S \overset{(ii)}{\Longrightarrow} 3 \in S \quad \cdots \tag{1.57}$$

e ci si convince[11] rapidamente che tutti i numeri naturali devono appartenere ad S.

Una delle applicazioni più affermate del principio di induzione è nella dimostrazione che una proprietà definita sui numeri naturali valga per tutti i numeri. Detta $P(n)$ la proprietà "testata" per il numero naturale $n \in \mathbb{N}$, si tratta di dimostrare che essa è vera *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. Si capisce che verificare a mano che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ è un'impresa titanica – ed impossibile da compiere per esaustione. Serve allora un metodo che garantisca che, con un ragionamento, si possa dedurre la verità di $P(n)$ qualunque sia l'intero n per il quale vogliamo verificare.

Ciò che abbiamo chiamato, più o meno informalmente, *proprietà* può essere formalizzato matematicamente con il concetto di predicato introdotto nella Definizione 1.2.1, a seguito della quale è evidente che per stabilire la verità di un predicato dipendente dalla variabile n è necessario assegnare ad n tutti i possibili valori che può assumere e controllare se le proposizioni così ottenute sono vere. Ci viene in aiuto il principio di induzione!

Proposizione 1.6.2. *Sia $P(n)$ un predicato definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che*

(a) $P(0)$ è vero;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vero implica $P(n+1)$ vero.

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Definiamo l'insieme $S := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vero}\}$. Per la (a), $0 \in S$, perché $P(0)$ è vero, mentre per la (b) abbiamo che se $n \in S$ allora $n + 1 \in S$. È allora evidente che l'insieme S che abbiamo appena definito è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ (e questo è ovvio, perché contiene numeri naturali) che verifica le proprietà (i) e (ii) dell'Assioma 1.6.1. Segue immediatamente che $S = \mathbb{N}$, ovvero che l'insieme dei numeri tali per cui il predicato è vero è tutto l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. □

[11] In matematica, convincersi che un'affermazione sia vera non equivale al fatto che lo sia realmente: il ragionamento qui proposto è, più che altro, una spiegazione del senso del principio di induzione, che, in quanto assioma, viene assunto vero senza necessità di dimostrarlo.

Osservazione 1.6.3. Facciamo subito la seguente osservazione: il principio di induzione Assioma 1.6.1 e la Proposizione 1.6.2 si possono formulare a partire da un certo numero n_0 in poi, non necessariamente da 0. L'utilità pratica di questo fatto è evidente: non è detto che un predicato definito sui numeri naturali sia vero per tutti i numeri naturali; spesso è sufficiente che sia vero a partire da un certo numero naturale n_0 in poi[12]. D'altra parte, la facoltà di essere indulgenti sul fatto che una determinata proprietà possa non essere soddisfatta per una quantità finita di numeri è resa possibile dalla possibilità di *scegliere* chi è l'elemento che chiamiamo 0 nell'Assioma 1.6.1. Supponiamo infatti che $P(n)$ sia un predicato tale che $P(1)$, $P(2)$, $P(4)$ sono falsi. Allora, benché $P(0)$ e $P(3)$ siano veri, il fatto interessante è che $P(n)$ è vero per ogni $n \geq 5$. L'Assioma 1.6.1 si può allora riformulare nel seguente modo.

Assioma 1.6.4 (Variante del principio di induzione)**.** *Sia* $N_0 := \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ *e sia* $S \subseteq N_0$ *un insieme tale che*

(i) $n_0 \in S$; *(base dell'induzione)*
(ii) se $n \in S$ *allora* $n + 1 \in S$. *(passo induttivo)*

Allora $S = N_0$.

La stessa catena di implicazioni (1.57) si può evidentemente replicare in questo caso, partendo da n_0 invece che da 0 e la Proposizione 1.6.2 si può adattare nel seguente modo.

Proposizione 1.6.5. *Sia* $P(n)$ *un predicato definito per ogni naturale* $n \geq n_0$ *tale che*

(a) $P(n_0)$ *è vero;*
(b) per ogni $n \in N_0$, $P(n)$ *vero implica* $P(n + 1)$ *vero.*

Allora $P(n)$ *è vero per ogni* $n \geq n_0$. □

Ci premeva esprimere il principio di induzione nella variante dell'Assioma 1.6.4, perché questo dà la regola generale per applicare il principio di induzione.

Algoritmo 1.6.6. Per dimostrare la verità di un predicato $P(n)$ definito sui numeri naturali tramite il principio di induzione si procede nel seguente modo:

(a) si verifica la base dell'induzione *per il più piccolo intero* n_0 *disponibile*;
(b) si applica il passo induttivo.

Notiamo come i passi (a) e (b) dell'Algoritmo 1.6.6 altro non sono che la verifica delle condizioni (a) e (b) della Proposizione 1.6.5. Accade spesso, quando il predicato $P(n)$ è una formula, che la verifica della base dell'induzione sia semplice da effettuare; l'applicazione del passo induttivo si risolve nel sostituire l'espressione $P(n)$ (che assumiamo vera) nell'espressione $P(n + 1)$ in maniera opportuna, cui seguono qualche ragionamento e qualche operazione cosmetica per ottenere $P(n+1)$ (ovvero la formula con $n + 1$ al posto di n).

[12] Molto spesso il fatto che un predicato possa essere falso per una quantità finita di numeri naturali non è di ostacolo allo studio del problema in oggetto. Quello che è importante è che la proprietà valga a partire da un certo numero in poi: in matematica si dice che la proprietà è soddisfatta *definitivamente*, come vedremo nella Sezione 2.

Esempi 1.6.7. Siccome alcuni esempi possono essere più utili di molte parole, mettiamo in pratica quanto abbiamo imparato finora dimostrando qualche uguaglianza o proprietà con il principio di induzione.

1. Cominciamo con la tanto semplice quanto celebre formula che dice che

$$\text{la somma dei primi } n \text{ numeri naturali vale } \frac{n(n+1)}{2}.$$

Il predicato appena scritto trova la sua formalizzazione matematica nella formula

$$P(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.58}$$

È evidente che, per come è stata scritta la (1.58) essa è valida per ogni $n \geq n_0 = 1$, quindi, per dimostrarla usando l'Algoritmo 1.6.6, dovremo usare la Proposizione 1.6.5 con $n_0 = 1$. Procediamo con ordine

(a) **verifica della base dell'induzione**; verifichiamo $P(1)$. La (1.58), scritta con $n = n_0 = 1$ è

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

La sommatoria a sinistra si riduce al solo elemento $k = 1$, mentre la frazione a destra si semplifica e vale 1. Segue che la formula (1.58) è vera per $n = n_0 = 1$, dunque $P(1)$ è vera.

(b) **applicazione del passo induttivo**: ora assumiamo che $P(n)$ sia vera per un certo $n \geq 1$ (generico), ovvero che l'uguaglianza in (1.58) sia vera, e vediamo come da questa si può dedurre che l'uguaglianza vale anche se al posto di n sostituiamo $n+1$. Dobbiamo dunque dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \tag{1.59}$$

dove in colore abbiamo evidenziato come $P(n+1)$ altro non sia che la formula (1.58) scritta con $n+1$ al posto di n. Come annunciato, questo passo consta di due operazioni: uso del passo induttivo e cosmesi.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{(1.58)}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \tag{1.60}$$

dove, nella prima uguaglianza abbiamo scritto la somma fino a $(n+1)$ come la somma fino ad n alla quale aggiungiamo l'ultimo termine $(n+1)$, nella seconda uguaglianza abbiamo applicato il passo induttivo (i termini in blu sono uguali per la (1.58)) e infine, nella terza uguaglianza, abbiamo effettuato la somma dei due termini (l'operazione cosmetica di cui si parlava). Il primo e l'ultimo termine della catena di uguaglianze in (1.60) sono esattamente l'uguaglianza (1.59) desiderata. Ciò conclude la dimostrazione.

2. Dimostriamo ora un'altra formula per induzione. Affermiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.61}$$
Come sopra, usiamo l'Algoritmo 1.6.6 e la Proposizione 1.6.5 con $n_0 = 1$. Ora, chiaramente, $P(n)$ è l'uguaglianza (1.61).
   (a) **verifica della base dell'induzione**; verifichiamo $P(1)$. La (1.61), scritta con $n = n_0 = 1$ è
   $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6}.$$
   La sommatoria a sinistra si riduce al solo elemento $k = 1$, mentre la frazione a destra si semplifica e vale 1. Segue che la formula (1.61) è vera per $n = n_0 = 1$, dunque $P(1)$ è vera.
   (b) **applicazione del passo induttivo**: ora assumiamo che $P(n)$ sia vera per un certo $n \geq 1$ (generico), ovvero che l'uguaglianza in (1.61) sia vera, e vediamo come da questa si può dedurre che l'uguaglianza vale anche se al posto di n sostituiamo $n+1$. Dobbiamo dunque dimostrare che
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},\end{aligned} \tag{1.62}$$
   dove in colore abbiamo evidenziato come $P(n+1)$ altro non sia che la formula (1.61) scritta con $n+1$ al posto di n. Come annunciato, questo passo consta di due operazioni: uso del passo induttivo e cosmesi.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{(1.61)}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)}{6}[6(n+1) + n(2n+1)] = \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3),\end{aligned} \tag{1.63}$$
   dove, nella prima uguaglianza abbiamo scritto la somma fino a $(n+1)$ come la somma fino ad n alla quale aggiungiamo l'ultimo termine $(n+1)^2$, nella seconda uguaglianza abbiamo applicato il passo induttivo (i termini in blu sono uguali per la (1.61)) e infine, nella terza uguaglianza, abbiamo effettuato la somma dei due termini (l'operazione cosmetica di cui si parlava). Il primo e l'ultimo termine della catena di uguaglianze in (1.63) sono esattamente l'uguaglianza (1.62) desiderata. Ciò conclude la dimostrazione.
3. Come terza applicazione del principio di induzione studiamo ora una proprietà dei numeri interi:
$$P(n) \quad \begin{cases} \text{il numero } 2^{2n} - 1 \text{ è multiplo di } 3, \text{ in simboli, } 3 \mid 2^{2n} - 1, \\ \text{ovvero esiste } k = k(n) \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3k = 2^{2n} - 1. \end{cases} \tag{1.64}$$
Vogliamo dimostrare che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Applichiamo l'Algoritmo 1.6.6 e la Proposizione 1.6.2.

(a) **verifica della base dell'induzione**; verifichiamo $P(0)$. La (1.64), con $n = 0$ diventa
$$2^{2\cdot 0} - 1 \text{ è multiplo di } 3;$$
ma questo nient'altro è che l'affermazione
$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ è multiplo di } 3,$$
e ciò è vero con $k = k(0) = 0$.

(b) **applicazione del passo induttivo**: ora assumiamo che $P(n)$ sia vera per un certo $n \geq 1$ (generico), ovvero che (1.64) sia vera, e vediamo come da questa si può dedurre $P(n+1)$. Dobbiamo dunque dimostrare che
$$2^{2(n+1)} - 1 \text{ è multiplo di } 3. \tag{1.65}$$
Assumendo la (1.64) vera, sappiamo che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $3k = 2^{2n} - 1$; con questa informazione possiamo manipolare
$$2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 4 \cdot (3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1),$$
da cui si evince che effettivamente $2^{2(n+1)} - 1$ è multiplo di 3, cosicché la (1.65) è dimostrata, e con essa la (1.64) per ogni $n \in \mathbb{N}$, come desiderato. In particolare, abbiamo anche scoperto che $k(n+1) = 4k + 1$.

4. Consideriamo ora la seguente espressione
$$a_n := \underbrace{\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ volte}}$$
e dimostriamo che
$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{1.66}$$
Notiamo immediatamente che vale la formula ricorsiva $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ per ogni $n \geq 2$, o equivalentemente
$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} & \text{per ogni } n \geq 1, \\ a_1 = \sqrt{2} \end{cases} \tag{1.67}$$
Con queste informazioni possiamo dimostrare la (1.66). La **base dell'induzione**, ovvero la verifica della (1.66) per $n = 1$ è presto fatta usando la (1.67):
$$a_1 = \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}}.$$
Applichiamo ora il **passo induttivo** sfruttando la prima riga della (1.67) nella quale usiamo l'espressione (1.66) sia per a_n che per a_{n+1}: se otteniamo un'uguaglianza, la formula è dimostrata.
$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \left(2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)^2 = \left(2\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2 + a_n. \end{aligned}$$
La catena di uguaglianze è vera e quindi la formula è dimostrata.

5. Una formula che si presta ad essere dimostrata per induzione è la formula del *binomio di Newton*. Essa permette di calcolare la potenza n-esima di un binomio tramite la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \tag{1.68}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Anche in questo caso, useremo il principio d'induzione nella forma dell'Assioma 1.6.1, per mezzo della Proposizione 1.6.2.

(a) **verifica della base dell'induzione**; Verifichiamo $P(0)$. La (1.68) scritta per $n = 0$ diventa

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k,$$

in cui il membro sinistro vale 1 (qualunque base (non nulla) elevata a 0 dà come risultato 1) e il membro destro è la somma sul solo elemento $k = 0$, che risulta pertanto essere $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, ricordando le proprietà del coefficiente binomiale.

(b) **applicazione del passo induttivo**; assumiamo vero $P(n)$, ovvero la (1.68), e dimostriamo che vale $P(n+1)$, ovvero la (1.68) scritta con $n+1$ al posto di n:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \tag{1.69}$$

Come sempre, dobbiamo manipolare la (1.69) per poter sostituire la (1.68) che stiamo assumendo vera. Possiamo procedere nel seguente modo

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &\overset{(1)}{=} (a+b)(a+b)^n \overset{(2)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^h \\
&\overset{(5)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&\overset{(6)}{=} \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(7)}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(8)}{=} \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\
&\overset{(9)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,
\end{aligned}$$

dove le uguaglianze sono giustificate per le seguenti ragioni: (1) proprietà delle potenze; (2) passo induttivo (e a partire da questa, è solo manipolazione di simboli); (3) proprietà distributiva e proprietà delle potenze; (4) lasciamo la prima sommatoria com'è perché le potenze di a e b sono già come nella (1.69) che vogliamo dimostrare ed effettuiamo il cambio di contatore $h := k + 1$ nella seconda sommatoria: questo comporta l'aggiornamento degli estremi della sommatoria, infatti $k = 0 \Rightarrow h = 1$ e $k = n \Rightarrow h = n + 1$; (5) qui abbiamo semplicemente ribattezzato h come k, siccome i contatori delle sommatorie sono indici muti; is noti che gli estremi della sommatoria ($k = 1$ e $k = n + 1$) **non** sono cambiati; (6) abbiamo isolato il termine $k = 0$ nella prima sommatoria (infatti ora parte da $k = 1$ ed il termine $k = n + 1$ nella seconda sommatoria (infatti ora arriva a $k = n$): così facendo, entrambe le sommatorie hanno gli stessi estremi del contatore e si possono unire ed inoltre le potenze di a e b sono le stesse; (7) abbiamo sfruttato la proprietà del coefficiente binomiale (7.4b); (8) abbiamo sfruttato la proprietà del coefficiente binomiale (7.4c); (9) abbiamo raggruppato tutti i termini nella stessa sommatoria, si noti come sono cambiati gli estremi degli indici. Abbiamo dunque ottenuto la (1.69) e quindi la formula del binomio di Newton (1.68) è dimostrata.

Esercizi 1.6.8. Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze o disuguaglianze (alcune di esse torneranno molto utili in futuro).

1. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
2. *disuguaglianza di Bernoulli*:
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e per ogni } x \geq -1; \tag{1.70}$$
3. per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $2^{n-1} \leq n!$
4. per ogni $n \geq 6$ vale $2^n n! \leq n^n$; osservare che (per ogni $n \geq 6$) essa è equivalente ad avere
$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \tag{1.71a}$$
5. per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $n^n \leq 3^n n!$; osservare che (per ogni $n \in \mathbb{N}$) essa è equivalente ad avere
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3; \tag{1.71b}$$
6. *somma geometrica*: dato $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ vale
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; \tag{1.72}$$
7. *"falso" binomio di Newton*: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a, b > 0$ vale
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \tag{1.73}$$
[Suggerimento: non serve l'induzione, ma si può dimostrare usando la (1.72).]
8. per ogni $n \geq 1$ vale $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$;

9. per ogni $n \geq 1$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$;
10. dimostrare la formula di De Moivre (1.55).
11. dimostrare che se $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione strettamente crescente, allora $g(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.6.9. Ora risolviamo un gioco: (a) sia data una scacchiera quadrata di lato 8 con un ostacolo che occupa una casella 1×1 (si veda la Figura 1.18 a sinistra). È possibile tassellare la scacchiera con tessere a forma di $\llcorner$, che occupano uno spazio di tre quadretti (come in Figura 1.18 a destra)? (b) per quali scacchiere si ha la garanzia di tessellabilità? [suggerimento: usare la (1.64).]

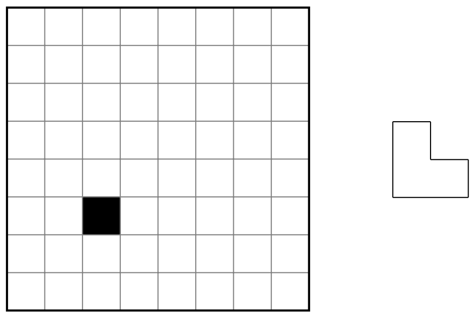


Figura 1.18: La scacchiera con ostacolo (a sinistra) e la tessera prototipo (a destra).

Capitolo 2

Successioni

Affrontiamo in questo capitolo lo studio delle successioni numeriche, ovvero delle funzioni che hanno per dominio i numeri naturali. Presenteremo importanti proprietà delle successioni e introdurremo la nozione di limite, lo strumento per capire come si comporta la successione all'infinito. Impareremo che il comportamento di ogni successione che ammette limite è determinato a meno di un numero finito di termini della successione. Tra i teoremi rilevanti di questo capitolo metteremo in evidenza quelli algebrici e di confronto, che saranno utili per il calcolo esplicito dei limiti, ed altri di natura più astratta, che permetteranno di stabilire importanti proprietà di regolarità di un'ampia classe di successioni, quelle limitate. Infine, daremo una caratterizzazione delle successioni reali convergenti.

2.1 Successioni reali e loro proprietà

Presentiamo, senza ulteriori indugi, la definizione di successione reale.

Definizione 2.1.1. *Si definisce una* successione reale *una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ovvero una legge che associa ad ogni numero naturale un numero reale. In virtù dell'indicizzazione delle immagini della funzione tramite numeri naturali, è notazione comunemente accettata di abbandonare la scrittura generale $f(n)$ e di indicare il valore della successione con il simbolo a_n. La successione come oggetto matematico viene indicata con il simbolo $\{a_n\}$. L'immagine della successione viene di solito indicata con il simbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed è l'insieme*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n, n \in \mathbb{N}\} \tag{2.1}$$

dei valori assunti dai termini della successione al variare di $n \in \mathbb{N}$. Infine, chiamiamo a_n il termine generale *della successione.*

In virtù di quanto annunciato nell'introduzione del capitolo, la scelta dell'indice da cui far partire la successione è arbitraria e non lede la generalità della teoria. Per questo motivo, scegliamo di definire le successioni su tutto l'insieme $\mathbb{N}$ per non appesantire ulteriormente la notazione. I termini della successione possono essere elencati

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

È chiaro dalla definizione che una successione ha come immagine un sottoinsieme (discreto) di $\mathbb{R}$. Le proprietà di una successione discendono o dal comportamento dei termini a_n rispetto all'indice n oppure dalle proprietà dell'insieme immagine $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Rispetto all'indice n avremo proprietà che riguardano l'andamento della successione, ovvero proprietà di monotonia (si veda la Definizione 1.5.32). Rispetto all'immagine A avremo proprietà di limitatezza o meno (si veda la Definizione 1.5.15). Vale la pena di scrivere esplicitamente queste due definizioni per le successioni.

Definizione 2.1.2. *Si dice che la successione $\{a_n\}$ è*

- (debolmente) crescente *se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- strettamente crescente *se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- (debolmente) decrescente *se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- strettamente decrescente *se $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

Una successione che verifica una delle proprietà sopra enunciate si dice (strettamente) monotona.

Definizione 2.1.3. *Sia $\{a_n\}$ una successione e sia A l'insieme immagine definito in* (2.1)*. Si dice che la successione $\{a_n\}$ è*

- superiormente limitata *se esiste un maggiorante per A, ovvero se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- inferiormente limitata *se esiste un minorante per A, ovvero se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
- limitata *se è sia superiormente limitata che inferiormente limitata;*
- superiormente illimitata *se non esiste un maggiorante per A, ovvero se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$;*
- inferiormente illimitata *se non esiste un minorante per A, ovvero se per ogni $m \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < m$.*

La seguente proposizione è una conseguenza immediata della Definizione 2.1.3.

Proposizione 2.1.4. *Una successione $\{a_n\}$ è limitata se e solo se esiste $K > 0$ tale che $|a_n| \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata: per la Definizione 2.1.3 esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, definendo $K := \max\{|m|, |M|\}$, si ha

$$-K \leq -|m| \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq K \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e si conclude ricordando la Proposizione 1.5.23. Viceversa, se esiste $K > 0$ tale che $|a_n| \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, sempre per la Proposizione 1.5.23 abbiamo $-K \leq a_n \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $-K$ è un minorante per A e K è un maggiorante per A, quindi la successione è limitata. □

Esempi 2.1.5. Sono esempi di successioni

- $a_n = (-1)^n$, che vale 1 se n è pari, -1 se n è dispari. È una successione limitata (si può prendere $K = 1$ nella Proposizione 2.1.4), non monotona. Si può anche scrivere come $a_n = \cos(n\pi)$.
- $a_n = n^2$. Questa è una successione monotona strettamente crescente, è limitata inferiormente (si può prendere $m = 0$, o ogni $m < 0$ nella Definizione 2.1.3) e illimitata superiormente.

- $a_n = 1/n$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Questa è strettamente decrescente, limitata superiormente (si può prendere ogni $M \leq 1$ nella Definizione 2.1.3) e inferiormente (si può prendere ogni $m \leq 0$ nella Definizione 2.1.3); è dunque limitata (si può prendere ogni $K \geq 1$ nella Proposizione 2.1.4).

Da ogni successione è possibile creare altre successioni considerando solo alcuni termini di essa; ciò corrisponde a selezionare in qualche modo un sottoinsieme B dell'insieme immagine A definito nella (2.1). Possono accadere due cose: B contiene l'immagine di un numero finito di indici n, ovvero $\#\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\} < \infty$; oppure B contiene l'immagine di un numero infinito di indici n, ovvero $\#\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\} = \infty$. Nel primo caso, solo un numero finito di termini della successione sono stati selezionati nel sottoinsieme B e non sarà interessante per noi; nel secondo caso gli elementi di B sono infiniti ed è possibile vederli come l'immagine di una successione. Questa operazione è formalizzata nel concetto di *successione estratta* o *sottosuccessione*.

Definizione 2.1.6 (sottosuccessione). *Sia $\{a_n\}$ una successione, sia $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente e si ponga $n_k := g(k)$. La successione $\{a_{n_k}\}$ (il cui indice è k, si badi!) si dice* sottosuccessione *della successione $\{a_n\}$.*

Notiamo che la funzione g opera tra indici e permette di selezionare i termini della successione $\{a_n\}$ che costituiranno la sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$. Mostriamo l'idea di come si costruisce una sottosuccessione con l'esempio seguente, in cui mostriamo come vengono estratti i primi termini: sia $\{a_n\}$ una successione e sia $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione tale che

$$\begin{aligned} n_0 &= g(0) = 0, \quad n_1 = g(1) = 1, \quad n_2 = g(2) = 3, \quad n_3 = g(3) = 5, \quad n_4 = g(4) = 50, \\ n_5 &= g(5) = 175, \quad n_6 = g(6) = 2000, \quad n_7 = g(7) = 2001, \quad n_8 = g(8) = 2021, \dots \end{aligned}$$

La sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ avrà come primi otto elementi i seguenti

$$\begin{aligned} a_{n_0} &= a_0, \quad a_{n_1} = a_1, \quad a_{n_2} = a_3, \quad a_{n_3} = a_5, \quad a_{n_4} = a_{50} \\ a_{n_5} &= a_{175}, \quad a_{n_6} = a_{2000}, \quad a_{n_7} = a_{2001}, \quad a_{n_8} = a_{2021}, \dots \end{aligned}$$

Altri esempi di estrazione di sottosuccessioni sono i seguenti:

- $a_{n_k} = a_{2k}$: la sottosuccessione è composta dai termini della successione che hanno posto pari;
- $a_{n_k} = a_{2k+1}$: la sottosuccessione è composta dai termini della successione che hanno posto dispari;
- $a_{n_k} = a_{7k}$: la sottosuccessione è composta dai termini della successione che hanno posto nei multipli di 7.

Abbiamo già fatto menzione, nell'introduzione al capitolo, che le proprietà interessanti delle successioni sono quelle che sono verificate per grandi valori dell'indice n, ciò significa che è possibile non considerare che cosa succede per un numero finito di indici e preoccuparsi solo dei rimanenti. Per poter scrivere le proprietà valide in questo contesto, occorre formalizzare questa idea in termini matematici. La definizione che daremo di questo fatto ha il vantaggio di essere esprimibile con un avverbio, che renderà gli enunciati più agili da scrivere.

Definizione 2.1.7. *Si dice che un predicato $P(n)$ è verificato* definitivamente *se è verificato eccezion fatta per un numero finito di valori di n, ovvero se*

$$\text{esiste } \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } P(n) \text{ è verificato per ogni } n > \nu. \tag{2.2}$$

L'avverbio *definitivamente* e la (2.2) sono sinonimi: ogniqualvolta si troverà la parola *definitivamente* in un enunciato, essa corrisponderà alla scrittura matematica (2.2). Diamo la seguente definizione, che corrisponde al predicato $P(n)$ definito da "$a_n \leq b_n$". Benché esso sia un predicato come molti altri, sarà utile tenerlo a mente perché ce ne serviremo per stabilire alcune proprietà delle successioni.

Definizione 2.1.8. *Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si dice che $a_n \leq b_n$ definitivamente se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n$ per ogni $n > \nu$.*

Esempi 2.1.9. Mostriamo come è possibile passare da "definitivamente" alla (2.2).

- La successione $a_n = (-1)^n$ è definitivamente ≤ 1: infatti la (2.2) è verificata con $\nu = 0$.
- La successione $a_n = 1/n$ è definitivamente $< 1/100$: infatti la (2.2) è verificata quando $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, ovvero quando $n > 100$, e quindi basta prendere $\nu = 100$.
- La successione $n^2 + n + 1$ è definitivamente ≥ 10000. Per trovare il numero ν per cui la (2.2) è verificata occorre risolvere la disequazione di secondo grado $n^2 + n + 1 \geq 10000$. Si trova $\nu = 100$.
- La successione $n^2 + n + 1$ è definitivamente maggiore della successione $\frac{100n}{n+1}$. Risolvendo la disequazione, si ottiene che $\nu = 9$ rende vera la (2.2).

La verifica di una proprietà in forma definitiva passa alle sottosuccessioni, com'è facile intuire. Inoltre, se due (o più proprietà) sono soddisfatte in forma definitiva, allora esse sono verificate contemporaneamente in forma definitiva. Questi fatti sono il contenuto del seguente teorema.

Teorema 2.1.10. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) se $\{a_n\}$ è una successione che verifica una proprietà P definitivamente, ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ estratta da $\{a_n\}$ verifica P definitivamente;

(ii) siano $J \in \mathbb{N}$ e $\{a_n^{(1)}\}, \dots, \{a_n^{(J)}\}$ successioni che verificano i predicati $P_1, \dots, P_J$, rispettivamente, definitivamente. Allora, l'insieme degli indici n per i quali le proprietà $P_1, \dots, P_J$ non sono soddisfatte contemporaneamente è finito.

Dimostrazione. La proprietà (i) segue dalla Definizione 2.1.7 e dalla Definizione 2.1.6 di sottosuccessione: se $\{a_n\}$ verifica P definitivamente, per la (2.2) esiste un numero $\nu \in \mathbb{N}$ tale che a_n verifica P per ogni $n > \nu$. Sia ora $\{a_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}$. Siccome la funzione g che definisce $\{a_{n_k}\}$ è strettamente crescente, sicuramente esiste $\kappa \in \mathbb{N}$ tale che $n_\kappa > \nu$ (si confronti con l'Esercizio 1.6.8-11). Allora $\{a_{n_k}\}$ verifica P per ogni $k > \kappa$, ovvero definitivamente.
Per dimostrare la proprietà (ii) denotiamo con $\nu_1, \dots, \nu_J$ gli indici che rendono vera la (2.2) per ciascuna coppia $(\{a_n^{(j)}\}, P_j)$ di successione e predicato. Sia $\nu := \max\{\nu_1, \dots, \nu_J\}$: allora ciascuna successione $\{a_n^{(j)}\}$ soddisfa il predicato P_j per ogni $n > \nu$, ovvero le condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente solo per un numero finito di indici. □

La dimostrazione della proprietà (ii) è essenzialmente ottenuta applicando le leggi di De Morgan: la richiesta che le successioni $\{a_n^{(j)}\}$ verifichino il predicato P_j contemporaneamente corrisponde a determinare l'intersezione degli insiemi di indici I_j ($j = 1, \dots, J$) per i quali la Definizione 2.1.7 è soddisfatta: ciò è la stessa cosa che trovare il complementare dell'unione di indici per i quali le proprietà P_j non sono soddisfatte: abbiamo dunque

$$I_1 \cap \cdots \cap I_J = \left(I_1^c \cup \cdots \cup I_J^c\right)^c.$$

2.2 Limiti di successioni

In questa sezione presentiamo la teoria dei limiti per successioni reali. È questa una parte molto importante poiché permetterà, tramite il successivo Teorema 3.1.15 di caratterizzare l'esistenza del limite per le funzioni tramite una caratterizzazione sequenziale. L'essenza del concetto di limite è quella di stabilire se per grandi valori di n i valori assunti dal termine generale dalla successione $\{a_n\}$ si stabilizzano attorno ad un valore $\ell \in \mathbb{R}$, diventano arbitrariamente grandi o piccoli, o non hanno nessuna regolarità.

In tutto quello che segue, la scrittura $n \to \infty$ si legge "n tende all'infinito".

Definizione 2.2.1 (limite di una successione)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione reale.*

1. *Si dice che la successione $\{a_n\}$ è* infinitesima *per $n \to \infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta che $|a_n| < \varepsilon$ definitivamente, ovvero se*

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n > \nu_\varepsilon \text{ risulta } |a_n| < \varepsilon. \tag{2.3a}$$

2. *Si dice che la successione $\{a_n\}$* converge *(o* tende*) ad $\ell \in \mathbb{R}$ per $n \to \infty$ se la successione $\{a_n - \ell\}$ è infinitesima, ovvero se*

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n > \nu_\varepsilon \text{ risulta } |a_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.3b}$$

3. *Si dice che la successione $\{a_n\}$* diverge *(o* tende*) a*
   - *$+\infty$ per $n \to \infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n > M$ definitivamente, ovvero se*

$$\text{per ogni } M \in \mathbb{R} \text{ esiste } \nu_M \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n > \nu_M \text{ risulta } a_n > M. \tag{2.3c}$$

   - *$-\infty$ per $n \to \infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n < M$ definitivamente, ovvero se*

$$\text{per ogni } M \in \mathbb{R} \text{ esiste } \nu_M \in \mathbb{N} \text{ tale che per ogni } n > \nu_M \text{ risulta } a_n < M. \tag{2.3d}$$

Se $\{a_n\}$ soddisfa la (2.3b) con un numero $\ell \in \mathbb{R}$ (si noti che se $\ell = 0$, allora siamo nel caso della (2.3a)), si scrive $a_n \to \ell$ per $n \to \infty$, oppure $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$; se $\{a_n\}$ soddisfa la (2.3c) o la (2.3d), si scrive $a_n \to +\infty$ o $a_n \to -\infty$, rispettivamente, per $n \to \infty$, oppure $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, rispettivamente.

Definizione 2.2.2 (regolarità di una successione)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Si dice che $\{a_n\}$ è* regolare *se essa ammette limite in una qualunque delle forme (2.3) della Definizione 2.2.1. In caso contrario si dice che è non regolare o che non ammette limite.*

Esempi 2.2.3. La Definizione 2.2.1 di limite di una successione fornisce la regola per determinare se data una successione e dato un numero $\ell \in \mathbb{R}$ la successione converge ad ℓ, o se diverge a $\pm\infty$. Ciò che possiamo fare al momento è la verifica della definizione di limite.

- La successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 1/n$ è regolare e tende a zero per $n \to \infty$. Scelto $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, dobbiamo determinare se esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che la (2.3a) sia soddisfatta, ovvero se esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|1/n| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu_\varepsilon$. Risolvendo la disequazione, otteniamo che deve essere $n > 1/\varepsilon$ e dunque la (2.3a) è soddisfatta con $\nu_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$, dove $[1/\varepsilon]$ è la parte intera di $1/\varepsilon$, che sappiamo esistere in virtù del Lemma 1.5.26.

- La successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = 100n/(n+1)$ è regolare e tende a $\ell = 100$ per $n \to \infty$. Scelto $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, dobbiamo determinare se esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che la (2.3b) sia soddisfatta, ovvero se esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - 100| = \left|\frac{100n}{n+1} - 100\right| = \left|-\frac{100}{n+1}\right| = \frac{100}{n+1} < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu_\varepsilon$. Abbiamo

$$\frac{100}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100 - n\varepsilon - \varepsilon}{n+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100 - n\varepsilon - \varepsilon < 0 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{100-\varepsilon}{\varepsilon}$$

e la (2.3b) è soddisfatta prendendo $\nu_\varepsilon = [(100-\varepsilon)/\varepsilon] + 1$.
- La successione $\{a_n\}$ definita da $-n^2$ è regolare e tende a $-\infty$ per $n \to \infty$. Scelto $M \in \mathbb{R}$ ad arbitrio, dobbiamo determinare se esiste $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che la (2.3d) sia soddisfatta, ovvero se esiste $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < M$ per ogni $n > \nu_M$ Risolvendo la disequazione, deve essere $-n^2 < M$, ovvero $n^2 > -M$. Siccome non è restrittivo prendere $M < 0$, basta scegliere $\nu_M = \left[\sqrt{-M}\right] + 1$ affinché la (2.3d) sia soddisfatta.

La Definizione 2.2.1 di limite nelle sue declinazioni (2.3) può essere unificata in un'unica scrittura ricorrendo al linguaggio degli intorni, che abbiamo definito nella Definizione 1.5.20.

Definizione 2.2.4 (limite di una successione – definizione topologica)**.** *Sia $\{a_n\}$ una successione reale e sia $L \in \overline{\mathbb{R}}$. La successione $\{a_n\}$ tende ad L per $n \to \infty$ se*

$$\text{per ogni } V \in \mathcal{I}_L \text{ esiste } U_V \in \mathcal{I}_{+\infty} \text{ tale che per ogni } n \in U_V \cap \mathbb{N} \text{ si ha } a_n \in V. \tag{2.4}$$

Dalla definizione di limite seguono immediatamente i seguenti risultati.

Teorema 2.2.5. *Ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di una successione regolare $\{a_n\}$ ha lo stesso limite della successione $\{a_n\}$.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 2.1.10(i). □

La proprietà stabilita dal teorema può risultare ovvia. La potenza del teorema si vede leggendolo al contrario: se una successione $\{a_n\}$ è tale che lungo due sottosuccessioni distinte $\{a_{n_k}\}$ e $\{a'_{n_k}\}$ si ottengono due limiti distinti, essa non è regolare – e quindi non ammette limite. È il caso della successione $a_n = \cos(n\pi)$: la sottosuccessione estratta considerando i termini di posto pari è la successione costante 1, mentre la sottosuccessione estratta considerando gli elementi di posto dispari è la successione costante -1. Segue che $\{\cos(n\pi)\}$ non ha limite.

Il seguente teorema è di importanza fondamentale.

Teorema 2.2.6 (unicità del limite)**.** *Il limite di una successione convergente è unico. In altre parole, se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \ell$ per $n \to \infty$, allora tale ℓ è unico.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo e mostriamo che se esistessero due limiti distinti incorreremmo in una contraddizione. Siano dunque $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ con $\ell_1 \neq \ell_2$ tali che

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \ell_2 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dalla Definizione 2.2.1 abbiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$ deve risultare che $|a_n - \ell_1| < \varepsilon$ definitivamente e $|a_n - \ell_2| < \varepsilon$ definitivamente. Ma allora, le due condizioni sono soddisfatte contemporaneamente definitivamente per il Teorema 2.1.10(ii). Allora possiamo stimare

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

grazie alla disuguaglianza triangolare. Invocando ora il Corollario 1.5.30, concludiamo che deve essere $\ell_1 = \ell_2$, in contrasto con l'ipotesi che fossero diversi. Il teorema è dunque dimostrato. □

Teorema 2.2.7. *Sia $\{a_n\}$ una successione convergente. Allora essa è definitivamente limitata, e quindi limitata.*

Dimostrazione. Siccome $\{a_n\}$ è convergente, esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che la (2.3b) è verificata. In particolare, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu_\varepsilon$. Ciò equivale a dire che $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n > \nu_\varepsilon$, ovvero definitivamente. Per mostrare che in realtà tutta la successione è limitata, consideriamo i primi ν_ε termini e li confrontiamo: definendo

$$m := \min\{a_1, \dots, a_{\nu_\varepsilon}, \ell - \varepsilon\} \qquad \text{e} \qquad M := \max\{a_1, \dots, a_{\nu_\varepsilon}, \ell + \varepsilon\}$$

risulta che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ed il teorema è dimostrato. □

Accanto ai risultati di impronta più teorica appena enunciati, è utile stabilire risultati di natura più quantitativa in vista del calcolo dei limiti e dei rapporti tra successioni diverse e tra i loro limiti. Possiamo contare sia su risultati di confronto sia su risultati di natura algebrica.

Teorema 2.2.8 (di confronto I)**.** *Siano date tre successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ le prime due delle quali siano convergenti ad a e b, rispettivamente; ovvero si abbia*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b. \tag{2.5}$$

Allora valgono i seguenti fatti.

1. *Se $a < b$, si ha che $a_n < b_n$ definitivamente (analogamente scambiando $<$ con $>$).*
2. *Se $a < k$, si ha che $a_n < k$ definitivamente (analogamente scambiando $<$ con $>$).*
3. *(teorema della permanenza del segno) Se il limite di una successione ha un segno, allora definitivamente la successione ha lo stesso segno: se $a < 0$, allora $a_n < 0$ definitivamente; se $a > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente.*
4. *Se $a_n \leq b_n$ definitivamente allora $a \leq b$.*
5. *(teorema dei carabinieri) Se $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente e se $a = b$, allora anche $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ esiste e vale a.*

Dimostrazione. La dimostrazione è abbastanza semplice e si basa sulla Definizione 2.2.1 di limite e sull'arbitrarietà della scelta del parametro $\varepsilon > 0$.

1. La tesi equivale a stabilire che $b_n - a_n > 0$ definitivamente. Usando la (2.3b), fissato $\varepsilon > 0$ definitivamente vale che $a_n < a + \varepsilon$ e $b_n > b - \varepsilon$. Sottraendo membro a membro abbiamo la catena di disuguaglianze

$$b_n - a_n > b - \varepsilon - a - \varepsilon = b - a - 2\varepsilon > 0 \quad \text{se } \varepsilon < \frac{b-a}{2}.$$

2. La tesi è immediata applicando la parte 1. scegliendo come $\{b_n\}$ la successione costante $b_n = k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. La tesi è immediata applicando la parte 2. scegliendo $k = 0$.
4. Supponiamo per assurdo che sia $a > b$. Allora, per la parte 1. si ha che $a_n > b_n$ definitivamente, ma questo è in contrasto con l'ipotesi.
5. Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente si ha che $a - \varepsilon < a_n$ e $b_n < a + \varepsilon$, dalla (2.3b). Sfruttando l'ipotesi, abbiamo che definitivamente

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

e questa è la definizione di limite per la successione $\{c_n\}$.

Il teorema è completamente dimostrato. □

Osservazione 2.2.9. Facciamo le seguenti osservazioni:

- Nella parte 4. del Teorema 2.2.8 la stessa tesi si ottiene se si assume $a_n < b_n$ definitivamente e ciò implica che le disuguaglianze strette si rilassano a disuguaglianze larghe al limite. Un esempio semplice è dato da $a_n = 1/n^2$ e $b_n = 1/n$. Per ogni $n > 1$ si ha che $a_n < b_n$, ma al limite abbiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.
- Sottolineiamo che la parte (matematicamente) importante del Teorema 2.2.8-5 è la regolarità della successione $\{c_n\}$, ovvero che essendo controllata dall'alto e dal basso da successioni convergenti allo stesso limite implica che essa non può oscillare. Poi, necessariamente, il suo limite sarà il valore comune dei limiti delle successioni che la controllano.

Presentiamo ora i teoremi di natura algebrica, che saranno molto utili per il calcolo dei limiti.

Teorema 2.2.10 (teoremi algebrici I)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti e siano $a, b \in \mathbb{R}$ come in (2.5). Allora valgono i seguenti fatti.*

1. *La successione $\{|a_n|\}$ dei valori assoluti è convergente ed ha per limite $|a|$, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|. \tag{2.6a}$$

2. *La successione $\{a_n + b_n\}$ è convergente ed ha per limite $a + b$, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.6b}$$

3. *La successione $\{a_n \cdot b_n\}$ è convergente ed ha per limite ab, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big). \tag{2.6c}$$

4. *Se $b \neq 0$, la successione $\{a_n/b_n\}$ è convergente ed ha per limite a/b, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.6d}$$

Dimostrazione. Anche in questo caso, le dimostrazioni seguono utilizzando la definizione di limite e le disuguaglianze triangolari (si veda la Proposizione 1.5.24).

1. Applicando la disuguaglianza triangolare inversa e la definizione di limite a $a_n \to a$, otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon$$

definitivamente, e la (2.6a) è dimostrata.

2. Grazie alle (2.5) e alla disuguaglianza triangolare, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

definitivamente, e la (2.6b) è dimostrata.

3. Grazie alle (2.5) e alla disuguaglianza triangolare, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \le (M + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

definitivamente, e la (2.6c) è dimostrata. Si noti che abbiamo applicato il Teorema 2.2.7 e la Proposizione 2.1.4 alla successione $\{a_n\}$.

4. Grazie all'ipotesi $b \neq 0$ ed al punto 1. si ha che $|b_n| \to |b| > 0$ e per il Teorema 2.2.8-3 della permanenza del segno si ha $|b_n| > M > 0$ definitivamente. Allora, grazie alle (2.5) e alla disuguaglianza triangolare, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n b|} = \frac{|a_n b - ab + ab - ab_n|}{|b_n| \cdot |b|} \\ &\le \frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|}{M|b|} \le \frac{|a| + |b|}{M|b|}\varepsilon \end{aligned}$$

definitivamente, e la (2.6d) è dimostrata.

Il teorema è completamente dimostrato. □

Il seguente corollario contiene ulteriori regole algebriche sui limiti.

Corollario 2.2.11 (teoremi algebrici II)**.** *Nelle stesse ipotesi del Teorema 2.2.10, le successioni $\{ca_n\}$ e $\{a_n - b_n\}$ sono convergenti ed hanno per limiti ca e $a - b$, rispettivamente, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.6e}$$

Se inoltre $b \neq 0$, allora anche la successione $\{1/b_n\}$ è convergente ed ha per limite $1/b$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{2.6f}$$

Dimostrazione. La prima delle (2.6e) segue dalla (2.6c) scegliendo $b_n = c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; la seconda delle (2.6e) segue dalla (2.6b) e dalla (2.6c) scegliendo $b_n = -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La (2.6f) segue dalla (2.6d) scegliendo $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Le formule (2.6) forniscono gli strumenti di calcolo per i limiti di successioni nel caso finito, ovvero quando entrambe le successioni coinvolte sono convergenti. È immediato vedere che le (2.6b) e (2.6c) si estendono ad un numero finito di addendi o fattori. L'estensione più importante delle formule (2.6) si ha quando almeno uno dei due limiti è infinito. Vedremo che in questo caso occorre prestare attenzione perché non sempre sarà possibile scambiare l'operazione di limite e le operazioni algebriche (cosa che è stabilita nel Teorema 2.2.10 e nel Corollario 2.2.11 nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$).

Teorema 2.2.12 (di confronto II)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali.*

1. *Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n < b_n$ definitivamente.*
2. *Se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, allora $a_n < b_n$ definitivamente.*
3. *Si supponga che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora,*
   (i) se $a_n \to +\infty$ anche $b_n \to +\infty$;
   (ii) se $b_n \to -\infty$ anche $a_n \to -\infty$.

Dimostrazione. Anche in questo caso, come nella dimostrazione del Teorema 2.2.8, si sfrutta la Definizione 2.2.1 di limite.

1. Per il Teorema 2.2.7, la successione $\{a_n\}$ è (definitivamente) limitata, mentre per la (2.3c) la successione $\{b_n\}$ non lo è.
2. Per il Teorema 2.2.7, la successione $\{b_n\}$ è (definitivamente) limitata, mentre per la (2.3d) la successione $\{a_n\}$ non lo è.
3. (i) Si supponga che $a_n \to +\infty$. Per la (2.3c), per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n > M$ definitivamente. Ma allora abbiamo $b_n \geq a_n > M$ definitivamente e sempre per la (2.3c) questo equivale a dire che $b_n \to +\infty$. Il caso (ii) si tratta in maniera analoga, usando la (2.3d).

Il teorema è completamente dimostrato. □

Data una successione reale $\{a_n\}$, scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+ \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0^-$$

per indicare che $\{a_n\}$ è infinitesima e definitivamente maggiore o minore, rispettivamente, di zero.

Teorema 2.2.13 (teoremi algebrici III)**.** *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali.*

1. *(i) Se $a_n \to +\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata inferiormente, allora la successione $\{a_n + b_n\}$ è regolare ed ha limite $+\infty$, ovvero*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty. \tag{2.7a}$$

   (ii) Se $a_n \to -\infty$ e $\{b_n\}$ è limitata superiormente, allora la successione $\{a_n + b_n\}$ è regolare ed ha limite $-\infty$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty. \tag{2.7b}$$

2. *Se $a_n \to \pm\infty$ e esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che che $b_n \geq N > 0$ oppure $b_n \leq N < 0$ definitivamente, allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty \qquad o \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty, \tag{2.7c}$$

   rispettivamente.

3. *Se $\{a_n\}$ è infinitesima e $\{b_n\}$ è limitata, allora $\{a_nb_n\}$ è regolare, in particolare infinitesima, ovvero*
$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0. \tag{2.7d}$$
4. *(i) Se $a_n \to \pm\infty$, allora si ha $a_n \neq 0$ definitivamente e la successione $\{1/a_n\}$ è infinitesima, ovvero*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0^{\pm}. \tag{2.7e}$$
(ii) Se $a_n \to 0^{\pm}$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, allora la successione $\{1/a_n\}$ è divergente, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \pm\infty. \tag{2.7f}$$
5. *Se $a_n \to \pm\infty$ e esiste $m > 0$ tale che*
(i) $0 < b_n < m$ definitivamente, allora la successione $\{a_n/b_n\}$ è regolare e diverge a $\pm\infty$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty; \tag{2.7g}$$
(ii) $-m < b_n < 0$ definitivamente, allora la successione $\{a_n/b_n\}$ è regolare e diverge a $\mp\infty$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mp\infty. \tag{2.7h}$$
6. *Se $\{a_n\}$ è infinitesima e esiste $m > 0$ tale che $|b_n| > m$ definitivamente allora la successione $\{a_n/b_n\}$ è regolare, in particolare infinitesima, ovvero*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \tag{2.7i}$$
7. *Se $\{a_n\}$ è infinitesima ($a_n \to 0^{\pm}$) e definitivamente $a_n \neq 0$ e se esiste $m > 0$ tale che*
(i) $b_n > m$ definitivamente allora la successione $\{b_n/a_n\}$ è regolare, in particolare divergente a $\pm\infty$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \pm\infty; \tag{2.7j}$$
(ii) $b_n < -m$ definitivamente allora la successione $\{b_n/a_n\}$ è regolare, in particolare divergente a $\mp\infty$, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \mp\infty. \tag{2.7k}$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema è la seguente.

1. Ricordando la Definizione 2.1.3, esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $b_n > K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la (2.3c), esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > M$ definitivamente. Allora $a_n + b_n > M + K$ definitivamente, ovvero $a_n + b_n \to +\infty$ e la (2.7a) è dimostrata; la (2.7b) si dimostra in modo analogo.
2. Dimostriamo la (2.7c) nel caso in cui $a_n \to +\infty$ e $b_n \geq N > 0$ definitivamente (gli altri casi si trattano in maniera analoga prestando attenzione ai segni). Per la (2.3c), esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > M$ definitivamente. Allora $a_nb_n > MN$ definitivamente ovvero $a_nb_n \to +\infty$, come volevamo dimostrare.
3. Dobbiamo valutare
$$|a_nb_n - 0| = |a_nb_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M|a_n| < M\varepsilon$$

definitivamente, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato; questo segue dalla limitatezza di $\{b_n\}$ (per la Proposizione 2.1.3) e dal fatto che $\{a_n\}$ è infinitesima (si veda la (2.3a)). La (2.7d) segue.

4. (i) Consideriamo il caso in cui $a_n \to +\infty$, l'altro essendo analogo. Per la (2.3c), per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n > M$ definitivamente. In particolare, per ogni $M > 0$ abbiamo $a_n > M > 0$ definitivamente e dunque la successione $\{1/a_n\}$ è definitivamente positiva. Inoltre
$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}$$
che dimostra che $\{1/a_n\}$ è infinitesima secondo la (2.3a). La (2.7e) segue.
(ii) Consideriamo il caso in cui $a_n \to 0^+$, l'altro essendo analogo. Abbiamo che $0 < a_n < \varepsilon$ definitivamente per ogni $\varepsilon > 0$ fissato. Allora, passando ai reciproci nella seconda disuguaglianza, si ha $1/a_n > 1/\varepsilon$, ma per la (2.3c) questo significa che $1/a_n \to +\infty$ e la (2.7f) è dimostrata.
5. Dimostriamo la (2.7g), la (2.7h) essendo analoga, nel caso in cui $a_n \to +\infty$. Per la (2.3c), per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n > M$ definitivamente. L'ipotesi su $\{b_n\}$ dà $1/b_n > 1/m$, e dunque $a_n/b_n > M/m$ definitivamente, ovvero diverge a $+\infty$, sempre per la (2.3c).
6. Osserviamo che risulta $b_n \neq 0$ definitivamente e, per le ipotesi su $\{b_n\}$ risulta $1/|b_n| < 1/m$, ovvero la successione $\{1/|b_n|\}$ è definitivamente limitata. Siamo dunque nel caso 3, poiché
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} < \frac{\varepsilon}{m}$$
e si conclude che $\{a_n/b_n\}$ è infinitesima per la (2.3a).
7. Dimostriamo la (2.7j), la (2.7k) essendo analoga, nel caso in cui $a_n \to 0^+$. Per la (2.3a), per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $a_n < \varepsilon$ definitivamente e dunque $1/a_n > 1/\varepsilon$ definitivamente. Allora, $b_n/a_n > m/\varepsilon$ definitivamente e dunque, per la (2.3c) la successione $\{b_n/a_n\}$ diverge a $+\infty$ e la (2.7j) è dimostrata.

Il teorema è completamente dimostrato. □

Osservazione 2.2.14. Il Teorema 2.2.13 non si applica ai seguenti casi:

1. Nel punto 1 resta escluso il caso in cui $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$, nel quale non si può concludere. Ciò significa che è possibile trovare successioni divergenti a $+\infty$ e a $-\infty$ tali che la loro somma non abbia un comportamento ben definito. Se prendiamo $a_n = n + \ell$ e $b_n = -n$, abbiamo $a_b + b_n = \ell \to \ell$ per $n \to \infty$; se prendiamo $a_n = n^2$ e $b_n = -n$, abbiamo $a_n + b_n = n^2 - n \to +\infty$ per $n \to \infty$; infine, se prendiamo $a_n = n + (-1)^n$ e $b_n = -n$, abbiamo $a_n + b_n = (-1)^n$, che non è regolare.
2. Nel punto 2 resta escluso il caso in cui $a_n \to \pm\infty$ e $b_n \to 0$, nel quale non si può concludere. I controesempi sono: $a_n = n$ e $b_n = 1/n$, sicché $a_n b_n = 1 \to 1$ per $n \to \infty$; $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, che dànno $a_n b_n = n \to +\infty$ per $n \to \infty$; $a_n = n$ e $b_n = (-1)^n/n$, che dànno $a_n b_n = (-1)^n$ che non è regolare per $n \to \infty$.
3. Nel punto 5 resta escluso il caso in cui $a_n \to \pm\infty$ e $b_n \to \pm\infty$, nel quale non si può concludere. I controesempi al punto 2 trattano anche questo caso,

prendendo $b_n = n$ e $b_n = (-1)^n n$ (caso, quest'ultimo più delicato perché la successione b_n non diverge di per sé, ma diverge in valore assoluto, ovvero è tale che $|b_n| \to +\infty$).

4. Nei punti 6 e 7 restano esclusi i casi in cui sia $\{a_n\}$ che $\{b_n\}$ sono infinitesime. Quanto osservato ai punti precedenti fornisce spunti per i controesempi, per dimostrare che il rapporto tra due successioni infinitesime può avere qualunque limite.

Le formule (2.7) dànno le regole per l'algebra in $\overline{\mathbb{R}}$, che raccogliamo qui

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty, \quad (+\infty)+\ell=+\infty, \quad (-\infty)+\ell=-\infty,$$
$$(+\infty)\cdot\ell=\operatorname{sgn}(\ell)\cdot\infty \ \ (\text{con } \ell\neq 0), \quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty, \quad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty,$$
$$\frac{\ell}{0}=\operatorname{sgn}\ell\cdot\infty \ \ (\text{con } \ell\neq 0), \quad \frac{\ell}{\infty}=0, \quad \frac{\pm\infty}{\ell}=\pm\operatorname{sgn}(\ell)\cdot\infty.$$

Alla luce dell'Osservazione 2.2.14, non è possibile sciogliere in modo univoco i casi seguenti

$$[+\infty-\infty], \quad [0\cdot\infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

che pertanto vengono detti *forme indeterminate* e vanno trattate caso per caso ogniqualvolta compaiono in un limite.

2.2.1 Limiti notevoli

Raccogliamo alcuni esempi di calcolo di limiti e poniamo l'attenzione sul fatto che essi contengono regole di calcolo preziose. Nello svolgimento degli esercizi faremo menzione di quali risultati giustificano i passaggi.

1. Il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+a}{n+b}$ si presenta come forma indeterminata del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Tuttavia essa può essere facilmente sciolta procedendo come segue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+a}{n+b}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}=\frac{1+a\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+b\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1,$$

dove abbiamo raccolto e semplificato n nella prima uguaglianza e poi applicato il Teorema 2.2.10-4 (formula (2.6d)), il Teorema 2.2.10-2 (formula (2.6b)), il Corollario 2.2.11 (formula (2.6e)) – o anche il Teorema 2.2.13-3 (formula (2.7d)) – e tutti i passaggi sono giustificati perché non generano mai nessuna forma indeterminata.

Negli esempi successivi, invitiamo il lettore a verificare quali sono i teoremi che vengono applicati per giustificare ogni passaggio, come appena fatto.

2. Il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an+b}{cn+d}$ si presenta come forma indeterminata del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ se $c\neq 0$, ma può essere sciolto nel seguente modo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(1+\frac{b}{an}\right)}{c\left(1+\frac{d}{cn}\right)}=\frac{a}{c}.$$

3. È possibile generalizzare il risultato al limite del rapporto di due polinomi qualunque. Siano $P(n) = a_0 n^{d_P} + a_1 n^{d_P - 1} + \cdots + a_{d_P - 1} n + a_{d_P}$ un polinomio di grado d_P e $Q(n) = b_0 n^{d_Q} + b_1 n^{d_Q - 1} + \cdots + b_{d_Q - 1} n + b_{d_Q}$ un polinomio di grado d_Q. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0/b_0) \cdot \infty & \text{se } d_P > d_Q, \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } d_P = d_Q, \\ 0 & \text{se } d_P < d_Q. \end{cases}$$

4. Dato $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > 0, \\ 1 & \text{se } k = 0, \\ 0^+ & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Infatti, se $k = 0$, si ha che $n^k = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi si sta studiando il limite della successione costante 1. Se $k > 0$, applicando il Teorema 2.2.13-2 (formula (2.7c)) $k - 1$ volte, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)^k = +\infty;$$

se $k < 0$, grazie al Corollario 2.2.11 (formula (2.6f)), al Teorema 2.2.13-2 e al Teorema 2.2.13-4(i) (formula (2.7e)), abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k}} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\right)^{-k}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

5. Dato $a \in (-1, +\infty) \setminus \{1\}$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Infatti, possiamo ragionare nel seguente modo: se $a > 1$, esiste $b > 0$ tale che $a = 1 + b$. Allora, usando la disuguaglianza di Bernoulli (1.70) abbiamo

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$$

e siccome il membro di destra diverge a $+\infty$ per $n \to \infty$, per il Teorema 2.2.12-3(i), anche $a^n \to +\infty$ per $n \to \infty$. Se $a = 0$, si ha $a^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non c'è nulla da dimostrare; se $0 < |a| < 1$, allora $1/|a| > 1$ e dunque

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n} = 0.$$

6. Per ogni $a > 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1.$$

Infatti, supponendo che $a > 1$ e ponendo $\sqrt[n]{a} = 1 + b_n$, per un certo $b_n > 0$, abbiamo

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{a-1}{n} \geq b_n > 0$$

e per il Teorema 2.2.13-3 $(a-1)/n \to 0$ per $n \to \infty$ e dunque per il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri anche $b_n \to 0$ per $n \to \infty$. Ne segue che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + b_n) = 1.$$

Se $a = 1$ non c'è nulla da dimostrare, mentre se $a \in (0, 1)$ allora $1/a > 1$ e si applica il passo precedente.

7. *Il fattoriale tende ad infinito più velocemente degli esponenziali*: questo è rappresentato dal fatto che per ogni $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Vogliamo dimostrare che il termine generale della successione di cui stiamo calcolando il limite è infinitesimo. Per la proprietà archimedea Lemma 1.5.25 esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $N > a$. Scriviamo allora $n = N + m$ (è sicuramente possibile farlo se n è grande a sufficienza) e definiamo $b := a/N$ (e osserviamo che $b < 1$). Allora abbiamo

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^{N+m}}{(N+m)!} = \frac{a^N}{N!} \underbrace{\frac{a^m}{(N+1)(N+2)\cdots(n-1)n}}_{m \text{ fattori}} < \frac{a^N}{N!}\left(\frac{a}{N}\right)^m = \frac{a^N}{N!} b^m$$

ma siccome N è fisso, necessariamente $m \to \infty$ quando $n \to \infty$ e il membro destro della catena di disuguaglianze sopra risulta pertanto infinitesimo. Allora per il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri anche $a^n/n!$ è infinitesimo, come desiderato.

8. Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| \leq 1, \\ +\infty & \text{se } a > 1, \\ \nexists & \text{se } a < -1. \end{cases}$$

Se $|a| < 1$, per la (2.8), $\{a^n\}$ è infinitesima e dunque il risultato segue dal Teorema 2.2.13-6. Se $|a| = 1$, abbiamo

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

e il risultato segue per il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri. Se $a > 1$, possiamo porre $a = 1 + b$, per un certo $b > 0$. Allora, ricordando la formula del binomio di Newton (1.68),

$$a^n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k \geq \binom{n}{2} b^2 = \frac{n(n-1)}{2} b^2.$$

Allora,

$$\frac{a^n}{n} \geq \frac{n-1}{2} b^2$$

e il Teorema 2.2.12-3(i) garantisce che anche $a^n/n \to +\infty$ per $n \to \infty$. Infine, se $a < -1$ abbiamo $|a^n/n| = |a|^n/n \to +\infty$ per $n \to \infty$, ma il cambio di segno rende la successione oscillante e quindi non regolare.

9. *Rapporti tra esponenziali e polinomi.* Il risultato del punto precedente si generalizza se al denominatore ci sono potenze di n: dati $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } |a| \le 1, \\ +\infty & \text{se } a > 1, \\ \nexists & \text{se } a < -1. \end{cases} \tag{2.9}$$

10. *Limiti sul seno.* I seguenti limiti esistono e valgono

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0, \tag{2.10a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = \sin\ell \quad \text{se } a_n \to \ell \text{ per } n \to \infty, \tag{2.10b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{se } a_n \to 0 \text{ per } n \to \infty. \tag{2.10c}$$

Dimostriamo il seguente fatto:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ si ha } |\sin x| \le |x|. \tag{2.11}$$

Iniziamo considerando il caso $x \in [0, \pi/2]$. In questo, siccome l'ampiezza dell'arco AP è x e questa è maggiore della corda AP, che a sua volta (per la disuguaglianza triangolare), è maggiore del cateto PH, abbiamo $\sin x \le x$ (si veda la Figura 2.1(a)); essendo nel primo quadrante ed essendo $x \ge 0$, la disuguaglianza in (2.11) è dimostrata. Consideriamo ora $x \ge \pi/2$ e usiamo la limitatezza del seno per concludere

$$|\sin x| \le \frac{\pi}{2} \le x = |x|,$$

che dimostra la disuguaglianza in (2.11) anche in questo caso. Resta da trattare il caso $x \le 0$, per il quale sfruttiamo la disparità del seno e la Proposizione 1.5.24-2:

$$|\sin x| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \le |-x| = |x|,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza in (2.11) appena dimostrata per $x \ge 0$. Allora la (2.11) risulta completamente dimostrata.
La (2.10a) segue immediatamente dalla (2.11) e dal Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri applicato alla catena di disuguaglianze

$$0 \le \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

e si conclude per la (2.3a). Sia ora $\{a_n\}$ una successione reale convergente ad $\ell \in \mathbb{R}$. Usando la formula di prostaferesi (A.11d), la limitatezza del coseno e la (2.11), abbiamo

$$0 \le |\sin a_n - \sin\ell| = \left|2\sin\left(\frac{a_n-\ell}{2}\right)\cos\left(\frac{a_n+\ell}{2}\right)\right| \le 2\left|\frac{a_n-\ell}{2}\right| = |a_n - \ell|$$

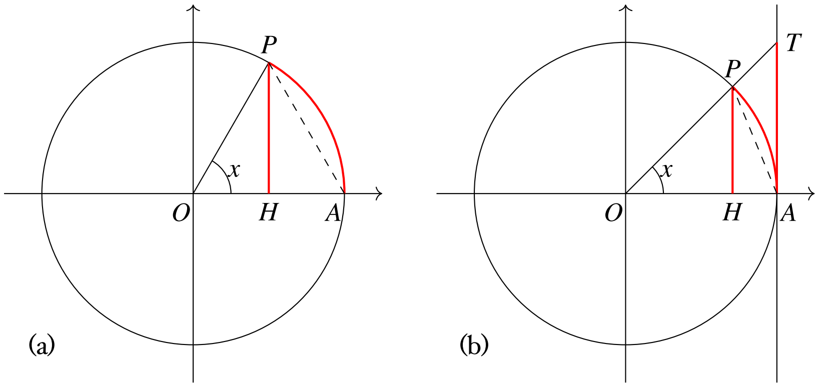


Figura 2.1: (a) Confronto tra arco e il suo seno. (b) Confronto tra arco, il suo seno e la sua tangente.

dalla quale, applicando ancora una volta il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri, si conclude che la (2.10b) vale. Per dimostrare la (2.10c), facendo riferimento alla Figura 2.1(b) e confrontando le lunghezze dei tratti in rosso com un ragionamento analogo al precedente (PH minore della corda AP che è minore dell'arco AP che è minore del segmento AT) abbiamo la catena di disuguaglianze $\sin x \leq x \leq \tan x$ per ogni $x \in (0, \pi/2)$, da cui, dividendo per $\sin x$ e prendendo i reciproci, si ottiene

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{2.12}$$

Per trattare il caso $x \in (-\pi/2, 0)$, si fa ricorso alla parità del coseno ed alla disparità del seno: se $x < 0$ allora $-x > 0$ e possiamo applicare il risultato appena ottenuto

$$\cos x = \cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

e concludere che la (2.12) vale anche in questo caso, e dunque per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$. Prendendo ora $x = a_n$ nella (2.12) e il limite per $n \to \infty$, applicando il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri, si dimostra la (2.10c).

11. *Limiti sul coseno*. I seguenti limiti esistono e valgono

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2} \quad \text{se } a_n \to 0 \text{ per } n \to \infty, \tag{2.13a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos a_n = \cos \ell \quad \text{se } a_n \to \ell \text{ per } n \to \infty. \tag{2.13b}$$

Moltiplicando e dividendo per $1 + \cos a_n$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2},$$

dove abbiamo sfruttato la (2.10c) e il Teorema 2.2.13-2 (formula (2.7c)): segue la (2.13a). La (2.13b) si dimostra in maniera del tutto analoga alla (2.10b).

Combinando la (2.10c) e la (2.13b) si ottiene anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan a_n}{a_n} = 1 \quad \text{se } a_n \to 0 \text{ per } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Esercizi 2.2.15. Si calcolino i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$; (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1}$; (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2+2}$; (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$; (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n}$; (f) $\lim_{n\to\infty} n^n$; (g) $\lim_{n\to\infty} (\sin n - n)$; (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{6\cos n - n}{2\tan(1/n) + 2n}$; (i) $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n^2+n}$; (l) $\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$; (m) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n})$; (n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right)$; (o) $\lim_{n\to\infty} n\sin(\pi n)$; (p) $\lim_{n\to\infty} (n^{\log n} - n^2)$.

2.2.2 Successioni monotone e altri imiti notevoli

Dopo aver visto alcuni limiti notevoli ed aver imparato a maneggiarli, torniamo ad esporre qualche risultato di natura più teorica, che sarà utile sia per il calcolo di altri limiti notevoli che per la sezione successiva.

Teorema 2.2.16. *Sia $\{a_n\}$ una successione monotona. Allora essa è regolare, ovvero ammette limite. In particolare, la successione converge (ovvero il limite è finito) se la successione è limitata inferiormente o superiormente a seconda che sia decrescente o crescente, rispettivamente; la successione diverge (ovvero il limite è infinito) se non è limitata inferiormente o superiormente a seconda che sia decrescente o crescente, rispettivamente.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione $\{a_n\}$ crescente, il caso di $\{a_n\}$ decrescente essendo analogo. Supponiamo che $\{a_n\}$ non sia superiormente limitata e dimostriamo che diverge a $+\infty$. Ricordando la Definizone 2.1.3, per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\nu_M} > M$. Ricordando ora la Definizone 2.1.2 di monotonia, possiamo certamente dire che per ogni $n > \nu_M$ si ha $a_n \geq a_{\nu_M}$. Abbiamo dunque che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\nu_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu_M$ vale

$$a_n \geq a_{\nu_M} > M,$$

ma per la (2.3c) questa è la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Supponiamo ora che $\{a_n\}$ sia superiormente limitata: esiste dunque $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\ell = \sup\{a_n\}$ e si ha $a_n \leq \ell$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, dalla Definizione 1.5.13 di estremo superiore, punto (ii), si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν_ε tale che $\ell - \varepsilon < a_{\nu_\varepsilon}$. Ricordando ancora la Definizone 2.1.2 di monotonia, possiamo certamente dire che per ogni $n > \nu_\varepsilon$ si ha $a_n \geq a_{\nu_\varepsilon}$. Abbiamo dunque che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu_\varepsilon$ vale

$$\ell - \varepsilon < a_{\nu_\varepsilon} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

dove la penultima disuguaglianza segue dalla definizione di estremo superiore e l'ultima è ovvia. Per la (2.3b) questa è la definizione di $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Il teorema è dimostrato. □

Corollario 2.2.17. *Se $\{a_n\}$ è una successione crescente e superiormente limitata, allora essa è regolare e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}.$$

Se $\{a_n\}$ è una successione decrescente e inferiormente limitata, allora essa è regolare e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}.$$

Dimostrazione. Segue automaticamente dalla dimostrazione del Teorema 2.2.16. □

Esempio 2.2.18. Come applicazione del Teorema 2.2.16 e del Corollario 2.2.17 studiamo la successione

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

I primi termini sono

$$a_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = 0,58\bar{3};$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} = 0,61\bar{6};$$

$$a_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4+k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} \approx 0,635;$$

$$a_5 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{5+k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} \approx 0,646.$$

Si inizia ad intravedere una certa regolarità. La successione sembra essere crescente. Se così fosse, il Teorema 2.2.16 garantirebbe che il limite esiste. Se inoltre dimostrassimo che è limitata, allora sapremmo anche che il limite è finito ed è dato da $\sup\{a_n\}$. Effettivamente è questo il caso: dimostriamo dunque questi due fatti.

Per quanto riguarda la limitatezza, notiamo che è possibile stimare le frazioni dentro la sommatoria: la frazione più piccola che possiamo avere è quella il cui denominatore è il più grande, e viceversa per la frazione più grande. È facile vedere che

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+k} \le \frac{1}{n+1} \qquad \text{per ogni } k \in \{1,\dots,n\}$$

e dunque abbiamo che

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \le a_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

dimostrando la limitatezza della successione $\{a_n\}$.

Osserviamo che, se si avesse $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$, allora potremmo invocare il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri e concludere che $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2$, ma siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 > 1/2$, evidentemente non si può percorrere questa strada.

Studiamo la monotonia della successione. Scrivendo i primi cinque termini della successione, sono stati evidenziati in blu i contributi comuni a due termini consecutivi. Questo ci aiuta ad intuire che la differenza tra a_{n+1} e a_n è data dalle ultime due frazioni di a_{n+1} meno la prima di a_n. Infatti abbiamo

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n},$$
$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Denotando ora con B la somma dei termini in blu, abbiamo $a_n = \frac{1}{n+1} + B$ e $a_{n+1} = B + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$ e pertanto

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

che prova che la successione $\{a_n\}$ è monotona strettamente crescente. Applicando il Teorema 2.2.16 ed il Corollario 2.2.17, possiamo affermare che esiste finito il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}. \tag{2.15}$$

Il calcolo esplicito del limite (il cui valore, possiamo anticiparlo, è $\log 2 \approx 0,693$) richiede tuttavia altri strumenti e lo presenteremo nel Capitolo 5.

Esempio 2.2.19 (Il numero e)**.** Il numero e, la base dei logaritmi naturali può essere definito in molti modi. Ne presentiamo qui uno legato al limite della successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{2.16}$$

che ci apprestiamo a studiare. Facciamo la seguente considerazione, dove usiamo la formula (1.68) del binomio di Newton

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

da cui

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Confrontando le espressioni di a_n e a_{n+1} ci rendiamo conto che nella sommatoria c'è lo stesso numero di fattori, ma quelli di a_{n+1} sono maggiori di quelli di a_n; inoltre, in a_{n+1} c'è un addendo in più nella sommatoria. Possiamo dunque inferire che $a_n < a_{n+1}$, ovvero che la successione $\{a_n\}$ è monotona strettamente crescente.

Dimostriamo ora che è limitata superiormente (la limitatezza inferiore segue dalla monotonia: $a_n > a_1 = 2$ per ogni $n \geq 1$), sfruttando il fatto che ogni fattore in parentesi nell'ultima riga in (2.17) è minore di 1. Allora

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 3 \cdots n}_{n-1 \text{ fattori}}} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula (1.72) per sommare i primi n termini di una somma geometrica. Segue che la successione in (2.16) ammette limite e questo è un numero reale compreso tra 2 e 3.

Definizione 2.2.20. *Si definisce*

$$e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.18}$$

Osserviamo che il limite in (2.18) è il prototipo di un'altra forma indeterminata, quella del tipo $[1^\infty]$. Dalla (2.18) discendono alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{da cui} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1 \quad \text{se } a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0; \tag{2.19a}$$

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1) = 1 \quad \text{da cui} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \quad \text{se } a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0; \tag{2.19b}$$

Per dimostrare il primo limite nella (2.19a) si osservi che, usando le proprietà dei logaritmi, il termine generale della successione si può scrivere come $\log a_n$, dove a_n è la successione della (2.16). Nell'Esempio 2.2.19 abbiamo dimostrato che a_n è strettamente crescente e questo ci permette di dire che $a_n < e$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove e è il limite in (2.18). Siccome il logaritmo è una funzione monotona, anche la successione $\{\log a_n\}$ delle immagini è strettamente crescente e sarà limitata dall'alto da $\log e = 1$. Inoltre, siccome $e = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, si avrà che

$$1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \log a_n = \lim_{n\to\infty} \log a_n = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

come annunciato. Scrivendo il termine generale come $\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}$, e sostituendo ad $1/n$ una qualunque successione infinitesima, otteniamo il secondo limite in (2.19a).

Per dimostrare il primo limite nella (2.19b), osserviamo che possiamo scrivere la successione della quale stiamo prendendo il limite come $n(e^{1/n}-1) = \dfrac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}$ e ora chiamiamo $a_n \coloneqq e^{1/n} - 1$ e notiamo che è infinitesima per $n \to \infty$. Inoltre, dalla definizione di a_n possiamo ricavare $\frac{1}{n} = \log(1 + a_n)$. Applicando la (2.6f), grazie al secondo limite in (2.19a), otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log(1+a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\log(1+a_n)}{a_n}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n}} = 1.$$

La deduzione del secondo limite nella (2.19b) si fa come prima, sostituendo a $1/n$ il termine generale di una qualunque successione $\{a_n\}$ infinitesima.

Esercizi 2.2.21. Si calcolino i seguenti limiti: (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)^{2n}$.

2.2.3 Caratterizzazione delle successioni convergenti

Questa sezione è dedicata alla caratterizzazione delle successioni convergenti: introducendo il concetto di successione di Cauchy, vedremo che questo è ciò che caratterizza la convergenza. Per arrivare a stabilire questo importantissimo risultato, occorrerà dimostrare anche il Teorema di Bolzano–Weierstrass (♥) che sancisce che una successione limitata ammette una sottosuccessione convergente (e pertanto regolare).

Definizione 2.2.22 (successione di Cauchy)**.** *La successione reale* $\{a_n\}$ *si dice* successione di Cauchy *se*

$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tale che per ogni } m, n > \nu_\varepsilon,\ |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

o, equivalentemente,

$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tale che per ogni } n > \nu_\varepsilon \textit{ e } k \in \mathbb{N},\ |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Le condizioni (2.20) e (2.21) esprimono la stessa proprietà: una successione di Cauchy è una successione tale per cui, definitivamente, i termini della successione sono arbitrariamente vicini tra loro. Le successioni di Cauchy sono tutte e sole quelle convergenti, come stabilito dal seguente teorema.

Teorema 2.2.23. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione reale* $\{a_n\}$ *sia convergente è che essa sia di Cauchy.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la condizione è necessaria: sia $\{a_n\}$ una successione reale convergente e sia $\ell \in \mathbb{R}$ il suo limite. Ciò significa che, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu_\varepsilon$ si ha $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Se ora $m > \nu_\varepsilon$ è un altro indice, si ha pure $|a_m - \ell| < \varepsilon$. Allora, invocando la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - a_m| \le |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

che è la (2.20) e quindi $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy.

La dimostrazione dell'implicazione inversa richiede più preparazione e la presenteremo dopo avere introdotto i risultati preliminari necessari. □

Il primo risultato preparatorio che introduciamo è il seguente teorema sulla possibilità di estrarre sottosuccessioni convergenti da successioni limitate.

Teorema 2.2.24 (Bolzano–Weierstrass (♥)). *Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione reale limitata e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ la sua immagine. Per ipotesi, A è limitato, ovvero esistono un minorante α_0 ed un maggiorante β_0 per A. Chiamiamo $A_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ l'intervallo che contiene l'immagine A. Ora si possono verificare due situazioni:

- A è finito, ovvero contiene solamente un numero finito di punti. Questo significa che c'è solamente un numero finito di valori assunti dalla successione $\{a_n\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$. Deve essere $A = \{x_1, \dots, x_P\}$ e, necessariamente, esiste almeno $\bar{p} \in \{1, \dots, P\}$ tale che $x_{\bar{p}}$ è l'immagine di infiniti indici. La sottosuccessione costante $a_{n_k} = x_{\bar{p}}$ è convergente e il teorema è dimostrato.
- A è infinito, ovvero contiene infiniti elementi. Mostriamo, nel resto della dimostrazione, che anche in questo secondo caso si può estrarre una sottosuccessione convergente.

Non essendo restrittivo supporre $\alpha_0 < \beta_0$, consideriamo il punto medio $\mu_1 := (\alpha_0 + \beta_0)/2$ e inneschiamo un processo di bisezione: siano $A_0' = [\alpha_0, \mu_1]$ e $A_0'' = [\mu_1, \beta_0]$ i due intervalli ottenuti bisecando A_0. Necessariamente, almeno uno di questi due intervalli deve contenere un numero infinito di elementi della successione, ovvero, almeno uno dei due insiemi $A \cap A_0'$ e $A \cap A_0''$ contiene infiniti elementi. Infatti, se così non fosse e se entrambi contenessero un numero finito di elementi di A, si avrebbe che l'insieme A è finito, in contraddizione con l'ipotesi. Rinominiamo $A_1 := [\alpha_1, \beta_1]$ l'intervallo tra A_0' e A_0'' che contiene infiniti elementi di A (e se entrambi hanno questa caratteristica, allora si può scegliere uno dei due a piacere). Inoltre, sia $I_1 := \{m \in \mathbb{N} : a_m \in A_1\}$ l'insieme degli indici le cui immagini cadono in A_1. Evidentemente $I_0 = \mathbb{N}$ e I_1 contiene infiniti elementi.

Abbiamo così costruito le prime due istanze

$$P(0) : \begin{cases} \alpha_0 < \beta_0, \\ A_0 = [\alpha_0, \beta_0], \quad |A_0| = \beta_0 - \alpha_0, \\ I_0 = \{m \in \mathbb{N} : a_m \in A_0\}, \quad \#(I_0) = \infty, \end{cases}$$

$$P(1) : \begin{cases} \alpha_0 \le \alpha_1 < \beta_1 \le \beta_0, \\ A_1 = [\alpha_1, \beta_1], \quad |A_1| = \beta_1 - \alpha_1 = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2}, \\ I_1 = \{m \in \mathbb{N} : a_m \in A_1\}, \quad \#(I_1) = \infty, \end{cases}$$

del predicato

$$P(n) : \begin{cases} \alpha_0 \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_n < \beta_n \le \cdots \le \beta_1 \le \beta_0, \\ A_n = [\alpha_n, \beta_n], \quad |A_n| = \beta_n - \alpha_n = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}, \\ I_n = \{m \in \mathbb{N} : a_m \in A_n\}, \quad \#(I_n) = \infty, \end{cases} \tag{2.22}$$

in cui abbiamo indicato con $|J| := b - a$ l'ampiezza dell'intervallo $J = [a, b]$. Per il principio di induzione, la struttura di $P(n)$ si mantiene ad ogni passo $n \mapsto n + 1$ procedendo per bisezione. Infatti, dati gli elementi di $P(n)$, si costruiscono il punto medio $\mu_{n+1} := (\alpha_n + \beta_n)/2$ e gli intervalli $A_n' = [\alpha_n, \mu_{n+1}]$ e $A_n'' = [\mu_{n+1}, \beta_n]$. Ragionando come prima, almeno uno di questi contiene infiniti elementi della successione e verrà rinominato come $A_{n+1} := [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ sotto la condizione che l'insieme $I_{n+1} := \{m \in \mathbb{N} : a_m \in A_{n+1}\}$ sia tale che $\#(I_{n+1}) = \infty$. La. creazione di A_{n+1} non fa diminuire l'estremo sinistro, ovvero $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ né aumentare l'estremo destro, ovvero $\beta_{n+1} \leq \beta_n$. Inoltre, l'ampiezza di A_{n+1} è la metà di quella di A_n, ovvero $|A_{n+1}| = \frac{1}{2}|A_n| = \frac{1}{2}\frac{\beta_0-\alpha_0}{2^n} = (\beta_0 - \alpha_0)/2^{n+1}$. Queste sono le caratteristiche che definiscono $P(n+1)$.

Siccome $P(n)$ gode delle proprietà della (2.22) per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo costruito i seguenti oggetti:

- la successione $\{\alpha_n\}$ di estremi sinistri degli intervalli A_n: essa è crescente e limitata dall'alto (β_0 è un maggiorante). Per il Teorema 2.2.16 e il Corollario 2.2.17 si ha $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup\{\alpha_n\} =: \alpha$;
- la successione $\{\beta_n\}$ di estremi destri degli intervalli A_n: essa è decrescente e limitata dal basso (α_0 è un minorante). Per il Teorema 2.2.16 e il Corollario 2.2.17 si ha $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf\{\beta_n\} =: \beta$;
- la successione di intervalli non vuoti A_n che contengono infiniti elementi della successione $\{a_n\}$. Le successione delle loro ampiezze ha come termine generale $|A_n| = \beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n$: in virtù del Teorema 2.2.13-4, tale successione è infinitesima, ovvero

  $$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} \beta_n - \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} = 0,$$

  da cui segue che $\alpha = \beta =: \ell$.

Ora possiamo costruire la sottosuccessione convergente. Costruiamo la funzione strettamente crescente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che seleziona gli indici $k \mapsto g(k) = n_k$. Sia n_1 il primo indice tale per cui $a_{n_1} \in A_1 = [\alpha_1, \beta_1]$; sia poi $n_2 > n_1$ il primo indice tale che $a_{n_2} \in A_2 = [\alpha_2, \beta_2]$, e così via costruendo $n_k > n_{k-1}$ il primo indice tale per cui $a_{n_k} \in A_k = [\alpha_k, \beta_k]$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ma allora abbiamo

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$$

e, siccome $\alpha_k \to \ell$ e $\beta_k \to \ell$, il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri implica che la successione $\{a_{n_k}\}$ è regolare e $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$, come si voleva dimostrare. □

Lemma 2.2.25. *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy: ciò significa che vale la (2.20). Teniamo ora fisso l'indice m e osserviamo che la (2.20) si può scrivere come

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$$

e ciò significa che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente limitata. Con lo stesso ragionamento della dimostrazione del Teorema 2.2.7, si ottiene che $\{a_n\}$ è tutta limitata, come richiesto. □

Lemma 2.2.26. *Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che converge ad un limite ℓ. Allora tutta la successione $\{a_n\}$ converge ad ℓ.*

Dimostrazione. La condizione di convergenza (2.3b) per la sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ si scrive come: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\kappa_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > \kappa_\varepsilon$ si ha $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. Ricordando la definizione (2.20), esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > \nu_\varepsilon$ si ha

$|a_n - a_m| < \varepsilon$. Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale che $n_k > \max\{\nu_\varepsilon, n_{\kappa_\varepsilon}\}$, si ha, usando la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

che è la definizione (2.3b) di convergenza per la successione $\{a_n\}$. □

Conclusione della dimostrazione del Teorema 2.2.23. Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy. Per il Lemma 2.2.25 essa è limitata e dunque per il Teorema 2.2.24 di Bolzano–Weierstrass essa ammette una sottosuccessione convergente. Allora, per il Lemma 2.2.26 tutta la successione $\{a_n\}$ è convergente. Il Teorema 2.2.23 è così completamente dimostrato. □

Esercizi 2.2.27. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Mostrare che la successione di termine generale $a_n = \dfrac{n}{n+1} \sin\left(\dfrac{n\pi}{10}\right)$ è limitata e non ammette limite.
2. Stabilire se la successione di termine generale $a_n = \left(1+\dfrac{\sin(n\pi/2)}{n}\right)^n$ ha limite.
3. Calcolare i seguenti limiti
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.
4. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che
   (a) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$;
   (b) $|b_n| < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (se sono vere dimostrarlo, se sono false esibire un controesempio):
   (a) esiste $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$;
   (b) esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $2a_n - b_n > 0$ per ogni $n > \nu$;
   (c) esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $a_n + b_n > 0$ per ogni $n > \nu$;
   (d) esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $Ka_n + b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
5. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che

   $$a_1 > b_1 > 0; \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

   Dimostrare che le due successioni ammettono limite e calcolarlo.
6. Sia $\{a_n\}$ la successione reale il cui termine generale è $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{n}$. Allora

   A $\{a_n\}$ è convergente. **B** $\{a_n\}$ è monotona decrescente.
   C $\{a_n\}$ non ammette né massimo né minimo.
   D $\{a_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente a -2.

7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme definito da $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[-\frac{1}{n^2}, 2 - \frac{1}{n} \right]$. Allora

A $\max A = 1$. **B** $A = [0, 2)$. **C** $\sup A = 2$.

D A ammette estremo superiore, ma non massimo.

8. Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni reali. Allora

A esistono a_n, b_n e c_n tali che $\{a_n b_n c_n\}$ converge, ma nessuna tra $\{a_n b_n\}$, $\{a_n c_n\}$ e $\{b_n c_n\}$ ammette limite.

B se $a_n + b_n \to 0$, allora esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \ell$ e $b_n \to -\ell$.

C se $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$, allora la successione $\{a_n b_n\}$ ammette limite.

D esistono $a_n, b_n \geq 0$ tali che $a_n + b_n \to 0$, ma a_n non è infinitesima.

Capitolo 3

Funzioni reali di variabile reale: limiti e continuità

In questo capitolo affrontiamo lo studio delle funzioni reali di variabile reale, ovvero quelle che hanno come dominio un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ della retta reale e come codominio $\mathbb{R}$. Queste funzioni e le loro proprietà sono alla base sia dello sviluppo teorico dell'analisi matematica sia delle applicazioni della matematica alle scienze. In questo capitolo impareremo come estrarre informazioni sulle funzioni sulla base del loro dominio o codominio e inizieremo a studiare le proprietà legate alla continuità. Forti del significato di limite per una successione, vedremo come è possibile sfruttare quanto appreso nello scorso capitolo per caratterizzare (nel Teorema 3.1.15) l'esistenza del limite di una funzione, operazione che ora assume più sfaccettature. Questo ci permetterà di definire il concetto di continuità di una funzione (che daremo nella Definizione 3.2.1), concetto che è alla base dello studio delle proprietà di una classe importante di funzioni. Come casi particolari, ma saranno i più importanti in quanto ricchi di (buone) proprietà, studieremo come le funzioni trasformano intervalli della retta reale e quali proprietà degli intervalli preservano.

3.1 Definizioni e prime proprietà. Limiti

Iniziamo formalizzando la definizione di funzione reale di variabile reale. D'ora in poi, indicando il dominio di una funzione, useremo A per indicare un sottoinsieme generico di $\mathbb{R}$, useremo I per indicare un intervallo generico (uno qualunque degli otto descritti nella Definizione 1.5.19), mentre useremo $[a, b]$ oppure (a, b) se vogliamo specificare che l'intervallo è chiuso o aperto, rispettivamente.

Definizione 3.1.1. *Si dice* funzione reale di variabile reale *una funzione* $f : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$. *L'insieme A è il dominio della funzione e l'insieme* $f(A)$ *è l'immagine. L'insieme*

$$\mathrm{graph}(f) \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{3.1}$$

si dice grafico *della funzione* f *ed è costituito dai punti del piano della forma* $(x, f(x))$.

Osserviamo che tutte le funzioni che abbiamo descritto nella Sezione 1.5.2 sono funzioni reali di variabile reale.

Così come abbiamo fatto per le successioni, diamo la definizione di limitatezza di una funzione di riflesso dalla limitatezza della sua immagine.

Definizione 3.1.2. *Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è*

- superiormente limitata *se esiste un maggiorante per $f(A)$, ovvero se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$.*
- inferiormente limitata *se esiste un minorante per $f(A)$, ovvero se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x)$ per ogni $x \in A$;*
- limitata *se è sia superiormente limitata che inferiormente limitata;*
- superiormente illimitata *se non esiste un maggiorante per $f(A)$, ovvero se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) > M$;*
- inferiormente illimitata *se non esiste un minorante per A, ovvero se per ogni $m \in \mathbb{R}$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) < m$.*

Con la stessa dimostrazione, vale il seguente analogo della Proposizione 2.1.4.

Proposizione 3.1.3. *Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è limitata se e solo se esiste $K > 0$ tale che $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in A$.* □

Riguardo alla monotonia, facciamo riferimento alla Definizione 1.5.32, ma è opportuno fare la seguente osservazione, che sarà da tenere a mente quando, nel Capitolo 4, si useranno gli strumenti più sofisticati delle derivate per studiare la monotonia di una funzione.

Osservazione 3.1.4. Nella Definizione 1.5.32 abbiamo dato la definizione di monotonia per una funzione definita tra sottoinsiemi qualunque della retta reale. Ora teniamo a precisare che, benché il codominio non sia importante nella definizione di monotonia, il domino, tuttavia, ha molta rilevanza: se esso è un intervallo, la definizione di monotonia è chiara, mentre se esso è un'unione di intervalli, la definizione di monotonia data nella Definizione 1.5.32 dice che l'ordinamento è preservato (o invertito) *per ogni* coppia di punti $x_1 < x_2$ in A. Ciò esclude, per esempio, che la funzione tangente sia monotona, così come esclude che sia monotona la funzione $f(x) = 1/x$. Ciò accade, appunto, a causa della presenza di *buchi* nel dominio (in termini più tecnici, si dice che l'insieme A è *sconnesso*) e in questo caso è interessante studiare la monotonia su ogni intervallo che compone il dominio. Ecco allora che la funzione tangente è crescente su ogni intervallo della forma $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$; parimenti, la funzione $1/x$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Anche in connessione con la Definizione 3.1.5 che ci apprestiamo a dare, si veda l'Osservazione 4.2.10 più avanti. □

Avendo messo in evidenza la necessità di parlare di monotonia di una funzione su intervalli, diamo la seguente definizione.

Definizione 3.1.5 (intervallo di monotonia)**.** *Sia $f: \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $I \subseteq A$ è un* intervallo di monotonia *se la restrizione $f|_I : I \to \mathbb{R}$ è monotona. Gli intervalli di monotonia di f sono i più grandi intervalli $I \subseteq A$ in cui $f|_I$ è monotona.*

Per poter dare la definizione di limite di funzioni serve prima capire in quali punti ha senso parlare di limite. È dunque opportuno dare una classificazione dei punti di $\mathbb{R}$ rispetto ad un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. A tale scopo, ricordiamo la Definizione 1.5.20 di intorno.

Definizione 3.1.6. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è un punto*

- interno *ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \subseteq A$ (siccome $x_0 \in I_r(x_0) \subseteq A$, segue che $x_0 \in A$);*

- esterno *ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A^c, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \subseteq A^c$;*
- di frontiera *per A se ogni intorno di x_0 interseca sia A che A^c, ovvero se per ogni $r > 0$ si ha $I_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$ e $I_r(x_0) \cap A^c \neq \emptyset$;*
- isolato *di A se esiste un intorno di x_0 in cui non cadono altri punti di A, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $I_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$ (siccome $x_0 \in I_r(x_0)$, segue che $x_0 \in A$);*
- di accumulazione *per A se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di A diversi da x_0, ovvero se per ogni $r > 0$ si ha $I_r^\circ(x_0) \cap A \neq \emptyset$.*

Osservazione 3.1.7. Dalla Definizione 3.1.6 appena data, segue che i punti interni ed i punti isolati di un insieme A sono effettivamente punti di A; i punti esterni non appartengono mai ad A, mentre i punti di frontiera ed i punti di accumulazioni possono o meno appartenere ad A.

Una volta catalogati i punti di un insieme A (o esterni ad esso) possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 3.1.8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Definiamo gli insiemi*

- $\mathrm{int}(A) = \overset{\circ}{A} := \{x \in A : x$ *è interno ad* $A\}$;
- $\mathrm{est}(A) := \{x \in \mathbb{R} : x$ *è esterno ad* $A\}$;
- $\partial A := \{x \in \mathbb{R} : x$ *è di frontiera per* $A\}$;
- $\overline{A} := \mathrm{int} A \cup \partial A =$ *la chiusura di A, detta anche* aderenza *di A.*

È utile conoscere il seguente risultato di facile dimostrazione alla luce della Definizione 3.1.6.

Proposizione 3.1.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Allora, tutti i punti della chiusura $\overline{A}$ di A che non siano punti isolati sono punti di accumulazione per A.* □

Esercizio 3.1.10. Dimostrare che l'insieme dei punti di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ coincide con la chiusura dell'interno di A.

Infine, diamo una definizione generale di insieme aperto e di insieme chiuso.

Definizione 3.1.11 (aperti e chiusi)**.** *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme* aperto *se $A = \emptyset$ oppure se A è l'unione di intervalli aperti. Si dice che A è* chiuso *se è il complementare di un aperto*[1].

Presentiamo ora un esempio che contiene tutte le tipologie di punti appena classificati.

Esempio 3.1.12. Sia $A = \{-7\} \cup [0, 5) \cup (12, 120] \subseteq \mathbb{R}$. Il punto -7 è un punto isolato. Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(A) =& (0,5) \cup (12,120); \\ \mathrm{est}(A) =& \mathrm{int}(A^c) = (-\infty,-7) \cup (-7,0) \cup (5,12) \cup (120,+\infty); \\ \partial A =& \{-7,0,5,12,120\}; \\ \overline{A} =& \mathrm{int}(A) \cup \partial A = \{-7\} \cup [0,5] \cup [12,120]. \end{aligned}$$

[1] Segnaliamo il seguente fatto (sul quale non spenderemo altre parole): siccome il vuoto è aperto per definizione, $\mathbb{R}$, che è il complementare del vuoto, è chiuso. D'altra parte, è possibile scrivere $\mathbb{R} = \bigcup_{R>0} I_R(0)$, ovvero presentarlo come unione di intervalli aperti: pertanto risulta che $\mathbb{R}$ è aperto e di conseguenza che l'insieme vuoto è chiuso. Dunque, con la nostra definizione, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ sono insiemi sia aperti che chiusi: si chiamano *chiusi-aperti*. Sono gli unici a godere di questa proprietà; in un mondo in cui tutto lo spazio e l'insieme vuoto sono gli unici chiusi-aperti si dice che tutto lo spazio è *connesso*.

Infine notiamo che l'insieme dei punti di accumulazione è $[0,5] \cup [12,120]$ che corrisponde alla chiusura dell'interno di A.

La motivazione della *zoologia* della Definizione 3.1.6 risiede nel fatto che per dare la definizione di limite è necessario poter calcolare una funzione in un intorno di un punto, dovendo così assicurarci che ci siano punti del dominio della funzioni nella "vicinanze" del punto di interesse. Sarà chiaro dalle definizioni di limite che daremo che ciò è possibile solo se il punto in questione è un punto di accumulazione. Non è restrittivo supporre che le funzioni siano definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, invece che su un generico insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 3.1.13 (limite di una funzione – definizione topologica)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (notiamo che I deve essere superiormente illimitato se $x_0 = +\infty$ e I deve essere illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$) un punto di accumulazione per I. Si dice che f tende ad $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende ad x_0, in simboli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \tag{3.2}$$

oppure $f(x) \to \ell$ per $x \to x_0$, se

$$\begin{cases} \textit{per ogni } V \in \mathcal{I}_\ell \textit{ esiste } U_V \in \mathcal{I}_{x_0} \textit{ tale che} \\ \textit{per ogni } x \in (U_V \cap I) \setminus \{x_0\} \textit{ si ha } f(x) \in V. \end{cases} \tag{3.3}$$

Usando la Definizione 1.5.20 di intorno, possiamo dare definizioni equivalenti di limite a seconda che x_0 e ℓ siano finiti o infiniti.

Definizione 3.1.14 (limite di una funzione)**.** *Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per I.*

1. *Se $x_0, \ell \in \mathbb{R}$, la (3.3) è equivalente a*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \textit{ tale che} \\ \textit{per ogni } x \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I,\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell). \end{cases} \tag{3.4a}$$

2. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$, la (3.3) è equivalente a*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } K \in \mathbb{R} \textit{ esiste } \delta_K > 0 \textit{ tale che} \\ \textit{per ogni } x \in I^\circ_{\delta_K}(x_0) \cap I,\ f(x) \in I_K(+\infty). \end{cases} \tag{3.4b}$$

3. *Se $x_0 = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, la (3.3) è equivalente a*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } R_\varepsilon > 0 \textit{ tale che} \\ \textit{per ogni } x \in I_{R_\varepsilon}(+\infty) \cap I,\ f(x) \in I_\varepsilon(\ell). \end{cases} \tag{3.4c}$$

4. *Se $x_0, \ell = +\infty$, la (3.3) è equivalente a*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } K \in \mathbb{R} \textit{ esiste } R_K > 0 \textit{ tale che} \\ \textit{per ogni } x \in I_{R_K}(+\infty) \cap I,\ f(x) \in I_K(+\infty). \end{cases} \tag{3.4d}$$

I casi di $x_0 = -\infty$ oppure $\ell = -\infty$ si trattano analogamente. Nelle (3.4), la condizione

- *$x \in I_r^\circ(x_0) \cap I$ equivale a $0 < |x - x_0| < r \ \wedge\ x \in I$ (con $r = \delta_\varepsilon$ oppure $r = \delta_K$);*
- *$f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$ equivale a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$;*
- *$f(x) \in I_K(+\infty)$ equivale a $f(x) > K$;*
- *$x \in I_R(+\infty) \cap I$ equivale a $x > R \ \wedge\ x \in I$ (con $R = R_\varepsilon$ oppure $R = R_K$).*

È evidente che la Definizione 3.1.14 è molto più articolata, pagando il prezzo di specificare volta per volta come sono fatti gli intorni dei punti che si considerano. D'altra parte, la Definizione 3.1.13, accanto al pregio di essere unica e comprendere tutti i casi, ha lo svantaggio di essere meno pratica da maneggiare. Segnaliamo inoltre, in vista dell'Osservazione 3.3.1 più avanti, che, anche se non lo scriviamo per non appesantire ulteriormente la notazione, le quantità δ_ε, δ_K, R_ε e R_K dipendono dal punto x_0 nel quale si va a calcolare il limite: scegliendo un altro punto $\tilde{x}_0$ non è garantito che gli stessi parametri siano ancora validi per verificare le formule (3.4).

Ora che abbiamo dato la definizione di limite di una funzione, dimostriamo il teorema di caratterizzazione sequenziale del limite, che permette di ricondurre l'esistenza del limite di una funzione all'esistenza del limite per opportune successioni.

Teorema 3.1.15 (caratterizzazione sequenziale del limite)**.** *Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione per I e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (come nella Definizione 3.1.13 o nella Definizione 3.1.14). Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia la (3.2) è che*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \{x_n\} \textit{ successione reale tale che } x_n \in I \setminus \{x_0\} \textit{ e tale che } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \textit{si ha } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell. \end{cases} \tag{3.5}$$

L'esistenza del limite per funzioni (3.2) è dunque equivalente all'esistenza del limite della successione numerica $\{y_n\}$, con $y_n = f(x_n)$, delle immagini attraverso f di ogni successione $\{x_n\}$ convergente ad x_0, e che questo limite sia ℓ per ogni successione considerata.

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$, in modo da tenere la notazione più leggera. L'estensione al caso in cui $x_0 = \pm\infty$ si dimostra allo stesso modo.

Supponiamo che si abbia la (3.2) e dimostriamo che vale la (3.5). Usando la definizione di limite, fissiamo un intorno $V \in \mathcal{I}_\ell$ e sappiamo che esiste $\delta_V > 0$ tale che per ogni $x \in I^\circ_{\delta_V}(x_0) \cap I$ si ha $f(x) \in V$. Sia ora $\{x_n\}$ una qualunque successione reale tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{e} \qquad x_n \in I \setminus \{x_0\} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dalla definizione di limite per una successione (si vedano le Definizioni 2.2.1 e 2.2.4), deve essere che, definitivamente, $x_n \in I^\circ_{\delta_V}(x_0)$, ovvero deve esistere $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu$ si ha $x_n \in I^\circ_{\delta_V}(x_0)$. Per tali indici, i corrispondenti x_n sono tali che le loro immagini attraverso f verificano $f(x_n) \in V$, ma questa è la definizione di limite per la successione $y_n = f(x_n)$ delle immagini. Data l'arbitrarietà della successione $\{x_n\}$, abbiamo dimostrato la (3.5).

Supponiamo ora che valga la (3.5) e dimostriamo la (3.2). Ci limiteremo al caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$ e procederemo per assurdo, ovvero supponiamo che la (3.2) non sia verificata. Ciò significa che

$$\text{esiste } \bar{\varepsilon} > 0 \text{ tale che per ogni } \delta > 0 \text{ se } x \in I^\circ_\delta(x_0) \cap I \text{ allora } |f(x) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Siccome la condizione appena scritta deve valere per ogni δ, scegliamo $\delta = 1/n$ per $n \in \mathbb{N}$ e mostriamo come è possibile arrivare ad una contraddizione. In corrispondenza della scelta fatta per δ, esiste $x_n \in I^\circ_{1/n}(x_0) \cap I$ tale che $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$. La condizione $x_n \in I^\circ_{1/n}(x_0)$ è equivalente a $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, da cui, applicando il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri, otteniamo che $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ma per l'ipotesi (3.5) questa condizione implica che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, che è in contraddizione con la (3.6). Il teorema è dunque dimostrato. □

Esercizio 3.1.16. Completare i dettagli della dimostrazione del Teorema 3.1.15 nei casi mancanti.

Il Teorema 3.1.15 permette di estendere la validità dei teoremi sui limiti di successioni al caso dei limiti di funzioni. In particolare, valgono i seguenti teoremi.

Teorema 3.1.17 (teoremi algebrici)**.** *Date $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m,$$

per un certo x_0 che sia punto di accumulazione per I, valgono le seguenti uguaglianze

1. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$;
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m$;
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$;

inoltre, se $m \neq 0$,

4. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$.

Dimostrazione. La dimostrazione si deduce da quella del Teorema 2.2.10 invocando il Teorema 3.1.15. □

I teoremi che seguono sono la formulazione per le funzioni dei Teoremi 2.2.8 e 2.2.12 di confronto.

Teorema 3.1.18 (di confronto I)**.** *Siano $f, g, h \colon I \to \mathbb{R}$ funzioni tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m,$$

per un certo x_0 che sia punto di accumulazione per I. Allora valgono i seguenti fatti.

1. *Se $\ell < m$, si ha che esiste $r > 0$ tale che $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in I^\circ_r(x_0)$ (analogamente scambiando $<$ con $>$).*
2. *Se $\ell < k$, si ha che esiste $r > 0$ tale che $f(x) < k$ per ogni $x \in I^\circ_r(x_0)$ (analogamente scambiando $<$ con $>$).*
3. *(teorema della permanenza del segno) Se il limite per $x \to x_0$ di una funzione ha un segno, allora esiste un intorno (escluso, al più, il punto x_0) in cui la funzione ha lo stesso segno del limite: se $\ell < 0$, allora esiste $r > 0$ tale che $f|_{I^\circ_r(x_0)} < 0$; se $\ell > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che $f|_{I^\circ_r(x_0)} > 0$.*
4. *Se esiste $r > 0$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I^\circ_r(x_0)$, allora $\ell \leq m$.*

5. *(teorema dei carabinieri) Se esiste* $r > 0$ *tale che* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in I_r^\circ(x_0)$ *e se* $\ell = m$*, allora anche* $\lim_{x \to x_0} h(x)$ *esiste e vale* ℓ*.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si ottiene con la stessa tecnica usata per dimostrare il Teorema 2.2.8 per le successioni. □

Teorema 3.1.19 (di confronto II)**.** *Siano* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *due funzioni e sia* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto di accumulazione per* I*. Allora valgono i seguenti fatti.*

1. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$*, allora esiste* $r > 0$ *tale che* $f(x) < g(x)$ *per ogni* $x \in I_r^\circ(x_0)$*.*
2. *Se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$*, allora esiste* $r > 0$ *tale che* $f(x) < g(x)$ *per ogni* $x \in I_r^\circ(x_0)$*.*
3. *Si supponga che esiste* $r > 0$ *tale che* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in I_r^\circ(x_0)$*. Allora,*
   (i) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *anche* $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$*;*
   (ii) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ *anche* $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$*;*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema si ottiene con la stessa tecnica usata per dimostrare il Teorema 2.2.12 per le successioni. □

Esercizio 3.1.20. Rispondere alle seguenti domande.

1. Si potrebbe notare che tutte le volte che si scrive $x \in I_r^\circ(x_0)$ nei Teoremi 3.1.18 e 5 si dovrebbe, per essere precisi, scrivere $x \in I_r^\circ(x_0) \cap I$. Affermiamo però che le due scritture sono equivalenti: come mai?
2. Come si formula il Teorema 2.2.13 nel contesto delle funzioni?

Osservazione 3.1.21. Il Teorema 3.1.15 ha un'altra importantissima applicazione: fornisce un modo rapido di stabilire quando una funzione *non* ammette limite. Infatti, siccome vale l'equivalenza (3.2)⇔(3.5), negando la (3.5) si ottiene la negazione della (3.2): se si trovano due successioni diverse lungo le quali si ottengono due limiti diversi, allora il limite della funzione non esiste. A titolo di esempio, ma non è l'unico caso, si consideri la funzione $f(x) = \sin(1/x)$, definita per $x \neq 0$ e ci si chieda se essa ammette limite per $x \to 0$. Una fugace ispezione del grafico, riportato in Figura 3.1, lascia intuire che quando x si avvicina a 0 ci sono sempre dei punti in cui la funzione assume il valore 1 e dei punti in cui la funzione assume il valore -1. Se riusciamo a trovare due successioni infinitesime differenti tali che le loro immagini siano 1 e -1 rispettivamente, allora abbiamo dimostrato che la funzione non ammette limite. Consideriamo le successioni

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \qquad \text{e} \qquad x_n^{(2)} = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}.$$

È facile vedere che sono infinitesime, quindi sono successioni ammissibili per la (3.5). Vediamo che cosa succede alle loro immagini:

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} &= \sin \frac{1}{x_n^{(1)}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \\ y_n^{(2)} &= \sin \frac{1}{x_n^{(2)}} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{aligned}$$

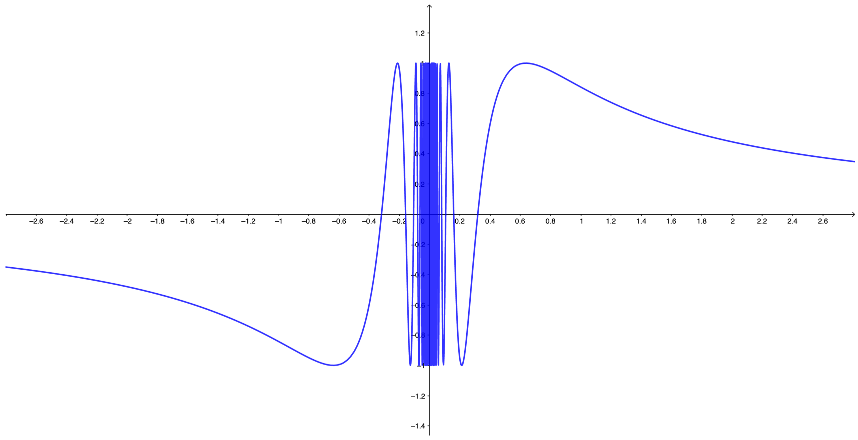


Figura 3.1: Il grafico della funzione $\sin(1/x)$.

e siccome i limiti sono diversi, non esiste $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$. □

Vale per le funzioni l'analogo del Teorema 2.2.7 di limitatezza, con una piccola sottigliezza: nella maniera in cui lo enunceremo, non sarà migliorabile. In particolare, non sarà possibile ottenere, dall'esistenza del limite finito in un punto, la limitatezza globale della funzione.

Teorema 3.1.22 (locale limitatezza). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale per cui esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora esiste $r > 0$ tale che f è limitata in $I_r(x_0)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, sappiamo che, preso un $\varepsilon > 0$ a scelta, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\begin{cases} \text{per ogni } x \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I \text{ se } x_0 \in \mathbb{R}, \\ \text{per ogni } x \in I_{\delta_\varepsilon}(\pm\infty) \cap I \text{ se } x_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

Usando la disuguaglianza triangolare, abbiamo $|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < |\ell| + \varepsilon$ e dunque, se esiste $f(x_0)$, abbiamo

$$|f(x)| \leq \max\{|\ell| + \varepsilon, |f(x_0)|\} \qquad \text{per ogni } x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0).$$

Pertanto la tesi segue con $r = \delta_\varepsilon$ per la Proposizione 3.1.3 applicata in $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$. □

Osservazione 3.1.23. Considerando la funzione $f(x) = x$ si capisce perché il Teorema 3.1.22 non può valere globalmente.

Diamo ora una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite finito per una funzione.

Teorema 3.1.24 (criterio di convergenza di Cauchy). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per I. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ è che*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \textit{ tale che per ogni } x, y \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I \\ \textit{valga } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e dimostriamo la (3.7). Qui possiamo usare la (3.4a) e notare che, fisato $\varepsilon > 0$ e trovato il δ_ε corrispondente, dati $x, y \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I$ possiamo usare la disuguaglianza triangolare per stimare

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ottenendo quindi la (3.7).

Per dimostrare l'implicazione inversa usiamo il Teorema 3.1.15 di caratterizzazione sequenziale e il criterio di Cauchy per la convergenza, Teorema 2.2.23. Stante l'ipotesi (3.7), consideriamo una successione $\{x_n\} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Subordinatamente al valore di ε fissato nella (3.7), esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > \nu_\varepsilon$ si ha $x_n \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ (abbiamo usato la (2.3b)). Allora, per ogni $m, n > \nu_\varepsilon$ si ha $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ e per il Teorema 2.2.23 esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. La dimostrazione si potrebbe dire conclusa se non ci fosse il rischio che il limite ℓ dipenda dalla successione $\{x_n\}$ *scelta*. Occorre dunque dimostrare che non è questo il caso e per fare ciò dobbiamo dimostrare che considerando un'altra successione il limite ℓ ottenuto è lo stesso. Procediamo nel seguente modo. Consideriamo un'altra successione $\{x'_n\}$ che converge ad x_0 e, applicando lo stesso ragionamento, otteniamo che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lambda$. Naturalmente, vogliamo mostrare che $\lambda = \ell$. A tal fine, consideriamo una terza successione $\{\bar{x}_n\}$ che costruiamo nel seguente modo

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{2n-1} &= x_n, \\ \bar{x}_{2n} &= x'_n, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}_n = x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots$$

ovvero costruiamo la $\{\bar{x}_n\}$ alternando i termini delle due successioni $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$. Per costruzione, anche la successione $\{\bar{x}_n\}$ converge a x_0 per $n \to \infty$ e dunque anche a lei possiamo applicare il ragionamento precedente e ottenere che esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) = \mu$. Siccome sia $\{x_n\}$ che $\{x'_n\}$ sono sottosuccessioni di $\{\bar{x}_n\}$ e quest'ultima converge, anche le immagini $\{f(x_n)\}$ e $\{f(x'_n)\}$ sono sottosuccessioni della successione convergente $\{f(\bar{x}_n)\}$: in virtù del Teorema 2.2.5 risulta $\mu = \lambda = \ell$ ed il teorema è dimostrato. □

Introduciamo ora il concetto di *limite unilaterale*, che avrà la duplice funzione di permettere di esplicitare le (3.4) agli estremi del dominio e di introdurre la definizione di punto di discontinuità. In generale, il limite unilaterale viene introdotto quando si permette ad x di tendere ad x_0 solo da destra o da sinistra.

Definizione 3.1.25 (limite unilaterale)**.** *Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per I. Si dice che f* tende a ℓ per $x \to x_0^+$ *o* per $x \to x_0^-$, *e si scrive*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \tag{3.8}$$

se la funzione $g(y) := f\left(x_0 + \dfrac{1}{y}\right)$ tende ad ℓ per $y \to +\infty$ o $y \to -\infty$ (secondo la (3.4b)).

Esercizio 3.1.26. Dimostrare che le (3.8) della Definizione 3.1.25 sono equivalenti a prendere $I^\pm_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ e $I^\pm_{\delta_K}(x_0)$ nella (3.4a) e nella (3.4b).

Dimostrare inoltre che l'esistenza del limite (3.2) è equivalente all'esistenza di entrambi i limiti nella (3.8) e al fatto che essi siano uguali. (Sottolineeremo questo fatto più avanti nella definizione di continuità.)

L'introduzione dei limiti unilaterali permette anche di dare l'analogo del Teorema 2.2.16 qualora si consideri il limite ad un estremo dell'intervallo di monotonia di una funzione monotona.

Teorema 3.1.27. *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 = \inf I$. Se f è monotona in I, allora ammette limite per $x \to x_0^+$ ed esso è l'estremo inferiore o superiore dell'immagine a seconda che f sia crescente o decrescente.*

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo che f sia crescente in $I = (x_0, a)$. Dobbiamo dimostrare che

$$\inf_{x \in (x_0, a)} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x). \tag{3.9}$$

Se f è inferiormente illimitata (ovvero se $\inf_{x \in (x_0, a)} f(x) = -\infty$), sappiamo che per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste $x \in (x_0, a)$ tale che $f(x) < K$. Fissato un certo $K \in \mathbb{R}$, troviamo dunque $\bar{x} \in (x_0, a)$ tale che $f(\bar{x}) < K$. Dalla monotonia, sappiamo che per ogni $x \in (x_0, \bar{x})$ si ha $f(x) \leq f(\bar{x})$ e dunque abbiamo

$$f(x) \leq f(\bar{x}) < K,$$

che, ricordando la (3.4b) opportunamente scritta per $\ell = -\infty$ e tenendo conto della Definizione 3.1.25, è la definizione di $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Se, al contrario, f è inferiormente limitata, esiste $\ell = \inf_{x \in (x_0, a)} f(x)$ l'estremo inferiore di $f(x_0, a)$. Dalla Definizione 1.5.13 di estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in (x_0, a)$ tale che $f(\bar{x}) < \ell + \varepsilon$. Sfruttando la monotonia, per ogni $x \in (x_0, \bar{x})$ abbiamo che

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) \leq f(\bar{x}) < \ell + \varepsilon,$$

dove la prima disuguaglianza è ovvia e la seconda è giustificata dalla definizione di estremo inferiore. Ma allora abbiamo verificato la definizione di limite della (3.8) (tenendo conto della (3.4a)) e la (3.9) è verificata. □

Esercizio 3.1.28. Il Teorema 3.1.27 vale con ogni combinazione di monotonia ed estremi dell'intervallo I: scrivere i corrispondenti enunciati e le corrispondenti versioni della (3.9).

3.1.1 Limiti notevoli

Dedichiamo questa sezione alla raccolta di alcuni limiti notevoli per le funzioni. La loro dimostrazione segue dall'applicazione del Teorema 3.1.15 di caratterizzazione sequenziale del limite ai limiti notevoli per le successioni.

Teorema 3.1.29. *Valgono i seguenti limiti notevoli.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \tag{3.10a}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{3.10b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1, \tag{3.10c}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.10d}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \textit{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.10e}$$

Dimostrazione. I limiti in (3.10a) seguono dai limiti notevoli (2.10c) e (2.14); il limite in (3.10b) segue dal limite notevole (2.13a); I limiti in (3.10c) seguono dai limiti notevoli in (2.19) e l'applicazione del primo di essi dà il primo limite in (3.10d): infatti,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x}=1,$$

dove abbiamo applicato anche il Teorema 3.1.17-3. Procedendo con la stessa tecnica che ci ha portato a dimostrare il limite (2.13a) e applicando la (1.43), si ricava il secondo limite in (3.10d).

Presentiamo la dimostrazione della (3.10e) quando $\alpha \in \mathbb{N}$, perché il caso generale richiede tecniche avanzate. Usando la notazione più familiare per indicare un numero intero, vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n \quad \text{per ogni } n\in\mathbb{N}.$$

Usiamo la formula (1.68) del binomio di Newton per trattare la potenza. Il numeratore diventa quindi

$$\begin{aligned}(1+x)^n-1&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k-1=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k+\binom{n}{0}x^0-1=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k\\&=\binom{n}{1}x+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k=nx+x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-2},\end{aligned}$$

dove abbiamo voluto mettere in evidenza che il numeratore è la somma di nx e di un termine che ha ordine almeno 2 in x. Allora,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{nx+x^2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(n+x\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{k-2}\right)=n$$

e la dimostrazione è conclusa. □

3.2 Continuità di una funzione

La preparazione effettuata nella sezione precedente ci permette di avere tutti gli strumenti per dare la definizione di continuità per una funzione.

Definizione 3.2.1 (continuità di una funzione)**.** *Siano $f\colon I\to\mathbb{R}$ una funzione e $x_0\in I$ Si dice che f è* continua in x_0 *se esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ed esso è uguale al valore assunto dalla funzione nel punto,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{3.11a}$$

Equivalentemente, nello spirito di (3.3), se

$$\text{per ogni } V\in\mathcal{I}_{f(x_0)} \text{ esiste } U_V\in\mathcal{I}_{x_0} \text{ tale che per ogni } x\in U_V\cap I \text{ si ha } f(x)\in V \tag{3.11b}$$

oppure, nello spirito di (3.4), se

$$\begin{cases}\text{per ogni } \varepsilon>0 \text{ esiste } \delta_\varepsilon>0 \text{ tale che per ogni } x\in I_{\delta_\varepsilon}(x_0)\cap I\\ \text{si ha } f(x)\in I_\varepsilon(f(x_0)).\end{cases} \tag{3.11c}$$

Una forma alternativa della (3.11c) è la seguente

$$\begin{cases} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che per ogni } |x - x_0| < \delta_\varepsilon, x \in I \\ \text{si ha } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{3.11d}$$

Vogliamo far riflettere quando messo in evidenza nell'Esercizio (3.1.26): la formula (3.11a) contiene molte informazioni: esistono i limiti destro e sinistro per x che tende ad x_0 e questi sono uguali ed entrambi hanno il valore che la funzione assume nel punto x_0.

Definizione 3.2.2. *Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è* continua *in I se lo è in ogni punto $x_0 \in I$. Se f non è continua in un certo $x_0 \in I$, si dice che f è* discontinua *in x_0.*

L'analisi dei punti di discontinuità si può ottenere dalla negazione della definizione di continuità (3.11); in particolare, la forma (3.11a) offre tutti gli strumenti per classificare i punti di discontinuità una volta che si nota che essa contiene tre uguaglianze: quella tra limiti sinistro e destro e valore della funzione nel punto x_0 considerato. Siccome è necessario poter valutare la funzione f nel punto x_0, esso deve fare parte del dominio della funzione f: per i punti $x_0 \notin \operatorname{dom} f$ non ha senso chiedersi se siano di discontinuità o meno.

Definizione 3.2.3 (punti di discontinuità)**.** *Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Se $x_0 \in I$ è tale che esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ma questo è diverso dal valore assunto dalla funzione nel punto x_0, ovvero se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

   si dice che x_0 è un punto di discontinuità eliminabile. *In questo caso è possibile costruire la funzione $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

   e si verifica immediatamente che essa è continua in x_0.
2. *Se $x_0 \in I$ è tale che esistono finiti i limiti unilaterali per x che tende ad x_0, ma questi sono diversi, ovvero se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

   si dice che x_0 è un punto di discontinuità di tipo salto. *In questo caso si definisce il salto della funzione f in x_0 come la differenza del limite destro meno quello sinistro*

$$[f](x_0) := f(x_0^+) - f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

3. *Tutti gli altri punti di discontinuità si chiamano* punti di discontinuità di altra natura. *È questo il caso in cui almeno uno dei due limiti unilaterali $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ vale $\pm\infty$ o non esiste.*

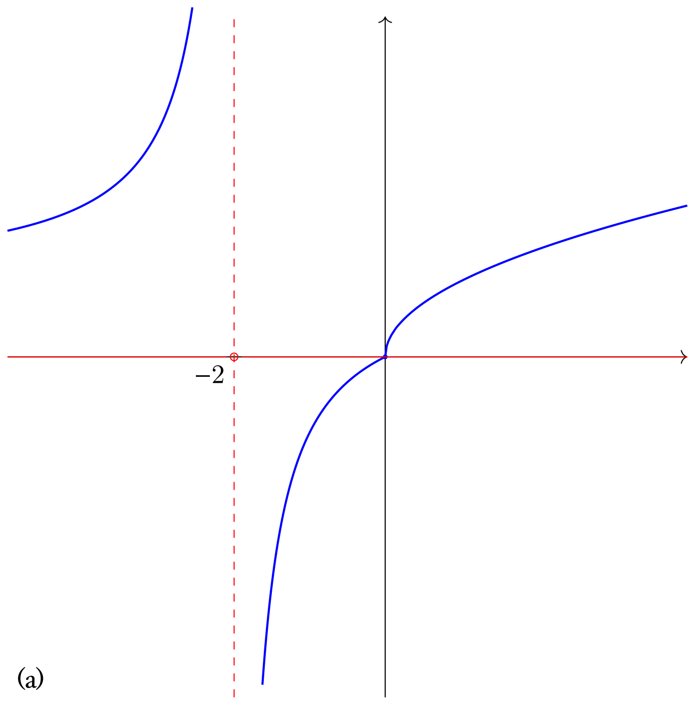
Esempi 3.2.4. Presentiamo alcuni esempi di funzioni discontinue.

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{se } x \neq 3, \\ 12 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$
È facile calcolare che
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$
(si nota facilmente che il numeratore si può scomporre come $(x-2)(x-3)$). Allora il punto $x = 3$ è un punto di discontinuità eliminabile e possiamo costruire la funzione
$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3. \end{matrix} \right\} = x - 2.$$
Notiamo che le funzioni date si possono scrivere come $(f, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $(\tilde{f}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dove sono gli stessi dominio e codominio, ma l'espressione analitica della legge cambia: sono quindi due funzioni diverse.
2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
È di facile dimostrazione che la funzione f è continua per ogni $x_0 \neq 0$. Studiamo ora i limiti unilaterali per $x \to 0$, usando la Definizione 3.1.25. Abbiamo
$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \lim_{y \to \pm\infty} f\left(0 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to \pm\infty} f(1/y) = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{1}{1/y} = \lim_{y \to \pm\infty} y = \pm\infty,$$
che sono entrambi non finiti. Non siamo nel caso di una discontinuità eliminabile, né di tipo salto, quindi il punto $x_0 = 0$ è per la funzione f un punto di discontinuità di altra natura.
3. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \alpha}{x + 2} & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x + \alpha} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
è continua. Notiamo che la funzione ha espressioni analitiche diverse a cavallo del punto $x = 0$, e che ciascuna di esse è continua in ogni punto su cui è definita. Per $x \leq 0$, la funzione $x \mapsto f_1(x) = \dfrac{x + \alpha}{x + 2}$ è definita per ogni $x \neq -2$ ed è continua perché rapporto di polinomi: ha quindi dominio l'insieme $\operatorname{dom} f_1 = (-\infty, -2) \cup (-2, 0]$. Per $x > 0$, la funzione $x \mapsto f_2(x) = \sqrt{x + \alpha}$ è definita e continua per $x + \alpha \geq 0$, ovvero per $x \geq -\alpha$. Dobbiamo allora distinguere due casi, $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$.

Nel primo caso, $\operatorname{dom} f_2 = [-\alpha, +\infty)$ contiene il punto $x = 0$ e dovremo verificare la continuità. Allora la funzione f è continua se

$$f_1(0) = \lim_{x \to 0^+} f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x + \alpha} = \sqrt{\alpha},$$

che risolta dà $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 4$.
Nel secondo caso, $\operatorname{dom} f_2 = [-\alpha, +\infty)$ non contiene l'origine (perché $-\alpha > 0$). Siccome ora $\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 = \emptyset$, si ha che $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f_1 \cup \operatorname{dom} f_2 = (-\infty, -2) \cup (-2, 0] \cup [-\alpha, +\infty)$ e f è continua. La risposta è allora: la funzione f è continua per ogni $\alpha \in (-\infty, 0] \cup \{4\}$ e alcuni casi sono rappresentati nella Figura 3.2.



Vediamo ora le prime conseguenze delle Definizioni 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3.

Proposizione 3.2.5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia inoltre x_0 un punto isolato di A. Allora f risulta continua in x_0.*

Dimostrazione. Si tratta di fare una semplice verifica della definizione: fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta_\varepsilon = \min\{|x_0 - a| : a \in A \setminus \{x_0\}\}$. Allora, si ha che $I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A = \{x_0\}$, per il quale ovviamente la condizione $f(x_0) \in I_\varepsilon(f(x_0))$ è verificata, e con essa la (3.11c). □

Teorema 3.2.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f può avere solo discontinuità di tipo salto.*

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdita di generalità, che la funzione f sia crescente. Vogliamo dimostrare che se ha una discontinuità in un punto $x_0 \in I$ allora questa può essere solamente di tipo salto. Si ragiona per assurdo.

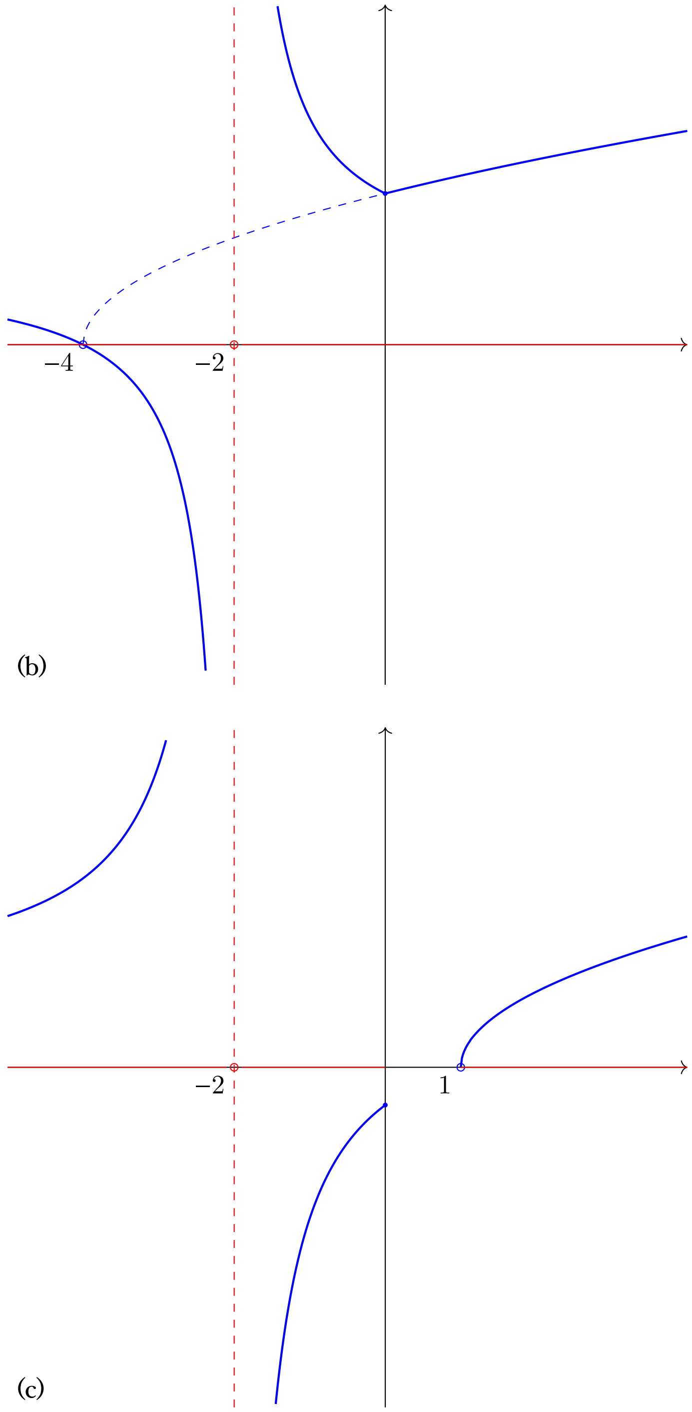


Figura 3.2: La funzione f per (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 4$ e (c) $\alpha = -1$.

Se avesse una discontinuità eliminabile in x_0, allora avremmo che esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \neq f(x_0).$$

Allora $f(x_0)$ deve essere minore o maggiore di ℓ (perché $\mathbb{R}$ è un insieme totalmente ordinato rispetto a $\leq$ e ogni coppia di elementi deve essere confrontabile, si ricordi la Definizione 1.3.5): supponiamo che $f(x_0) < \ell$. Sia $a \in I$ tale che l'intervallo $(a, x_0) \subseteq I$; la restrizione di f all'intervallo (a, x_0) è ancora monotona e per il Teorema 3.1.27 (si veda anche l'Esercizio 3.1.28), abbiamo che

$$\ell = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x).$$

Dalla Definizione 1.5.13 di estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in (a, x_0)$ tale che $\ell - \varepsilon < f(\bar{x})$ e scegliendo $\varepsilon < \ell - f(x_0)$ abbiamo

$$f(\bar{x}) > \ell - \varepsilon > \ell + f(x_0) - \ell = f(x_0),$$

in violazione della condizione di crescenza, siccome $\bar{x} < x_0$. Lo stesso ragionamento si può fare su un intervallo del tipo (x_0, b) se fosse $f(x_0) > \ell$. Ciò dimostra che una funzione monotona f non può avere avere punti di discontinuità eliminabile. La dimostrazione che non può nemmeno avere punti di discontinuità di altra natura si fa in maniera analoga: se esistessero, essi violerebbero la condizione di monotonia. $\square$

Teorema 3.2.7 (della permanenza del segno)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che, dato $x_0 \in I$, il valore $f(x_0)$ abbia un segno. Allora esiste $r > 0$ tale che $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$ per ogni $x \in I_r(x_0)$.*

Dimostrazione. Siccome $f(x_0)$ è il valore del limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$, possiamo applicare il Teorema 3.1.18-3 della permanenza del segno per i limiti e ottenere che esiste un intorno di x_0 dove f ha lo stesso segno di $f(x_0)$. $\square$

Teorema 3.2.8. *Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $x_0 \in I$. Allora anche le funzioni*

$$|f|, \qquad f \pm g \qquad e \quad f \cdot g$$

sono continue in $x_0 \in I$. Inoltre, se $f(x_0) \neq 0$ la funzione $1/f$ è ben definita in un intorno di x_0 ed è continua in x_0.

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza diretta del Teorema 3.1.17. $\square$

Teorema 3.2.9 (continuità della funzione composta)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in I$ e sia $y_0 = f(x_0)$. Sia poi $I' \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo che contiene y_0 e sia $g : I' \to \mathbb{R}$ una funzione continua in y_0. Allora la funzione composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e vale*

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)). \tag{3.12}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando il Teorema 3.1.15 di caratterizzazione sequenziale del limite per la funzione composta $g \circ f$: dobbiamo allora dimostrare che per ogni successione $\{x_n\}$ convergente ad x_0 per $n \to \infty$ si ha

$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n) = (g\circ f)(x_0)$. Applicando il Teorema 3.1.15 alla funzione f, si ottiene che definitivamente $y_n = f(x_n)$ è in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, siccome f è continua. Ma allora, la continuità di g e un'altra applicazione del Teorema 3.1.15 dànno che $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$, che (per la legge di composizione) è la (3.12). □

Finora abbiamo considerato funzioni continue definite su un intervallo generico $I \subseteq \mathbb{R}$. I prossimi risultati che presentiamo permettono di descrivere notevoli proprietà delle funzioni continue definite su intervalli chiusi e limitati $[a,b]$.

Teorema 3.2.10 (esistenza di massimi e minimi – Weierstrass-0)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo in $[a,b]$, ovvero esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che*

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \qquad \textit{per ogni } x \in [a,b]$$

dove $f(x_m) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Dimostrazione. Dimostreremo l'esistenza del massimo, quella del minimo segue gli stessi passi. Come prima cosa affermiamo che è sempre possibile costruire una *successione massimizzante*, ovvero una successione $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup f([a,b]).$$

Se l'insieme immagine $f([a,b])$ non è superiormente limitato, allora $\sup f([a,b]) = +\infty$ (si ricordi la Definizione 1.5.15); in caso contrario, $\sup f([a,b]) = \Lambda \in \mathbb{R}$ per la proprietà 3 della Definizione 1.5.18. La successione massimizzante $\{x_n\}$ si costruisce nel seguente modo:

- se $\sup f([a,b]) = +\infty$, basta prendere $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$,
- se $\sup f([a,b]) = \Lambda$, basta prendere $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > \Lambda - 1/n$,

ed entrambe le operazioni sono legittimate dalla definizione di estremo superiore. Avendo a nostra disposizione la successione $\{x_n\} \subseteq [a,b]$, notiamo che è limitata e quindi possiamo invocare il Teorema 2.2.24 di Bolzano–Weierstrass (♥) per ottenere una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un certo $\xi \in [a,b]$ quando $k \to \infty$. Ma ora, abbiamo che

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f([a,b]),$$

dove abbiamo applicato la continuità di f per la prima uguaglianza ed il Teorema 2.2.5 per la seconda. Siccome l'uguaglianza appena ricavata dice che l'estremo superiore è un valore assunto dalla funzione, non è possibile che $\sup f([a,b]) = +\infty$, e quindi $\sup f([a,b]) = \Lambda \in \mathbb{R}$ ed è assunto in $\xi =: x_M$. Necessariamente,

$$\Lambda = f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

ed il teorema è dimostrato. □

Osserviamo che, nell'applicazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass (♥), sottosuccessioni diverse possono avere limiti ξ diversi. Questo è il caso quando la funzione ha più punti di massimo.

Approfittiamo per dare la seguente definizione (che verrà poi raffinata nel Capitolo 4 — mettere ref. alla definizione).

Definizione 3.2.11. *I punti x_m e x_M individuati dal Teorema 3.2.10 si chiamano* punti di minimo assoluto *e* punti di massimo assoluto*, rispettivamente. I valori $f(x_m)$ e $f(x_M)$ si chiamano* minimo assoluto *e* massimo assoluto*, rispettivamente, di f.*

Teorema 3.2.12 (degli zeri – Bolzano-0)**.** *Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua che assume valori discordi agli estremi, ovvero tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste un punto $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione fa uso del metodo di bisezione già introdotto per dimostrare il Teorema 2.2.24. Chiamiamo $\alpha_0 = a$ e $\beta_0 = b$, consideriamo il punto medio $\mu_1 = (\alpha_0 + \beta_0)/2$ e valutiamo $f(\mu_1)$:

- se $f(\mu_1) = 0$, abbiamo terminato, avendo trovato $\mu_1 \in (a,b)$ in cui la funzione si annulla; altrimenti
- se $f(\mu_1) \neq 0$, allora deve avere un segno e consideriamo
  - $[\alpha_1, \beta_1] := [\alpha_0, \mu_1]$ se $f(\alpha_0)f(\mu_1) < 0$;
  - $[\alpha_1, \beta_1] := [\mu_1, \beta_0]$ se $f(\beta_0)f(\mu_1) < 0$.

Ora, se la procedura di bisezione fornisce un certo μ_ν tale che $f(\mu_\nu) = 0$ il processo di bisezione si arresta dopo ν passi e $\xi = \mu_\nu$ è il punto desiderato. Se, al contrario, il processo non si arresta, allora abbiamo costruito due successioni: la successione crescente $\{\alpha_n\}$ di estremi sinistri e la successione decrescente $\{\beta_n\}$ di estremi destri, i cui limiti, come sappiamo, esistono per il Teorema 2.2.16; inoltre, sappiamo che questi due limiti coincidono perché l'ampiezza dell'intervallo $[\alpha_n, \beta_n]$ tende a zero: allora abbiamo $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \xi$. Ricordando che α_n e β_n sono selezionati con il criterio che $f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$, portiamo la disuguaglianza al limite. Grazie al Teorema 2.2.8-4 e all'Osservazione 2.2.9, abbiamo

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)f(\beta_n) = f^2(\xi),$$

dove l'uguaglianza segue dalla continuità di f (che usiamo solo a questo punto). Ora non può essere altrimenti che $f(\xi) = 0$ ed il teorema è dimostrato. □

Osservazione 3.2.13. Osserviamo che il Teorema 3.2.12 si sarebbe potuto enunciare nel seguente modo: *se f è continua ed è tale che $f(a)f(b) \leq 0$, allora esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.* Facciamo notare la disuguaglianza larga nella condizione di *estremi discordi* e il fatto che il punto ξ possa appartenere all'insieme chiuso $[a,b]$. Tuttavia, osserviamo che se per caso uno tra i valori $f(a)$ o $f(b)$ è zero, allora la condizione $f(a)f(b) \leq 0$ è verificata con l'uguaglianza e il punto $\xi \in [a,b]$ cercato è uno dei due estremi. Il teorema è immediatamente dimostrato (anche se, chiaramente, ci possono essere altri punti interni ad $[a,b]$ in cui f si annulla). □

Rimandiamo alla Sezione 7.3.1 per qualche commento più approfondito su questi teoremi. Il Teorema 3.2.12 ha il seguente immediato corollario.

Corollario 3.2.14 (dei valori intermedi – Bolzano-1)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq I$ la funzione f assume ogni valore compreso tra quelli assunti agli estremi di $[a,b]$.*

Dimostrazione. Consideriamo un numero $\ell \in \big(f(a) \wedge f(b), f(a) \vee f(b)\big)$[2], ovvero compreso nell'intervallo i cui estremi sono $f(a)$ e $f(b)$ e la restrizione di f ad $[a,b]$.

[2]Usiamo questa notazione, con le operazioni di massimo e minimo descritte dai simboli $\vee$ e $\wedge$, rispettivamente (si veda la Nota 7 più sopra.).

A partire da questi, definiamo la funzione $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ tramite $F(x) := f(x) - \ell$. Data la scelta di ℓ, è facile vedere che $F(a)F(b) < 0$ e dunque, applicando il Teorema 3.2.12 ad F otteniamo che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $F(\xi) = 0$, ovvero tale che $f(\xi) = \ell$. □

Dal Teorema 3.2.10 e dal Corollario 3.2.14 discende il seguente teorema.

Teorema 3.2.15 (Weierstrass-1)**.** *Sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume in $[a, b]$ tutti i valori compresi tra il suo massimo in $[a, b]$ ed il suo minimo in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Siccome le ipotesi del Teorema 3.2.10 sono soddisfatte, ricaviamo l'esistenza di $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che

$$f(x_m) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x_M) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Definiamo ora $R := [x_m \wedge x_M, x_m \vee x_M]$ e applichiamo il Corollario 3.2.14 alla restrizione $f|_R: R \to \mathbb{R}$ e otteniamo la tesi. □

Osservazione 3.2.16. Si dice che un insieme K è *compatto* se ogni successione di elementi di K convergente converge ad un elemento di K. Questa definizione è una definizione topologica molto generale, ma nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (o di $\mathbb{R}^n$, a dire il vero) si può beneficiare di una caratterizzazione: tutti e soli i compatti di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli chiusi e limitati[3]. Tenendo questo concetto in mente, il teorema appena dimostrato si può scrivere in maniera più succinta dicendo che se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f([a, b]) = [m, M]$, ovvero

l'immagine continua di un compatto è compatta.

Ci teniamo ad enunciarlo in questa forma perché è la formulazione del teorema di Weierstrass che si può maggiormente generalizzare. È questa la ragione per la quale abbiamo dato il nome di Teorema di Weierstrass sia al Teorema 3.2.10 sia al Teorema 3.2.15. La compattezza dell'immagine fa sì che l'insieme sia limitato (quindi c'è speranza che esistano massimo e minimo finiti) e chiuso (che fa sì che massimo e minimo siano assunti).

Osservazione 3.2.17. Facciamo anche notare che non vi è sostanziale differenza tra il Teorema di Bolzano scritto nella forma del Teorema 3.2.12 e scritto nella forma del Corollario 3.2.14: Si potrebbe enunciare semplicemente nella forma del corollario e usare la dimostrazione del teorema come passo preliminare.

I teoremi di Weierstrass e Bolzano hanno la seguente importante conseguenza: permettono di stabilire che l'immagine continua di un intervallo è ancora un intervallo. Ciò significa che le funzioni continue possono solamente deformare un intervallo dilatandolo, ma non spezzandolo; intuitivamente, ci sarebbe un punto di discontinuità nel grafico, cosa che non è permessa dalla continuità della funzione.

Teorema 3.2.18. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque di $\mathbb{R}$ e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'immagine $f(I)$ è ancora un intervallo.*

[3] Questo è un risultato molto importante che va sotto il nome di Teorema di Heine-Borel, ma parlarne in questo momento è prematuro.

Dimostrazione. Osserviamo che basta verificare che per ogni $y_1, y_2 \in f(I)$ l'intervallo chiuso $[y_1 \wedge y_2, y_1 \vee y_2] \subseteq f(I)$, ovvero che dati due punti qualunque nell'immagine allora anche l'intervallo chiuso che ha per estremi quei due punti è tutto contenuto nell'immagine (in questo modo non ci sono "buchi" nell'immagine, che quindi risulta essere un intervallo).

Per il Corollario 3.2.14, esistono due punti, $x_1, x_2 \in I$ tali che $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Definendo $R \coloneqq [x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2]$, notiamo che la restrizione $f|_R \colon R \to \mathbb{R}$ è continua, e dunque per il Teorema 3.2.15 $f(R) = [m^R, M^R]$. Ma allora abbiamo

$$[y_1 \wedge y_2, y_1 \vee y_2] \subseteq f(R) = [m^R, M^R] \subseteq f(I),$$

dove la prima inclusione è ovvia e la seconda segue dal fatto che $R \subseteq I$ (si consideri la Figura 3.3 per riferimento). □

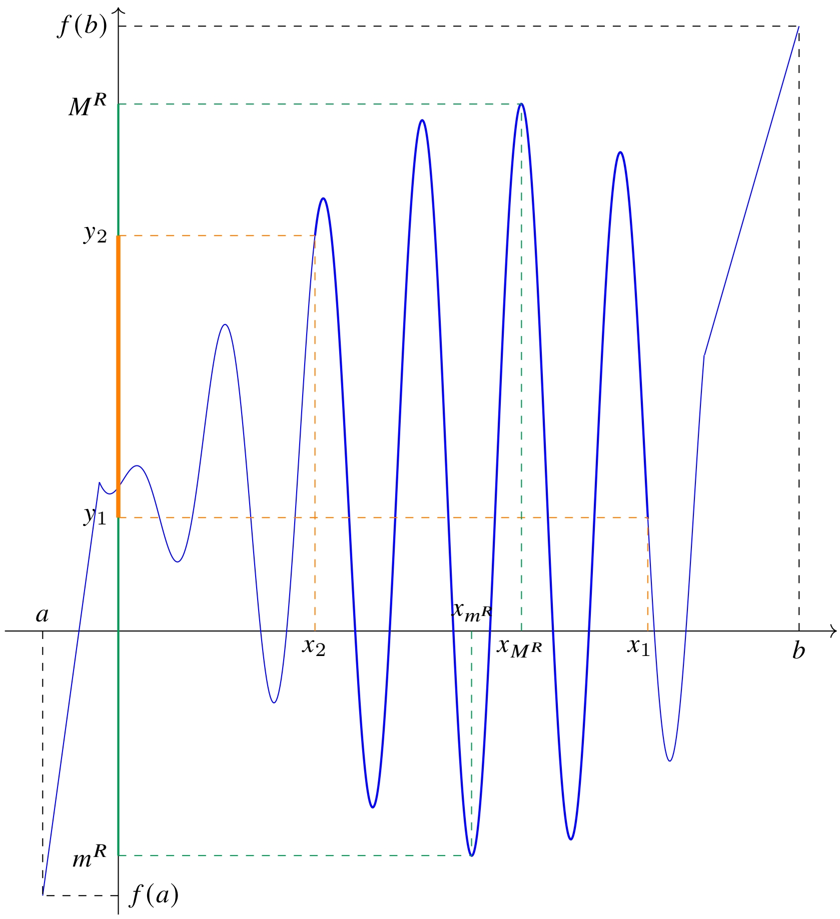


Figura 3.3: L'inclusione nell'equazione finale della dimostrazione del Teorema 3.2.18, dove, per fissare le idee, abbiamo supposto $y_1 < y_2$ e $x_2 < x_1$.

Il prossimo teorema si occupa di funzioni monotone e lega la loro continuità al fatto che l'immagine sia un intervallo che ha per estremi le immagini degli estremi.

Teorema 3.2.19. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora f è continua se e solo se $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente e continua. La continuità, per il Teorema 3.2.15, garantisce che $f([a,b]) = [m, M]$; la monotonia garantisce che $m = f(a)$ e $M = f(b)$ e la tesi è provata.

Supponiamo ora che f sia crescente e che $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ e mostriamo che f è continua. Per fare ciò, dobbiamo vedere che, dato $x_0 \in (a,b)$, la funzione f verifica la definizione di continuità in x_0, ovvero che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Come prima cosa notiamo che se $a < x_0 < b$ allora deve essere che $f(a) < f(x_0) < f(b)$, usando la monotonia di f. Ora notiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ tale per cui l'intervallo $[f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$ è contenuto in $[f(a), f(b)]$ esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$, $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$ (si faccia riferimento alla Figura 3.4). Se scegliamo $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$, allora si ha che ogni $x \in I_\delta(x_0)$ è tale che

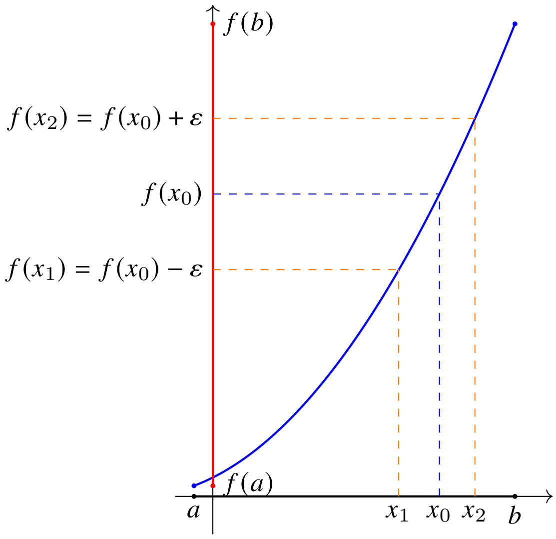


Figura 3.4: La costruzione della dimostrazione del Teorema 3.2.19.

$x \in (x_1, x_2)$ e dunque $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, ancora per la monotonia di f. Allora abbiamo ottenuto

$$f(x_0) - \varepsilon = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$$

che altro non è che la definizione di continuità di f in x_0. $\square$

Osservazione 3.2.20. Il Teorema 3.2.19 si può estendere ad intervalli I qualunque. Basta applicare il ragionamento del Corollario 3.2.14 applicando il Teorema 3.2.19 ad ogni sottointervallo chiuso e limitato di I. È inoltre evidente che vale anche per funzioni decrescenti.

Il teorema appena dimostrato è propedeutico alla dimostrazione del teorema seguente, in cui si parla di continuità della funzione inversa.

Teorema 3.2.21. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente crescente. Allora f è biunivoca tra $[a,b]$ e $[f(a), f(b)]$. Inoltre, l'inversa $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b]$ è continua e strettamente crescente.*

Dimostrazione. L'iniettività di f segue dalla stretta monotonia: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; siccome ogni funzione è suriettiva sull'immagine, abbiamo che $f\colon [a,b] \to f([a,b])$ è biunivoca. Dal Teorema 3.2.19 segue che $f([a,b]) = [f(a,)f(b)]$ e dunque la funzione inversa f^{-1} è definita da $[f(a), f(b)]$ a valori in $[a,b]$. Dobbiamo dimostrare che f^{-1} è strettamente crescente e continua. Per quanto riguarda la monotonia, osserviamo che, dati $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ tali che $y_1 < y_2$, deve necessariamente essere che $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Infatti, siccome y_1 e y_2 appartengono all'immagine di f esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se ora si avesse che $x_1 \geq x_2$, si avrebbe, per la monotonia di f, che $y_1 = f(x_1) \geq y_2 = f(x_2)$, ma ciò non è possibile. Allora f^{-1} è strettamente crescente. Notando che $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b] = [f^{-1}(f(a)), f^{-1}(f(b))]$, ci rendiamo conto che essa soddisfa le ipotesi del Teorema 3.2.19 e pertanto è continua. □

Anche questo teorema si può generalizzare al caso di intervalli qualunque e, naturalmente vale, *mutatis mutandis*, anche per funzioni strettamente decrescenti.

Osservazione 3.2.22. Dal Teorema 3.2.21 discendono la continuità e la stretta monotonia delle funzioni radice (inverse delle potenze), della funzione logaritmo (inversa dell'esponenziale) e delle funzioni trigonometriche inverse (dove le funzioni trigonometriche sono invertibili). Tutte queste funzioni sono state presentate nella Sezione 1.5.2.

3.3 La continuità uniforme

In questa sezione introduciamo un concetto molto delicato che va sotto il nome di *continuità uniforme*. È questa una proprietà più forte della semplice continuità definita nella Definizione 3.2.1 e si può esprimere dicendo che le funzioni che sono uniformemente continue non presentano brusche variazioni. Prima di dare la definizione formale, facciamo la seguente osservazione, che motiva la necessità di considerare la continuità uniforme.

Osservazione 3.3.1. Ispezionando attentamente la Definizione 3.2.1 ci si rende facilmente conto che la continuità di una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ dipende dal punto $x_0 \in I$ in cui la so vuole verificare. Con questo intendiamo dire che l'intorno $U \in \mathcal{I}_{x_0}$ della (3.11b) e, ancor più visibilmente, il parametro δ_ε delle (3.11c) e (3.11d) dipendono in realtà da x_0 (come già osservato in calce alla Definizione 3.1.14 di limite) e pertanto sarebbe più corretto esplicitare la dipendenza da x_0 scrivendo δ_{ε,x_0}. Ciò significa che verificando la definizione di continuità in punti differenti si ottengono, per lo stesso valore di $\varepsilon > 0$ valori di δ_ε (potenzialmente) diversi, ovvero $\delta = \delta_{\varepsilon,x_0}$. Intuitivamente, a parità di $\varepsilon > 0$, se x_0 è in una zona del dominio in cui la funzione varia molto, il δ_{ε,x_0} corrispondente sarà più piccolo del $\delta_{\varepsilon,x_0'}$ per un x_0' che si trova in una zona del dominio in cui la funzione varia poco. Si pensi alla funzione esponenziale: essa in $(-\infty, 0]$ varia di una quantità < 1,stessa variazione che ha nell'intervallo $[0, \log 2)$. Al contrario, una qualunque retta (si pensi alla funzione identità, per comodità) una volta fissato nell'immagine un intervallo di tolleranza di ampiezza 2ε, come conviene fare per la verifica della definizione di limite, determina un intervallo nel dominio di ampiezza fissata, *indipendentemente* da dove ci si trovi nel dominio. La differenza è mostrata nella Figura 3.5, dove, per semplicità, mettiamo in evidenza l'intorno U_{ε,x_0} invece che l'intorno $I_{\delta_{\varepsilon,x_0}}(x_0)$ (ma sappiamo che per Proposizione 1.5.21 essi sono equivalenti).

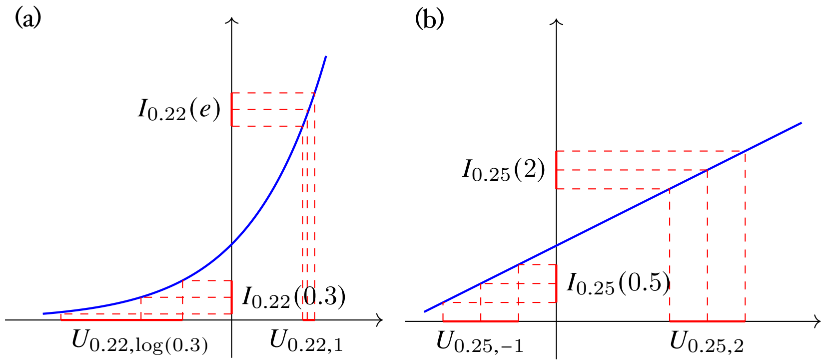


Figura 3.5: Confronto tra continuità e continuità uniforme: variazione delle ampiezze degli intorni per (a) la funzione esponenziale $y = e^x$ e (b) la funzione affine $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Dall'osservazione estrapoliamo che l'aspetto chiave è la dipendenza o meno di δ dal punto x_0. Allora diamo la definizione.

Definizione 3.3.2 (continuità uniforme)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è* uniformemente continua *in I se*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \textit{ tale che per ogni } x_1, x_2 \in I, \\ |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \textit{ implica } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \end{cases} \tag{3.13a}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \textit{ tale che per ogni } x_0 \in I, \\ \textit{per ogni } x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap I \textit{ si ha } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{cases} \tag{3.13b}$$

Vedendo ora la definizione, è lampante che la continuità uniforme è una condizione più stringente della continuità; il prossimo teorema non è una sorpresa.

Teorema 3.3.3. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua in I. Allora f è continua in I.*

Dimostrazione. Dalla formulazione della continuità uniforme tramite la (3.13b) è immediato vedere che la definizione di continuità nella forma (3.11d) è soddisfatta. Il fatto che la (3.13b) valga per ogni $x_0 \in I$ garantisce che la Definizione 3.2.2 di continuità in I è rispettata. $\square$

Come sempre quando si dànno due definizioni una delle quali è più forte dell'altra, ci si può chiedere se non succeda, o in quali casi succede, che la definizione più debole implichi quella forte: una funzione continua è anche uniformemente continua? Abbiamo visto con il ragionamento dell'Osservazione 3.3.1 che la risposta a questa domanda è negativa. Allora ci possiamo chiedere se ci sono delle condizioni supplementari alla continuità della funzione che siano sufficienti per garantirne l'uniforme continuità. In questo caso la risposta è affermativa e la condizione aggiuntiva da chiedere non è alla funzione, bensì al dominio (è quindi di natura topologica, ha a che vedere con la "forma" dell'intervallo I piuttosto che con la funzione f): è necessario che $I = [a, b]$, ovvero che sia un intervallo chiuso e limitato. Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema 3.3.4 (Heine–Cantor)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, negando la (3.13a):

$$\begin{cases} \text{esiste } \bar{\varepsilon} > 0 \text{ tale che per ogni } \delta > 0 \text{ esistono } x, y \in [a, b] \text{ tali che} \\ |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \bar{\varepsilon}. \end{cases}$$

Scegliendo $\delta = 1/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$ generiamo due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di punti di $[a, b]$ (e quindi limitate) tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \bar{\varepsilon}. \tag{3.14}$$

Per il Teorema 2.2.24 di Bolzano–Weierstrass (♥), possiamo estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{\xi_k = x_{n_k}\}$ convergente ad un punto $x_0 \in [a, b]$. Con la stessa scelta degli indici n_k, chiamiamo $\eta_k = y_{n_k}$ una successione estratta da $\{y_n\}$. Dalla prima delle (3.14) abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} (\xi_k - \eta_k) \leq \lim_{k\to\infty} |\xi_k - \eta_k| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0,$$

da cui possiamo inferire che $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \lim_{k\to\infty} \xi_k = x_0$. Ora, per la continuità di f, abbiamo che $\lim_{k\to\infty} f(\xi_k) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(\eta_k)$, ovvero deve risultare che, definitivamente, $|f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \bar{\varepsilon}$, ma ciò contraddice la seconda delle (3.14) (che chiaramente vale con ξ_k al posto di x_n e η_k al posto di y_n). La dimostrazione è conclusa. □

È il momento opportuno di definire una classe di funzioni che godono di una proprietà che si rivelerà interessante in connessione con le derivate e addirittura fondamentale importanza nello studio delle equazioni differenziali.

Definizione 3.3.5. *Si dice che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è* lipschitziana *in I se*

$$\textit{esiste } L > 0 \textit{ tale che per ogni } x_1, x_2 \in I \textit{ si ha } |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \tag{3.15}$$

Proposizione 3.3.6. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è uniformemente continua, e quindi continua.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, la (3.13a) è soddisfatta scegliendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon/L$. □

3.4 Confronto tra funzioni: infinitesimi e infiniti

Abbiamo introdotto nella Definizione 2.2.1-1 il concetto di successione infinitesima; senz'ombra di dubbio esso si può estendere ad una funzione, intendendo che una funzione è infinitesima per $x \to x_0$ quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Trattandosi di funzioni, possiamo considerare un qualunque punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, siccome abbiamo la cognizione dell'operazione di limite per funzioni quando l'argomento tende ad un qualunque punto della retta reale estesa; sappiamo anche considerare limiti unilaterali.

In questa sezione ci proponiamo di introdurre il concetto di ***infinitesimo*** e di capire come due infinitesimi si possano confrontare tra loro. Scopriremo che ciò fornisce un metodo utile (benché non l'unico!) per sciogliere le forme indeterminate del tipo $[0/0]$. Faremo la stessa cosa per il concetto di ***infinito***, per esso intendendo una funzione (o successione) che diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ e anche in questo caso vedremo come potrà essere d'ausilio per sciogliere le forme indeterminate del tipo $[\infty/\infty]$.

Ricordando che infinitesimi o infiniti per $x \to x_0$ sono funzioni o successioni che tendono a zero o divergono quando $x \to x_0$, e che il loro comportamento al limite è l'unica cosa che li accomuna, si vede che essi sono classi (di equivalenza) di funzioni o successioni, precisamente quelle ottenute modulo la relazione di equivalenza $\sim$ = "tendere a zero per $x \to x_0$" o $\sim$ = "divergere per $x \to x_0$". Ricordiamo la Definizione 1.3.3 di classe di equivalenza. A titolo di esempio, se scegliamo $x_0 = \pi$ e $\sim$ è la relazione di equivalenza "tendere a zero per $x \to \pi$", la classe di equivalenza $[f]$ della funzione $f(x) = x - \pi$ contiene, tra gli altri, gli elementi $g(x) = (x - \pi)^n$ per ogni $n \geq 2$, $h(x) = \log(1 - \pi + x)$ e $s(x) = \sin x$ (si veda la (1.16) per la definizione di $[f]$).

Adottiamo qui la notazione $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ per indicare gli infinitesimi e gli infiniti, dove essi possono essere funzioni o successioni a seconda dei casi. Ci permetteremo anche di abbreviare la scrittura $\lim_{x \to x_0} \alpha(x)$ (eventualmente includendo i limiti unilaterali) e la scrittura $\lim_{n \to \infty} \alpha(n)$ se si tratta di una successione con le seguenti scritture equivalenti

$$\lim \alpha \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \alpha(x) \to 0 & \text{per } x \to x_0, \\ \alpha(x) \to \pm\infty & \text{per } x \to x_0, \end{cases}$$

ricordando che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Per iniziare il nostro studio degli infinitesimi e degli infiniti diamo la seguente definizione, alla quale premettiamo la scelta di considerare infinitesimi definitivamente diversi da zero (così si possono mettere al denominatore).

Definizione 3.4.1 (infinitesimi o infiniti simultanei)**.** *Due infinitesimi o infiniti α, β si dicono* simultanei *se entrambi tendono a zero o all'infinito, rispettivamente, per $x \to x_0$.*

Definizione 3.4.2 (confronto di infinitesimi)**.** *Siano α e β due infinitesimi simultanei per $x \to x_0$. Si dice che:*

1. α è un infinitesimo di ordine superiore *rispetto a β se $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$;*

2. *α è un infinitesimo* dello stesso ordine *rispetto a β se esiste $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \ell$ o, equivalentemente, se esistono $0 < m < M < +\infty$ tali che si abbia $m \leq \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq M$ definitivamente;*
3. *α è un infinitesimo* di ordine inferiore *rispetto a β se $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$;*
4. *α e β* non sono confrontabili *negli altri casi.*

Nei casi 1. e 2., ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, si dice che $\alpha = O(\beta)$ (si legge "α è o-grande di β"); Più specificamente, nel caso 1. si dice che $\alpha = o(\beta)$ (si legge "α è o-piccolo di β"); nel caso 2. si usano le notazioni $\alpha \asymp \beta$ se $\ell \neq 1$ e $\alpha \sim \beta$ se $\ell = 1$.

Definizione 3.4.3 (simboli di Landau)**.** *I simboli $O, o, \asymp, \sim$ si chiamano* simboli di Landau.

Dalla teoria dei limiti si ha che, nel caso 2., $\lim \alpha = \ell \lim \beta = \lim \ell\beta$, ovvero, per $x \to x_0$ i comportamenti di α e $\ell\beta$ sono gli stessi: la differenza tra le espressioni $\alpha \asymp \beta$ e $\alpha \sim \beta$ è nella costante moltiplicativa ℓ, essendo chiaro che se $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \ell$, allora $\lim \frac{\alpha}{\ell\beta} = 1$.

Teorema 3.4.4. *Valgono i seguenti risultati.*

1. *(transitività) Se α, β e γ sono tre infinitesimi simultanei tali che $\alpha = O(\beta)$ e $\beta = O(\gamma)$, allora anche $\alpha = O(\gamma)$; in particolare, se $\alpha \asymp \beta$ e $\beta \asymp \gamma$, allora anche $\alpha \asymp \gamma$.*
2. *Se α e β sono infinitesimi simultanei, allora $\alpha\beta = o(\alpha)$ e $\alpha\beta = o(\beta)$.*
3. *(principio di sostituzione degli infinitesimi) Se α, β, α_1 e β_1 sono infinitesimi simultanei tali che $\alpha_1 = o(\alpha)$ e $\beta_1 = o(\beta)$, allora*
$$\lim \frac{\alpha + \alpha_1}{\beta + \beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni si ottengono applicando la definizione di infinitesimo e la Definizione 3.4.2.

1. Per dimostrare che $\alpha = O(\gamma)$ dobbiamo valutare il limite
$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\beta}{\gamma}$$
e siccome nessuno dei due limiti a membro destro è infinito, siamo nel caso 1. o nel caso 2. della Definizione 3.4.2.
2. Tenendo conto che sia α che β sono infinitesimi, abbiamo
$$\lim \frac{\alpha\beta}{\alpha} = \lim \beta = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim \frac{\alpha\beta}{\beta} = \lim \alpha = 0,$$
sicché $\alpha\beta = o(\alpha)$ e anche $\alpha\beta = o(\beta)$.
3. In questo caso basta raccogliere:
$$\lim \frac{\alpha + \alpha_1}{\beta + \beta_1} = \lim \frac{\alpha\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)}{\beta\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta}\right)} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Il teorema è così dimostrato. $\square$

L'idea del principio di sostituzione degli infinitesimi è che il comportamento dell'infinitesimo è determinato solamente dalle funzioni o successioni che tendono a zero più lentamente, gli altri termini essendo trascurabili.

Esempi 3.4.5. Calcoliamo i seguenti limiti.

- $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{x+7x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$, perché $x^3 = o(x)$ e $7x^4 = o(x)$ per $x \to 0$ e possiamo applicare i principio di sostituzione degli infinitesimi. Notiamo che allo stesso risultato saremo arrivati raccogliendo la potenza più bassa: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{x+7x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2)}{x(1+7x^3)} = 1$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$, perché $x^3 = o(x)$ e $x^4 = o(x^2)$ per $x \to 0$ e possiamo applicare i principio di sostituzione degli infinitesimi. Notiamo che allo stesso risultato saremo arrivati raccogliendo la potenza più bassa: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{8x+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{8x} = \frac{1}{8}$, perché $x^3 = o(x)$ e $x^4 = o(8x)$ per $x \to 0$ e possiamo applicare i principio di sostituzione degli infinitesimi. Notiamo che allo stesso risultato saremo arrivati raccogliendo la potenza più bassa: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^3}{8x+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2)}{8x\left(1+\frac{x^3}{8}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{8x} = \frac{1}{8}$.

Gli stessi confronti della Definizione 3.4.2 si possono fare *mutatis mutandis*, per gli infiniti, per i quali varrà un risultato analogo al Teorema 3.4.4.

Definizione 3.4.6 (confronto di infiniti). *Siano α e β due infiniti simultanei per $x \to x_0$. Si dice che:*

1. *α è **un infinito** di ordine inferiore rispetto a β se $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ e si scrive $\alpha = o(\beta)$;*
2. *α è **un infinito** dello stesso ordine rispetto a β se esiste $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \ell$ o, equivalentemente, se esistono $0 < m < M < +\infty$ tali che si abbia $m \le \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \le M$ definitivamente; in questo caso si scrive $\alpha = O(\beta)$; inoltre, si usano le notazioni $\alpha \asymp \beta$ se $\ell \neq 1$ e $\alpha \sim \beta$ se $\ell = 1$;*
3. *α è **un infinito** di ordine superiore rispetto a β se $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$;*
4. *α e β non sono confrontabili negli altri casi.*

Teorema 3.4.7. *Vale il principio di sostituzione degli infiniti: se α, β, α_1 e β_1 sono infiniti simultanei tali che $\alpha_1 = o(\alpha)$ e $\beta_1 = o(\beta)$, allora*

$$\lim \frac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dimostrazione. Basta raccogliere: $\lim \frac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1} = \lim \frac{\alpha\left(1+\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)}{\beta\left(1+\frac{\beta_1}{\beta}\right)} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$. $\square$

Esempi 3.4.8. Calcoliamo i seguenti limiti.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7}{8x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{8x^3}=0$, perché $7=o(x^2)$ per per $x\to+\infty$ e possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti. Notiamo che allo stesso risultato saremmo arrivai raccogliendo la potenza più alta: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7}{8x^3+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}{8x^3\left(1+\frac{1}{8x}\right)}=0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}-\log x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3}{x^2}=0$, perché $1/x=o(1/x^2)$ e $\log x=o(1/x^3)$ per $x\to0^+$ e possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti. Anche in questo caso il limite si può risolvere raccogliendo opportunamente i termini.

Sfruttiamo quanto presentato finora per cercare di capire meglio il rapporto tra due infinitesimi o infiniti simultanei. Negli esempi che abbiamo proposto all'inizio della sezione, abbiamo detto che per ogni esponente naturale n, le funzioni $(x-\pi)^n$ sono infinitesimi per $x\to\pi$. È un facile esercizio vedere che, presi due di loro, diciamo $\alpha(x)=\ell(x-\pi)$ e $\beta(x)=(x-\pi)^n$, il loro rapporto può tendere a qualunque valore, principalmente in funzione della potenza n. Questa osservazione ci permette di dare la seguente definizione.

Definizione 3.4.9 (ordine di infinitesimo e parte principale)**.** *Siano α e β due infinitesimi o infiniti simultanei e sia $p\in\mathbb{R}$. Si dice che α è un infinitesimo o infinito di ordine p rispetto a β se esiste $\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che*

$$\lim\frac{\alpha}{\beta^p}=\ell,$$

ovvero se $\alpha\asymp\beta^p$ e $\alpha\sim\ell\beta^p$. L'infinitesimo o infinito $\ell\beta^p$ si chiama parte principale *di α rispetto a β.*

Proposizione 3.4.10. *Siano α e β due infinitesimi o infiniti simultanei. Allora α è di ordine p rispetto a β se e solo se esistono $\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\omega=o(\beta^p)$ tale che*

$$\alpha=\ell\beta^p+\omega. \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Sia α di ordine n rispetto a β. Allora, per la Definizione 3.4.9 esiste $\ell\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $\lim\frac{\alpha}{\beta^p}=\ell$. Ma per il principio di sostituzione degli infinitesimi o degli infiniti, se $\beta_1=o(\beta^p)$ abbiamo

$$\lim\frac{\alpha}{\beta^p+\beta_1}=\lim\frac{\alpha}{\beta^p}=\ell,$$

da cui $\alpha\sim\ell(\beta^p+\beta_1)=\ell\beta^p+\omega$, dove abbiamo posto $\omega=\ell\beta_1$, che è ancora $o(\beta^p)$. La relazione appena trovata si può scrivere nella forma (3.16) perché si è messo in evidenza che in un intorno di x_0 il comportamento di α è quello che $\ell\beta^p$ a meno di termini trascurabili.

Viceversa, se vale la (3.16) con $\omega=o(\beta^p)$ abbiamo

$$\lim\frac{\alpha}{\beta^p}=\lim\frac{\ell\beta^p+\omega}{\beta^p}=\lim\frac{\ell\beta^p}{\beta^p}+\lim\frac{\omega}{\beta^p}=\ell,$$

da cui segue che α è di ordine p rispetto a β. □

Abbiamo ora gli strumenti per scrivere i limiti notevoli (3.10) in forma differente, che mette in evidenza il comportamento di alcune funzioni attorno ad un punto. Ciò che presentiamo ora fa largo uso della (3.16). Valgono le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}\sin x &\sim x\\ \sin x &= x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \qquad \left.\begin{aligned}\tan x &\sim x\\ \tan x &= x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \tag{3.17a}$$

$$\left.\begin{aligned}1 - \cos x &\asymp x^2\\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \tag{3.17b}$$

$$\left.\begin{aligned}e^x - 1 &\sim x\\ e^x &= 1 + x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \qquad \left.\begin{aligned}\log(1+x) &\sim x\\ \log(1+x) &= x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \tag{3.17c}$$

$$\left.\begin{aligned}\sinh x &\sim x\\ \sinh x &= x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \qquad \left.\begin{aligned}\cosh x - 1 &\asymp x^2\\ \cosh x - 1 &\sim \frac{1}{2}x^2\\ \cosh x &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0, \tag{3.17d}$$

$$\left.\begin{aligned}(1+x)^\alpha - 1 &\asymp x\\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x\\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x)\end{aligned}\right\} \text{ per } x \to 0. \tag{3.17e}$$

3.4.1 Esplicitazione dell'o-piccolo

Il messaggio importante dei principi di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti è che se $\alpha_1 = o(\alpha)$, allora α_1 è *trascurabile* rispetto a α, ovvero il carattere di $\alpha + \alpha_1$ è determinato da quello di α. Ciò significa che *qualunque* funzione f che sia $o(\alpha)$ venga scelta come infinitesimo α_1, il carattere di $\alpha + f$ resta quello di α. Emerge quindi come un o-piccolo di qualcosa non è univocamente determinato, ma è una qualunque funzione trascurabile rispetto alla funzione di cui è o-piccolo. Insistiamo su questo concetto perché è importante assimilarlo per una corretta applicazione degli infinitesimi al calcolo dei limiti.

Riteniamo utile mostrare il processo di *esplicitazione dell'o-piccolo*, in modo da apprezzarne il significato sia teorico che pratico. Supponiamo di avere due infinitesimi simultanei α e α_1 e che $\alpha_1 = o(\alpha)$. Se da un lato la scrittura $\alpha + \alpha_1$ ha senso, riguardo alla scrittura $\alpha + o(\alpha)$ (che è quella usata nelle (3.17)) occorre fare più attenzione: tutti i termini sono funzioni *tranne* $o(x)$ e $o(x^2)$, che, come osservato, sono classi di funzioni.

Che senso hanno dunque le (3.17)? Il senso è il seguente e va ricercato nel fatto che in tutte le espressioni (3.17) compare la scrittura "per $x \to 0$": *qualunque* funzione che sia $o(x)$ (o $o(x^2)$ dove esso compare) può essere sostituita al simbolo $o(x)$ e il significato della relazione continua a valere: nel limite per $x \to 0$ il comportamento della funzione seno, ad esempio, è lo stesso dell'argomento; nelle vicinanze dell'origine, il comportamento della funzione coseno è vicino a quello della parabola $1 - x^2/2$, e così via.

Ciò detto, il processo di esplicitazione dell'o-piccolo consiste nello scrivere una funzione al posto del simbolo della classe di funzioni. Quale funzione viene scelta? Una qualunque, a patto che si metta in evidenza la sua proprietà di essere trascurabile. Allora possiamo scrivere $\alpha + o(\alpha)$ come $\alpha + \omega\alpha$, dove ω è un infinitesimo per $x \to 0$. Evidentemente, per il Teorema 3.4.4-2, basta che ω sia un infinitesimo simultaneo ad α.

Usando le funzioni (e non le successioni, ma non ci sarebbe differenza sostanziale alcuna), facciamo due esempi. Nella (3.17a), possiamo scrivere $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$ trovando una funzione che sia $o(x)$, ovvero un infinitesimo ω simultaneo ad x moltiplicato per x. Una possibile scelta sarebbe $\omega(x) = x$ e avremmo

$$\sin x = x + x\omega(x) = x + x^2 \qquad \text{per } x \to 0;$$

applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi (o il calcolo diretto raccogliendo i termini) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{o anche} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(1+x)} = 1.$$

Un'altra scelta sarebbe $\omega(x) = \tan x$ e allora avremmo

$$\sin x = x + x\omega(x) = x + x\tan x \qquad \text{per } x \to 0;$$

applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi (o il calcolo diretto raccogliendo i termini) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x + x\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{o anche} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x + x\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(1+\tan x)} = 1.$$

Nei grafici nella Figura 3.6 diamo una rappresentazione delle (3.17).

Esercizio 3.4.11. Dare tre esempi di esplicitazione dell'o-piccolo per ciascuno dei limiti in (3.17).

Esercizi 3.4.12. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Data $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{(x-1)^2}$, discutere i limiti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 + \sin(\pi/x)}{|x|}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(\pi x)}{x - 2}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan x^3} - 1}{3x\big(\cos x - e^{x^2}\big)}$.

Esempio 3.4.13. Presentiamo ora un esempio di calcolo di un limite in cui né i limiti notevoli né gli sviluppi con gli o-piccolo funzionano! Per $a, b \in \mathbb{R}$, diversi tra loro e non nulli, si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax - ax}{\sin bx - bx}. \tag{3.18}$$

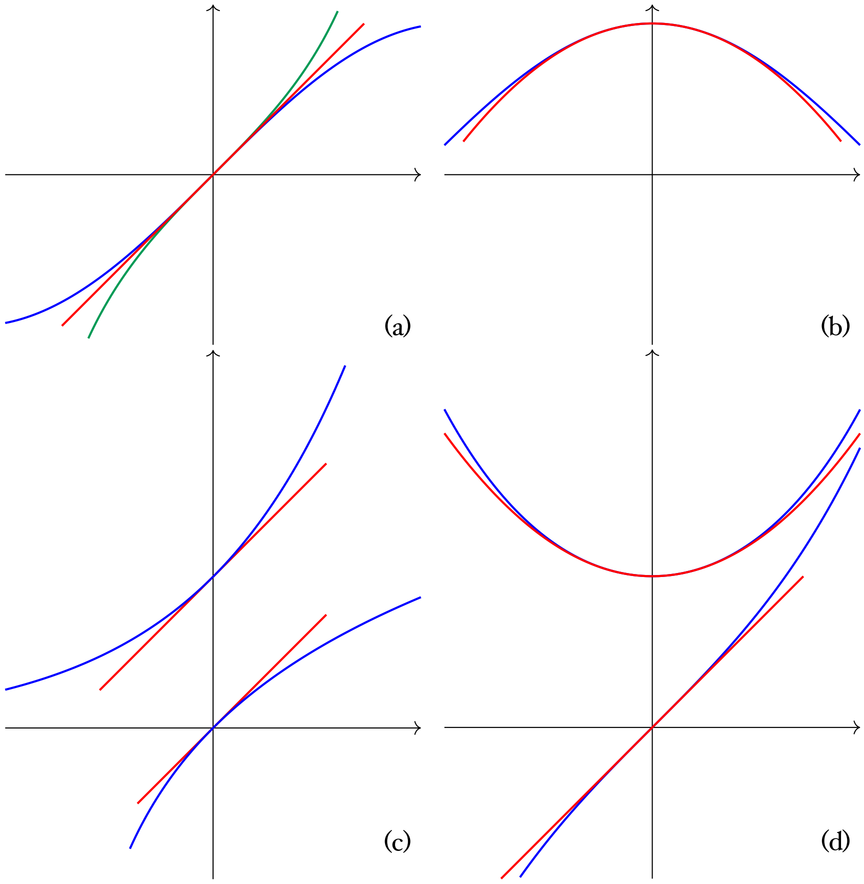


Figura 3.6: Confronti tra funzioni: (a) le formule (3.17a): in blu il seno, in verde la tangente, in rosso la retta $y = x$; (b) la formula (3.17b): in blu il coseno, in rosso la parabola $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$; (c) la formula (3.17c): in blu l'esponenziale e il logaritmo naturale; in rosso le rette $y = 1 + x$ e $y = x$; (d) la formula (3.17d): in blu il seno ed il coseno iperbolico; in rosso la retta $y = x$ e la parabola $y = 1 + \frac{1}{2}x^2$.

Siccome le funzioni al numeratore ed al denominatore sono continue, possiamo sostituire $x = 0$ ed otteniamo che il limite si presenta come forma indeterminata del tipo $[0/0]$. Ricordando il limite notevole (3.10a), una prima strategia che viene in mente è quella di raccogliere ax al numeratore e bx al denominatore e ottenere così

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax - ax}{\sin bx - bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax\left(\dfrac{\sin ax}{ax} - 1\right)}{bx\left(\dfrac{\sin bx}{bx} - 1\right)} = \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin ax}{ax} - 1}{\dfrac{\sin bx}{bx} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

In questo caso l'applicazione del limite notevole (3.10a) non ha dato i frutti sperati. Siccome altro non è che una traduzione del limite (3.10a) nel linguaggio degli o-piccolo, anche applicando la (3.17a) ci aspettiamo lo stesso risultato. Infatti,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax - ax}{\sin bx - bx} = \lim_{x\to 0}\frac{ax + o(x) - ax}{bx + o(x) - bx} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{o(x)}$$

e questo limite non si può risolvere, perché non si hanno informazioni sufficienti.

Ciò che quest'ultimo conto ci insegna è che l'approssimazione di ordine 1 del seno non è sufficiente a distinguerlo dal comportamento della retta, vicino all'origine. Sarebbe opportuno avere qualche ordine in più, ovvero avere un polinomio di ordine maggiore di 1 a membro destro nella (3.17a). Vedremo questo fatto generale quando parleremo della formula di Taylor nella Sezione 4.2.1. Per ora, possiamo solo fare un discorso intuitivo: il seno è una funzione dispari, pertanto, se esistesse (ed esisterà, ma lo dimostreremo più avanti) una sua approssimazione polinomiale, essa dovrà necessariamente essere fatta di polinomi di potenze dispari. Allora il termine successivo non sarà del tipo cx^2, ma la (3.17a) si specializzerà in $\sin x = x + cx^3 + o(x^3)$, per $x \to 0$, dove $c \in \mathbb{R}$ sarà un'opportuna costante. Forti di questa intuizione, possiamo calcolare il seguente limite

$$\begin{aligned}
L &:= \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax - ax}{(ax)^3} \overset{ax=2y}{\lim_{y\to 0}} \frac{\sin 2y - 2y}{8y^3} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cos y - 1}{4y^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cos y - \sin y + \sin y - y}{4y^3} = \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y - y}{y^3} + \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{\cos y - 1}{y^2} \\
&= \frac{1}{4}L + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo ritrovato il limite di partenza (anche se scritto con una variabile diversa) e usato la (3.10b). Ora è facile ricavare $L = -1/6$ che, per inciso, è il valore del coefficiente c nello sviluppo indicato poco sopra. Finalmente possiamo risolvere il limite (3.18) nel seguente modo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax - ax}{\sin bx - bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax - ax}{(ax^3)}\cdot\frac{(bx)^3}{\sin bx - bx}\cdot\frac{(ax)^3}{(bx)^3} = \frac{-\frac{1}{6}a^3}{-\frac{1}{6}b^3} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Segnaliamo che una soluzione più rapida si può ottenere applicando il Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital, si veda la soluzione negli Esempi 4.2.18-2 più avanti.

Capitolo 4

Calcolo differenziale

In questo capitolo affrontiamo lo studio del calcolo differenziale e delle proprietà delle funzioni ad esso legate. Si tratta di una misura della regolarità di una funzione, ovvero della sua liscezza: tanto più il grafico della funzione è liscio, ovvero non presenta spigoli o raccordi in cui le tangenti non coincidono, tanto più una funzione si dice regolare. Questa proprietà che abbiamo qui descritto a livello intuitivo ha una formalizzazione nel concetto di derivata di una funzione e, ancor meglio, nel concetto di derivate successive.

Daremo la definizione di derivata e mostreremo il legame che ha con la possibilità di approssimare una funzione con la sua retta tangente, dopodiché presenteremo i teoremi fondamentali del calcolo differenziale per funzioni di una variabile (il Teorema 4.2.1 di Rolle, il Teorema 4.2.3 di Lagrange ed il Teorema 4.2.4 di Cauchy), vedremo come da questi si potranno dedurre il Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital e i Teoremi 4.2.20 e 4.2.21 sulle formule di Taylor. Infine, impareremo come le derivate dànno informazioni sul comportamento di una funzione in termini di monotonia e, come già detto, di regolarità.

4.1 Derivate

Una misura del comportamento di una funzione avviene, tra le altre cose, attraverso lo studio della variazione della funzione al muoversi della variabile indipendente. In particolare, ha interesse confrontare la velocità di cambiamento di una funzione rapportando la variazione delle immagini alla variazioni dei punti nel dominio. Siamo già abituati a considerare aspetti di questo tipo, per esempio attraverso lo studio della monotonia della funzione. Ora ci interessa avere una misura quantitativa di questo comportamento, ovvero uno strumento che permetta di quantificare le variazioni di una funzione. Siamo abituati a considerare aspetti di questo tipo nella vita quotidiana: quando si parla di pendenza di una strada o di un percorso si misura la variazione dell'altezza rispetto ad una distanza orizzontale fissata; quando si parla di tassi d'interesse, si misura quanto il valore di un capitale investito varia in un anno; ancor più banalmente, la velocità di uno spostamento è la misura di quanto spazio si riesce a percorrere in un'unità di tempo data.

Tutte queste quantità corrispondono al calcolo di un *rapporto incrementale* di una funzione, che definiamo come il rapporto tra la variazione delle ordinate e la variazione delle ascisse. Se scriviamo la funzione come $y = f(x)$, questa quantità si può denotare con il simbolo $\Delta y/\Delta x$, dove Δ indica la variazione. Sebbene questa notazione sia molto visuale e utilizzata in molti contesti, preferiamo introdurre il rapporto incrementale in una delle due forme seguenti

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{4.1}$$

e sono il rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0. Il più delle volte useremo la prima espressione, nonostante le due siano equivalenti a patto di operare la sostituzione $x = x_0 + h$. Le formule nella (4.1) hanno senso ogniqualvolta $x_0 + h \in \operatorname{dom} f$ e $x \in \operatorname{dom} f$. Pensando al grafico di una funzione, ciascuna delle espressioni nella (4.1) indica il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, come si può vedere dalla Figura 4.1.

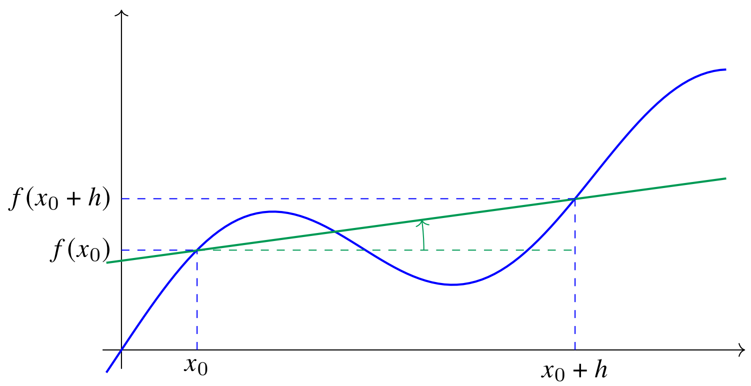


Figura 4.1: La funzione $y = f(x) = \sin x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{50}$ e la secante determinata da $x_0 = 1$ e $h = 5$, la cui pendenza è determinata dal rapporto incrementale (4.1).

Definizione 4.1.1 (derivata e derivabilità). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \operatorname{int} I$. Si dice che la funzione f è* derivabile in x_0 *se esiste finito il limite del rapporto incrementale* (4.1) *al tendere di h a zero, ovvero se esiste finito*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{4.2}$$

Il valore del limite (4.2) *si dice* derivata prima di f in x_0 *e si indica con il simbolo $f'(x_0)$*[1]. *Se I è aperto*[2] *e se f è derivabile per ogni $x \in I$ si dice che essa è* derivabile in I *e la funzione f' si chiama* funzione derivata prima *di f. Infine, se $I = [a, b]$ e esistono i limiti unilaterali*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad e \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}, \tag{4.3}$$

[1] Altri simboli usati sono

$$Df(x)|_{x=x_0}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0),$$

in cui si mette in evidenza l'aspetto di fare l'operazione di derivata (usando la lettera D) o l'aspetto di indicare la variabile rispetto alla quale si stanno facendo gli incrementi (nella notazione $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$).

[2] Il fatto che il dominio sia aperto è necessario per garantire che il rapporto incrementale abbia senso in ogni punto $x_0 \in I$. Infatti, siccome un insieme aperto contiene un intorno di ogni suo punto, come si può dedurre dalle Definizoini 3.1.6 e 3.1.8, esiste un valore $\bar{h} > 0$ piccolo a sufficienza tale che $x_0 + h \in I$ per ogni $|h| < \bar{h}$ e questo basta per costruire il rapporto incrementale.

si dice che f ammette derivata prima destra in a e derivata prima sinistra in b e queste si indicano, rispettivamente, con $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.

Osserviamo che la definizione non garantisce che il dominio della derivata prima $\operatorname{dom} f'$ sia ancora tutto il dominio I della funzione, siccome ci possono essere punti x_0 nei quali il limite del rapporto incrementale (4.1) non esiste o diverge. Allora, l'unica cosa che possiamo affermare ora è che $\operatorname{dom} f' \subseteq \operatorname{dom} f$. Torneremo su questo punto più avanti con alcuni esempi (si vedano il caso 1 negli Esempi 4.1.4 e l'Osservazione 4.1.22).

Il significato geometrico della derivata è evidente se torniamo a leggere il rapporto incrementale (4.1) come il coefficiente angolare, o pendenza, della retta secante al grafico della funzione per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. L'equazione di tale retta s secante si ottiene dalla formula

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0},$$

che dà

$$s\colon\ y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

che al tendere di h a zero tende alla retta t tangente, la cui equazione è

$$t\colon\ y = m(x - x_0) + f(x_0).$$

Si veda la Figura 4.2. Confrontando le due espressioni, si deduce che

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

se il limite a primo membro esiste finito. Abbiamo quindi ottenuto che la derivata prima di una funzione in un punto x_0 del dominio è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

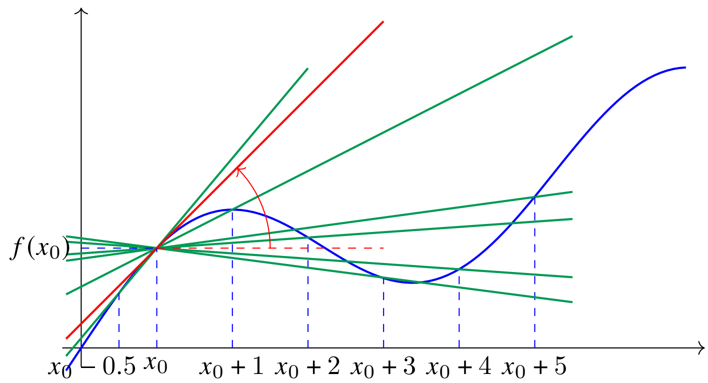


Figura 4.2: La funzione $y = f(x) = \sin x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{50}$ e la tangente al grafico nel punto $(1, \sin 1 + \frac{12}{25})$ ottenuta come limite delle secanti per $h = -\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$.

Definizione 4.1.2. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto tale che il limite (4.2) o non esiste o dà infinito. Diciamo che tale punto x_0 è un* punto di non derivabilità *di f.*

Osservazione 4.1.3. Osserviamo che la richiesta che $x_0 \in I$ è necessaria, in quanto deve essere possibile calcolare la funzione nel punto x_0 per poter definire il rapporto incrementale (4.1). Alla luce di ciò, è immediato capire che per la funzione $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$ non ha senso chiedersi se il punto $x_0 = 0$ sia di non derivabilità, non appartenendo esso al dominio. Un'ulteriore approfondimento sui punti di non derivabilità è offerto nell'Osservazione 4.1.7. □

Esempi 4.1.4. Vediamo alcuni esempi in cui il limite (4.2) non esiste o è infinito.

1. Nel primo caso vediamo un esempio principe in cui le due derivate unilaterali (4.3) calcolate in x_0 sono entrambe finite ma non dànno lo stesso valore. Sia $x_0 = 0$ e sia la funzione in considerazione il valore assoluto. Allora, per $f(x) = |x|$, abbiamo che

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

   e quindi la funzione valore assoluto non è derivabile nell'origine. Intuitivamente è quello che ci si aspetta: siccome il grafico della funzione valore assoluti ha uno spigolo nell'origine (si veda la Figura 1.4), non è possibile definire la retta tangente in quel punto. Si noti che in ogni altro punto la funzione valore assoluto risulta derivabile e la sua derivata vale -1 nella semiretta negativa delle ascisse e $+1$ nella semiretta positiva. Siamo in un caso in cui $\operatorname{dom} f' \subsetneq \operatorname{dom} f$.
2. La funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ presenta invece il caso in cui il limite tende all'infinito. Infatti, preso $x_0 = 0$, abbiamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|0+h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty,$$
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|0+h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = +\infty,$$

   siccome in entrambi i casi le frazioni si comportano come $1/\sqrt{h}$, ma nel primo caso il rapporto è negativo, mentre nel secondo il rapporto è positivo.
3. Consideriamo ora la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (o una qualunque potenza dispari) e $x_0 = 0$. In questo caso abbiamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty,$$
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty,$$

   e, anche se i limiti coincidono, non possiamo dire che la funzione è derivabile in $x_0 = 0$ perché essi valgono $+\infty$.

Gli esempi appena dati motivano la seguente definizione.

Definizione 4.1.5. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di non derivabilità di f. Inoltre, si dice che x_0 è*

1. *un* punto angoloso *se almeno una tra le due derivate unilaterali* $f'_-(x_0)$ *o* $f'_+(x_0)$ *è finita;*
2. *una* cuspide *se le derivate* $f'_-(x_0)$ *e* $f'_+(x_0)$ *valgono infinito con segni discordi;*
3. *un* punto di flesso a tangente verticale ascendente *se* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$*; un* punto di flesso a tangente verticale discendente *se* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$.

Ora che abbiamo dato la definizione di derivata e mostrato il suo significato geometrico (si potrebbe mostrare anche un semplice caso in cui si dà significato cinematico alla derivata, ma preferiamo non parlarne ora), iniziamo a vedere i rapporti tra la derivabilità e la continuità di una funzione e i primi risultati sulle proprietà della derivata. In particolare, dimostreremo che fare la derivata è un'operazione lineare e presenteremo le derivate delle funzioni elementari, che si calcolano tutte attraverso i limiti notevoli o i risultati che presentiamo ora.

Teorema 4.1.6. *Sia* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile in un punto* $x_0 \in \operatorname{int} I$*. Allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione. Per dimostrare la continuità di f in x_0 serve mostrare che $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Scrivendo $x = x_0 + h$, questo equivale a calcolare il limite per $h \to 0$, ovvero

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\\ &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0} h\right) = \underbrace{f'(x_0)}_{\neq\infty}\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

e la tesi è dimostrata. □

Osservazione 4.1.7. Abbiamo già osservato che la funzione valore assoluto non è derivabile nell'origine: ciò prova che il Teorema 4.1.6 non può essere invertito. Al contrario, è spesso utile usarlo nella forma negata

$$f \text{ non continua in } x_0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ non derivabile in } x_0. \tag{4.4}$$

In questo modo si dimostra che i punti di discontinuità di una funzione sono automaticamente punti di non derivabilità (anche se i due limiti unilaterali (4.3) in un punto di discontinuità x_0 dovessero essere finiti e coincidere). È questo il caso della funzione mantissa che abbiamo definito nella (1.45); si veda il grafico in Figura 1.15 per referenza. In ogni punto intero la funzione ha un salto pari a -1, e quindi non è continua, benché le derivate unilaterali nei punti a coordinate intere siano sempre uguali ad 1.

Alla luce di ciò, si capisce che la nomenclatura della classificazione dei punti di non derivabilità data nella Definizione 4.1.5 è valida solamente per i punti x_0 appartenenti al dominio di una funzione f che siano punti in cui f è continua. □

Teorema 4.1.8 (caratterizzazione della derivabilità)**.** *Sia* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione. Essa è derivabile in* $x_0 \in (a,b)$ *se e solo se esistono* $A \in \mathbb{R}$ *e una funzione* $\omega\colon I_r(0) \to \mathbb{R}$ *(per un certo* $r > 0$*) continua ed infinitesima nell'origine tali che*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + h\omega(h) \qquad \textit{per ogni } h \textit{ tale che } x_0 + h \in (a,b). \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Data f derivabile in x_0, definiamo $\omega\colon I_r(0) \to \mathbb{R}$ come

$$\omega(h) := \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) & \text{se } h \neq 0 \text{ e } x_0+h \in (a,b), \\ 0 & \text{se } h = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che r può essere preso come il più grande valore di $\bar{h}$ tale che $x_0 + h \in (a,b)$ per ogni $|h| < \bar{h}$. Allora, la (4.5) è verificata con $A = f'(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che valga la (4.5), dividiamo ambo i membri per $h \neq 0$ e calcoliamo il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(A + \omega(h)) = A.$$

Abbiamo così dimostrato che il limite (4.2) esiste finito e dunque $f'(x_0) = A$. Perciò la funzione è derivabile in x_0. □

Definizione 4.1.9 (differenziabilità)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che valga la (4.5) in un punto $x_0 \in (a,b)$ con $A \in \mathbb{R}$ e ω come nell'enunciato del Teorema 4.1.8. Si dice che f è* differenziabile *in x_0 e A si chiama il* differenziale *di f in x_0, in simboli $\mathrm{d}f_{x_0}$.*

La formula (4.5) dice che A è l'oggetto che fornisce la migliore approssimazione lineare di una funzione in un intorno del punto x_0, ovvero fornisce il migliore polinomio di grado 1 nell'incremento h che approssima la funzione a meno di termini di ordine superiore in h. Si noti che il termine $h\omega(h)$ nella (4.5) altri non è che un'esplicitazione di $o(h)$, come presentato nella Sezione 3.4.1.

Osservazione 4.1.10. Il Teorema 4.1.8 caratterizza la derivabilità con la differenziabilità, che abbiamo introdotto nella Definizione 4.1.9. In virtù di questo teorema, le due proprietà sono equivalenti, ma ammoniamo il lettore che ciò avviene solamente per funzioni reali di variabile reale: nei corsi più avanzati si apprenderà che la derivabilità e la differenziabilità per funzioni di più variabili sono proprietà differenti e che la prima è più debole della seconda: sarà la differenziabilità, nei contesti più generali, a garantire la continuità di una funzione, e non la derivabilità. □

La sola Definizione 4.1.1 di derivata ci permette di stabilire le regole di calcolo fondamentali.

Teorema 4.1.11 (regole di derivazione – I)**.** *Siano $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x_0 \in (a,b)$. Allora*

1. *la funzione somma $f+g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e vale*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{4.6a}$$
2. *la funzione $cf\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, è derivabile in x_0 e vale*
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0); \tag{4.6b}$$
3. *la funzione prodotto $fg\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e vale*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0); \tag{4.6c}$$

4. *se* $f(x_0) \neq 0$, ***la funzione*** $1/f$ ***è derivabile in*** x_0 *e vale*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}; \tag{4.6d}$$

5. *se* $g(x_0) \neq 0$, ***la funzione*** f/g ***è derivabile in*** x_0 *e vale*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{4.6e}$$

Dimostrazione. Le (4.6) si dimostrano applicando la definizione.

1. Abbiamo

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

2. Come sopra, abbiamo

$$\begin{aligned}(cf)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = cf'(x_0).\end{aligned}$$

3. In questo caso serve sottrarre e aggiungere opportunamente un termine

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} g(x_0+h)\right) \\ &\quad + f(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il Teorema 4.1.6 che implica la continuità di g, permettendo di passare al limite.

4. Anche in questo caso si tratta di un semplice calcolo

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x_0+h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{hf(x_0+h)f(x_0)} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h}\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x_0)f(x_0+h)}\right) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)},\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato ancora una volta il Teorema 4.1.6.

5. Combinando la (4.6c) e la (4.6d) otteniamo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

La dimostrazione è conclusa. □

La (4.6a) e (4.6b) mostrano che la derivata è operatore lineare, secondo la seguente definizione.

Definizione 4.1.12 (operatore lineare)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un operatore tra funzioni, ovvero una funzione che ha come dominio e codominio insiemi di funzioni. Si dice che $\mathcal{L}$ è un* operatore lineare *se, per ogni $f, g \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale*

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g). \tag{4.7}$$

Osservazione 4.1.13. È facile vedere che le (4.6a) e (4.6c) si possono estendere ad un numero finito di addendi o fattori, rispettivamente. Infatti valgono le seguenti relazioni:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x), \tag{4.8a}$$

$$D\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(x)\prod_{j\neq i} f_j(x)\right). \tag{4.8b}$$

come si verifica con un calcolo diretto. □

Teorema 4.1.14 (regole di derivazione – II: derivata della funzione composta, regola della catena)**.** *Siano $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $\operatorname{im}(f) \subseteq (c,d)$, f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e g è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$. Allora la composizione $g \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e vale la formula*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0). \tag{4.9}$$

Dimostrazione. Grazie al Teorema 4.1.6, la derivabilità di f in x_0 ne implica la continuità: allora lo scarto $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$ tende a 0 per $h \to 0$. Calcoliamo, usando la definizione,

$$\begin{aligned}
(g\circ f)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\\
&= \lim_{k\to 0}\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))}{k}\cdot f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

e la (4.9) è dimostrata. □

Teorema 4.1.15 (regole di derivazione – III: derivata della funzione inversa)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente e continua sia $g\colon (f(a), f(b)) \to (a,b)$ la funzione inversa f^{-1}. Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Notiamo che per il Teorema 3.2.21 anche la funzione g è strettamente crescente e continua. Dato $k \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 + k \in (f(a), f(b))$, abbiamo che esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h = g(y_0 + k)$, da cui $f(x_0 + h) = f(g(y_0 + k)) = y_0 + k$. Allora, invocando la continuità di entrambe le funzioni, abbiamo che $h \to 0$ quando $k \to 0$ e dunque

$$g'(y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

dove abbiamo usato il Teorema 3.1.17-4. □

4.1.1 Derivate delle funzioni elementari

Le derivate delle funzioni si possono calcolare tutte mediante la definizione, utilizzando i Teoremi 4.1.11, 4.1.14 e 4.1.15, assieme al Teorema 3.1.29 sui limiti notevoli di funzioni.

Teorema 4.1.16 (derivate delle funzioni elementari)**.** *Valgono le seguenti formule di derivazione, in cui utilizziamo il simbolo D per indicare l'operazione di derivazione e $a, k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

$$D[k] = 0, \quad D[x] = 1, \quad D[x^n] = nx^{n-1}, \quad D[x^{1/n}] = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}}, \tag{4.11a}$$

$$D[\sin x] = \cos x, \quad D[\cos x] = -\sin x, \tag{4.11b}$$

$$D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad D[\cot x] = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x, \tag{4.11c}$$

$$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{4.11d}$$

$$D[\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2} = -D[\operatorname{arccot} x], \tag{4.11e}$$

$$D[e^x] = e^x, \ D[a^x] = a^x \log a, \quad D[\log x] = \frac{1}{x}, \ D[\log_a x] = \frac{1}{x \log a}, \tag{4.11f}$$

$$D[\sinh x] = \cosh x, \quad D[\cosh x] = \sinh x, \quad D[\tanh x] = 1 - \tanh^2 x, \tag{4.11g}$$

$$\begin{gathered} D[\operatorname{sett}\sinh x] = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad D[\operatorname{sett}\cosh x] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ D[\operatorname{sett}\tanh x] = \frac{1}{1 - x^2}. \end{gathered} \tag{4.11h}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni delle (4.11) si ottengono applicando la definizione. Vediamole una per una.
Dimostrazione delle (4.11a):

$$D[k] = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = 0; \quad D[x] = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1;$$

$$\begin{aligned} D[x^n] &= \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h} = x^n \lim_{h\to 0} \frac{1 + n\frac{h}{x} + o(h/x) - 1}{h} \\ &= x^n \lim_{h\to 0} \left(\frac{n}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{o(h)}{h}\right) = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

da cui, generalizzando a

$$D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.11i}$$

(che si può ricavare utilizzando il limite notevole (3.10e)), otteniamo

$$D[x^{1/n}] = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}}.$$

In particolare, per $n = 2$ abbiamo $D\left[\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dimostrazione delle (4.11b): si applicano le formule di addizione del seno e del coseno.

$$\begin{aligned}
D[\sin x] &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}\\
&= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \cos x;\\
D[\cos x] &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}\\
&= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x.
\end{aligned}$$

Dimostrazione delle (4.11c): si applicano la (4.6e) e le (4.11b).

$$\begin{aligned}
D[\tan x] =& D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x;\\
D[\cot x] =& D\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.
\end{aligned}$$

Dimostrazione delle (4.11d): si applicano il Teorema 4.1.15 e le (4.11b). Per maggiore chiarezza nella derivazione della formula, chiamiamo y la variabile della funzione inversa. Si tratta semplicemente di scrivere x al posto di y nella formula finale.

$$\begin{aligned}
D[\arcsin y] =& \left.\frac{1}{D[\sin x]}\right|_{y=\sin x} = \left.\frac{1}{\cos x}\right|_{y=\sin x} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\right|_{y=\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}};\\
D[\arccos y] =& \left.\frac{1}{D[\cos x]}\right|_{y=\cos x} = \left.\frac{1}{-\sin x}\right|_{y=\cos x} = \left.\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\right|_{y=\cos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione delle (4.11e): si applicano il Teorema 4.1.15 e le (4.11c).

$$D[\arctan y] = \left.\frac{1}{D[\tan x]}\right|_{y=\tan x} = \left.\frac{1}{1+\tan^2 x}\right|_{y=\tan x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Dimostrazione delle (4.11f): si applicano la definizione di derivata, la (3.10c), la (4.9) e le proprietà delle funzioni esponenziale e logaritmo.

$$\begin{aligned}
D[e^x] &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x;\\
D[a^x] =& D\left[e^{\log a^x}\right] = D\left[e^{x\log a}\right] = e^{x\log a}\log a = a^x\log a;\\
D[\log y] =& \left.\frac{1}{D[e^x]}\right|_{y=e^x} = \left.\frac{1}{e^x}\right|_{y=e^x} = \frac{1}{y};\\
D[\log_a y] =& \left.\frac{1}{D[a^x]}\right|_{y=a^x} = \left.\frac{1}{a^x\log a}\right|_{y=a^x} = \frac{1}{y\log a}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione delle (4.11g): si applicano la definizione di derivata, la prima delle (4.11f) e la (4.6e); in alternativa, si possono applicare le formule di addizione per il seno ed il coseno iperbolico, che sono di facile dimostrazione.
Dimostrazione delle (4.11h): si applicano il Teorema 4.1.15 e le (4.11g). □

Osservazione 4.1.17. Utilizzando il Teorema 4.1.14 di derivazione della funzione composta, si possono ottenere le derivate delle composizioni $g \circ f$ dove f è una funzione generica e g è una delle funzioni le cui derivate sono scritte nelle (4.11). In particolare, si ottiene quest'ultima formula di derivazione

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right). \tag{4.11j}$$

Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} D\left[f(x)^{g(x)}\right] =& D\left[e^{\log f(x)^{g(x)}}\right] = D\left[e^{g(x)\log f(x)}\right] \\ =& e^{g(x)\log f(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ =& f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 4.1.18. Calcolare le derivate delle funzioni
(a) $f(x) = x^x$; (b) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$; (c) $f(x) = x^{x^x}$.

4.1.2 Derivate successive

Abbiamo visto, nella sezione precedente, che se una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$ essa genera la funzione derivata prima $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni punto $x \in (a,b)$ il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$. Al di là della sua origine, la funzione f' è essa stessa una funzione definita in (a,b), della quale si può calcolare la derivata prima $(f')'$ con la stessa procedura della Definizione 4.1.1 considerando il limite del rapporto incrementale (4.1) della funzione f'. Possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 4.1.19 (derivate successive)**.** *Sia $f\colon a, b \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e sia $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ la sua derivata prima in (a,b). Se esiste finito il limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \tag{4.12}$$

del rapporto incrementale della derivata prima, si dice che f ammette derivata seconda *in x_0 oppure che f è* derivabile due volte in x_0 *e il limite* (4.12) *si denota con $f''(x_0)$. Se la funzione f ammette derivata seconda in ogni punto di (a,b), allora è definita la* funzione derivata seconda di f, $f''\colon (a,b) \to \mathbb{R}$.
In modo analogo si possono definire le derivate di tutti gli ordini $k \in \mathbb{N}$, considerando i limiti dei rapporti incrementali delle derivate di ordine $k-1$.

Esercizio 4.1.20. Dimostrare che $D^k[xe^x] = (x+k)e^x$.

Definizione 4.1.21. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f appartiene alla* classe di regolarità $C^k(I)$*, o che f è di classe C^k su I se f ammette derivate fino all'ordine k ed esse sono tutte continue. Se f ammette derivate di ogni ordine e queste sono tutte funzioni continue, si dice che $f \in C^\infty(I)$ o che f è* liscia*. Si usa anche dire che $f \in C^0(I)$ per dire che f è una funzione continua.*

Osservazione 4.1.22. Osserviamo che, naturalmente, $C^{k+1}(I) \subseteq C^k(I)$, poiché una funzione che ammette $k+1$ derivate continue necessariamente ne ammette k continue. Non è facile dimostrare che l'inclusione è in realtà stretta, ovvero, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste almeno una funzione di classe C^k ma non di classe C^{k+1}. Per poter dare degli esempi precisi, occorre attendere di avere a disposizione il Teorema 4.2.14, ma possiamo già mostrare come questo fenomeno accade se $k = 0$: vogliamo mostrare che esiste una funzione che è continua ma non derivabile: la funzione $f(x) = |x|$ assolve a questo compito. In questo caso, succede anche che, necessariamente, $\operatorname{dom} f' \subsetneq \operatorname{dom} f$. Torneremo più approfonditamente su questa questione nell'Osservazione 4.2.15. □

Osservazione 4.1.23 (*importante*)**.** Elaborando sull'Osservazione 4.1.22, presentiamo un altro esempio di funzione $f \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$. Mentre con l'esempio di $x \mapsto |x|$ eravamo nella situazione in cui la funzione non fosse derivabile (in $x = 0$, nello specifico), in questo caso mostriamo qualcosa di più sottile, ovvero che si può avere una funzione derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$, ma non di classe $C^1(\mathbb{R})$, ovvero tale che la sua derivata non è continua. La funzione che esaminiamo è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

la cui continuità per ogni $x \neq 0$ è conseguenza del Teorema 3.2.9 di continuità della funzione composta, mentre per $x = 0$ è frutto del semplice calcolo

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

siccome siamo in presenza di un prodotto di una funzione limitata (il seno) per una infinitesima (il quadrato). Allora $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Veniamo ora allo studio della derivata prima: per ogni $x \neq 0$, il Teorema 4.1.14 di derivazione della funzione composta garantisce che f è derivabile, con derivata che ha l'espressione

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4.13}$$

come si può facilmente ottenere dalle formule (4.9), (4.11a) e (4.11b). Per calcolare la derivata nell'origine, è necessario applicare la definizione

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

presentandosi ancora un caso di prodotto di una funzione limitata (il seno) per una infinitesima (l'identità). La funzione f è dunque derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia, la formula (4.13) definisce una funzione che nell'origine non è continua (non ammette limite, infatti), per cui la funzione $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è continua nell'origine. Allora abbiamo dimostrato che $f \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$. □

4.2 I teoremi fondamentali del calcolo differenziale

In questa sezione presentiamo i teoremi fondamentali del calcolo differenziale, che mettono in luce le proprietà delle funzioni che ammettono derivata prima. Vedremo come l'esistenza della derivata prima dà molte informazioni sul comportamento di una funzione. Questa sezione è di fondamentale importanza per la ricchezza dei risultati matematici che contiene e perché fa da preparazione ai risultati della sezione successiva grazie ai quali potremo effettuare lo studio delle funzioni e delle proprietà dei loro grafici.

Teorema 4.2.1 (Rolle)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Siccome f è continua in $[a,b]$, possiamo applicare il Teorema 3.2.10 di Weierstrass che garantisce che esistono il massimo M ed il minimo m di $f([a,b])$ e due punti $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$. Se accade che entrambi x_m e x_M sono gli estremi dell'intervallo $[a,b]$, allora, siccome $f(a) = f(b)$ si ha che $m = M$, quindi la funzione f è costante. Necessariamente, ogni punto $\xi \in (a,b)$ è tale che $f'(\xi) = 0$.

Al contrario, supponiamo che almeno uno tra i due punti x_m e x_M sia interno ad (a,b) e prendiamo $x_M \in (a,b)$ per fissare le idee. Consideriamo ora $0 \neq h \in \mathbb{R}$ tale che $x_M + h \in (a,b)$ e osserviamo che il rapporto incrementale in x_M gode delle seguenti proprietà

$$\frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } h > 0, \\ \geq 0 & \text{se } h < 0, \end{cases}$$

poiché il numeratore è sempre negativo, essendo x_M un punto di massimo. Passando al limite per $h \to 0^{\pm}$ otteniamo

$$f'_{+}(x_M) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \leq 0; \quad f'_{-}(x_M) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} \geq 0,$$

ma siccome f è derivabile in $x_M \in (a,b)$ per ipotesi, le due derivate direzionali appena calcolate devono coincidere, e questo può accadere solo se sono entrambe nulle. Allora la tesi vale con $\xi = x_M$. □

Si è visto nella dimostrazione come tutte e tre le ipotesi sono state utilizzate per giungere al risultato. È un buon esercizio cercare di capire che cosa succede se anche una sola di queste non fosse soddisfatta: il teorema non varrebbe e sarebbe possibile trovare funzioni che soddisfano le rimanenti due ipotesi che non hanno nessun punto a tangenza orizzontale. Rimandiamo alla Sezione 7.4.1 per i controesempi.

Esempio 4.2.2. Presentiamo ora un esempio di applicazione del Teorema 4.2.1 di Rolle allo studio degli zeri di una funzione. Segnaliamo che quello che presentiamo non è l'unico metodo per giungere al risultato, ma è uno adeguato rispetto alle conoscenze maturate finora. Il problema è il seguente: vogliamo dimostrare che l'equazione $e^x + x^3 = 0$ ha una sola soluzione reale. Possiamo procedere nel seguente modo: calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$ si ottiene che essi sono $\pm\infty$ e dunque la funzione è definitivamente negativa in un intorno di $-\infty$ e definitivamente positiva in un intorno di $+\infty$. Applicando il Teorema 3.2.7 della permanenza del segno, otteniamo che esistono $a < b$ tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Applicando il Teorema 3.2.12 degli zeri alla funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x + x^3$, otteniamo che esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = e^\xi + \xi^3 = 0$: abbiamo dunque trovato una soluzione dell'equazione. Dobbiamo ora dimostrare che essa è unica. Procediamo per assurdo: se esistessero due soluzioni $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, avremmo che $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ e potremmo applicare il Teorema 4.2.1 di Rolle alla funzione $f|_{[\xi_1,\xi_2]}$. Che f è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ è evidente. Allora troveremmo un punto $\zeta \in (\xi_1, \xi_2)$ tale che $f'(\zeta) = e^\zeta + 3\zeta^2 = 0$, ma ciò è assurdo perché $f'(x) = e^x + 3x^2$ è strettamente positiva.

Teorema 4.2.3 (del valor medio – Lagrange). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \qquad \textit{ovvero} \qquad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{4.14}$$

Cogliamo subito l'occasione per presentare il significato geometrico della formula (4.14): essa afferma che, nelle condizioni specificate dal teorema, esiste un punto interno all'intervallo sul quale le funzione è definita che ha la stessa pendenza della retta secante passante per gli estremi del grafico della funzione. È possibile che esista più di un punto con le caratteristiche specificate, come si può vedere dalla Figura 4.3.

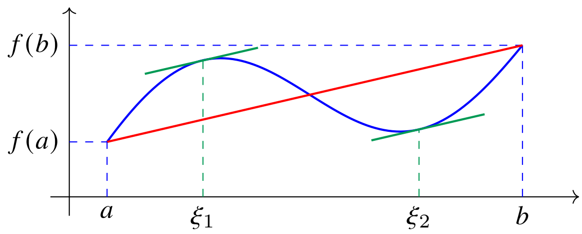


Figura 4.3: L'interpretazione geometrica del Teorema 4.2.3 di Lagrange: le due rette verdi hanno la stessa pendenza della secante rossa. I punti ξ_1 e ξ_2 sono quelli individuati dal teorema.

Dimostrazione. Ci lasciamo ispirare dal grafico in Figura 4.3 per dimostrare il teorema. ruotando il grafico in modo tale che la retta secante sia orizzontale, la tesi afferma l'esistenza di punti la cui tangente è parallela alla secante, ovvero di punti a tangenza orizzontale. Questi sono stati individuati dal Teorema 4.2.1 di Rolle nel caso in cui anche i valori assunti dalla funzione agli estremi siano uguali tra loro. Ci possiamo riportare ad una situazione analoga a quella del Teorema di Rolle sottraendo alla funzione la retta secante, che ha equazione

$$r(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Allora, la funzione $\varphi(x) := f(x) - r(x)$ è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) (perché tali sono f e r) e inoltre verifica $\varphi(a) = f(a) - r(a) = 0 = f(b) - r(b) = \varphi(b)$.

Il Teorema 4.2.1 di Rolle ci fornisce dunque l'esistenza di un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$, ma ciò equivale a

$$f'(\xi) = r'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

che è la (4.14). □

Anche in questo caso, si è visto come entrambe le ipotesi su f, di continuità in $[a, b]$ e di derivabilità in (a, b), siano state necessarie per dimostrare il Teorema 4.2.3 di Lagrange: sono servite per poter garantire continuità in $[a, b]$ e derivabilità in (a, b) della funzione φ alla quale è stato applicato il Teorema 4.2.1 di Rolle. È interessante anche in questo caso, come proposto precedentemente, cercare di trovare controesempi se una sola delle due ipotesi venisse a mancare. Rimandiamo alla Sezione 7.4.1 per i controesempi.

Teorema 4.2.4 (Cauchy)**.** *Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4.15}$$

Dimostrazione. La forma della formula della tesi e la strategia usata per dimostrare il Teorema 4.2.3 di Lagrange suggeriscono l'intuizione per dimostrare questo teorema: si applica il Teorema 4.2.1 di Rolle alla funzione

$$\varphi(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x),$$

che è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) per le ipotesi su f e g e inoltre soddisfa $\varphi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = \varphi(b)$. Allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$, ma ciò equivale alla tesi. □

Osservazione 4.2.5. Visti i tre teoremi in sequenza, ci rendiamo conto che entrambi i Teoremi 4.2.3 di Lagrange e 4.2.4 di Cauchy sono conseguenze del Teorema 4.2.1 di Rolle. Viceversa, se scegliamo nel Teorema 4.2.4 di Cauchy la funzione identità $g(x) = x$, la (4.15) diventa la (4.14); se inoltre aggiungiamo l'ipotesi che $f(a) = f(b)$ al Teorema 4.2.3 di Lagrange, otteniamo che $f'(\xi) = 0$ e ricadiamo nel Teorema 4.2.1 di Rolle. In un certo senso si potrebbe dire che i tre teoremi sono equivalenti. □

Esercizio 4.2.6. Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, derivabile due volte in (a, b) e tale che esista $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(c) = f(b)$. Dimostrare che esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f''(\xi) = 0$.

I risultati che presentiamo ora sono conseguenze del Teorema 4.2.3 di Lagrange e permettono di stabilire alcune importanti proprietà delle funzioni in relazione alla loro derivata prima.

Teorema 4.2.7. *Valgono i seguenti fatti.*

1. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora f è costante in $[a, b]$.*
2. *Siano $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$, derivabili in (a, b) e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora f e g differiscono per una costante additiva, ovvero esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$.*

3. (criterio di monotonia) *Sia* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a,b]$*, derivabile in* (a,b) *e tale che* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a,b)$*. Allora* f *è (debolmente) crescente in* $[a,b]$*. Tesi analoghe valgono,* mutatis mutandis*, per le altre disuguaglianze su* f' *(ovvero per* $>, <, \leq$*).*

Dimostrazione. Tutte e tre le tesi seguono applicando il Teorema 4.2.3 di Lagrange.

1. Fissiamo un punto $x \in (a,b]$ e applichiamo il Teorema 4.2.3 di Lagrange alla funzione $f|_{[a,x]}$: la (4.14) ci dà $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$ per un certo $\xi \in (a,x)$, da cui segue che $f(x) - f(a) = 0$ perché la derivata di f si annulla in (a,b). Allora $f(x) = f(a)$ e la tesi segue dall'arbitrarietà di x.
2. Definiamo la funzione $\varphi(x) := f(x) - g(x)$, per ogni $x \in [a,b]$. Essa è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) perché f e g lo sono. Usando l'ipotesi, abbiamo che $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e quindi per il punto 1 la funzione φ è costante e la tesi segue.
3. Consideriamo due punti $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $x_1 < x_2$. Applicando la (4.14) alla funzione $f|_{[x_1,x_2]}$ abbiamo $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$, da cui $f(x_1) \leq f(x_2)$ che ci dice che f è (debolmente) crescente.

Il teorema è dimostrato. □

Corollario 4.2.8. *La tesi del Teorema 4.2.7-3 vale anche per funzioni* $f: I \to \mathbb{R}$*, ovvero definite su un qualunque intervallo di* $\mathbb{R}$*, in particolare illimitato.*

Dimostrazione. Se la funzione f è tale che $f' \geq 0$ in I, allora lo è in ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq I$. La tesi segue dimostrando applicando il Teorema 4.2.7-3 su successioni di intervalli $[a_n, b_n]$ con $a_n \to \inf I$ e $b_n \to \sup I$ quando $n \to \infty$. □

Osservazione 4.2.9. Il Teorema 4.2.7-1, assieme alla prima delle (4.11a) caratterizza le funzioni costanti su un intervallo I come tutte e sole quelle funzioni derivabili in I la cui derivata prima è nulla. Tuttavia, bisogna prestare attenzione: la richiesta di derivabilità in I vincola la funzione costante ad assumere un solo valore. Se si rilassasse l'ipotesi e si ammettesse che una funzione f sia derivabile con derivata nulla su un intervallo eccezion fatta per una quantità al più numerabile di punti (ovvero al massimo tanti quanti i punti di $\mathbb{N}$), si caratterizzerebbero le funzioni costanti a tratti. Esempi di queste sono la funzione parte intera introdotta nella Definizione 1.5.27 il cui grafico è riportato in Figura 1.15 e la funzione segno (1.48) il cui grafico è riportato in Figura 1.16. □

Osservazione 4.2.10. segno della derivata e intervalli di monotonia Osservazione 3.1.4 e Definizione 3.1.5 □

Il Teorema 4.2.7-2 dà lo spunto per la seguente definizione.

Definizione 4.2.11 (primitiva)**.** *Sia* $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Si definisce* primitiva *di* f *in* $[a,b]$ *una qualunque funzione* $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivabile tale che* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in (a,b)$*.*

Proposizione 4.2.12. *Due qualunque primitive di una funzione* f *differiscono per una costante additiva.*

Dimostrazione. Siano F e G due primitive della funzione f. Allora si ha che $F' = f = G'$ e dunque il Teorema 4.2.7-2 permette di stabilire che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$ per ogni $x \in [a,b]$. □

Continuiamo ora con alcune conseguenze più fini del Teorema 4.2.3 di Lagrange.

Teorema 4.2.13. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Allora f è lipschitziana.*

Dimostrazione. Avere derivata limitata significa che esiste una costante $L > 0$ tale che $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in (a,b)$. Scegliamo ora due punti $x_1, x_2 \in (a,b)$ e applichiamo il Teorema 4.2.3 di Lagrange a f sull'intervallo di estremi x_1 e x_2. Prendendo i valori assoluti in entrambi i lati della (4.14) abbiamo

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

che è la condizione di Lipschitz (3.15) per la f. □

Teorema 4.2.14. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b) \setminus \{x_0\}$, per un certo $x_0 \in (a,b)$, tale che esista $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Allora esiste $f'(x_0)$ e si ha che $f'(x_0) = \ell$.*

Dimostrazione. Consideriamo $h \neq 0$ tale che $x_0 + h \in [a,b]$ e sia $R := [x_0 \wedge (x_0 + h), x_0 \vee (x_0 + h)]$. Applicando il Teorema 4.2.3 di Lagrange alla funzione $f|_R$, troviamo un punto $\xi \in \operatorname{int} R$ tale che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi).$$

Usando ora la definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $x \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap (a,b)$ si ha $|f'(x) - \ell| < \varepsilon$. Se ora $|h| < \delta_\varepsilon$ necessariamente $\xi \in I^\circ_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap (a,b)$ e dunque

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = |f'(\xi) - \ell| < \varepsilon$$

e si conclude prendendo il limite per $h \to 0$. □

Il teorema appena dimostrato permette di studiare la derivabilità di funzioni definite a tratti. Torniamo all'esempio della funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ e concentriamoci su un intervallo $[a,b]$ che contenga $x_0 = 0$. Le ipotesi del Teorema 4.2.14 sono tutte rispettate tranne l'esistenza del limite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Il teorema non si può applicare e quindi non possiamo concludere nulla; per altra via abbiamo dimostrato che la funzione non è derivabile nell'origine. Nella prossima osservazione vediamo come usare il Teorema 4.2.14 per dimostrare la derivabilità di alcune funzioni.

Osservazione 4.2.15. In questa osservazione dimostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'inclusione di C^{k+1} in C^k è stretta. Per comodità di notazione non indichiamo l'insieme su cui sono definite le funzioni, assumendo che esso sia $\mathbb{R}$ e che tutte le volte che serve applicare un teorema che può essere applicato su un intervallo chiuso e limitato possiamo prendere un intervallo $[a,b]$ qualunque, a seconda della necessità. In seno all'Osservazione 4.1.22 abbiamo già mostrato che $C^1(\mathbb{R}) \subsetneq C^0(\mathbb{R})$, esibendo la funzione $f(x) = |x|$ come esempio di una funzione in $C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$, ovvero di una funzione continua ma non derivabile.

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x|x|$. Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché è il prodotto di funzioni x e $|x|$ definite su tutto $\mathbb{R}$ (quindi $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$). Siccome queste funzioni sono continue in tutto $\mathbb{R}$, anche la f risulta continua in $\mathbb{R}$ per il Teorema 3.2.8. Studiamo ora la derivabilità di f. Siccome la funzione valore assoluto è derivabile tranne che in $x_0 = 0$, avremo che f è derivabile dappertutto tranne che in $x_0 = 0$, come conseguenza del Teorema 4.1.11-3. Sulla base di queste informazioni, possiamo affermare che $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$ e che si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ -2x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Preso un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ qualunque che contenga $x_0 = 0$, siamo nelle ipotesi del Teorema 4.2.14, siccome

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} 2x = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

e ciò prova che esiste il limite $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$. Allora la f risulta derivabile anche in $x_0 = 0$ e vale $f'(0) = 0$. Allora scopriamo che $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$. La formula precedente può essere estesa per continuità e scritta come

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0, \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad f'(x) = \left\{ \begin{matrix} 2x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{matrix} \right\} = 2|x|.$$

Abbiamo ottenuto che f' è continua, quindi $f \in C^1(\mathbb{R})$. Avendo visto che la funzione valore assoluto non è più regolare che continua, si ottiene che $f \notin C^2(\mathbb{R})$. Un altro esempio è dato dalla funzione

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

per la quale abbiamo

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

che può essere estesa, grazie al Teorema 4.2.14, a

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Tuttavia, abbiamo

$$f_2''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

che non è continua, quindi si ha $f_2 \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$. In Figura 4.4 i grafici.

Giuntando funzioni in modo che le derivate fino ad un certo ordine k siano continue mentre quella di ordine $k + 1$ è discontinua, si ottengono abbastanza facilmente esempi di funzioni in $C^k \setminus C^{k+1}$. Basta prendere

$$f_{k+1}(x) = \begin{cases} x^{k+1} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

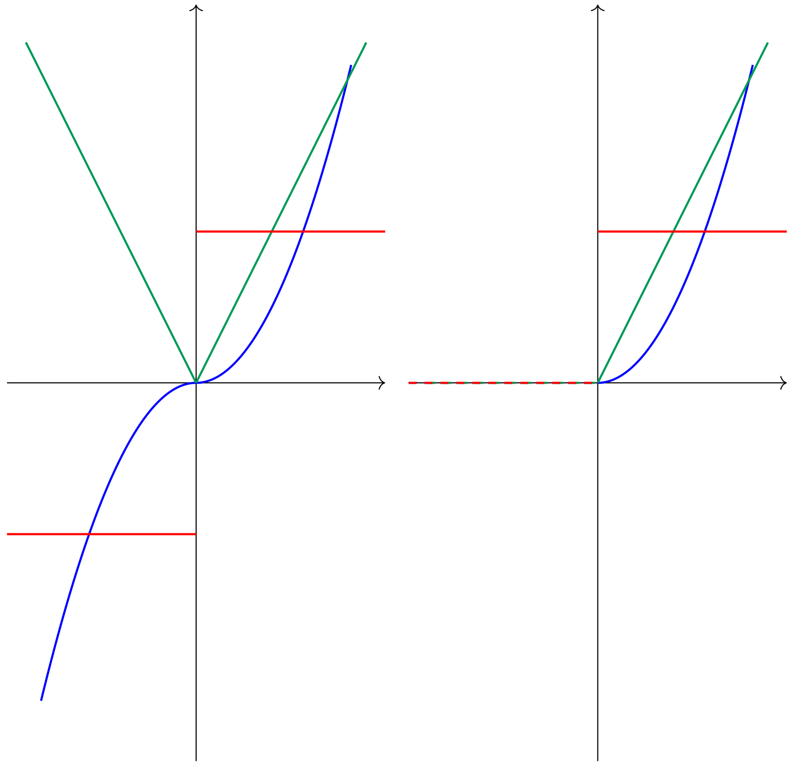


Figura 4.4: Le funzioni f e f_2 (in blu) con le loro derivate prime (definite in tutto $\mathbb{R}$) in verde e le loro derivate seconde (in rosso) definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

per la quale si verifica che tutte le derivate fino all'ordine k sono date da

$$f_{k+1}^{(j)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!}{(k+1-j)!} x^{k+1-j} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{per ogni } j \in \{0, \dots, k\}$$

e sono continue, mentre

$$f_{k+1}^{(k+1)}(x) = \begin{cases} (k+1)! & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

che non è continua. □

Esercizio 4.2.16. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax + b\cos x + ce^x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Qual è, al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$, il più grande intero $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $f \in C^k(\mathbb{R})$.

I teoremi di de l'Hôpital, che presentiamo ora, sono un utile strumento per risolvere forme indeterminate nel calcolo dei limiti.

Teorema 4.2.17 (de l'Hôpital)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Valgono i seguenti risultati.*

1. *Siano $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in (a,b) e infinitesime per $x \to a^+$. Supponiamo che g' abbia un segno in (a,b) e che esista il limite*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{4.16}$$
Allora anche $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \tag{4.17}$$
2. *Siano $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in (a,b) con $g \to \pm\infty$ per $x \to a^+$. Supponiamo che g' abbia un segno in (a,b) e che esista il limite (4.16). Allora anche $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e vale la (4.17).*
3. *Supponiamo che $a > 0$ e $b = +\infty$. Siano $f, g\colon (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in $(a,+\infty)$ e infinitesime per $x \to +\infty$. Supponiamo che g' abbia un segno in $(a,+\infty)$ e che esista il limite*
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{4.18}$$
Allora anche $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste e
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \tag{4.19}$$

Segnaliamo che le ipotesi che la derivata g' abbia un segno si possono indebolire richiedendo che $g' \neq 0$; si veda, a tal proposito, il Corollario 4.3.20.

Dimostrazione. Dimostrazione di 1. Questo caso si occupa della forma indeterminata $[0/0]$ al finito. Siccome f e g sono infinitesime per $x \to a^+$, non perdiamo in generalità ponendo $f(a) = g(a) = 0$; possiamo anche supporre che $g' > 0$. Inoltre, per ogni $x \in (a,b)$, abbiamo
$$g(x) = g(x) - g(a) = g'(\xi)(x-a) > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (a,b),$$
dove abbiamo applicato il Teorema 4.2.3 di Lagrange e sfruttato l'ipotesi sul segno di g'. Questo ci dice che in un intorno destro di a la funzione g non si annulla e pertanto ha senso considerare la funzione $f(x)/g(x)$, che ora studiamo. Applicando il Teorema 4.2.4 di Cauchy troviamo $\xi_x \in (a,x)$ tale che
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$
Abbiamo messo in evidenza la dipendenza di ξ_x dal punto x perché ci permette di fare la seguente osservazione: siccome $a < \xi_x < x$, per il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri, $\xi_x \to a^+$ quando $x \to a^+$. Prendendo dunque il limite per $x \to a^+$ nella catena di uguaglianze appena scritta abbiamo
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{\xi_x\to a^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \ell,$$

dove l'ultima uguaglianza è la (4.16), che in una volta sola dimostra l'esistenza del limite al membro sinistro e la (4.17).
Dimostrazione di 2. Questo caso si occupa della forma $[?/\infty]$, che è indeterminata se anche il numeratore tende ad infinito. Faremo la dimostrazione nel caso in cui si abbia, nella (4.16), $\ell \in \mathbb{R}$, lasciando il caso $\ell = \pm\infty$ per esercizio. Notiamo che l'ipotesi sul segno di g' serve a trarre le stesse conclusioni che al punto precedente. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, siccome la funzione g diverge per $x \to a^+$, troviamo che esiste $c > a$ tale che per ogni $x \in (a, c)$ valgono simultaneamente

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{g(c)}{g(x)}\right| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| < \varepsilon. \tag{4.20}$$

Scegliamo ora un punto $x \in (a, c)$ e riscriviamo opportunamente il rapporto $f(x)/g(x)$ in un intorno destro del punto a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)},\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, $\xi \in (x, c)$ è il punto determinato dal Teorema 4.2.4 di Cauchy. Allora, per $x \in (a, c)$, usando le stime (4.20) (ricordando la Proposizione 1.5.23), possiamo stimare

$$\ell - \varepsilon(2 + \ell - \varepsilon) \leq \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon(2 + \ell + \varepsilon),$$

che altro non è che la definizione di limite per $x \to a^+$ del rapporto $f(x)/g(x)$ (si veda l'Esercizio 3.1.26). La (4.17) segue.
Dimostrazione di 3. Questo caso si occupa della forma indeterminata $[0/0]$ all'infinito. Notiamo che la richiesta che $a > 0$ non è restrittiva, in quanto siamo interessati al comportamento delle funzioni a $+\infty$; come nei casi precedenti, non è restrittivo supporre che $g' < 0$, in modo che essa risulti strettamente decrescente in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ per il Teorema 4.2.7-(3) e quindi necessariamente positiva. Definiamo ora una nuova variabile $z := 1/x$, che appartiene all'intervallo $(0, 1/a)$, e le funzioni

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{e} \qquad G(z) = g\left(\frac{1}{z}\right),$$

che risultano infinitesime per $x \to 0^+$. Le loro derivate sono

$$F'(z) = -\frac{f'(1/z)}{z^2} \qquad \text{e} \qquad G'(z) = -\frac{g'(1/z)}{z^2} > 0.$$

Allora possiamo applicare il punto (1) alle funzioni F e G, siccome, dalla (4.18) otteniamo che

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \to 0^+} \frac{f'(1/z)}{g'(1/z)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Otteniamo dunque che esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to 0^+} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \to 0^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \ell$$

e abbiamo ottenuto la (4.19). □

Abbiamo già annunciato la potenza del Teorema 4.2.17 per il calcolo dei limiti di forme indeterminate. Per una corretta applicazione del teorema, è errato scrivere che il limite di un rapporto che dà una forma indeterminata è uguale al limite del rapporto delle derivate delle funzioni. Infatti, questa uguaglianza vale a patto che il limite del rapporto delle derivate delle funzioni esista – e prima di calcolarlo non lo si può sapere. Inoltre, se il limite del rapporto delle derivate non esiste, non è detto che il limite del rapporto di funzioni non esista (si vedano i punti 3 e 4 negli esempi seguenti).

D'ora in poi adotteremo la convenzione di scrivere $\overset{\mathrm{H}}{=}$ per indicare che l'uguaglianza è vera nel senso del Teorema 4.2.17, ovvero, se il limite a destra del simbolo $\overset{\mathrm{H}}{=}$ esiste, allora esiste anche quello a sinistra e i loro valori sono uguali.

Esempi 4.2.18. Usiamo i Teoremi 4.2.17 di de l'Hôpital per calcolare alcuni limiti.

1. *Utilizzo efficiente* vs *forza bruta*: in questo esempio mostriamo due volte il calcolo del limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{\tan x - x}$$
in modo efficace e in modo inefficace. Prima di iniziare, notiamo che tutte le funzioni sono continue in $x=0$ e quindi potremmo sostituire $x=0$ nella funzione di cui vogliamo calcolare il limite; si ottiene una forma indeterminata del tipo $[0/0]$, che dobbiamo sciogliere. Alla sola ispezione del limite, ci si accorge che contiene ben tre limiti notevoli, precisamente il secondo in (3.10a) e i due in (3.10c). Se allora raccogliamo x otteniamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{\log(1-x)}{-x}}{\dfrac{\tan x}{x}-1}$$
che si presenta ancora come forma indeterminata $\left[\frac{1-1}{1-1}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$. Vorremmo ora risolvere il limite applicando il Teorema 4.2.17-1 appena visto. Partiamo dal processo di soluzione inefficace:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{\tan x - x} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{1}{1-x}}{1+\tan^2 x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\underset{(*)}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{1}{(1-x)^2}}{2\tan x(1+\tan^2 x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{2}{(1-x)^3}}{2(1+\tan^2 x)(1+3\tan^2 x)}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Il risultato è corretto, ma è stato ottenuto alle spese di tre applicazioni del Teorema 4.2.17-1, dove avremmo dovuto fare particolare attenzione nel passaggio $(*)$ poiché la derivata del denominatore, a causa della presenza di $\tan x$ non ha un segno attorno ad $x=0$ e dovremmo spezzare il limite in due, per $x\to 0^-$ e per $x\to 0^+$, e vedere i limiti unilaterali coincidono. Va anche notato che le formule presentate qui sono già state "sistemate" raccogliendo e compattando le espressioni: nel calcolo delle derivate appaiono più termini.

Vediamo ora il processo di soluzione più efficace:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{\tan x - x} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^x-\dfrac{1}{1-x}}{1+\tan^2 x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to0}\frac{e^x(1-x)-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1-x}\\
&=\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{1-x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-x)-1}{\sin^2 x}\right)=1\cdot\left[\frac{0}{0}\right]\\
&\underset{(*)}{\overset{\mathrm{H}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{e^x-xe^x-e^x}{2\sin x\cos x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In questo svolgimento abbiamo utilizzato il Teorema 4.2.17-1 solo due volte perché ci siamo accorti che si potevano semplificare le espressioni. In particolare, in (1) abbiamo separato la seconda frazione, che essendo un rapporto di due funzioni continue e non infinitesime per $x\to0$ non può creare una forma indeterminata. Nell'uguaglianza $(*)$, come prima, bisogna curarsi del fatto che la derivata contiene $\sin x$, che non ha un segno attorno all'origine e quindi si dovrebbe spezzare il limite in $x\to0^-$ e $x\to0^+$; tuttavia, riconoscere la presenza del limite notevole (3.10a) permette di concludere immediatamente (senza dover effettuare un'ulteriore derivazione).

2. *Soluzione alternativa del limite* (3.18): possiamo applicare il Teorema 4.2.17-1 per risolvere la forma indeterminata.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\sin ax-ax}{\sin bx-bx} &\overset{\mathrm{H}}{=}\frac{a}{b}\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\frac{a}{b}\cdot\left[\frac{0}{0}\right]\\
&\overset{\mathrm{H}}{=}\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\left[\frac{0}{0}\right]\\
&=\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx}=\frac{a^3}{b^3}.
\end{aligned}$$

Abbiamo applicato due volte il Teorema di de l'Hôpital ed è facile vedere che le ipotesi sono soddisfatte.

3. *Una forma indeterminata che non si può risolvere con il Teorema 4.2.17*: calcoliamo il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x},$$
che si presenta come forma indeterminata del tipo $[\infty/\infty]$ e che ci proponiamo di sciogliere utilizzando il Teorema 4.2.17-3 (come è possibile giustificarne l'applicazione?) avendo
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x},\qquad \text{che non esiste!}$$
Tuttavia, il limite proposto si risolve agilmente raccogliendo x e osservando che il risultato è 1.

4. *Un'altra forma indeterminata che non si può risolvere con il Teorema 4.2.17*: calcoliamo il limite per $x\to0$ del rapporto tra la funzione $f(x)=x^2\sin(1/x)$ e $g(x)=x$. Entrambe le funzioni sono infinitesime per $x\to0$ e la funzione g ha derivata $g'(x)=1>0$, quindi potremmo applicare il Teorema 4.2.17-1, ottenendo
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),\qquad\text{che non esiste!}$$

Quindi il Teorema di de l'Hôpital non può essere applicato. Il limite in questione è ben più semplice da calcolare osservando che esso è $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ (limitata per infinitesima).

Esercizio 4.2.19. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \log(\cos x)}{x \sin x}$. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{\sin 2x}$. 3. $\lim_{x\to 1} (x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$.
4. $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$. 5. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$. 6. $\lim_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$.
7. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\log x}{x^{2-1/x}}$. 8. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$. 9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log[x(x+1)(x+2)(x+3)]}{\log x}$.

4.2.1 La formula di Taylor

Dedichiamo questa sezione alla trattazione della formula di Taylor, che ha notevole importanza sia in termini storici che pratici: permette infatti di approssimare una funzione qualunque con un polinomio. I polinomi sono funzioni particolari, di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, e hanno la particolarità che sono funzioni facili da calcolare (soprattutto lo erano quando la formula di Taylor è stata introdotta, quando ancora non esistevano i computer).

L'idea della formula di Taylor è di considerare una funzione f, un punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e di capire come possa essere fatta la migliore approssimazione, a mezzo di un polinomio di ordine fissato, della funzione f in un intorno del punto scelto. Ciò deve far subito pensare all'incremento e al fatto che, fissato x_0 come centro dello sviluppo, ha senso esprimere l'approssimazione polinomiale in termini dell'incremento $x_0 + h$, diciamo. Come primo passo, e come motivazione, calcoliamo la formula di Taylor per funzioni di tipo polinomiale, per i quali vediamo (senza grande sorpresa) che l'approssimazione è esatta. Differente sarà il discorso per una funzione generica, nel qual caso i Teoremi 4.2.20 e 4.2.21 daranno informazioni sia qualitative sia quantitative sullo scarto tra la funzione che stiamo approssimando e il suo polinomio di Taylor, che introdurremo debitamente.

Prima di procedere, torniamo per un attimo al Teorema 4.1.8 di caratterizzazione della derivabilità in termini della differenziabilità: la formula (4.5), per la quale abbiamo scoperto, dimostrando il teorema, che $A = f'(x_0)$, dice che la migliore approssimazione lineare (ovvero di ordine 1) dell'incremento $f(x_0+h) - f(x_0)$ di una funzione in termini dell'incremento h della variabile indipendente è dato fa un polinomio di primo grado in h il cui coefficiente è la derivata della funzione nel punto x_0 a partire dal quale ci si discosta, a meno $o(h)$, ovvero di una funzione infinitesima dell'incremento; a questo dato qualitativo si può sostituire un dato quantitativo, come ben espresso dalla (4.5), introducendo la funzione $h \mapsto \omega(h)$ infinitesima nell'origine. Notiamo, consci della pedanteria, che l'incremento h infinitesimo corrisponde a calcolare la funzione molto molto vicino al punto x_0. Una forma alternativa di scrivere la (4.5) è di considerare il punto x_0 ed un altro punto generico x e di scrivere $h = x - x_0$; allora abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\omega(x-x_0), \quad \text{con } \omega(s) \to 0 \text{ per } s \to 0. \end{aligned}$$

Scopo dell'approssimazione polinomiale dell'incremento $f(x_0+h) - f(x_0)$ sarà di esprimerlo con un polinomio di ordine n fissato in termini di h e di individuare a meno di quale infinitesimo questa approssimazione è accurata. Per questo motivo, consideriamo ora una funzione f polinomiale, ovvero un polinomio di grado n della forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

con $a_k \in \mathbb{R}$ per ogni $k = 0, \ldots, n$ (e con $a_n \neq 0$ – altrimenti il polinomio non sarebbe di ordine n) e studiamone l'incremento $P(x_0 + h) - P(x_0)$, per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$. È evidente che l'incremento sarà un polinomio di ordine n nella variabile h, ovvero esisteranno $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$P(x_0 + h) - P(x_0) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + \ldots + b_n h^n = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k \tag{4.21}$$

È d'obbligo la domanda se sia possibile conoscere i coefficienti b_k; la risposta è affermativa, sfruttando due fatti fondamentali per i polinomi: la loro regolarità, come già menzionato, che ci permette di prendere le derivate di qualunque ordine, ed il principio di identità dei polinomi, che ci permette di uguagliare i coefficienti dei termini dello stesso grado. Come prima cosa, valutiamo la (4.21) in $h = 0$ e otteniamo $0 = b_0$, ovvero il termine noto del polinomio a membro destro della (4.21) è nullo (ci si poteva aspettare questo fatto, siccome la (4.5) ci dice che la prima approssimazione dell'incremento di una funzione è di ordine 1 in h). Ora, deriviamo la (4.21) rispetto ad h e poi valutiamo l'espressione in $h = 0$

$$P'(x_0 + h) = b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2 + \ldots + n b_n h^{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad P'(x_0) = b_1$$

e facciamo la stessa cosa per la derivata seconda

$$P''(x_0 + h) = 2b_2 + 6b_3 h + 12 b_4 h^2 + \ldots + n(n-1) b_n h^{n-2} \quad \Rightarrow \quad P''(x_0) = 2b_2$$

e per la derivata terza

$$P'''(x_0 + h) = 6b_3 + 24 b_4 h + \ldots + n(n-1)(n-2) b_n h^{n-3} \quad \Rightarrow \quad P'''(x_0) = 3! b_3$$

e così via fino alla derivata di ordine n, che valutata in $h = 0$ restituirà $P^{(n)}(x_0) = n! b_n$. In questo modo siamo in grado di ricostruire il polinomio a membro destro della (4.21):

$$\begin{aligned} P(x_0 + h) - P(x_0) &= P'(x_0) h + \frac{P''(x_0)}{2} h^2 + \frac{P'''(x_0)}{3!} h^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} h^k. \end{aligned} \tag{4.22}$$

La formula (4.22) appena trovata si chiama *formula di Taylor per un polinomio* e dice che l'incremento $P(x_0 + h) - P(x_0)$ di un polinomio di grado n è ricostruito da un polinomio di grado n nell'incremento h. La formula di Taylor è dunque esatta sui polinomi. Data una funzione f qualunque che ammetta derivate almeno fino all'ordine n , emulando la (4.22) definiamo il *polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in* x_0 come

$$\begin{aligned} T^{(n)}_{f,x_0}(h) &:= f(x_0) + f'(x_0) h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \end{aligned} \tag{4.23}$$

e ci chiediamo quanto bene esso approssimi la funzione f al variare di $h \in \mathbb{R}$ ovvero allontanandosi dal centro x_0 dello sviluppo. A tale scopo, introduciamo il *resto* n-*esimo*

$$\begin{aligned} R_n(h) :=& f(x_0 + h) - T^{(n)}_{f,x_0}(h) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \\ =& f(x_0 + h) - \left\{ f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \right\}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Intuitivamente, se $T^{(n)}_{f,x_0}$ bene approssima la funzione f, il resto $R_n(h)$ sarà piccolo. Ciò è quanto stabiliscono i prossimi due teoremi.

Teorema 4.2.20 (formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n - 1$ volte in (a, b) e tale che esista la derivata n-esima $f^{(n)}(x_0)$ in un certo punto $x_0 \in (a, b)$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0+h \in (a, b)$, si ha $R_n(h) = o(h^n)$, ovvero esiste una funzione ω infinitesima per $h \to 0$ tale che*

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!} \omega(h). \tag{4.25}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi si usa la definizione di o-piccolo: la (4.25) è equivalente a dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0$, ovvero che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2} h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n}{h^n} = 0,$$

che, spezzando la frazione all'ultimo addendo al numeratore in modo che il fattore h^n si semplifichi con il denominatore, possiamo riscrivere come

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2} h^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} h^{n-1}}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Osserviamo che per $n = 1$ l'uguaglianza si riduce a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

e questa è vera perché f è derivabile in x_0. Per $n = 2$ il limite a membro sinistro è un rapporto di infinitesimi, che possiamo sciogliere usando il Teorema 4.2.17-1 di de l'Hôpital

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{2h} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

e l'uguaglianza risulta verificata. Osserviamo ora che per ogni $n > 1$ abbiamo il limite di un rapporto di infinitesimi, per cui applicando il Teorema 4.2.17-1 di de l'Hôpital $n - 1$ volte, otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!h} = \frac{1}{n!} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

come richiesto. Notiamo che tutte le applicazioni del Teorema di de l'Hôpital sono giustificate perché f possiede $n-1$ derivate in tutto l'intervallo (a,b), mentre l'ultimo passaggio al limite è giustificato perché f ammette derivata n-esima in x_0. La dimostrazione è conclusa. □

Usando la (4.25) possiamo scrivere la *formula di Taylor con resto di Peano*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= T^{(n)}_{f,x_0}(h) + o(h^n) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{h^n}{n!}\big(f^{(n)}(x_0) + \omega(h)\big), \end{aligned} \tag{4.26}$$

dalla quale emerge che per una funzione che sia derivabile n volte in un intervallo e tale che esista la derivata n-esima nel centro x_0 dello sviluppo il polinomio di Taylor di ordine n approssima la funzione a meno di $o(h^n)$. Per n grande, i polinomi h^n sono molto schiacciati vicino all'origine (e ancor di più grazie al fatto che c'è un fattore $n!$ al denominatore), quindi l'approssimazione è estremamente buona. La richiesta di regolarità sulla funzione può tuttavia non essere semplice da soddisfare.

Il Teorema 4.2.20 della formula di Taylor con il resto di Peano dà un'informazione qualitativa sulla funzione e su come essa si discosta dal suo polinomio di Taylor. Il successivo Teorema 4.2.21 della formula di Taylor con il resto di Lagrange dà invece informazioni quantitative sull'errore. Invitiamo a prestare attenzione alle differenti richieste di regolarità per la funzione.

Teorema 4.2.21 (formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in (a,b) e $n+1$ volte in $(a,b) \setminus \{x_0\}$, per un certo $x_0 \in (a,b)$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in (a,b)$, esiste un punto ξ interno all'intervallo che ha per estremi x_0 e $x_0 + h$ tale che*

$$R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.27}$$

Dimostrazione. Per comodità di notazione definiamo $I := (x_0 \wedge (x_0+h), x_0 \vee (x_0+h))$ l'intervallo di estremi x_0 e x_0+h. Introduciamo la funzione

$$q(h) := \frac{R_n(h)}{h^{n+1}}, \tag{4.28}$$

da cui, manipolando i simboli, otteniamo che $R_n(h) = h^{n+1}q(h)$ e dunque $R_n(h) - h^{n+1}q(h) = 0$, che scritta esplicitamente è

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h - \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n - h^{n+1}q(h) = 0. \tag{4.29}$$

Con la funzione q definita nella (4.28), la tesi (4.27) è dimostrata se dimostriamo che esiste $\xi \in I$ tale che

$$q(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{4.30}$$

Definiamo la funzione $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ tramite la formula

$$\begin{aligned} \varphi(x) :=& f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x_0+h-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - (x_0+h-x)^{n+1}q(h) \\ =& f(x_0+h) - f(x) - (x_0+h-x)f'(x) - \frac{(x_0+h-x)^2}{2}f''(x) \\ & - \dots - \frac{(x_0+h-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - (x_0+h-x)^{n+1}q(h) \end{aligned} \tag{4.31}$$

e notiamo che φ è continua in $\bar{I} = [x_0 \wedge (x_0 + h), x_0 \vee (x_0 + h)]$ perché f e le sue derivate fino all'ordine n lo sono, così come lo è q, essendo una combinazione delle derivate di f fino all'ordine n. Siccome $I \subseteq (a, b) \setminus \{x_0\}$ e lì la funzione f ammette derivata di ordine $n + 1$, abbiamo anche che φ è derivabile in I. Calcoliamo ora φ agli estremi di $\bar{I}$: usando la (4.29), abbiamo $\varphi(x_0) = 0$, mentre è immediato vedere dalla definizione (4.31) che $\varphi(x_0 + h) = 0$. Possiamo dunque applicare alla funzione φ il Teorema 4.2.1 di Rolle che garantisce l'esistenza di un punto $\xi \in I$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$. Ora scriviamo attentamente la derivata di φ e poi vediamo come la condizione $\varphi'(\xi) = 0$ altro non è che la (4.30).

Nella prima riga della (4.31) ci sono tre termini; di essi, il primo è costante rispetto ad x, quindi si perde nella derivata; l'ultimo è un polinomio in x, quindi la sua derivata è

$$D\big[-(x_0 + h - x)^{n+1} q(h)\big] = (n + 1)(x_0 + h - x)^n q(h); \tag{4.32}$$

il termine mediano è una sommatoria in cui ogni addendo è il prodotto di due funzioni che dipendono da x e la sua derivata è

$$\begin{aligned} D\left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{(x_0 + h - x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right] &= -D[f(x)] - \sum_{k=1}^{n-1} D\left[\frac{(x_0 + h - x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right] \\ &\quad - D\left[\frac{(x_0 + h - x)^n}{n!} f^{(n)}(x)\right] \\ = - f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} &\left(\frac{(x_0 + h - x)^{k-1}}{(k - 1)!} f^k(x) - \frac{(x_0 + h - x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)\right) \\ + \frac{(x_0 + h - x)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{(n)}(x) &- \frac{(x_0 + h - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Ora ci rendiamo conto che i termini dentro l'ultima sommatoria differiscono per una unità nell'indice k e hanno segno opposto: ciò significa che si cancellano a due a due[3] e sopravvivono solo il primo addendo col segno + e l'ultimo addendo col segno $-$, i quali, a loro volta, si cancellano con $-f'(x)$ e $+\frac{(x_0+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$, rispettivamente; pertanto

$$D\left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{(x_0 + h - x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right] = -\frac{(x_0 + h - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \tag{4.33}$$

e mettendo insieme (4.32) e (4.33) abbiamo

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_0 + h - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + (n + 1)(x_0 + h - x)^n q(h).$$

La condizione $\varphi'(\xi) = 0$ diventa ora

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} = (n + 1)q(h),$$

che, riarrangiando i termini, è la (4.30) e con ciò la (4.27) è dimostrata. □

[3] Una sommatoria di questo tipo si dice *telescopica*.

Usando la (4.27) possiamo scrivere la *formula di Taylor con resto di Lagrange*

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= T^{(n)}_{f,x_0}(h) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

per un certo punto ξ nell'intervallo di estremi x_0 e x_0+h.

Esercizio 4.2.22. Scrivere le formule (4.26) e (4.34) explicitando $h = x - x_0$.

Un caso particolare delle formule di Taylor si ha quando il centro x_0 dello sviluppo è l'origine, ovvero quando $x_0 = 0$. Il polinomio in (4.23) prende il nome di *polinomio di MacLaurin di ordine n di* f e ha l'espressione

$$
\begin{aligned}
T^{(n)}_f(x) =& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
=& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Le (4.26) e (4.34), in questo caso, prendono il nome di *formule di MacLaurin* ed hanno, rispettivamente, le espressioni

$$
\begin{aligned}
f(x) &= T^{(n)}_f(x) + o((x)^n) \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{x^n}{n!}\big(f^{(n)}(0) + \omega(x)\big),
\end{aligned}
\tag{4.36a}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) =& T^{(n)}_f(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\
=& f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.
\end{aligned}
\tag{4.36b}
$$

Esercizio 4.2.23. Dimostrare che se f è una funzione pari o dispari il suo polinomio di MacLaurin $T^{(n)}_f(x)$ di qualunque ordine ha la stessa parità della funzione.

Gli sviluppi di MacLaurin delle funzioni elementari

Utilizzando le (4.36) e le formule di derivazione (4.11) è ora possibile calcolare i polinomi di Taylor (4.23) di qualunque ordine n e centrati in qualunque punto x_0 delle funzioni elementari. Presentiamo qui i polinomi di MacLaurin (4.35), ovvero quelli centrati in $x_0 = 0$, perché sono capiterà spesso di doverli utilizzare. Nello scrivere le formule che seguono terremo conto dell'Esercizio 4.2.23.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{4.37a}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \tag{4.37b}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \tag{4.37c}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \tag{4.37d}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}),$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5), \tag{4.37e}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \tag{4.37f}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \tag{4.37g}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \tag{4.37h}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) \tag{4.37i}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}),$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^7), \tag{4.37j}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \text{notare che è esatta per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{4.37k}$$

Quest'ultimo sviluppo si può generalizzare al caso di una potenza $\alpha \in \mathbb{R}$. Per questo sarà necessario utilizzare il coefficiente binomiale generalizzato definito nella (7.3) e sostituire $n \rightsquigarrow \alpha$. Tuttavia, non è possibile sommare un indice intero k da 0 fino ad $\alpha \in \mathbb{R}$. Vediamo come ovviare all'inconveniente: scrivendo N come termine ultimo della sommatoria e ponendo il coefficiente binomiale uguale a zero se $k > n$ (si veda attentamente, nella definizione (7.2), per quali k è valida la definizione), potremmo scrivere

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} x^k \quad \text{per ogni } N \in \mathbb{N},\, N \geq n.$$

Allora abbiamo disaccoppiato la potenza di n e il termine massimo N della somma. Ora possiamo scrivere lo sviluppo della potenza α-esima:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{N} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^N) \tag{4.37l}$$

ricordando che il coefficiente binomiale generalizzato è definito per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Segnaliamo che l'interesse delle (4.37) come le abbiamo presentate è per la comodità di sostituire alle funzioni ai membri sinistri delle espressioni polinomiali che bene approssimano le funzioni a meno dell'errore, come i Teoremi 4.2.20 e 4.2.21 ci hanno insegnato. Dal punto di vista matematico ha interesse mandare il grado del polinomio all'infinito, quindi cercare il limite per $n \to \infty$ delle somme finite che sono nei membri destri. Questa operazione prende il nome di *serie* ed è oggetto di studio in corsi più avanzati analisi matematica. Gli sviluppi (4.37) prenderanno il nome di *sviluppi in serie (di Taylor)* ed avrà interesse stabilire per quali valori di x essi restituiranno il valore nel punto x della funzione che si sta sviluppando. Questa proprietà si chiama *analiticità*. Per l'esponenziale (e quindi per le funzioni iperboliche), per il seno e per il coseno, ogni $x \in \mathbb{R}$ sarà tale che la funzione calcolata in x e la somma della serie valutata in x daranno lo stesso valore (quindi si dirà che queste funzioni sono analitiche in tutto $\mathbb{R}$), mentre per il logaritmo (4.37b) e la potenza (4.37k) e (4.37l) saranno accettabili solo $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x| < 1$; per la tangente (4.37e) saranno accettabili solo $x \in \mathbb{R}$ tali che $|x| < \pi/2$.

Esercizio 4.2.24. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon I_r(x_0) \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno di x_0 di raggio $r > 0$. Si supponga che f sia derivabile in $I_r(x_0)$ e che esista la derivata seconda $f''(x_0)$ di f nel solo punto x_0. Dimostrare che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0). \tag{4.38}$$

Presentiamo tre diverse dimostrazioni e offriamo qualche commento alla fine.

1. Applichiamo il Teorema 4.2.4 di Cauchy alle funzioni $t \mapsto F(t) := f(x_0+t) + f(x_0-t)$ e $t \mapsto G(t) := t^2$, che sono evidentemente definite per $t \in I_r(0)$, sull'intervallo $[0,h]$. Osserviamo che non è restrittivo considerare che $h < r$, siccome h tende a zero. La (4.15) per F e G diventa quindi

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} &= \frac{F(h)-F(0)}{G(h)-G(0)} = \frac{F'(\xi_h)}{G'(\xi_h)} \\ &= \frac{f'(x_0+\xi_h) - f'(x_0-\xi_h)}{2h}, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il Teorema 4.1.14 di derivazione della funzione composta e dove $\xi_h \in [0,h]$ (e in particolare $\xi_h \to 0$ per $h \to 0$ per il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri). Allora dimostriamo la (4.38) se dimostriamo che

$$\lim_{\xi_h\to 0} \frac{f'(x_0+\xi_h)-f'(x_0-\xi_h)}{2\xi_h} = f''(x_0).$$

Manipoliamo il membro sinistro

$$\begin{aligned}
&\lim_{\xi_h\to 0} \frac{f'(x_0+\xi_h)-f'(x_0-\xi_h)}{2\xi_h} \\
&= \lim_{\xi_h\to 0} \left(\frac{f'(x_0+\xi_h)-f'(x_0)}{2\xi_h} + \frac{f'(x_0)-f'(x_0-\xi_h)}{2\xi_h} \right) \\
&= \lim_{\xi_h\to 0} \left(\frac{f'(x_0+\xi_h)-f'(x_0)}{2\xi_h} + \frac{f'(x_0-\xi_h)-f'(x_0)}{-2\xi_h} \right) = f''(x_0),
\end{aligned}$$

come volevamo.

2. Applicando il Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital alla frazione al membro sinistro della (4.38) otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} = f''(x_0),
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene con lo stesso ragionamento che per la prima dimostrazione.

3. Notiamo che la funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema 4.2.20 sulla formula di Taylor con resto di Peano e pertanto la (4.26) dà

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2) \\
f(x_0-h) &= f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2+o(h^2) \\
&= f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)
\end{aligned}$$

e dunque abbiamo $f(x_0+h)+f(x_0-h) = 2f(x_0)+f''(x_0)h^2+o(h^2)$ e

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2} = f''(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{o(h^2)}{h^2} = f''(x_0).
\end{aligned}$$

Notiamo che siccome il Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital ed il Teorema 4.2.20 della formula di Taylor con il resto di Peano sono conseguenze del Teorema 4.2.4 di Cauchy, le dimostrazioni proposte sono tutte equivalenti.

Esercizi 4.2.25. Svolgere i seguenti esercizi.

1. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\left(e^x + \dfrac{2\log(\cos x)}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x}}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x\sin x}$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} x[\arctan(\log x) - \arctan x]$. [Suggerimento: usare una nota (?) proprietà della funzione arcotangente semplifica i calcoli.]

2. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - \sin x - \alpha}{x^\alpha \sin x}$.

3. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, delle funzioni

(a) $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}\sin x - \log(1+x)^{1/x}$.

(b) $f(x) = 4^{1-\cos\sqrt{x}} - 2^x$. Qual è la parte principale?

4.3 Proprietà delle funzioni: monotonia e punti estremali

In questa sezione continuiamo con lo studio delle funzioni e delle loro proprietà che si possono dedurre dalla derivabilità, sia al primo ordine che di ordini superiori. Vedremo ulteriori definizioni di monotonia e di punti estremali e come individuarli, quando possibile, utilizzando informazioni sulle derivate di una funzione. Offriremo una parentesi sulle funzioni convesse e concluderemo con lo studio di funzione, articolato in vari passaggi.

Iniziamo analizzando le proprietà locali di una funzione, ovvero quelle valutate in un punto o in un suo intorno. Nella Definizione 1.5.32 abbiamo introdotto il concetto di monotonia di una funzione in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Vediamo ora come definire la monotonia in un punto. Così come allora, la definizione prescinde dalla regolarità della funzione, siccome, come si vedrà, è data solamente in termini dei valori assunti dalla funzione.

Definizione 4.3.1. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a,b)$. Si dice che f è*

- strettamente crescente in x_0 *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{per ogni } x \in I_r^-(x_0), \\ f(x) > f(x_0) & \text{per ogni } x \in I_r^+(x_0); \end{cases} \tag{4.39a}$$

- strettamente decrescente in x_0 *se esiste* $r > 0$ *tale che*

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{per ogni } x \in I_r^-(x_0), \\ f(x) < f(x_0) & \text{per ogni } x \in I_r^+(x_0); \end{cases} \tag{4.39b}$$

Osservazione 4.3.2. È interessante far notare i seguenti fatti.

1. Nella Definizione 4.3.1, la formulazione sull'esistenza del raggio $r > 0$ dell'intorno è data in modo che si possa evitare di scrivere, nelle (4.39), l'intersezione con il dominio (a, b) della funzione: infatti, se si dovesse trovare un raggio r per il quale le disuguaglianze sono verificate, ma tale che gli intorni $I_r^{\pm}(x_0)$ hanno intersezione non vuota con il complementare di (a, b), è sufficiente scegliere un altro raggio minore di r. Siccome (a, b) è aperto e x_0 è necessariamente un punto interno, per la Definizione 3.1.6 un raggio $\rho > 0$ tale che $I_\rho(x_0) \subseteq (a, b)$ esiste necessariamente.
2. La Definizione 1.5.32 di monotonia data precedentemente (che ora si presta a ricevere l'aggettivo *globale*) implica la monotonia in ogni punto secondo la Definizione 4.3.1.

Le disuguaglianze (4.39) possono essere caratterizzate (e da qui si crea il legame con le derivate di f, se queste esistono) in termini del rapporto incrementale nel seguente modo: scrivendo $x = x_0 + h$, le (4.39) si possono caratterizzare come segue:

- f è strettamente crescente in x_0 se esiste $r > 0$ tale che
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \qquad \text{per ogni } h \in \mathbb{R} \text{ tale che } |h| < r; \tag{4.40a}$$
- f è strettamente decrescente in x_0 se esiste $r > 0$ tale che
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0 \qquad \text{per ogni } h \in \mathbb{R} \text{ tale che } |h| < r. \tag{4.40b}$$

Nella Definizione 3.2.11 abbiamo detto che cosa sono massimo e minimo assoluti e punti di massimo e minimo assoluto per una funzione. Vediamo ora come si possono modificare se ci si concentra solo sull'intorno di un punto invece che su tutto il dominio.

Definizione 4.3.3. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Si dice che x_0 è*

- *un* punto di massimo relativo *(o* locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \textit{per ogni } x \in I_r(x_0) \cap [a, b]; \tag{4.41a}$$
- *un* punto di minimo relativo *(o* locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che*
$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \textit{per ogni } x \in I_r(x_0) \cap [a, b]. \tag{4.41b}$$

Punti di massimo e minimo relativo sono collettivamente detti punti di estremo relativo.

Osservazione 4.3.4. In merito alla Definizione 4.3.3 facciamo osservare che abbiamo considerato un intervallo chiuso come dominio della funzione. Questo ha il vantaggio di poter classificare anche gli estremi a e b come possibili punti di estremo relativo. Siccome essi non hanno nessun intorno completamente contenuto in $[a, b]$, essendo punti di frontiera (di veda la Definizione 3.1.6), si rende necessario includere, nelle (4.41), l'intersezione con $[a, b]$. □

Anche in questo caso, le disuguaglianze (4.41) si possono caratterizzare con l'incremento, usando una notazione che ricorda il rapporto incrementale:

- x_0 è un *punto di massimo relativo* (o *locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che

$$f(x_0+h)-f(x_0) \leq 0 \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R} \text{ tale che } |h| < r \text{ e } x_0 + h \in [a,b]; \tag{4.42a}$$

- x_0 è un *punto di minimo relativo* (o *locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che

$$f(x_0+h)-f(x_0) \geq 0 \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R} \text{ tale che } |h| < r \text{ e } x_0 + h \in [a,b]; \tag{4.42b}$$

Definizione 4.3.5. *I punti di estremo relativo introdotti nella Definizione 4.3.3 si dicono* forti *se le disuguaglianze* (4.41) *e* (4.42) *valgono in senso stretto.*

È ora chiaro perché i punti di estremo della Definizione 3.2.11 sono stati chiamati di estremo assoluto.

Osservazione 4.3.6. È importante fare la distinzione tra estremi relativi ed estremi assoluti – e tra punti di estremo relativo e punti di estremo assoluto. Quelli assoluti sono anche relativi (l'intorno che si può considerare è tutto il dominio), mentre il viceversa non vale. Inoltre, quelli relativi possono esistere anche se quelli assoluti non esistono. Vediamolo in alcuni esempi.

- La funzione $f(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3$ definita su $\mathbb{R}$. La funzione è un polinomio (quindi di classe $C^\infty(\mathbb{R})$) di terzo grado, quindi ha limiti infiniti discordi agli estremi del dominio. Per $x \to \pm\infty$ abbiamo $f(x) \to \mp\infty$, perché il comportamento è determinato dalla potenza cubica, mentre vicino a zero, dove $x^3 = o(x)$, la funzione si comporta come x. La funzione, dunque, non risulta limitata né inferiormente né superiormente; tuttavia, per continuità, ci devono essere dei punti di inversione che si rivelano essere punti di estremo relativo, come mostra il grafico nella Figura 4.5(a).
- La funzione $f(x) = \tan x - 2x$ definita in $(-\pi/2, \pi/2)$ presenta una situazione analoga alla precedente, anche se è definita in un intervallo limitato. Sapendo, dalla (4.37e), che $\tan x \sim x$ per $x \to 0$, la funzione si comporta come $-x$ vicino all'origine, e anche in questo caso devono esserci due punti di inversione, come si vede dal grafico in Figura 4.5(b).
- La funzione $f(x) = \sin x$ definita in $[0, +\infty)$ offre un ulteriore esempio di distinzione tra estremi relativi e assoluti. Ogni punto del tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, è punto di massimo assoluto, con massimo assoluto pari ad 1, mentre ogni punto del tipo $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, è punto di minimo assoluto, con minimo assoluto pari a -1. Infine, non bisogna dimenticare il punto $x = 0$: esso è di minimo relativo, come si vede nel grafico in Figura 4.6(a).
- La funzione $f(x) = x \log x$ definita in $(0, +\infty)$ e prolungata per continuità a 0 in $x = 0$ presenta una situazione analoga. In questo caso troviamo che non esiste il massimo assoluto, poiché la funzione non è superiormente limitata (infatti, $x \log x \to +\infty$ per $x \to +\infty$); la funzione presenta un punto di minimo assoluto, $x = 1/e$ con $f(1/e) = e^{-1}\log(1/e) = -1/e$, e presenta un massimo relativo nell'origine. come si vede nel grafico in Figura 4.6(b).
- Consideriamo la funzione definita da $f(x) = 1/x$ se $x \in [-3, 3] \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$, che rappresentiamo in Figura 4.7. Questa presenta una discontinuità nell'origine, non è limitata né inferiormente né superiormente ed ha un punto di massimo relativo in -3, di valore $f(-3) = -1/3$, ed uno di minimo relativo in $x = 3$, di valore $f(3) = 1/3$. Il punto $x = 0$ è tale per cui

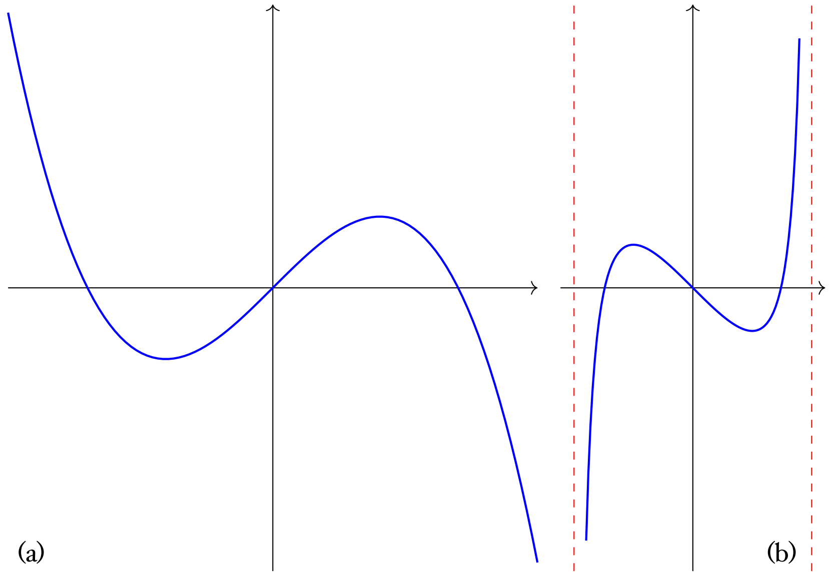


Figura 4.5: Le funzioni (a) $f(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ e (b) $f(x) = \tan x - 2x$.

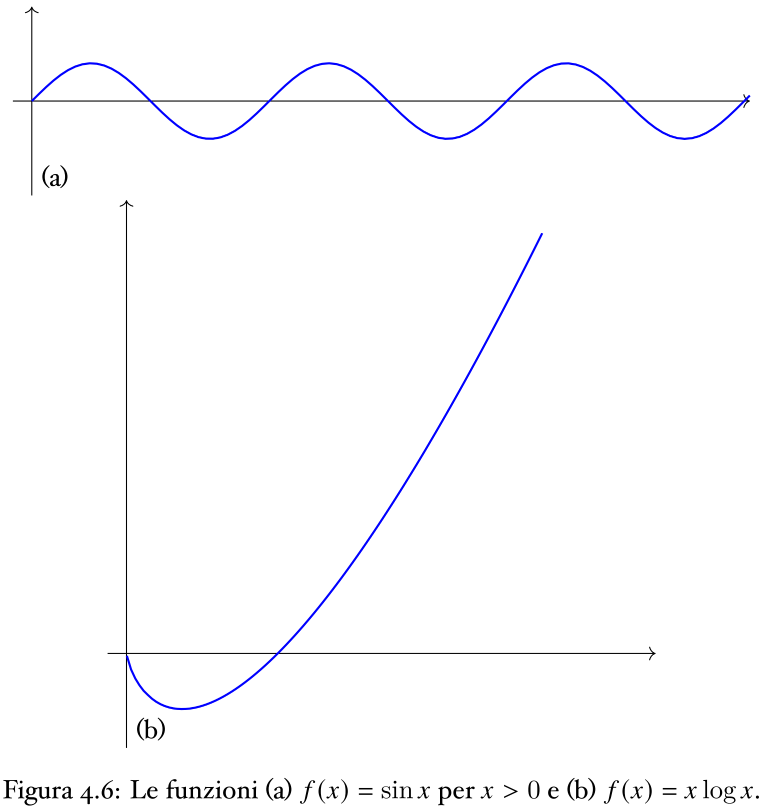


Figura 4.6: Le funzioni (a) $f(x) = \sin x$ per $x > 0$ e (b) $f(x) = x \log x$.

l'immagine è un punto isolato nel codominio e non presenta particolari proprietà di massimalità o minimalità. Ben diverso sarebbe se il dominio fosse $[-3, 0]$ o $[0, 3]$, nei quali caso $x = 0$ sarebbe un punto di massimo assoluto o minimo assoluto, rispettivamente.

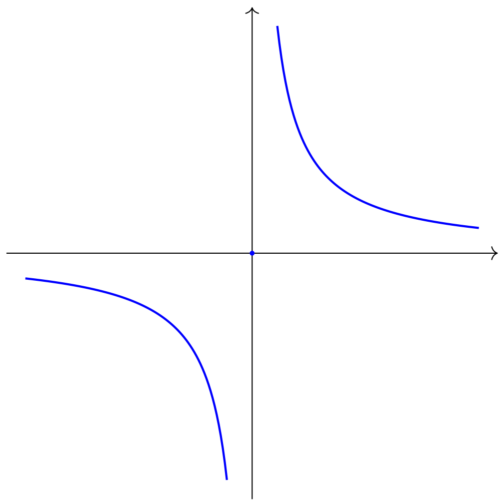


Figura 4.7: La funzione definita da $f(x) = 1/x$ in $[-3, 3] \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$.

È importante avere ben chiaro quali situazioni si possono presentare:

- il massimo assoluto ed il minimo assoluto di una funzione f, se esistono, sono unici: questo discende dal fatto che essi sono definiti come il massimo ed il minimo dell'immagine di f. L'insieme $\operatorname{im} f$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per esso vale la Proposizione 1.5.10. Massimo e minimo assoluto si leggono nell'immagine, quindi sull'asse delle ordinate nella rappresentazione grafica della funzione.
- i punti di massimo e minimo assoluto, al contrario, possono essere molteplici, in quanto possono esistere più valori nel dominio che restituiscono lo stesso valore nell'immagine. Per questo serve che la funzione non sia iniettiva, ma ci sono esempi semplici di questo caso, si pensi alle funzioni seno e coseno. Esse ammettono massimo assoluto, 1, e minimo assoluto -1, che sono assunti in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, rispettivamente.
- ci possono essere più punti di massimo e minimo relativi, si veda ad esempio la funzione $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 3x^2 - x$ sull'intervallo $[-1, 1]$, rappresentata in Figura 4.8(a), la quale conta due punti di massimo relativo ed uno di massimo assoluto, un punto di minimo relativo ed uno di minimo assoluto. Facciamo notare che l'esistenza dei punti di estremo assoluto è garantita dal Teorema 3.2.10 di Weierstrass e che in questo caso sono un punto interno (il minimo assoluto) ed un estremo (il massimo assoluto).
  Analogo discorso vale per la funzione $W(x) = \big|1 - |x|\big|$, definita sull'intervallo $[-5/2, 5/2]$, rappresentata in Figura 4.8(b): essa presente due punti di minimo assoluto in $x = \pm 1$ e due punti di massimo assoluto in $x = \pm 5/2$. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

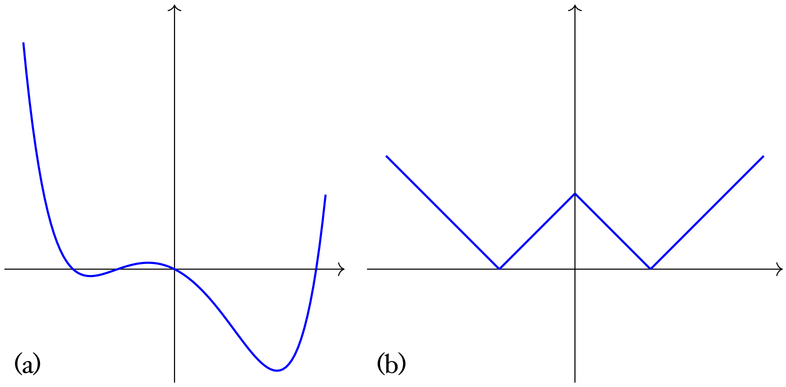


Figura 4.8: Le funzioni (a) $f(x) = 3x^6 + 2x^4 - 3x^2 - x$ sull'intervallo $[-1, 1]$ e (b) $W(x) = \big|1 - |x|\big|$ sull'intervallo $[-5/2, 5/2]$.

Le osservazioni e gli esempi fatti finora mettono in risalto alcune peculiarità degli estremi relativi e assoluti: essi dipendono dal dominio della funzione (alla stessa espressione analitica possono essere associati differenti estremi a seconda del dominio di definizione, in particolare, punti che sono di estremo per un dominio, possono non esserlo per un altro); il fatto che gli estremi del domino siano compresi o meno determina se essi sono punti di estremo relativo o assoluto; i punti di estremo possono essere anche punti di non derivabilità della funzione. □

Il commento appena fatto è di cruciale importanza per dare un metodo per la ricerca dei punti di estremo, sia relativo che assoluto. Prima di presentarlo, però, ci mancano alcuni strumenti teorici legati alle derivate di una funzione. Li introduciamo e poi diamo l'algoritmo per andare alla ricerca dei punti di massimo e minimo.

Teorema 4.3.7. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$ e tale che $f'(x_0)$ abbia un segno. Allora f è strettamente crescente in x_0 se $f'(x_0) > 0$ e strettamente decrescente in x_0 se $f'(x_0) < 0$.*

Dimostrazione. Siccome la derivata ha un segno, possiamo applicare il Teorema 3.2.7 della permanenza del segno al rapporto incrementale che definisce $f'(x_0)$: esisterà dunque $r > 0$ tale che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{ha lo stesso segno di } f'(x_0)$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < r$ e $x_0 + h \in (a,b)$. Le caratterizzazione (4.40) della Definzione 4.3.1 permettono di conlcudere. □

Corollario 4.3.8. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x_0 \in (a,b)$. Allora f è debolmente crescente in x_0 se $f'(x_0) \geq 0$ e debolmente decrescente in x_0 se $f'(x_0) \leq 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata a partire dal Teorema 4.3.7. □

Teorema 4.3.9 (Fermat)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo relativo per f. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema nel caso x_0 sia un punto di massimo relativo, la dimostrazione essendo analoga nel caso di minimo relativo. Dalla Definizione 4.3.3 e dalla (4.41a), possiamo trovare $r > 0$ tale che per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in (a, b)$ (il fatto che x_0 sia un punto interno di un intervallo aperto garantisce l'esistenza di tale r) valga $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Ma allora

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{se } h < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{se } h > 0 \tag{4.43}$$

e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo $f'_-(x_0) \geq 0$ e $f'_+(x_0) \leq 0$. Questi due limiti (unilaterali) devono coincidere se f è derivabile in x_0 e l'unico caso in cui possono farlo è se sono entrambi nulli, ma allora si ha $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ ed il teorema è dimostrato. □

Osservazione 4.3.10. Osserviamo che il Teorema 4.3.9 di Fermat vale per ogni tipo di estremi, sia forti che deboli. In particolare, nel caso di estremi forti le disuguaglianze (4.43) sono strette, ma nel limite rilassano a disuguaglianze larghe, così che si possa comunque dedurre che la derivata si annulla.

Definizione 4.3.11 (punto critico o stazionario)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Si dice che x_0 è un* punto critico *o* stazionario *se $f'(x_0) = 0$.*

Osservazione 4.3.12. Il Teorema 4.3.9 di Fermat dimostra l'estremalità (relativa) di un punto di derivabilità di una funzione come condizione sufficiente per la stazionarietà del punto.

- È importante riflettere sull'ipotesi di derivabilità: se questa venisse sollevata, non si avrebbe la garanzia che punti di estremo, relativo o assoluto, abbiano derivata nulla. A tal proposito, si pensi alla funzione valore assoluto o alla funzione W il cui grafico è rappresentato nella Figura 4.8(b). Un ulteriore esempio di punto di estremo di non derivabilità (del quale quindi non si può dire che la derivata si annulla) è l'origine per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0, \end{cases} \tag{4.44}$$

  il cui grafico è rappresentato in Figura 4.9. Essa presenta nell'origine un punto angoloso per cui $f'_-(0) = 0$ e (perdonando l'abuso di notazione) $f'_+(0) = +\infty$.
- Riflettiamo ora sulla non necessità della condizione di estremalità. Se fosse vera l'implicazione inversa del Teorema 4.3.9 di Fermat, sarebbe stabilito che ogni punto di derivabilità a derivata nulla è un punto di estremo per la funzione. Ciò è palesemente falso pensando alle potenze dispari: la funzione $f(x) = x^3$, ad esempio, ha derivata nulla nell'origine, che però non è un punto di estremo relativo (già sappiamo che non ci sono estremi assoluti, se la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ perché non è limitata).

Si pone dunque il problema di capire se e quando l'implicazione del Teorema 4.3.9 di Fermat possa essere invertita, ovvero quando punti stazionari sono anche punti di estremo. Si pone inoltre il problema di capire se qualche informazione sulle derivate unilaterali possa essere estratta per gli estremi dell'intervallo di definizione di una funzione, qualora essi fossero inclusi nel dominio e qualora la funzione abbia un punto di estremo in essi, come capita per la funzione polinomiale definita in $[-1, 1]$ il cui grafico è rappresentato nella Figura 4.8(a). □

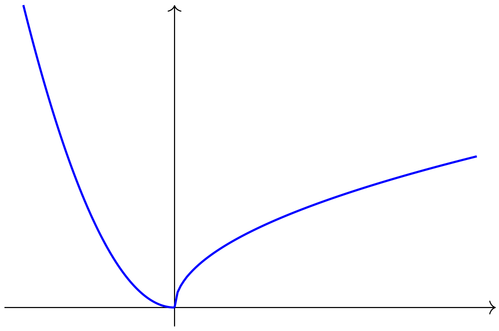


Figura 4.9: La funzione f definita nella (4.44).

Analizziamo dapprima il secondo problema. Consideriamo dunque una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ che sia continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che esistano $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$. Se a o b sono punti di estremo, relativo o assoluto, il Teorema 4.3.9 di Fermat non si può applicare (perché non sono punti interni) e non si può dedurre che la derivata prima si annulla, nemmeno quella unilaterale. Come controesempio si può considerare una retta $f(x) = mx + q$ definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$: gli estremi sono evidentemente punti di massimo assoluto l'uno e di minimo assoluto l'altro, ma le derivate unilaterali sono il coefficiente angolare della retta, che non è zero a meno che essa non sia costante. Per fissare le idee, scegliamo un coefficiente angolare $m > 0$: in questo caso la retta tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, e quindi, ristretta ad $[a,b]$, assume il minimo assoluto nel punto a ed il massimo assoluto nel punto b, con valori $ma + q$ e $mb + q$, rispettivamente. Da questo deduciamo, per una funzione generica $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, che se l'estremo sinistro a è punto di minimo (assoluto o relativo) deve valere $f'_+(a) \geq 0$, mentre se è punto di massimo (assoluto o relativo) deve valere $f'_+(a) \leq 0$. I segni sono invertiti rispetto alla massimalità o minimalità per l'estremo destro b: se esso è un punto di minimo (assoluto o relativo) deve valere $f'_-(b) \leq 0$, mentre se esso è un punto di massimo (assoluto o relativo) deve valere $f'_-(b) \geq 0$. disegno?

Torniamo ora al primo dei problemi messi in evidenza alla fine dell'Osservazione 4.3.12: in quali situazioni è possibile invertire l'implicazione del Teorema 4.3.9 di Fermat? Ci stiamo chiedendo in quali casi si ha la garanzia che un punto stazionario sia anche di estremo per la funzione. Per determinare se un punto stazionario è un punto di estremo per la funzione o meno, ci sono essenzialmente due strategie: la prima consiste nello studiare la monotonia della funzione in un intorno del punto, come prescritto nel Teorema 4.3.13 (e se la funzione è derivabile, questo sarà deducibile dal segno della derivata, si veda in proposito il Corollario 4.3.14); la seconda è di fare affidamento alle derivate successive (ma per questo serve che la funzione si possa derivare alcune volte), come stabilito nel Teorema 4.3.15.

Teorema 4.3.13. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in [a,b]$. Se esiste $r > 0$ tale che la restrizione $f|_{[x_0-r,x_0]} = f|_{\overline{I_r^-}(x_0)}\colon \overline{I_r^-}(x_0) \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e la restrizione $f|_{[x_0,x_0+r]} = f|_{\overline{I_r^+}(x_0)}\colon \overline{I_r^+}(x_0) \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente, allora x_0 è un punto di massimo relativo forte per f. Se le monotonie sono invertite, allora x_0 è un punto di minimo relativo forte per f.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi sulla funzione, si ha

$$\begin{cases} f(x_0+h) < f(x_0) & \text{per ogni } h \in (-r,0), \\ f(x_0+h) < f(x_0) & \text{per ogni } h \in (0,r), \end{cases} \tag{4.45}$$

ma questa altro non è che la formulazione (4.42a) della Definizione 4.3.3 di massimo relativo forte (si veda anche la Definizione 4.3.5). Lo stesso ragionamento porta a concludere che x_0 è minimo relativo forte nel caso di monotonie invertite. □

Corollario 4.3.14. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Se esiste $r > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I_r^-(x_0)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I_r^+(x_0)$, allora la funzione f ha un massimo relativo forte in x_0. Se i segni della derivata sono invertiti, f ha un minimo relativo forte in x_0.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.2.7 della permanenza del segno, il rapporto incrementale ha lo stesso segno della derivata in un intorno di x_0. Il rapporto incrementale verifica dunque le condizioni (4.40) equivalenti alla Definizione 4.3.1 di monotonia stretta in x_0. Il numeratore del rapporto incrementale verifica dunque la (4.45) e il Teorema 4.3.13 permette ora di concludere. □

La seconda strategia trova la sua motivazione nell'approssimazione della funzione attorno al punto x_0 tramite il suo polinomio di Taylor, ammesso che ci sia sufficiente derivabilità per poter scrivere il polinomio di Taylor di ordine n. Assumiamo ora che esista le derivata seconda della funzione f e scriviamone l'incremento in termini dello sviluppo di Taylor all'ordine 2, con resto di Peano. Dalla (4.26) abbiamo, supponendo che x_0 sia un punto stazionario,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) = \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2),$$

e da questa informazione possiamo dedurre che l'incremento della funzione ha lo stesso segno della derivata seconda $f''(x_0)$, siccome h^2 contribuisce sempre con segno positivo[4]. Allora, se $f''(x_0) > 0$, il punto x_0 sarà di minimo relativo; se $f''(x_0) < 0$, il punto x_0 sarà di massimo relativo. È questo il caso, per esempio delle parabole $f(x) = ax^2$ con $a > 0$ e $a < 0$, rispettivamente. Se $f''(x_0) = 0$ nulla possiamo concludere sulla natura di x_0. Per poter estrapolare più informazioni, dobbiamo assumere che f sia derivabile tre volte e considerare lo sviluppo di Taylor con resto di Peano arrestato al terz'ordine. Leggendo sempre la (4.26) e supponendo che x_0 sia un punto stazionario in cui anche la derivata seconda si annulla, possiamo scrivere

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + o(h^3) = \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + o(h^3).$$

In questo caso, siccome h^3 non ha segno attorno a zero, possiamo notare che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f'''(x_0)}{3!}h^2 + \frac{o(h^3)}{h}$$

e ora si vede che il segno della derivata terza determina il segno del rapporto incrementale (perché, come prima, $h^2 \geq 0$); in questo caso, allora (lo ricordiamo, se x_0 è

[4]Osserviamo che se ci limitassimo allo sviluppo al prim'ordine avremmo $f(x_0+h) - f(x_0) = o(h)$, se x_0 è un punto stazionario, il che non dà informazioni.

un punto stazionario in cui anche la derivata seconda si annulla), grazie alle (4.40), se $f'''(x_0) > 0$ la funzione sarà strettamente crescente in x_0; se $f'''(x_0) < 0$ la funzione sarà strettamente decrescente in x_0. Chiaramente questa situazione accade per la funzione $f(x) = ax^3$ con $a > 0$ e $a < 0$, rispettivamente. Se $f'''(x_0) = 0$ non si può concludere, ma ormai è chiara l'idea di come procedere. Questa è l'idea che permette di dimostrare il teorema seguente, che non costa formulare nel contesto generale.

Teorema 4.3.15. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione avente tutte le derivate fino all'ordine $n-1$ in (a, b) ed esista la derivata n-esima $f^{(n)}(x_0)$ in un punto $x_0 \in (a, b)$. Sia inoltre verificato che*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora,

1. *se n è pari e se $f^{(n)}(x_0) < 0$, la funzione f ha un massimo relativo forte in x_0; se $f^{(n)}(x_0) > 0$, la funzione f ha un minimo relativo forte in x_0;*
2. *se n è dispari e se $f^{(n)}(x_0) < 0$, la funzione f è strettamente decrescente in x_0; se $f^{(n)}(x_0) > 0$, la funzione f è strettamente crescente in x_0.*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando la formula di Taylor con resto di Peano (4.26) ed il Teorema 3.2.7 della permanenza del segno: dalle ipotesi abbiamo che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(x_0) + \omega(h)), \tag{4.46}$$

per una certa funzione ω infinitesima per $h \to 0$: esiste dunque un intorno di $h = 0$ nel quale $f^{(n)}(x_0) + \omega(h)$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$.

Se n è pari, la (4.46) mostra che l'incremento ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$, pertanto è massimo o minimo relativo forte a seconda che il segno sia negativo o positivo, rispettivamente (si veda la caratterizzazione (4.42)).

Se invece n è dispari, dividendo per h entrambi i membri della (4.46), otteniamo che il rapporto incrementale ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ e concludiamo sulla monotonia ricordando le (4.40). □

Definizione 4.3.16 (punti di flesso)**.** *I punti x_0 individuati dal Teorema 4.3.15-2 si chiamano* punto di flesso (a tangente orizzontale) discendente *e* ascendente*, rispettivamente. Se x_0 è un punto tale che $f'(x_0) \neq 0 = f''(x_0)$, si dice* punto di flesso a tangente obliqua *(ascendente o discendente a seconda del segno di $f'(x_0)$).*

Abbiamo ora tutte le informazioni per andare ala ricerca dei punti di massimo o di minimo di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo o un'unione di intervalli di $\mathbb{R}$. Il Teorema 4.3.9 di Fermat ci dice che se in un punto $x_0 \in I$ la funzione non ha derivata nulla, allora questo non sarà un punto di estremo. Pertanto, solo i punti x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ saranno possibili candidati ad essere massimi o minimi. È chiara la necessità di derivabilità della funzione in x_0 e dunque la necessità di controllare che cosa succede nei punti di non derivabilità. È altrettanto chiaro che serve controllare il comportamento agli estremi finiti del dominio, se questi esistono. Serve dunque procedere nel seguente modo.

Algoritmo 4.3.17. Per trovare i punti di massimo e minimo, assoluti e relativi, di una funzione (se questi esistono) di procede con i seguenti tre passi:

1. si studiano i punti $x_0 \in \mathrm{int} I$ tali che f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$;
2. si studiano i punti $x_0 \in \mathrm{int} I$ tali che f non è derivabile in x_0;
3. si studiano gli estremi finiti del dominio, ovvero i punti $x_0 \in \partial I$.

Infine, si confrontano i valori assunti dalla funzione f in questi punti per stabilire quali di loro siano estremi relativi e quali estremi assoluti (se esistono).

Chiudiamo questa sezione con ulteriori proprietà, più fini, delle funzioni derivabili. La prima che presentiamo è l'analogo al Corollario 3.2.14 dei valori intermedi per le funzioni continue. Successivamente vedremo un risultato di caratterizzazione delle funzioni che hanno derivata mai nulla e vedremo come questo possa indebolire le ipotesi del Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital.

Teorema 4.3.18 (Darboux)**.** *Sia $f\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che esistano $a, b \in (\alpha, \beta)$ tali che $\mu \in (f'(a) \wedge f'(b), f'(a) \vee f'(b))$. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = \mu$.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi del teorema è implicitamente assunto che $f'(a) \neq f'(b)$ e senza perdita di generalità possiamo assumere che sia verificata l'eventualità $f'(a) < \mu < f'(b)$. Definiamo la funzione ausiliaria $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ come $\varphi(x) := f(x) - \mu x$, per la quale si ha $\varphi'(x) = f'(x) - \mu$. Allora accade che $\varphi'(a) = f'(a) - \mu < 0$ e $\varphi'(b) = f'(b) - \mu > 0$ e per le osservazioni fatte precedentemente φ risulta decrescente in a e crescente in b. Siccome φ è continua in $[a, b]$ perché f lo è, il Teorema 3.2.10 di Weierstrass garantisce l'esistenza del minimo assoluto di φ in $[a, b]$, che pertanto risulta essere assunto in un punto interno $\xi \in (a, b)$; siccome la funzione φ è derivabile in (a, b), il Teorema 4.3.9 di Fermat garantisce che $\varphi'(\xi) = 0$, ma questo equivale ad avere $f'(\xi) = \mu$, come volevamo. □

Corollario 4.3.19. *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b). Allora la funzione derivata prima f' non può ammettere discontinuità di tipo salto in (a, b).*

Dimostrazione. È immediato vedere che se f' ammettesse discontinuità di tipo salto in (a, b) il Teorema 4.3.18 sarebbe violato. □

Corollario 4.3.20. *Sia $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b). Allora, condizione necessaria e sufficiente affinché $f'(x) \neq 0$ in (a, b) è che si abbia $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$ oppure $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata. □

Come conseguenza del Corollario 4.3.20 appena enunciato, si possono rilassare le ipotesi del Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital richiedendo che la funzione g al denominatore abbia derivata $g'(x) \neq 0$.

4.3.1 Convessità e funzioni convesse

La convessità è una proprietà geometrica delle funzioni che può avere carattere locale o globale. Nel secondo caso, ovvero se una funzione gode di questa proprietà nel suo dominio, si parla di *funzione convessa*; le funzioni convesse formano una particolare classe di funzioni che sono di fondamentale importanza nell'analisi matematica e in particolare nelle applicazioni. dire qualcosa negli approfondimenti? Vedremo almeno due definizioni di convessità, che permettono di stabilire la validità della proprietà geometrica in contesti diversi.

Definizione 4.3.21 (convessità e concavità in un punto)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b). Si dice che f è* convessa in $x_0 \in (a,b)$ *se esiste $r > 0$ tale che il grafico di f si trova tutto sopra il grafico della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ per ogni punto $x \in I_r^\circ(x_0)$. In formule, se*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \textit{per ogni } x \in I_r^\circ(x_0), \tag{4.47a}$$

o, equivalentemente, se

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h > 0 \qquad \textit{per ogni } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \textit{ tale che } |h| < r. \tag{4.47b}$$

Se valgono le disuguaglianze invertite nelle (4.47), la funzione di dice concava in x_0.

Di immediata dimostrazione è la seguente proprietà.

Proposizione 4.3.22. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora f è convessa in x_0 se e solo se $-f$ è concava in x_0.* □

Più interessante è legare la proprietà di convessità alla derivata seconda della funzione, se questa esiste.

Proposizione 4.3.23. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Se esiste la derivata seconda $f''(x_0)$ e se $f''(x_0) > 0$ allora la funzione è convessa in x_0, mentre se $f''(x_0) < 0$ la funzione è concava in x_0.*

Dimostrazione. Usando la definizione di convessità in x_0 data tramite la (4.47b), si vede che f è convessa in x_0 se e solo se la funzione $\varphi\colon I_r(0) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$$

ha un minimo locale forte in $h = 0$ (ed è concava se e solo se φ ha un massimo locale forte in $h = 0$). Siccome $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = f''(x_0)$, possiamo applicare il Teorema 4.3.15-I (con $n = 2$) e concludere. □

Usando ancora il Teorema 4.3.15-I, possiamo generalizzare la Proposizione 4.3.23 come segue.

Teorema 4.3.24. *Sia $n \in 2\mathbb{N}$ e sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile fino all'ordine $n-1$ in (a,b) e tale che esista la derivata $f^{(n)}(x_0)$ in un certo punto $x_0 \in (a,b)$. Se*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \textit{e} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

la funzione f è convessa in x_0 se $f^{(n)}(x_0) > 0$, mentre è concava in x_0 se $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue le righe di quella del Teorema 4.3.15-I e si ottiene applicando la formula di Taylor (4.26) con resto di Peano. □

Esempi di funzioni convesse sono i monomi di grado pari in ogni punto del loro dominio, i monomi di grado dispari in ogni punto $x_0 \in (0, +\infty)$, la funzione esponenziale in ogni punto del dominio. Al contrario, i monomi di grado dispari in ogni punto $x_0 \in (-\infty, 0)$, le radici di ogni indice intero e la funzione logaritmo sono funzioni concave in ogni punto del loro dominio.

Definizione 4.3.25. *Si dice che una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) è convessa se lo è in ogni punto $x_0 \in (a,b)$. Si dice che è concava se lo è in ogni punto $x_0 \in (a,b)$ secondo la Definizione 4.3.21.*

Se una funzione è convessa in ogni punto del suo dominio, allora ha derivata seconda positiva in ogni punto del suo dominio e pertanto la derivata prima della funzione risulta strettamente crescente. Prescindendo dall'esistenza della derivata seconda, potremmo definire convessa una funzione derivabile la cui derivata prima sia strettamente crescente nel dominio. Con un po' di cura, che lasciamo immaginare al lettore, è possibile indebolire la definizione di convessità e concavità per ammettere anche derivata prima debolmente crescente, cosicché si possa dire se le rette sono convesse o concave. Vale il seguente risultato, che lasciamo come esercizio di facile dimostrazione.

Esercizio 4.3.26. Dimostrare che f è una funzione sia concava che convessa se e solo se f è una retta.

Con questo primo indebolimento della definizione, abbiamo permesso alla derivata prima di essere costante, invece che strettamente monotona. Se ora permettiamo ala derivata prima di essere costante a tratti, con i valori assunti che siano crescenti, possiamo estendere la definizione di convessità (e concavità, scambiando le disuguaglianze e le monotonie) per funzioni che non sono derivabili. In questo modo è facile vedere che la funzione valore assoluto è convessa. Segnaliamo che è possibile dare una definizione di convessità di natura più geometrica tramite la quale la funzione valore assoluto trova cittadinanza tra le funzioni convesse alla stessa stregua di un monomio di grado pari (la prima non essendo derivabile, i secondi essendo addirittura di classe C^∞): rimandiamo alla Definizione 7.4.3 per la formulazione precisa.

Possiamo invece dare un'altra definizione di funzione convessa che non necessità della derivabilità di una funzione.

Definizione 4.3.27 (combinazione lineare e combinazione convessa)**.** *Siano dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ punti sulla retta reale e siano $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ coefficienti. Si dice* combinazione lineare *dei punti x_i di coefficienti t_i il punto*

$$x \coloneqq \sum_{i=1}^{n} t_i x_i = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n. \tag{4.48}$$

Se le costanti t_i sono tali che $t_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \tag{4.49}$$

allora la combinazione (4.48) si dice combinazione convessa*. In particolare, se $n = 2$, la combinazione convessa di due punti può essere descritta nel seguente modo: dati $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}$ e dato $t \in [0, 1]$, la combinazione convessa di $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_1$ di coefficiente t è il numero*

$$x_t \coloneqq (1 - t)\bar{x}_0 + t\bar{x}_1, \tag{4.50}$$

che descrive, al variare di $t \in [0, 1]$, il segmento di estremi $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_1$.

La definizione di funzione convessa che ora diamo fa uso della (4.50) e non della derivabilità di una funzione. La funzione valore assoluto risulta convessa secondo questa definizione, come è facile verificare.

Definizione 4.3.28. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è convessa in (a,b) se per ogni $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in (a,b)$ e per ogni $t \in [0,1]$ vale*

$$f(x_t) \leq (1-t)f(\bar{x}_0) + tf(\bar{x}_1), \tag{4.51}$$

dove x_t è la combinazione convessa di parametro t definita nella (4.50). Si dice che la funzione è concava *in (a,b) se vale la disuguaglianza (4.51) con il segno invertito.*

La Definizione 4.3.28 dice che una funzione convessa è una funzione per la quale l'immagine della combinazione convessa di due punti è non più grande della combinazione convessa delle immagini dei due punti.

Esercizio 4.3.29. Verificare che le definizioni di convessità date finora (Definizione 4.3.25, monotonia della derivata prima e Defnzione 4.3.28) coincidono per funzioni che ammettono derivata seconda.

Proposizione 4.3.30. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è convessa se e solo se i rapporti incrementali sono monotoni crescenti. Se poi f è derivabile in (a,b), allora f' è crescente; se f è derivabile due volte in (a,b) allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Le stesse tesi valgono* mutatis mutandis *per le funzioni concave.*

Dimostrazione. Consideriamo due punti $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in (a,b)$ tali che (senza perdita di generalità) $\bar{x}_0 < \bar{x}_1$, un numero $t \in (0,1)$ e la combinazione convessa x_t definita in (4.50). Dimostriamo che la condizione di convessità (4.51) data nella Definizione 4.3.28 è equivalente ad avere

$$\frac{f(x_t) - f(\bar{x}_0)}{x_t - \bar{x}_0} \leq \frac{f(\bar{x}_1) - f(x_t)}{\bar{x}_1 - x_t}. \tag{4.52}$$

Manipoliamo i denominatori usando la (4.50) e otteniamo

$$\begin{aligned} x_t - \bar{x}_0 &= (1-t)\bar{x}_0 + t\bar{x}_1 - x_0 = t(\bar{x}_1 - \bar{x}_0), \\ \bar{x}_1 - x_t &= \bar{x}_1 - (1-t)\bar{x}_0 - t\bar{x}_1 = (1-t)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0), \end{aligned}$$

da cui la (4.52) diventa

$$(1-t)(f(x_t) - f(\bar{x}_0)) \leq t(f(\bar{x}_1) - f(x_t)),$$

che è equivalente alla (4.51). La prima parte della proposizione è dimostrata.

Assumendo che f sia derivabile, e prendendo il limite per $t \to 0^+$ nella (4.52), otteniamo

$$f'(\bar{x}_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_t) - f(\bar{x}_0)}{x_t - \bar{x}_0} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\bar{x}_1) - f(x_t)}{\bar{x}_1 - x_t} = \frac{f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)}{\bar{x}_1 - \bar{x}_0} = f'(\xi),$$

per un certo $\xi \in (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ determinato dal Teorema 4.2.3 di Lagrange: abbiamo dimostrato la monotonia (debolmente) crescente di f'.

Assumendo che f sia derivabile due volte, siccome la funzione f' è (debolmente) crescente, deve essere che $f'' \geq 0$ in (a,b). □

4.3.2 Lo studio di funzione

Va sotto il nome di *studio di funzione* la capacità (o per certi versi l'arte) di estrarre quante più proprietà possibili dall'espressione analitica di una funzione. L'idea generale è di conoscere la funzione e di studiarne il comportamento nel dominio, le simmetrie, i punti di continuità e di discontinuità, i punti di derivabilità e di non derivabilità, la monotonia, la concavità; infine può essere utile saper dire se la funzione ha certi integrali limitati o divergenti, ma per questo occorre attendere il prossimo capitolo.

Prima di presentare qui tutti i passi per effettuare un buon studio di funzione e stabilire quali informazioni si possono ricavare dalla funzione e dalle sue derivate, diamo ancora qualche definizione.

Definizione 4.3.31 (asintoti)**.** *Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che*

- *la retta $y = \ell$ è un* asintoto orizzontale *per la funzione f se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$;*
- *la retta $y = mx + q$ è un* asintoto obliquo *per la funzione f se valgono le seguenti tre condizioni:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = q;$$

- *la retta $x = a$ è un* asintoto verticale *per la funzione f se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.*

Se il dominio è esteso a $-\infty$ o se occorre prendere limiti sinistri per $x \to a^-$, le definizioni si adattano di conseguenza.

Anche ora, come nel caso della ricerca di massimi e minimi, possiamo presentare un algoritmo, o meglio una scaletta, per lo studio di funzione.

Algoritmo 4.3.32 (studio di funzione)**.** Data una funzione f a valori reali attraverso la sua espressione analitica, lo studio di funzione procede nel seguente modo.

1. Informazioni che si ottengono dalla funzione f:
   (a) dominio $\operatorname{dom} f$ della funzione: l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ nei quali ha senso l'espressione analitica della f;
   (b) segno: intervalli di $\operatorname{dom} f$ dove la funzione è positiva; intervalli di $\operatorname{dom} f$ in cui la funzione è negativa;
   (c) intersezioni con gli assi: sono i punti del grafico $(0, f(0))$ (se $0 \in \operatorname{dom} f$) e $(x, f(x))$ tali che $f(x) = 0$;
   (d) parità della funzione;
   (e) continuità della funzione e studio degli eventuali punti di discontinuità;
   (f) limiti agli estremi del dominio: ovvero limiti per $x \to \pm\infty$ se il dominio è illimitato, oppure limiti del tipo $x \to a^+$ o $x \to b^-$ se il dominio è inferiormente o superiormente limitato, rispettivamente, o se si presenta come intervalli bucati (ovvero del tipo $I \setminus \{x_0\}$, con x_0 potenziale punto di discontinuità).
   (g) asintoti.
2. Informazioni che si ottengono dalla derivata prima f':
   (a) ricerca del dominio $\operatorname{dom} f'$ della derivata e sua relazione con $\operatorname{dom} f$: ai fini dello studio di funzione, ci si preoccupa che $\operatorname{dom} f' \subseteq \operatorname{dom} f$; se $\operatorname{dom} f' \subsetneq \operatorname{dom} f$, ovvero se l'inclusione è stretta, serve studiare i punti $x_0 \in \operatorname{dom} f \setminus \operatorname{dom} f'$, per classificare i punti di non derivabilità (eventuali punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale);

(b) segno della derivata e intervalli di monotonia: si faccia attenzione al criterio di monotonia del Teorema 4.2.7-3 e del Corollario 4.2.8, in particolare alla determinazione degli intervalli di monotonia (si veda l'Osservazione 4.2.10);
(c) punti stazionari, che annullano la derivata prima;
(d) ricerca di massimi e minimi: si può applicare il Teorema 3.2.10 di Weierstrass per garantire l'esistenza di massimo e minimo assoluto? Se no, essi esistono comunque? Applicazione dell'Algoritmo 4.3.17 per la ricerca dei punti estremali;
(e) applicazione, se necessaria, del Corollario 4.3.14 per studiare i punti stazionari.

3. Informazioni che si ottengono dalla derivata seconda f'':
   (a) ricerca del dominio $\operatorname{dom} f''$ della derivata seconda;
   (b) studio del segno della derivata seconda per ottenere informazioni sulla convessità o concavità della funzione;
   (c) studio dei punti che annullano la derivata seconda (ma non la derivata prima) per la ricerca dei punti di flesso a tangente obliqua;
   (d) applicazione, se necessaria, del Teorema 4.3.15 per studiare i punti stazionari.
4. Tracciare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 4.3.33. Mostrare che, dato un triangolo di area A e base b, si ha perimetro minimo per un triangolo isoscele.

Esercizio 4.3.34. Sia data la funzione $f(x) = \arctan(x^4 - 1)$.

1. Determinare $\operatorname{dom}(f)$.
2. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
3. Studiare la continuità di f.
4. Determinare gli asintoti di f, se ne ha.
5. Quale delle seguenti affermazioni è errata, per $x \to +\infty$?
   $\boxed{\text{A}}$ $f(x) \sim \pi/2$ $\boxed{\text{B}}$ $f = o(x) \ \vee \ f = O(x)$
   $\boxed{\text{C}}$ $f(x) = \pi/2 + o(x)$ $\boxed{\text{D}}$ $x = O(f(x)) \ \vee \ x \sim f(x)$
6. Studiare la parità di f.
7. Stabilire se f è crescente o decrescente negli intervalli $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$.
8. Calcolare punti di massimo e di minimo di f con e senza l'ausilio delle derivate.
9. Sia $I = [0, 1]$. Allora (V/F):
   (a) ci sono valori di $[-\pi/4, 0]$ non assunti da f;
   (b) $\pi/4 \in f(I)$;
   (c) la funzione $f|_I$ ammette minimo e massimo assoluti;
   (d) f è iniettiva su I;
   (e) f^{-1} non è continua su $J = f(I)$.
10. Sia $f_k(x) := f(x) + k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Quanti zeri possiede f_k?

Esercizio 4.3.35. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\gamma(v) := \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \text{per } c \in \mathbb{R} \text{ costante positiva.}$$

1. Studiare la funzione γ seguendo l'Algoritmo 4.3.32.
2. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di γ.

La funzione γ qui definita (e scritta tradizionalmente in funzione della variabile v, che è una velocità) si chiama *fattore di Lorentz* ed è il fattore di correzione che misura il variare delle lunghezze, del tempo e della massa di un corpo che viaggia a velocità v. La costante c, in fisica, è la velocità della luce.

Esercizio 4.3.36. Studiare le seguenti funzioni.

1. $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1) + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.
2. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
3. $f(x) = \left|\frac{x}{x-1}\right|$.
4. $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$.
5. $f(x) = \sqrt[5]{x(x^2 - 1)^2}$.
6. $f(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}$, il *potenziale di Lennard-Jones*.
7. $f(x) = (x^2 - 1)^2$, la forma tipica di un *potenziale a doppio pozzo*.
8. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Esercizio 4.3.37. Studiare la funzione

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{se } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases} \tag{4.53}$$

In particolare, studiarne la regolarità e dimostrare che $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Capitolo 5

Integrazione

Questo capitolo contiene un approccio alla teoria dell'integrazione per le funzioni reali di una variabile reale. L'integrale è un potente mezzo di modellizzazione e di produzione di matematica e sarà cura delle prossime pagine di presentare una buona definizione e gli strumenti sia teorici che pratici per il calcolo di integrali. Non andrebbe tralasciato che l'operazione di integrazione in sé, e non fine al mero ottenimento di un risultato numerico, già merita l'interesse dello studio. Per questo motivo, quanto presenteremo in questo capitolo è da considerarsi come il fondamento dello studio della teoria dell'integrazione in più dimensioni che verrà presentata in corsi più avanzati.

È possibile approcciare l'integrazione da più punti di vista, alcuni più astratti, altri più connessi ad alcune applicazioni. Un approccio astratto meriterebbe di essere fatto in più generalità, almeno in dimensione superiore a 1, e andrebbe corredato da adeguati introduzione e sviluppo della teoria della misura. Purtroppo ciò esula dalla portata di queste note (anche se porteremo all'attenzione alcuni fatti rilevanti). L'approccio più pratico che seguiremo ha il vantaggio di rendere alcuni concetti più facilmente assimilabili senza ridurre la portata degli strumenti che scopriremo.

Abbiamo introdotto le primitive di una funzione nella Definizione 4.2.11 e ci siamo soffermati ad analizzare due delle loro proprietà: il fatto che la derivata di una primitiva è la funzione di partenza (ciò getta le basi per analizzare i rapporti tra integrazione e derivazione) e il fatto che due primitive di una funzione differiscono per una costante additiva (Proposizione 4.2.12; ciò ha il vantaggio che una volta che una primitiva è stata individuata esplicitamente, allora tutte le altre primitive della stessa funzione sono automaticamente note). La domanda che ora ci poniamo, e la cui risposta ci introdurrà all'integrazione di una funzione, è:

come si trovano le primitive di una funzione?

Nella Sezione 5.1 illustreremo un processo che ci permetterà, in una volta, di costruire una primitiva di una funzione data e di dare la definizione di integrale definito di una funzione, culminando nel Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo integrale, che formalizzerà questi risultati. Una volta definito l'*integrale di Riemann* e fatto un confronto con l'*integrale di Cauchy*, entrambi definiti per approssimazione, vedremo con un esempio pratico (Esempio 5.1.18) la necessità di formule di integrazione che prescindano dalla procedura di approssimazione e che permettano il calcolo rapido delle primitive. Vedremo come la ricerca delle primitive di una funzione possa essere effettuata a sua volta tramite tecniche di integrazione[1]. Di queste, mostreremo le più elementari e le più utili per la manipolazione degli integrali, mettendo in risalto alcuni risultati di carattere generale che saranno utili in corsi di analisi futuri.

Ci preme sottolineare come il vantaggio di avere delle formule analitiche che diano responso immediato alla necessità del calcolo di una primitiva non risulti tale nel caso in cui una funzione non ammetta primitiva. Sia in questo caso, che nel caso più generale in cui si debba ricorrere a metodi numerici per il calcolo dell'integrale, è necessario, al contrario, avere a disposizione un buon metodo di approssimazione dell'integrale, che garantisca che effettuando approssimazioni sempre migliori (in un contesto da specificarsi meglio) si tenda o, per meglio dire, converga, al risultato cercato. Ciò sarà di cruciale importanza non solo per la soluzione numerica delle equazioni differenziali, ma anche come processo di costruzione analitica (tramite operazioni di limite) delle soluzioni stesse. Non ci dilunghiamo oltre e procediamo speditamente alla costruzione dell'integrale *à la* Riemann.

5.1 L'integrale di Riemann

La Definizione 4.2.11 introduce il concetto di primitiva di una funzione continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Come problema motivazionale affrontiamo quello di calcolare l'area del sottografico di una funzione f continua e non negativa[2].

Definizione 5.1.1 (sottografico). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa. L'insieme*

$$\operatorname{sg}(f;[a,b]) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\} \tag{5.1}$$

è detto il sottografico *della funzione f nell'intervallo* $[a,b]$.

Scelto un punto $x \in (a,b)$, definiamo la funzione $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ che misura l'area del sottografico della funzione f in $[a,x]$, ovvero $F(x) := \operatorname{area}(\operatorname{sg}(f;[a,x]))$, come rappresentato in colore chiaro nella Figura 5.1. Stiamo ora costruendo la funzione F la cui derivata vorremmo fosse la funzione f. Ciò si ottiene dimostrando in primo luogo che la F è derivabile. Ci serve dunque valutare, per $h \in \mathbb{R}$ (e piccolo a piacere), la quantità $F(x+h)$ per costruire il rapporto incrementale di F. Nel fare ciò, il valore $F(x+h) = \operatorname{area}(\operatorname{sg}(f;[a,x+h]))$ descrive l'area della porzione di sottografico di f compresa tra i punti di ascissa a e $x+h$; nella Figura 5.1 è tutta la parte ombreggiata. L'incremento della funzione F è $F(x+h)-F(x)$, che corrisponde, nel grafico, all'area della colonna sotto il grafico di f di ascisse comprese tra x e $x+h$, quella colorata con i due toni più scuri. Ora possiamo usare l'ipotesi di continuità della funzione f, che ci dice, sostanzialmente, che nell'intervallo $[x,x+h]$ la funzione f varia in modo controllato da h. Ciò significa che possiamo scrivere l'incremento di F come

$$F(x+h) - F(x) = hf(x) + o(h),$$

dove la quantità $hf(x)$ è l'area del rettangolo di base $[x,x+h]$ e altezza $f(x)$ e la quantità $o(h)$ è l'area del triangolo curvilineo di colore più scuro. Sottolineiamo

[1] La ricerca della primitiva di una funzione, in realtà, altro non è che la soluzione di un'equazione differenziale. La si suole presentare sotto forma di integrazione indefinita per l'utilità che le primitive hanno, grazie al Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo, nel calcolo di integrali definiti. Rimandiamo al Capitolo 6 per un'introduzione alle equazioni differenziali ordinarie.

[2] La non negatività che richiediamo ora alla funzione f è artificiale, ma ha il vantaggio di dare un significato geometrico all'operazione che ci apprestiamo a compiere. Sarà evidente dalle formule successive che non è necessario imporre nessun segno alla funzione f da integrare.

che si può affermare che quest'area è $o(h)$ grazie alla continuità di f. Possiamo ora

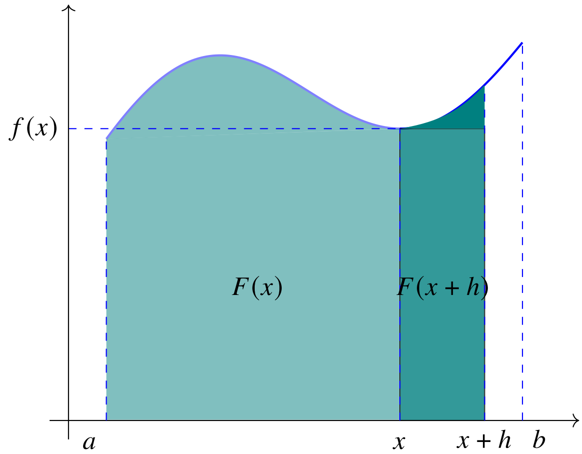


Figura 5.1: Area del sottografico.

costruire il rapporto incrementale di F dividendo per h e studiare la derivabilità di F calcolando il limite per $h \to 0$. Otteniamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(f(x) + \frac{o(h)}{h} \right) = f(x), \tag{5.2}$$

dove abbiamo usato la definizione di o-piccolo. La (5.2) ci dice due cose: in primo luogo, che la funzione F è derivabile (perché abbiamo dimostrato che esiste finito il limite del rapporto incrementale); in secondo luogo, che per ogni $x \in (a, b)$ vale $F'(x) = f(x)$, ovvero che la funzione F che abbiamo costruito è una primitiva della funzione f di partenza. La Proposizione 4.2.12 ci dice poi che tutte le altre primitive di f sono della forma $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Con questo ragionamento, abbiamo presentato una risposta al problema di determinare le primitive di una funzione, che evidentemente è risolto se si sa calcolare l'area dei sottografici.

Osservazione 5.1.2. I concetti che definiremo in questo capitolo saranno validi per funzioni di segno qualunque, ma non sarà restrittivo supporre che la funzione abbia segno non negativo. Se infatti la funzione cambiasse segno, si può sempre scomporre come nella (1.47) nella sua parte positiva e parte negativa, definite nelle (1.46), e applicare il risultato a ciascuna delle due funzioni f^+ e f^- separatamente. D'ora in poi, quindi, almeno per fissare le idee, ci limiteremo a studiare funzioni non negative. □

Poniamoci ora il problema del calcolo delle aree come motivazione per la costruzione dell'integrale di Riemann. Ci serve una definizione operativa per calcolare l'area del sottografico di una funzione f, poiché la funzione F introdotta poco sopra non ci dà informazioni di questo tipo. La tecnica proposta da Riemann per calcolare l'area del sottografico di una funzione è per approssimazione. Ripensando alla Figura 5.1, si vede che l'errore che si commette è piccolo nel calcolare l'area del rettangolo di colore scuro se i punti della base sono scelti sufficientemente vicino. Introduciamo allora il primo concetto del quale faremo ampio uso.

Definizione 5.1.3 (partizione)**.** *Sia* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo chiuso e limitato. Si dice* partizione *di* $[a, b]$ *una collezione finita ed ordinata di punti di* $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \quad \textit{tali che} \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Si dice ampiezza *della partizione* $\mathcal{P}$ *la quantità così definita*

$$|\mathcal{P}| := \max\left\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

Nell'approssimare l'area del rettangolo curvilineo di colore scuro nella Figura 5.1, notiamo che ci sono varie possibilità: si può scegliere l'area determinata dal rettangolo di altezza massima interamente contenuto nel sottografico, così come l'area del rettangolo di altezza minima interamente contenente il sottografico, o ancora l'area di un rettangolo di altezza determinata dal valore della funzione in un punto intermedio all'intervallino $[x_{i-1}, x_i]$. Di queste scelte, le prime due portano alla costruzione dell'integrale *à la* Riemann, mentre l'ultima alla costruzione dell'integrale *à la* Cauchy. Dimostreremo che entrambi i metodi daranno lo stesso risultato almeno per funzioni f continue.

Definizione 5.1.4 (somme di Riemann)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e sia* $\mathcal{P}$ *una partizione di* $[a, b]$*. Si definiscono le* somme inferiore *e* superiore *di* f *subordinate alla partizione* $\mathcal{P}$ *i seguenti numeri reali*

$$s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}), \tag{5.3a}$$

$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.3b}$$

Nel caso che prendiamo come ispirazione, di una funzione f positiva (in cui $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ sono facilmente associabili ad un'area), è immediato osservare, dalle (5.3), che

$$s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) \qquad \text{per ogni } f \text{ limitata e per ogni partizione } \mathcal{P}. \tag{5.4}$$

Un esempio di somme inferiore e superiore è dato nel grafico in Figura 5.2, in cui è stata scelta una partizione $\mathcal{P}$ con $n = 4$. La somma inferiore $s(f, \mathcal{P})$ è la somma delle aree dei rettangoli tratteggiati un rosso, mentre la somma superiore $S(f, \mathcal{P})$ è la somma delle aree dei rettangoli tratteggiati in verde. Evidentemente, una partizione $\widetilde{\mathcal{P}}$ differente dà valori differenti $s(f, \widetilde{\mathcal{P}})$ e $S(f, \widetilde{\mathcal{P}})$. È dunque importante preoccuparsi di come variano le quantità $s(f, \cdot)$ in funzione della partizione. La prima cosa che osserviamo è il seguente lemma.

Lemma 5.1.5. *Sia* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Date due partizioni* $\mathcal{P}_1$ *e* $\mathcal{P}_2$ *tali che* $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ *si ha*

$$s(f, \mathcal{P}_1) \le s(f, \mathcal{P}_2) \qquad e \qquad S(f, \mathcal{P}_2) \le S(f, \mathcal{P}_1). \tag{5.5}$$

Osservazione 5.1.6. In merito alla situazione delle ipotesi del Lemma 5.1.5, si dice che la partizione $\mathcal{P}_2$ è *più fine* della partizione $\mathcal{P}_1$: infatti, ricordando la definizione di inclusione di insiemi (si veda la descrizione nella Sezione 1.1), se ogni elemento di $\mathcal{P}_1$ è anche elemento di $\mathcal{P}_2$, ciò significa che $\mathcal{P}_2$ ha più punti di $\mathcal{P}_1$ e necessariamente $|\mathcal{P}_2| \le |\mathcal{P}_1|$. □

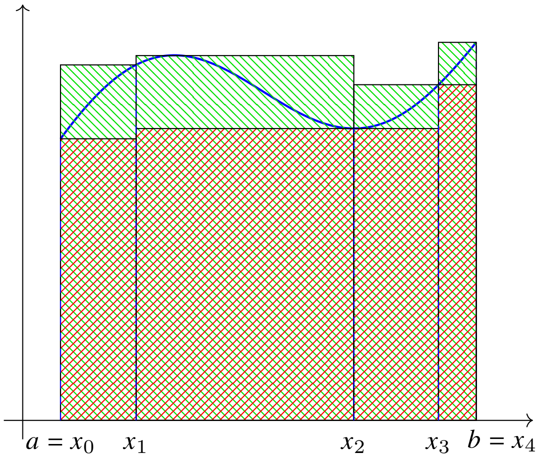


Figura 5.2: Somme inferiore e superiore subordinate ad una partizione.

Dimostrazione del Lemma 5.1.5. In virtù dell'Osservazione 5.1.6, siamo nel caso in cui $\mathcal{P}_2$ ha più punti di $\mathcal{P}_1$. Per dimostrare il lemma sarà sufficiente dimostrare le (5.5) nel caso in cui $\mathcal{P}_2$ abbia un solo punto in più rispetto a $\mathcal{P}_1$, ovvero nel caso in cui esista un punto $\bar{x} \in [a,b] \setminus \mathcal{P}_1$ tale che $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \cup \{\bar{x}\}$. In questa circostanza, esiste $i \in \{1,\dots,n\}$ tale che $\bar{x} \in (x_{i-1}, x_i)$. Allora, la variazione delle somme inferiore e superiore passando da $\mathcal{P}_1$ a $\mathcal{P}_2$ è tutta determinata da quello che succede nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$. Denotiamo con

$$m_i \coloneqq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_i \coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

e con

$$\begin{aligned} \eta_1 &\coloneqq \inf_{x\in[x_{i-1},\bar{x}]} f(x), \\ \eta_2 &\coloneqq \inf_{x\in[\bar{x},x_i]} f(x), \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \mu_1 &\coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},\bar{x}]} f(x), \\ \mu_2 &\coloneqq \sup_{x\in[\bar{x},x_i]} f(x). \end{aligned}$$

Dalle proprietà di estremo inferiore e superiore, abbiamo le relazioni

$$\eta_k \geq m_i \qquad \text{e} \qquad \mu_k \leq M_i \qquad \text{per ogni } k = 1,2.$$

Allora, ricordando che si ha banalmente $x_i - x_{i-1} = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x_{i-1})$, possiamo stimare

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}_2) - s(f,\mathcal{P}_1) &= \eta_2(x_i - \bar{x}) + \eta_1(\bar{x} - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\eta_2 - m_i)(x_i - \bar{x}) + (\eta_1 - m_i)(\bar{x} - x_{i-1}) \geq 0, \\ S(f,\mathcal{P}_1) - S(f,\mathcal{P}_2) &= M_i(x_i - x_{i-1}) - \mu_2(x_i - \bar{x}) - \mu_1(\bar{x} - x_{i-1}) \\ &= (M_i - \mu_2)(x_i - \bar{x}) + (M_i - \mu_1)(\bar{x} - x_{i-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

e le disuguaglianze in (5.5) sono dimostrate. □

Il lemma appena dimostrato ci permette di introdurre il prossimo teorema, che regola i legami tra le funzioni limitate e le somme inferiore e superiore da esse generate.

Teorema 5.1.7. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ due partizioni di $[a,b]$. Allora*

$$m(b-a) \le s(f,\mathcal{P}_1) \le S(f,\mathcal{P}_2) \le M(b-a), \tag{5.6}$$

dove $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Dimostrazione. Consideriamo $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, cosicché $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}$ per $k = 1, 2$. Allora

$$m(b-a) \le s(f,\mathcal{P}_1) \le s(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}_2) \le M(b-a),$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal Lemma 5.1.5 applicando la prima delle (5.5) con $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}$, mentre la quarta disuguaglianza segue dal Lemma 5.1.5 applicando la seconda delle (5.5) con $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}$; la terza disuguaglianza è la (5.4). □

Se f oltre ad essere limitata è anche positiva, la somma inferiore $s(f,\mathcal{P})$ e la somma superiore $S(f,\mathcal{P})$ approssimano l'area del sottografico di f per difetto e per eccesso, rispettivamente. Se l'intento è quello di giungere al valore dell'area tramite queste approssimazioni, la migliore approssimazione per difetto sarà quella che restituisce il valore più alto, mentre la migliore approssimazione per eccesso sarà quella che restituisce il valore più basso. Data la vastità della classe delle partizioni, la maniera di selezionare le migliori approssimazioni è quella di ricorrere alle operazioni di estremo inferiore e superiore su tutte le partizioni possibili. Ciò porta in modo naturale alla seguente definizione.

Definizione 5.1.8 (integrabilità secondo Riemann)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $s(f,\mathcal{P})$ e $S(f,\mathcal{P})$ definite come in (5.3) per una partizione $\mathcal{P}$ di $[a,b]$. Si definiscono*

$$\begin{aligned} s(f) &:= \sup\{s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\},\\ S(f) &:= \inf\{S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

La funzione f si dice integrabile secondo Riemann *se $s(f) = S(f)$ e in tal caso il valore comune di $s(f)$ e $S(f)$ di denota con*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.8}$$

che si legge "integrale fra a e b di $f(x)$ in de x".

Dalle definizioni (5.7) segue immediatamente che

$$s(f,\mathcal{P}) \le s(f) \quad \text{e} \quad S(f) \le S(f,\mathcal{P}) \qquad \text{per ogni } \mathcal{P} \text{ partizione di } [a,b]. \tag{5.9}$$

Dalla disuguaglianza centrale in (5.6) si può ricavare di più: se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono due partizioni di $[a,b]$, allora abbiamo $s(f,\mathcal{P}_1) \le S(f,\mathcal{P}_2)$, da cui, prendendo l'estremo superiore su tutte le partizioni $\mathcal{P}_1$, abbiamo

$$s(f) = \sup_{\mathcal{P}_1} s(f,\mathcal{P}_1) \le S(f,\mathcal{P}_2)$$

e ora, prendendo l'estremo inferiore su tutte le partizioni $\mathcal{P}_2$, abbiamo

$$s(f) \le \inf_{\mathcal{P}_2} S(f,\mathcal{P}_2) = S(f),$$

da cui otteniamo che

$$s(f) \leq S(f), \tag{5.10}$$

come è intuitivo immaginare. Si noti che dalla sola definizione (5.7) non è possibile ricavare la (5.10). Questo mette in risalto l'utilità del Teorema 5.1.7. Unendo le informazioni della (5.9) e della (5.10), possiamo dire che

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f, \mathcal{P}) \qquad \text{per ogni } \mathcal{P} \text{ partizione di } [a, b]. \tag{5.11}$$

Soffermiamoci un momento a commentare le formule (5.7) e (5.8). Le quantità $s(f)$ e $S(f)$ sono numeri reali; essi rappresentano la migliore approssimazione per difetto e la migliore approssimazione per eccesso, rispettivamente, dell'area del sottografico della funzione f. Sono ottenute al variare di tutte le partizioni $\mathcal{P}$ possibili e questa operazione è intimamente legata al limite delle quantità $s(f, \mathcal{P})$ e $s(f, \mathcal{P})$ nel limite $|\mathcal{P}| \to 0$.

Nella scrittura introdotta nella (5.8), che codifica l'operazione di integrazione, il simbolo $\int$ indica l'operazione di integrazione; i numeri a e b si chiamano estremo inferiore ed estremo superiore di integrazione, rispettivamente; f è la funzione che si integra e il simbolo $\mathrm{d}x$ indica la misura rispetto alla quale si sta integrando[3].

Osservazione 5.1.9. In dimensione 1, e per quello che concerne ciò di cui ci occuperemo, è difficile apprezzare il significato della misura $\mathrm{d}x$, che infatti è la ben nota misura di lunghezza degli oggetti monodimensionali, quali gli intervalli della retta reale. La misura di lunghezza assegna ad un segmento la sua lunghezza, definita come il valore assoluto (se necessario) della differenza deli estremi. Siccome ogni segmento può essere visto come un sottoinsieme della retta reale del tipo $[a, b]$, la sua lunghezza è "semplicemente" $b - a = |b - a| = |a - b|$. Un segmento ha una densità di lunghezza uniforme, pari ad 1, in modo che integrando tale densità si ottenga la lunghezza, o meglio la misura, del segmento, che in effetti è $b - a$. In situazioni più generali, è necessario considerare densità che non siano costanti, ma che variano da punto a punto. Ciò significa che se si integra una funzione costante, il valore dell'area dipende da quale intervallo si ha come dominio (si noti che ciò non accade nel caso di densità costante: il valore di $\int_a^b k \, \mathrm{d}x$ e il valore di $\int_{a+T}^{b+T} k \, \mathrm{d}x$ non dipende da T). Al contrario, il "$\mathrm{d}x$" che consideriamo noi ha la proprietà di essere invariante per traslazioni e la misura che rappresenta può in effetti essere caratterizzata come l'unica che annovera l'invarianza per traslazioni tra le proprietà che la definiscono. riferimento alla delta di Dirac, se mai se ne parlerà? □

Infine, segnaliamo che la x nella (5.8) si chiama *variabile muta* ed indica solamente la variabile rispetto alla quale si effettua la partizione del dominio. Tutte le eventuali altre variabili presenti come argomento o parametro di f che non sono x (in questo caso – in generale, che non sono il simbolo posto a destra della d) sono da considerarsi come costanti rispetto al processo di integrazione.

Come è facile intuire, una funzione f è integrabile secondo Riemann se le quantità s e S tendono allo stesso valore, ovvero se la loro differenza può essere resa piccola a piacere. Sussiste infatti il seguente teorema.

[3]Nel caso di integrali in una dimensione, che è quello di cui ci occuperemo, $\mathrm{d}x$ simboleggia che è stato effettuato un limite sulle ampiezze degli intervalli $x_i - x_{i-1}$. Tutta la scrittura $\int \bullet \, \mathrm{d}x$ è da considerarsi come un passaggio al continuo delle somme finite che sono state usate per definire $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ nelle (5.3) ed è in questo che interviene il limite dell'ampiezza della partizione a zero. Il concetto dovrebbe essere più chiaro nella definizione di integrale *à la* Cauchy, come vedremo nella Definizione 5.1.16.

Teorema 5.1.10 (criterio di integrabilità secondo Riemann)**.** *Sia* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione. Essa è integrabile secondo Riemann se e solo se*

$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste una partizione } \mathcal{P}_\varepsilon \textit{ tale che } S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{5.12}$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (5.12) e dimostriamo che f è integrabile. Sia dunque $\varepsilon > 0$ fissato e sia $\mathcal{P}_\varepsilon$ una partizione di $[a, b]$ subordinata alla scelta di ε che rende la (5.12) vera. Ricordando la (5.11), abbiamo che

$$s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq s(f) \leq S(f) \leq S(f, \mathcal{P}_\varepsilon)$$

e dal fatto che gli estremi di questa disuguaglianza distano tra loro meno di ε, segue anche che

$$0 \leq S(f) - s(f) < \varepsilon$$

(la prima disuguaglianza essendo conseguenza della (5.10)), da cui, prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$ ed invocando il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri, otteniamo l'integrabilità di f.

Supponiamo ora che f sia integrabile. In questo caso, abbiamo $s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e usiamo il fatto che siano definite come estremo superiore ed inferiore al variare delle partizioni. In particolare, fissato $\varepsilon > 0$, usando i punti (ii) della Definizione 1.5.13, troviamo che esistono $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ partizioni di $[a, b]$ tali che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon = s(f) - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}_1) \qquad \text{(perché } s(f) \text{ è un estremo superiore),}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon = S(f) + \varepsilon > S(f, \mathcal{P}_2) \qquad \text{(perché } S(f) \text{ è un estremo inferiore).}$$

Prendendo la partizione $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ e usando il Lemma 5.1.5 e la (5.4) abbiamo allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}_2) < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

da cui la (5.12) è soddisfatta con $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}$ nella forma $S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < 2\varepsilon$. □

I prossimi due teoremi che dimostreremo garantiscono l'integrabilità di due vaste classe di funzioni: quelle continue e quelle monotone e limitate. Ciò sarà sufficiente per gran parte delle applicazioni pratiche degli integrali, salvo poi estendere la definizione di integrabilità alle funzioni che divergono al finito (hanno un asintoto verticale) o definite su domini illimitati: per questo svilupperemo l'opportuna teoria nella Sezione 5.5.

La seguente proposizione presenta una formulazione equivalente della condizione di integrabilità (5.12).

Proposizione 5.1.11. *Sia* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora* f *è integrabile secondo Riemann se e solo se*

$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \textit{ tale che } |\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon \implies S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{5.13}$$

Dimostrazione. Dimostreremo che la (5.13) è equivalente alla (5.12), cosicché l'integrabilità secondo Riemann della funzione f sarà una conseguenza del Teorema

5.1.10. Siccome una partizione $\mathcal{P}$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$ ammissibile per la (5.13) è anche ammissibile per la (5.12), è immediato verificare che la (5.13) implica la (5.12).

Per dimostrare l'implicazione inversa, siano $\varepsilon > 0$ fissato e $\mathcal{P}_\varepsilon = \{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n+1}\}$ una partizione come nella (5.12). Detto $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, definiamo

$$\delta_\varepsilon := \min\left\{\frac{\varepsilon}{nM}, \min_{j\in\{1,\dots,n+1\}} (\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1})\right\}$$

e consideriamo una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_m\}$ di $[a,b]$ di ampiezza $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$ (e notiamo che $\mathcal{P}$ non è più grossolana di $\mathcal{P}_\varepsilon$, ovvero non contiene meno punti). Dobbiamo ora studiare le posizioni reciproche tra i nodi x_i della partizione $\mathcal{P}$ ed i nodi $\bar{x}_j$ della partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$. Si possono verificare due casi: un punto $\bar{x}_j$ della partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ è contenuto in un intervallo (x_{i-1}, x_i) i cui estremi sono elementi della partizione $\mathcal{P}$, oppure no. Dividiamo gli indici $i \in \{0, \dots, m\}$ in due gruppi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \big\{i \in \{1, \dots, m\} : \text{esiste } j \in \{1, \dots, n\} \text{ tale che } \bar{x}_j \in (x_{i-1}, x_i)\big\}, \\
\mathcal{B} &:= \big\{i \in \{1, \dots, m\} : \text{non esiste } j \in \{1, \dots, n\} \text{ tale che } \bar{x}_j \in (x_{i-1}, x_i)\big\},
\end{aligned}$$

e osserviamo che se $i \in \mathcal{A}$, allora l'indice $j = j(i)$ individuato è unico. Allora abbiamo che se $i \in \mathcal{A}$ e $\bar{x}_{j(i)} \in (x_{i-1}, x_i)$ si ha, per la monotonia dell'estremo inferiore rispetto all'inclusione di insiemi,

$$\begin{aligned}
0 \le \Big(\inf_{x\in[x_{i-1},\bar{x}_{j(i)}]} f(x)\Big)(\bar{x}_{j(i)} - x_{i-1}) + \Big(\inf_{x\in[\bar{x}_{j(i)},x_i]} f(x)\Big)(x_i - \bar{x}_{j(i)}) \\
- \Big(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i - x_{i-1}) \le M(x_i - x_{i-1}) < M\delta.
\end{aligned}$$

Ma allora, se $\mathcal{P}^* := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_\varepsilon$, si ha

$$0 \le s(f, \mathcal{P}^*) - s(f, \mathcal{P}) < nM\delta < \varepsilon,$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che ci sono al più n indici nell'insieme $\mathcal{A}$ e l'ultima dalla definizione di δ_ε. In maniera analoga si ricava che

$$0 \le S(f, \mathcal{P}) - S(f, \mathcal{P}^*) \le \varepsilon.$$

Usando le disuguaglianze appena trovate, la (5.4) ed il Lemma 5.1.5, otteniamo la catena

$$s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - \varepsilon \le s(f, \mathcal{P}^*) - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) < S(f, \mathcal{P}^*) + \varepsilon \le S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) + \varepsilon,$$

da cui si conclude che $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < 2\varepsilon$, che è la (5.13) come desiderato. □

Teorema 5.1.12 (integrabilità delle funzioni continue)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora essa è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Useremo la caratterizzazione dell'integrabilità data dalla Proposizione 5.1.11: in particolare, dimostreremo che vale la (5.13).

Osserviamo come prima cosa che grazie al Teorema 3.2.10 di Weierstrass la funzione f ammette minimo e massimo assoluti m_i e M_i, rispettivamente, in ogni intervallo chiuso e limitato $[x_{i-1}, x_i]$, al variare di $i = 1, \dots, n$: pertanto i numeri

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

che intervengono nelle definizioni (5.3) delle somme inferiore e superiore di Riemann sono ben definiti. Grazie al Teorema 3.3.4 di Heine–Cantor, la funzione f risulta uniformemente continua in $[a,b]$ e pertanto, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x, x' \in [a,b]$ tali che $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Consideriamo ora una partizione $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$, da cui segue che $M_i - m_i < \varepsilon$. Allora abbiamo

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a),$$

che dimostra la validità della (5.13), siccome $b - a$ è una quantità che non dipende dalla partizione scelta. □

Teorema 5.1.13 (integrabilità delle funzioni monotone limitate)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e limitata. Allora essa è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, assumiamo che f sia non decrescente. Anche in questo caso, dimostreremo l'integrabilità di f usando la Proposizione 5.1.11 e dimostrando la (5.13). Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e scegliamo

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)};$$

subordinatamente a questa scelta, esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$. Usando la monotonia di f abbiamo che, in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ determinato dalla partizione $\mathcal{P}$ si ha $m_i = f(x_{i-1})$ e $M_i = f(x_i)$. Allora possiamo stimare

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \delta_\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned}$$

ottenendo la (5.13). □

Osservazione 5.1.14. Dalla Definizione 5.1.8 di integrabilità per funzioni limitate e dai Teoremi 5.1.12 e 5.1.13 segue, in particolare, che ogni funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua a tratti è integrabile secondo Riemann. □

Ci sono dunque funzioni limitate non continue ed integrabili, come quella in Figura 5.3, e funzioni limitate e non integrabili, come ad esempio la funzione di Dirichlet f_D definita nella (1.49), ristretta, ad esempio, all'intervallo $[0,1]$. Per essa, si ha $m_i = 0$ per ogni i e per ogni partizione, siccome ogni intervallo non degenere contiene numeri razionali e $M_i = 1$ per ogni i e per ogni partizione, siccome ogni intervallo non degenere contiene numeri irrazionali. Allora, costruendo le somme di Riemann $s(f_D, \mathcal{P})$ e $S(f_D, \mathcal{P})$ come nelle (5.3) e prendendo i loro estremi superiore e inferiore per costruire $s(f_D)$ e $S(f_D)$ come nella (5.7), si ottiene $s(f_D) = 0 < 1 = S(f_D)$, pertanto f_D non è integrabile secondo Riemann[4]. Notiamo che nel definire le somme di Riemann nella (5.3) abbiamo fatto uso della proprietà di ordinamento dei numeri reali: per poter calcolare gli estremi inferiore e superiore di f in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ determinati dalla partizione $\mathcal{P}$ scelta.

[4] Lo è secondo Lebesgue, che sviluppò una teoria dell'integrazione più potente di quella di Riemann.

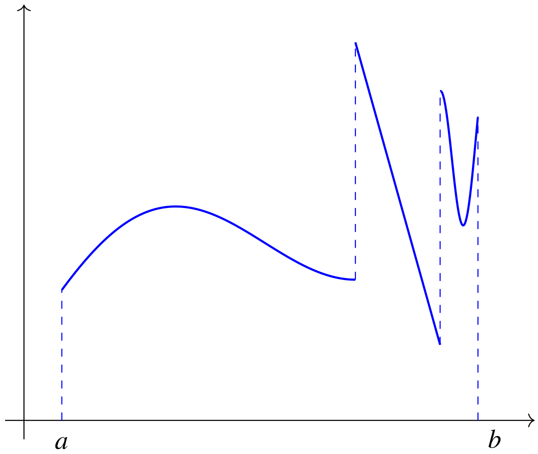


Figura 5.3: Una funzione limitata non continua integrabile.

Sarebbe auspicabile trovare un modo per non dover ricorrere all'ordinamento, per dare una definizione di somma più generale. La soluzione data dalle somma di Cauchy (che ora definiremo) guarda solo al valore assunto dalla funzione f in un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni intervallo determinato dalla partizione.

Definizione 5.1.15 (somme di Cauchy)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $\mathcal{P}$ una partizione di $[a,b]$. Per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ si scelga una n-upla di punti*

$$\Xi_{\mathcal{P}} \coloneqq \{\xi_a, \dots, \xi_n\}$$

tali che $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1,\dots,n$. Si definisce somma di Cauchy *di f subordinata alla partizione $\mathcal{P}$ ed ai punti $\Xi_{\mathcal{P}}$ il seguente numero reale*

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5.14}$$

Osserviamo che, data $\mathcal{P}$ una partizione di $[a,b]$, per ogni scelta $\Xi_{\mathcal{P}}$ dei punti ξ_i si ha, dalle definizioni (5.1.4) e (5.14)

$$s(f, \mathcal{P}) \le \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) \le S(f, \mathcal{P}). \tag{5.15}$$

Definizione 5.1.16 (integrabilità secondo Cauchy)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se*

$$\text{\textit{esiste finito il limite}} \qquad \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) = \Lambda, \tag{5.16}$$

si dice che la funzione f è integrabile secondo Cauchy *sull'intervallo $[a,b]$ e si dice che Λ è l'integrale su $[a,b]$ della funzione f.*

La definizione di limite al tendere a zero dell'ampiezza della partizione si può esplicitare nel seguente modo, utilizzando la (3.4a) e declinandola nel nostro caso:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) - \Lambda| < \varepsilon. \tag{5.17}$$

Data l'arbitrarietà della scelta dei punti $\Xi_{\mathcal{P}}$, l'esistenza del limite (5.16) non dipende in effetti dalla scelta degli ξ_i, quindi possiamo scrivere $\sigma(f, \mathcal{P})$. La (5.15) si può dunque scrivere come

$$s(f, \mathcal{P}) \le \sigma(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}). \tag{5.18}$$

Dimostriamo ora la seguente caratterizzazione.

Teorema 5.1.17. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Essa è integrabile secondo Riemann se e solo se lo è secondo Cauchy, ovvero se e solo se vale la (5.16).*

Dimostrazione. Sia f integrabile secondo Riemann. Allora, grazie alla Proposizione 5.1.11 di caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann, nella formulazione (5.13), per ogni $\varepsilon > 0$ fissato esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ per ogni partizione $\mathcal{P}$ tale che $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$. Ricordando la (5.18) e il fatto che $s(f, \mathcal{P})$ e $S(f, \mathcal{P})$ convergono alla stessa quantità quando $|\mathcal{P}| \to 0$, il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri implica che esiste il limite

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}) = s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

e dunque f è integrabile secondo Cauchy.

Viceversa, sia f integrabile secondo Cauchy. Ciò significa che esiste $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\mathcal{P}$ è una partizione di $[a, b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$ allora $|\sigma(f, \mathcal{P}) - \Lambda| < \varepsilon$. Scriviamo questa disuguaglianza come

$$\Lambda - \varepsilon < \sigma(f, \mathcal{P}) < \Lambda + \varepsilon$$

e notiamo che esiste una scelta di punti $\Xi_{\mathcal{P}}$ tali che

$$\Lambda - \varepsilon < \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) < \Lambda + \varepsilon.$$

Ora, prendendo l'estremo inferiore e superiore di $\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}})$ al variare dei punti $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ e ricordando la (5.15), otteniamo

$$\Lambda - \varepsilon \le s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) \le \Lambda + \varepsilon,$$

ovvero che $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < 2\varepsilon$, che è la (5.13), per cui f risulta integrabile secondo Riemann. ◻

Dopo avere esposto i risultati teorici sull'integrabilità delle funzioni, mostriamo come si possa calcolare l'integrale di una funzione utilizzando le somme di Cauchy. L'esempio che presentiamo offrirà alcuni spunti:

- mostra come avviene il calcolo per approssimazione;
- mostra che alcune approssimazioni sono più maneggevoli da trattare che altre;
- mostra la necessità di avere delle formule analitiche che semplifichino i calcoli (e il Teorema 5.2.14 interverrà a questo proposito);
- dà un suggerimento verso l'implementazione numerica dell'integrazione.

Esempio 5.1.18. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Come prima cosa, osserviamo che si tratta della funzione $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$, che è continua e per il Teorema 5.1.12 integrabile secondo Riemann e quindi anche secondo Cauchy per il Teorema 5.1.17. Per calcolare l'integrale con entrambi i metodi, dobbiamo trovare una partizione $\mathcal{P}$ tal che $|\mathcal{P}| \to 0$. Una scelta semplice è quella di considerare n punti x_i equispaziati e di considerare i punti medi ξ_i di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, ovvero di prendere $\mathcal{P}$ e $\Xi_{\mathcal{P}}$ della forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \left\{1 + \frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{n}, \quad \Xi_{\mathcal{P}} = \{\xi_i\}_{i=1}^n = \left\{\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right\}_{i=1}^{n} &= \left\{\frac{1}{2}\left(2 + \frac{2i-1}{n}\right)\right\}_{i=1}^{n} \\ &= \left\{\frac{2n+2i-1}{2n}\right\}_{i=1}^{n}. \end{aligned}$$

Notiamo che $|\mathcal{P}| = 1/n$ e che calcolare il limite per $|\mathcal{P}| \to 0$ è equivalente a calcolare il limite per $n \to \infty$. Allora, con le nostre scelte della partizione $\mathcal{P}$ e dei punti $\Xi_{\mathcal{P}}$ otterremo valori di $s_n = s(f, \mathcal{P})$, $S_n = S(f, \mathcal{P})$ e $\sigma_n = \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}})$ dipendenti da n e ne calcoleremo il limite per $n \to \infty$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2n+2i-1}{2n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4n^3} \sum_{i=1}^n (4n^2 + 4i^2 + 1 + 8in - 4n - 4i) \\ &= 1 + \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{4n^2} + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &\to 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{per } n \to \infty, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la (1.58) e la (1.61). Per il calcolo di s_n e S_n, usiamo la monotonia di f per dedurre che

$$\begin{aligned} m_i &= f(x_{i-1}) = \left(1 + \frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{n^2 + i^2 + 1 + 2in - 2n - 2i}{n^2} \\ M_i &= f(x_i) = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 = \frac{n^2 + 2in + i^2}{n^2} \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + i^2 + 1 + 2in - 2n - 2i) \\ &= 1 + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &\to 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{per } n \to \infty \end{aligned}$$

e parimenti

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2 + 2in + i^2) \\
&= 1 + \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3} \quad \text{per } n \to \infty,
\end{aligned}
$$

dove ancora abbiamo usato la (1.58) e la (1.61).

Abbiamo quindi visto come si ottiene il valore dell'integrale cercato con le definizione di integrabilità di Riemann e di Cauchy e abbiamo visto come la scelta dei punti della partizione può influenzare il calcolo: la scelta di $\xi_i = x_i$, che sarebbe stata possibile, avrebbe portato ad un minor numero di calcoli, anche se scegliere il punto medio dell'intervallo dà l'idea che l'approssimazione sia migliore. Il messaggio da trattenere è che, sapendo che le somme convergono, è sempre possibile mettersi nelle migliori condizioni per calcolare le approssimanti di Cauchy σ_n. Benché facile da intuire e da implementare, il processo di integrazione applicando la definizione è laborioso e lento, se i calcoli non possono essere fatti in maniera veloce, pertanto occorre dare una tecnica che permetta di integrare le funzioni – almeno quelle elementari – facilmente.

5.2 Proprietà dell'integrale

In questa sezione stabiliremo le più importanti proprietà dell'integrale e dimostreremo il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo integrale. Studieremo le proprietà di linearità dell'integrale e le stime più immediate che si possono dare su di esso. I teoremi che seguono valgono in generale per funzioni integrabili, ma dimostreremo alcuni di essi solo nel caso in cui la funzione sia continua, per semplificare le dimostrazioni. Una volta dimostrato il Teorema 5.2.11 di spezzamento, i risultati enunciati saranno automaticamente validi per funzioni continue a tratti, nello spirito dell'Osservazione 5.1.14.

Teorema 5.2.1 (linearità dell'integrale)**.** *Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora la funzione $\alpha f + \beta g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e vale*

$$
\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.19}
$$

Dimostrazione. Se $\alpha = \beta = 0$, non c'è nulla da dimostrare perché la (5.19) è soddisfatta nella forma $0 = 0$. Supponiamo dunque che almeno uno tra α e β sia diverso da zero: ciò implica che $|\alpha| + |\beta| > 0$. Ora usiamo l'integrabilità di f e g per dedurre quella di $\alpha f + \beta g$ e dimostrare la (5.19) nel caso generale. Usiamo la (5.17): fissiamo $\varepsilon > 0$ e troviamo δ_ε tale che se $\mathcal{P}$ è una partizione di $[a,b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$ allora abbiamo

$$
\left|\sigma(f,\mathcal{P}) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}; \quad \left|\sigma(g,\mathcal{P}) - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}. \tag{5.20}
$$

Notiamo che l'operazione (5.14) che definisce la somma σ è un'operazione lineare e pertanto, scelti punti $\Xi_{\mathcal{P}}$ si ha

$$
\sigma(\alpha f + \beta g, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) = \alpha\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) + \beta\sigma(g, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}})
$$

e dunque possiamo stimare

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma(\alpha f+\beta g,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})-\left(\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
&=\left|\left(\alpha\sigma(f,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})-\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)+\left(\beta\sigma(g,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})-\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
&\le|\alpha|\cdot\left|\sigma(f,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|+|\beta|\cdot\left|\sigma(g,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le\frac{|\alpha|\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}+\frac{|\beta|\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

usando la (5.20); il teorema è dimostrato. □

Teorema 5.2.2 (di confronto (per integrali))**.** *Siano* $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *due funzioni integrabili tali che* $f(x)\le g(x)$ *per ogni* $x\in[a,b]$*. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.21}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una partizione qualunque di $[a,b]$ e sia $\Xi_{\mathcal{P}}$ una scelta di punti intermedi agli intervalli $[x_{i-1},x_i]$. L'ordinamento $f\le g$ si trasporta alle somme di Cauchy: infatti, siccome $f(x)\le g(x)$ per ogni $x\in[a,b]$ anche $f(\xi_i)\le g(\xi_i)$ e dunque

$$\sigma(g,\mathcal{P})-\sigma(f,\mathcal{P})\ge 0. \tag{5.22}$$

Sfruttiamo ora l'integrabilità di f e g: fissiamo $\varepsilon>0$ e troviamo $\delta_\varepsilon>0$ tale che se $|\mathcal{P}|<\delta_\varepsilon$ si ha

$$-\varepsilon<\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sigma(f,\mathcal{P})\overset{(*)}{<}\varepsilon\qquad\text{e}\qquad-\varepsilon\overset{(*)}{<}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\sigma(g,\mathcal{P})<\varepsilon.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\sigma(g,\mathcal{P})\right)-\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\sigma(f,\mathcal{P})\right)\\
&\quad+\sigma(g,\mathcal{P})-\sigma(f,\mathcal{P})>-2\varepsilon,
\end{aligned}$$

dove si sono usate la (5.22) e le due disuguaglianze strette $(*)$. Prendendo il limite per $\varepsilon\to0$ si ottiene la (5.21) ed il teorema è dimostrato. □

Il Teorema 5.2.2 di confronto ha il seguente importantissimo corollario.

Corollario 5.2.3. *Sia* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora vale*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{5.23}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 5.1.12 di integrabilità delle funzioni continue, f è integrabile; lo stesso teorema applicato a $|f|$ (che è continua perché f lo è) garantisce l'integrabilità di quest'ultima. Per ogni $x\in[a,b]$ vale $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ (si ricordi la (1.38)), pertanto, integrando termine a termine tra a e b e usando due volte il Teorema 5.2.2, abbiamo

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

da cui si ottiene la (5.23) ricordando la Proposizione 1.5.23. □

Dalla dimostrazione del Corollario 5.2.3 si evince il motivo per cui abbiamo dimostrato la (5.23) solo nell'ipotesi in cui f sia continua, invece che integrabile. Per generalizzare il risultato al caso di f integrabile serve il Teorema 5.2.6: la generalizzazione del Corollario 5.2.3 sarà presentata nel Corollario 5.2.8.

Un secondo importantissimo corollario del Teorema 5.2.2 di confronto è il teorema della media integrale.

Corollario 5.2.4 (teorema della media integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e limitata. Allora, detti $m = \inf_{[a,b]} f$ e $M = \sup_{[a,b]} f$, vale*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a). \tag{5.24}$$

Se inoltre f è continua, allora esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{5.25}$$

Dimostrazione. Siccome, per ogni $x \in [a,b]$, si ha $m \leq f(x) \leq M$, si ottiene immediatamente la (5.24) applicando due volte il Teorema 5.2.2. Dividendo per $b-a$, si può riscrivere la (5.24) come

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

e chiamando μ il termine centrale della catena di disuguaglianze, se f è continua, possiamo invocare il Corollario 3.2.14 (Teorema dei valori intermedi) e trovare un valore $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = \mu$. Ciò è equivalente alla (5.25) e la dimostrazione è conclusa. □

Definizione 5.2.5 (media integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. La quantità*

$$\mu = \fint_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.26}$$

si chiama media integrale *di f nell'intervallo* $[a,b]$.

L'interpretazione geometrica della (5.24) è che se f è una funzione integrabile (e non negativa) allora l'area del sottografico di f uguaglia l'area del sottografico di una funzione costante di altezza μ, dove μ è necessariamente un valore intermedio tra m e M; si veda la Figura 5.4(a).

L'interpretazione geometrica della (5.25) è che se f è una funzione continua (e non negativa) allora esiste un valore $\xi \in [a,b]$ tale che $\mathrm{area}(\mathrm{sg}(f;[a,b])) = \mathrm{area}(\mathrm{sg}(\mu;[a,b]))$, ovvero l'area del sottografico di f è la stessa dell'area del sottografico della funzione costante μ: questa è l'area di un rettangolo di base $[a,b]$ e altezza $\mu = f(\xi)$; si veda la Figura 5.4(b).

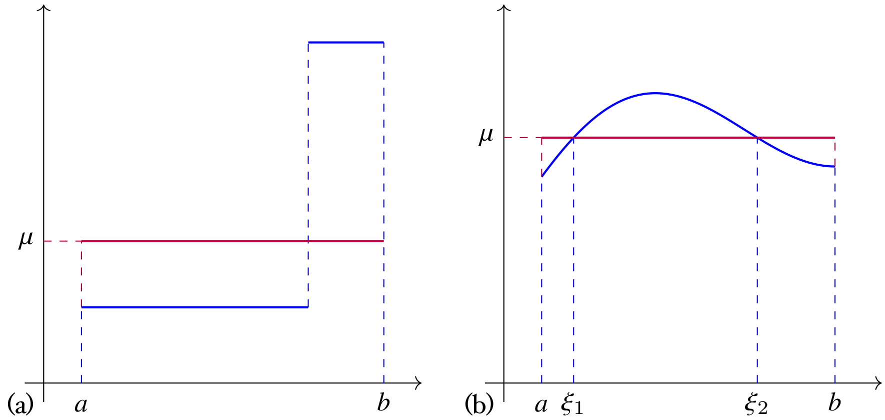


Figura 5.4: Il teorema della media integrale: (a) il caso generale della (5.24); (b) il caso di una funzione f continua per la quale esistono due punti ξ_1 e ξ_2 che soddisfano la (5.25).

Dimostriamo ora un importante teorema che permetterà, tra le altre cose, di generalizzare il Corollario 5.2.3 a funzioni integrabili non necessariamente continue. Il risultato che presentiamo stabilisce l'integrabilità delle composizione di una funzione integrabile con una continua.

Teorema 5.2.6. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e limitata tra due costanti $m, M \in \mathbb{R}$ (con $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in [a,b]$) e sia $\Phi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora la funzione $\Phi \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$.*

Mettiamo in risalto che la potenza di questo teorema è che non assume che la funzione f sia continua. Infatti, se lo fosse, per il Teorema 3.2.9 di continuità della funzione composta, allora $\Phi \circ f$ sarebbe immediatamente continua e dunque integrabile per il Teorema 5.1.12.

Dimostrazione. La dimostrazione è articolata: si sfruttano la continuità uniforme di Φ garantita dal Teorema 3.3.4 di Heine–Cantor e l'integrabilità di f caratterizzata dal criterio di integrabilità raccolto nella (5.12) del Teorema 5.1.10. Grazie a queste, si dimostrerà la (5.12) per la funzione $h := \Phi \circ f$, ottenendo l'integrabiltà della funzione composta in oggetto.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ per tutta la dimostrazione. La continuità uniforme di Φ garantisce che possiamo trovare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\text{per ogni } y_1, y_2 \in [m,M] \text{ tali che } |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| < \varepsilon. \tag{5.27}$$

L'integrabilità di f declinata nella (5.12) garantisce che possiamo trovare una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che

$$S(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - s(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \delta_\varepsilon^2 \tag{5.28}$$

(è infatti possibile scegliere una tolleranza qualunque e scegliamo δ_ε^2 al posto di ε nella (5.12)). Subordinatamente alla partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$, poniamo

$$m_i^f = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i^f = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

e

$$m_i^h = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x), \quad M_i^h = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x).$$

Osserviamo che non sappiamo controllare quanto la funzione f vari sugli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ generati dalla partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$, pertanto dovremo comportarci diversamente quando la variazione è piccola rispetto a quando la variazione è grande. La piccolezza della variazione di f sarà misurata rispetto a δ_ε, il parametro che interviene nella definizione della continuità uniforme (5.27). Allora, divideremo gli intervalli in due famiglie, suddividendo gli indici $i \in \{1, \dots, n\}$ in questo modo:

$$\mathcal{A} := \left\{i \in \{1,\dots,n\} : M_i^f - m_i^f < \delta_\varepsilon\right\}; \quad \mathcal{B} := \left\{i \in \{1,\dots,n\} : M_i^f - m_i^f \geq \delta_\varepsilon\right\}.$$

Allora, se $i \in \mathcal{A}$ si ha, per la (5.27), $M_i^h - m_i^h < \varepsilon$, mentre se $i \in \mathcal{B}$ si ha $M_i^h - m_i^h \leq 2K$, dove $K = \max\{|\Phi(y)| : y \in [m, M]\}$, che sappiamo essere finito per il Teorema 3.2.10 di Weierstrass.

Usiamo ora la (5.28) per ottenere

$$\delta_\varepsilon^2 > S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \geq \sum_{i\in\mathcal{B}} \left(M_i^f - m_i^f\right)(x_i - x_{i-1}) \geq \delta_\varepsilon \sum_{i\in\mathcal{B}} (x_i - x_{i-1})$$

che implica che

$$\sum_{i\in\mathcal{B}} (x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon.$$

Allora possiamo stimare

$$\begin{aligned} S(h, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(h, \mathcal{P}_\varepsilon) &= \sum_{i\in\mathcal{A}} \left(M_i^h - m_i^h\right)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in\mathcal{B}} \left(M_i^h - m_i^h\right)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i\in\mathcal{A}} (x_i - x_{i-1}) + 2K \sum_{i\in\mathcal{B}} (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \varepsilon(b-a) + 2K\delta_\varepsilon \leq (b - a + 2K)\varepsilon, \end{aligned}$$

a patto di scegliere, come è possibile $\delta_\varepsilon < \varepsilon$. Abbiamo dunque dimostrato la (5.12) per la funzione $h = \Phi \circ f$, che dunque risulta integrabile per il Teorema 5.1.10. □

Il seguente corollario è di immediata dimostrazione.

Corollario 5.2.7. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e limitata tra due costanti $m, M \in \mathbb{R}$ (con $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$) e sia $\Phi\colon [m, M] \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora la funzione $\Phi \circ f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.3.6, ogni funzione lipschitziana è continua, pertanto il risultato segue dal Teorema 5.2.6. □

Siamo ora pronti per dimostrare la (5.23) nel caso di una funzione f che sia integrabile. Grazie al risultato del Teorema 5.2.6, a partire da una funzione f integrabile è possibile dedurre l'integrabilità di altre funzioni che si ottengono direttamente dalla f, quali la parte positiva, la parte negativa ed il valore assoluto.

Corollario 5.2.8. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora le funzioni parte positiva f^+ e parte negativa f^- definite nelle (1.46) e la funzione $|f|$ sono integrabili in $[a, b]$ e, in particolare, vale la (5.23).*

Dimostrazione. È immediato vedere che $f^+ = \Phi_1 \circ f$ e $f^- = \Phi_2 \circ f$ dove

$$\Phi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0, \\ y & \text{se } y \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Phi_2(y) = \begin{cases} -y & \text{se } y \leq 0, \\ 0 & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

e dunque l'integrabilità di $f^\pm$ segue dal Teorema 5.2.6. Infine, dalla (1.47) segue anche l'integrabilità di $|f|$. Una volta garantita l'integrabilità di $|f|$, la (5.23) segue dal Teorema 5.2.2 di confronto come nella dimostrazione del Corollario 5.2.3. □

Un altro corollario interessante del Teorema 5.2.6 è il seguente.

Corollario 5.2.9. *Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Allora anche la funzione $f \cdot g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Come prima osservazione notiamo che se una funzione è integrabile, allora anche il suo quadrato lo è: basta prendere $\Phi(y) = y^2$ nel Teorema 5.2.6. Allora, l'integrabilità di $f \cdot g$ segue dalla seguente identità[5]

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\left[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2\right]$$

e dal Teorema 5.2.1 di linearità dell'integrale. □

Vediamo ora come l'integrabilità di una funzione su un intervallo garantisca l'integrabilità su ogni sottointervallo.

Lemma 5.2.10. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Allora f è integrabile in $[\alpha,\beta]$*

Dimostrazione. Dal Teorema 5.1.10, fissato $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}_\varepsilon$ tale che $S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Dato $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, siano $\widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon = \mathcal{P}_\varepsilon \cup \{\alpha,\beta\}$ e $\mathcal{P}'_\varepsilon = \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon \cap [\alpha,\beta]$, ovvero dai punti di $\mathcal{P}_\varepsilon$ contenuti in $[\alpha,\beta]$ cui aggiungiamo gli estremi α e β. Allora,

$$S(f, \mathcal{P}'_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}'_\varepsilon) \leq S(f, \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon) - s(f, \widetilde{\mathcal{P}}_\varepsilon) \leq S(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon,$$

dove la prima disuguaglianza è dovuta al fatto che nelle somme a destra ci sono più termini positivi, mentre la seconda discende dalla 5.5. Abbiamo dunque provato la (5.12) per la funzione f sull'intervallo $[\alpha,\beta]$ e concludiamo per il Teorema 5.1.10. □

Il prossimo teorema lega l'integrale di una funzione su un intervallo all'integrale su due diversi sottointervalli complementari.

Teorema 5.2.11 (di spezzamento)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $c \in (a,b)$. Allora f è integrabile in $[a,c]$ e in $[c,b]$ e vale*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.29}$$

[5] Questa identità è la versione in $\mathbb{R}$ dell'*identità di polarizzazione*, che vale nel contesto generale degli spazi di Hilbert e permette di ricostruire il prodotto scalare dalla norma. Nel nostro caso, la norma è il valore assoluto, mentre il prodotto scalare è il prodotto tra numeri.

Dimostrazione. Per il Lemma 5.2.10, la funzione f risulta integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$. Allora, dalla caratterizzazione dell'integrabilità data dalla (5.17), fissato $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che se $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ sono tre partizioni tali che $|\mathcal{P}| < \delta_\varepsilon$, $|\mathcal{P}_1| < \delta_\varepsilon$ e $|\mathcal{P}_2| < \delta_\varepsilon$ si hanno le seguenti disuguaglianze

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}})\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}_1, \Xi_{\mathcal{P}_1})\right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left|\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \Xi_{\mathcal{P}_2})\right| < \varepsilon,$$

per ogni scelta $\Xi_{\mathcal{P}}$, $\Xi_{\mathcal{P}_1}$ e $\Xi_{\mathcal{P}_2}$ di punti. Non è restrittivo supporre che $\Xi_{\mathcal{P}} = \Xi_{\mathcal{P}_1} \cup \Xi_{\mathcal{P}_2}$ dimodoché

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}}) = \sigma(f, \mathcal{P}_1, \Xi_{\mathcal{P}_1}) + \sigma(f, \mathcal{P}_2, \Xi_{\mathcal{P}_2}).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \\
=&\left|\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}, \Xi_{\mathcal{P}})\right) - \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}_1, \Xi_{\mathcal{P}_1})\right)\right. \\
&\left. - \left(\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sigma(f, \mathcal{P}_2, \Xi_{\mathcal{P}_2})\right)\right| < 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la (5.29). □

5.2.1 Integrali definiti e il teorema fondamentale del calcolo

Finora ci siamo occupati di integrare una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ su tutto il suo dominio di definizione, ma grazie al Lemma 5.2.10 abbiamo visto che se f è integrabile, allora lo è su ogni sottoinsieme del suo dominio. Ci serviamo di ciò per dare maggiore libertà alla scelta degli estremi di integrazione, rilassando la condizione (finora implicita) che l'estremo inferiore di integrazione sia minore dell'estremo superiore di integrazione, quindi non imponendo più che $a < b$. Daremo ora la definizione di integrale tra a e b con a e b qualunque nel dominio di una funzione. Con un'inversione delle notazioni rispetto a quelle usate nel Lemma 5.2.10, diamo la seguente definizione.

Definizione 5.2.12 (integrale definito)**.** *Sia $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e siano $a, b \in [\alpha, \beta]$ due punti qualunque. Si definisce l'*integrale definito *di f tra a e b come*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{se } a < b, \\ 0 & \textit{se } a = b, \\ \displaystyle -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{se } a > b. \end{cases} \tag{5.30}$$

Continuano a valere i Teoremi 5.2.1 di linearità dell'integrale e 5.2.11 di spezzamento con la possibilità di scegliere tre qualunque punti $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ senza che siano ordinati. Il Corollario 5.2.4 si estende con $a, b \in [\alpha, \beta]$ qualunque. Inoltre, si può migliorare la (5.23) (nelle ipotesi del Corollario 5.2.3 o in quelle più generali del Corollario 5.2.8) nel seguente modo

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \right| \le M|a-b|, \tag{5.31}$$

dove $M = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Definizione 5.2.13 (funzione integrale)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* $x_0 \in [a,b]$. *La funzione* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.32}$$

si dice funzione integrale *di* f.

Teorema 5.2.14 (fondamentale del calcolo intergale)**.** *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora*

1. *la funzione integrale* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *definita nella* (5.32) *è derivabile in* $[a,b]$ *e si ha* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$*;*
2. (Teorema di Torricelli–Barrow) *se* G *è una qualunque primitiva di* f*, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) =: [G(x)]_a^b. \tag{5.33}$$

Dimostrazione. Dimostriamo i due enunciati.

1. Fissiamo un punto $x \in (a,b)$ e proviamo la derivabilità di F in x e che $F'(x) = f(x)$. La dimostrazione avverrà mostrando allo stesso tempo che il limite del rapporto incrementale di F in x esiste ed è finito e coincide con f. Abbiamo

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \fint_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_x(h)),$$

dove abbiamo usato la definizione di F per la prima uguaglianza, il Teorema 5.2.11 di spezzamento per la seconda uguaglianza e la (5.25) del Corollario 5.2.4, poiché la funzione f è continua. Nella formula precedente, $\xi_x(h) \in [x \wedge (x+h), x \vee (x+h)]$ e per il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri si ha che $\xi_x(h) \to x$ quando $h \to 0$. Allora, prendendo il limite per $h \to 0$, abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_x(h)) = f(x),$$

dove sono intervenute la continuità della funzione f ed il Teorema 3.2.9 di continuità della funzione composta. Come annunciato, abbiamo dunque dimostrato che il limite del rapporto incrementale della funzione integrale F esiste, è finito e coincide con la funzione f in ogni punto di $[a,b]$. Ormai il monito è superfluo: negli estremi $x = a$ e $x = b$ si potranno considerare solamente le derivate unilaterali $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$.

2. Il punto precedente del teorema sancisce che la funzione integrale F è una primitiva della funzione integranda f. Sappiamo, dalla Proposizione 4.2.12 che se G è un'altra primitiva di f allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in [a, b]$, ovvero

$$G(x) = F(x) + c = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + c. \tag{5.34}$$

È possibile determinare c calcolando $G(x_0)$. Infatti, dalla Definizione 5.30 abbiamo che

$$G(x_0) = F(x_0) + c = \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + c = 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = G(x_0).$$

Allora la (5.34) diventa

$$G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{per ogni } x, x_0 \in [a, b],$$

da cui, scegliendo $x_0 = a$ e $x = b$, otteniamo la (5.33).

Il teorema è così dimostrato. □

Rimandiamo alla Sezione 7.5.1 per un enunciato più generale del Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo appena dimostrato.

5.3 Integrali indefiniti e regole di integrazione

In questa sezione mettiamo in relazione i rapporti tra derivazione ed integrazione e vediamo come il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo ci dà finalmente la strategia per la ricerca delle primitive di una funzione. All'inizio del capitolo ci siamo posti, come problema motivatore, di ricercare la primitiva di una funzione assegnata e abbiamo visto come la funzione integrale F definita nella (5.32) assolva a questo compito. L'importanza del Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo è dovuta al fatto che non solo garantisce che la funzione integrale F ha le proprietà richieste per essere una primitiva (ovvero ha le caratteristiche descritte nella Definizione 4.2.11) ma anche che è la funzione che bisogna considerare per calcolare gli integrali definiti – e se non proprio lei, una qualunque sua traslata $G = F + c$, come si deduce dalla (5.33) e dalla Proposizione 4.2.12. Conviene soffermarsi un momento a riunire tutte le informazioni che la Definizione 4.2.11, la Proposizione 4.2.12 e il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo ci dànno sui rapporti tra derivazione ed integrazione.

Dato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e dato $k \in \mathbb{N}$, indichiamo con

$$\begin{aligned} D[\cdot]\colon C^{k+1}([a,b]) &\to C^{k}([a,b]) \\ f &\mapsto D[f] = f' \end{aligned} \tag{5.35}$$

l'operatore di derivazione, che associa ad una funzione f la sua derivata f'. Esso rispetta la Definizione 1.4.1 di funzione: per ogni funzione $f \in C^{k+1}([a, b])$ esiste unica la funzione $f' \in C^{k}([a, b])$ tale che $D[f] = f'$. Notiamo immediatamente che D non è iniettivo, infatti vale

$$D[f + c] = f' = D[f] \qquad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}, \tag{5.36}$$

poiché le costanti additive sono invisibili all'operazione di derivazione. Il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo mette in risalto che l'integrazione è l'operazione che produce una primitiva, ovvero si comporta come l'operazione inversa della derivazione. Tuttavia, sappiamo dalla Definizione 1.4.5 che per invertire una funzione serve che essa sia suriettiva e siamo dunque di fronte alla situazione di voler invertire una funzione non iniettiva. Ciò che va fatto è trovare un modo e una simbologia per fare questa operazione. In tal modo, potremo definire più formalmente l'operatore di integrazione $I[\cdot]$ che sarà l'inverso dell'operatore di derivazione definito nella (5.35).

Ricordando la definizione di traslazione (si veda la (1.44)), definiamo ora la traslazione $\tau_c : f \mapsto f + c$ che somma[6] il valore della costante c ai valori restituiti dalla funzione f e definiamo

$$\tau_{\mathbb{R}}(f) \coloneqq \{f + c : c \in \mathbb{R}\} \tag{5.37}$$

l'insieme di tutte le traslate della funzione f. La (5.36) può essere dunque riscritta come

$$D[\tau_{\mathbb{R}}(f)] = D[f] = f', \tag{5.38}$$

dove l'applicazione di $D[\cdot]$ ad un sottoinsieme del suo dominio è da intendersi nel senso della (1.18).

Il fatto che l'operazione di integrazione restituisca *una* primitiva e non *la* primitiva ci dice subito che l'operatore di integrazione $I[\cdot]$ che vorremmo definire non può essere una funzione (l'unicità dell'elemento nel codominio richiesta nella (1.17) non è rispettata). Tuttavia, utilizzando $\tau_{\mathbb{R}}$ possiamo risolvere questo *impasse* e definire l'operatore di integrazione in modo tale che per ogni funzione f restituisca la famiglia delle sue primitive, ovvero *tutte* le funzioni che derivate dànno f. Definiamo dunque, per ogni[7] $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I[\cdot] \colon C^k([a,b]) &\to C^{k+1}([a,b]) \\ f &\mapsto I[f] = \tau_{\mathbb{R}}(F), \qquad \text{dove } F \text{ è definita in (5.32).} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Dalla (5.39), con la (5.37), leggiamo che effettuare l'integrazione $I[f]$ di una funzione f restituisce *tutte* le traslate della funzione integrale F di f, ovvero

$$I[f] = \tau_{\mathbb{R}}(F) = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}; \tag{5.40}$$

si tratta quindi di un insieme di funzioni (ed è per questo che l'operatore di integrazione non rispetta la definizione di funzione). Diamo la seguente definizione.

Definizione 5.3.1 (integrale indefinito)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si definisce* integrale indefinito *di f la* famiglia delle primitive *della funzione f descritta nella* (5.40)*, che si suole denotare con il simbolo*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \tag{5.41}$$

dove F è una qualunque primitiva di f e $c \in \mathbb{R}$ indica una costante di integrazione.

[6] C'è un'inconsistenza con il segno della costante rispetto alla (1.44): infatti avremmo dovuto considerare τ_{-c} qui. Tuttavia, siccome il segno della costante ora non è importante (mentre lo era quando abbiamo definito la traslazione per capire se ci si muoveva a destra o a sinistra, in alto o in basso), ci riserviamo di risparmiarci il segno meno nel pedice di τ.

[7] Abbiamo visto che la funzione integrale F di una funzione f può essere derivata, quindi integrando si guadagna un ordine di derivazione. Abbiamo inoltre visto che è possibile calcolare l'integrale di una funzione che sia integrabile, e ciò è una condizione più debole che essere di classe C^0. Scriviamo la (5.39) nel seguente modo per comodità.

Osservazione 5.3.2. Facciamo notare che ogni volta che si compie un'integrazione indefinita serve una ed una sola costante additiva. Per la proprietà di linearità dell'integrale, basta sempre una sola costante additiva ad ogni integrazione indefinita:

$$\begin{aligned} I[\alpha f + \beta g] &= \alpha I[f] + \beta I[g] \\ \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x &= \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ \alpha F(x) + \beta G(x) + c &= \alpha(F(x) + c_f) + \beta(G(x) + c_g) \\ &= \alpha F(x) + \beta G(x) + (\alpha c_f + \beta c_g), \end{aligned}$$

e l'uguaglianza è stabilita con $c = \alpha c_f + \beta c_g$, data l'arbitrarietà delle costanti. □

Combinando le informazioni della (5.38) e della (5.40) abbiamo, per ogni funzione f per cui le operazioni indicate si possono compiere,

$$D[I[f]] = D[\tau_{\mathbb{R}}(F)] = D[F] = f, \tag{5.42a}$$

$$I[D[f]] = I[f'] = \tau_{\mathbb{R}}(f) = f + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}; \tag{5.42b}$$

possiamo riscrivere la (5.42b) come

$$I[D[F]] = I[f] = \tau_{\mathbb{R}}(F) = F + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{5.42c}$$

dove ora la funzione f è la stessa della (5.42a). Possiamo mettere in relazione la formula (5.42c) con la formula (5.33) osservando che "*essere una primitiva*" è una relazione di equivalenza: il Teorema 5.2.14-2. di Torricelli–Barrow dice infatti che basta calcolare la variazione tra a e b di una *qualunque* primitiva di f. Allora, detto $\mathcal{I}$ l'insieme delle funzioni integrabili e definito l'operatore di integrazione definita

$$\begin{aligned} I_a^b[\cdot] \colon \mathcal{I} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto I_a^b[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{5.43}$$

si può scrivere la (5.33) come

$$I_a^b[f] = [G]_a^b, \qquad \text{dove } G \in \tau_{\mathbb{R}}(F), \tag{5.44}$$

dove abbiamo volutamente tralasciato ogni riferimento alla variabile x perché la (5.44) è un'uguaglianza tra numeri reali. Nello stesso spirito, la versione della (5.42c) con l'operatore di integrazione definita è

$$I_a^b[D[F]] = I_a^b[f] = [F]_a^b, \tag{5.45}$$

dove si è scelta come primitiva, proprio la funzione di cui l'integranda è la derivata.

Dalle (5.42) e dalla (5.44) possiamo dedurre due importantissime regole di integrazione.

Teorema 5.3.3 (integrazione per parti)**.** *Siano $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni sia derivabili che integrabili. Allora valgono le seguenti formule, dette di integrazione per parti,*

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.46a}$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.46b}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione prodotto fg e la regola di derivazione del prodotto (4.6c), che, alla luce dell'operatore di derivazione D introdotto nella (5.35), si può scrivere

$$D[fg] = D[f]g + fD[g] = f'g + fg'. \tag{5.47}$$

Riarrangiando i termini e applicando la (5.42b), possiamo scrivere

$$I[fD[g]] = I[D[fg]] - I[D[f]g] = fg - I[D[f]g],$$

dove abbiamo scelto la costante $c = 0$ per la primitiva della derivata di fg (si veda l'Osservazione 5.3.2). Abbiamo ottenuto la (5.46a).

Applicando invece l'operatore definita $I_a^b[\cdot]$ alla (5.47) e tenendo conto della (5.44), abbiamo

$$I_a^b[fD[g]] = I_a^b[D[fg]] - I_a^b[D[f]g] = [fg]_a^b - I_a^b[D[f]g],$$

che è la (5.46b). □

Teorema 5.3.4 (integrazione per sostituzione/cambiamento di variabile)**.** *Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ una funzione di classe C^1. Allora valgono le seguenti formule, dette di integrazione per sostituzione,*

$$\int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t; \tag{5.48a}$$

se $[c,d] \subseteq [a,b]$ e $\gamma,\delta \in [\alpha,\beta]$ sono tali che $c = \varphi(\gamma)$ e $d = \varphi(\delta)$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\delta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\gamma^\delta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.48b}$$

Se poi la funzione φ è iniettiva, la (5.48b) diventa

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.48c}$$

Dimostrazione. Partiamo dal primo membro della (5.48a), che possiamo scrivere come $\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)} =: I[f]|_\varphi$, intendendo che la sostituzione $x = \varphi(t)$ avviene formalmente. Ora applichiamo la regola della catena (4.9) per derivare la funzione composta. Applicando $D[\cdot]$ otteniamo

$$D\big[I[f]|_\varphi\big] = D[I[f]]|_\varphi D[\varphi] = f|_\varphi D[\varphi] = (f\circ\varphi)D[\varphi]$$

e integrando abbiamo

$$I[f]|_\varphi = I\big[D\big[I[f]|_\varphi\big]\big] = I\big[D[I[f]]|_\varphi D[\varphi]\big] = I[(f\circ\varphi)D[\varphi]], \tag{5.49}$$

che è la (5.48a). Osserviamo ora che se F è una primitiva di f (ovvero $D[F] = f$) allora $F\circ\varphi$ è una primitiva di $(f\circ\varphi)D[\varphi]$: infatti,

$$D[F\circ\varphi] = (F\circ\varphi)' \overset{(4.9)}{=} (F'\circ\varphi)\varphi' = (f\circ\varphi)\varphi' = (f\circ\varphi)D[\varphi].$$

Applicando l'operatore di integrazione definita $I_\gamma^\delta[\cdot]$, riscriviamo il membro destro della (5.49) come

$$I_\gamma^\delta[(f\circ\varphi)D[\varphi]] = [F\circ\varphi]_\gamma^\delta = F(\varphi(\delta)) - F(\varphi(\gamma)) = [F]_c^d = I_c^d[f].$$

Abbiamo dunque dimostrato la (5.48b). La formula (5.48c) è conseguenza immediata dell'iniettività di φ. □

Osservazione 5.3.5. Mettiamo in risalto alcuni fatti riguardanti le formule (5.48).

1. La (5.48a) può essere anche scritta come
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
in cui è evidente la sostituzione effettuata. L'utilità di questa formula si vede quando uno dei due integrali è complicato da risolvere, ma l'altro risulta più agevole: si risolve l'integrale più comodo e poi si sostituisce la variabile ausiliaria usando la relazione $x = \varphi(t)$.
2. La formula (5.48b) ha il vantaggio di valere per ogni funzione φ di classe C^1 e per ogni coppia di valori $\gamma, \delta \in [\alpha, \beta]$ tali che $c = \varphi(\gamma)$ e $d = \varphi(\delta)$. Tuttavia, in questa situazione ibrida (se così si può dire), la funzione φ compare in entrambi gli integrali, sia quello in $\mathrm{d}x$ sia quello in $\mathrm{d}t$.
3. l'unico modo in cui si può separare il mondo delle x da quello delle t è se la funzione di cambiamento di variabile $t \mapsto x = \varphi(t)$ è iniettiva: in questo modo, per ogni $c, d \in [a, b]$ sono univocamente determinati $\gamma, \delta \in [\alpha, \beta]$ tali che $c = \varphi(\gamma)$ e $d = \varphi(\delta)$. Allora, è possibile scrivere gli estremi di integrazione come nella (5.48c). □

Esempi 5.3.6. Presentiamo subito due esempi di utilizzo delle regole di integrazione appena presentate.

1. Si voglia calcolare $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. La funzione $x \mapsto xe^x$ non è una derivata, per cui non si può applicare direttamente la (5.45). Usiamo invece la regola di integrazione per parti (5.46b) con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Questa scelta ha il vantaggio che nell'integrale che ci resta da calcolare il monomio $x = f(x)$ è sparito (in generale, derivando un polinomio il suo grado diminuisce di uno). Abbiamo
$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

2. Si voglia calcolare $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. In questo caso conviene usare la sostituzione $x = \varphi(t) = \sin t$, con $t \in [0, \pi/2]$, in modo che $0 = \varphi(0)$ e $1 = \varphi(\pi/2)$. Notando che $t \mapsto \sin t$ è iniettiva in $[0, \pi/2]$, possiamo applicare la (5.48c). Siccome si ha che $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = \cos t\,\mathrm{d}t$, abbiamo
$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}[\sin 2t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Un'applicazione immediata del Teorema 5.3.3 di integrazione per parti è la *formula di Taylor con resto integrale*.

Teorema 5.3.7 (formula di Taylor con resto integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{n+1}. Allora, per ogni $x_0 \in [a,b]$ e $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in [a,b]$ si ha*

$$f(x_0+h) = T^{(n)}_{f,x_0}(h) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.50}$$

Dimostrazione. Sfruttando il principio di induzione Proposizione 1.6.2, la dimostrazione si ottiene in due semplici passi. Verifichiamo che la (5.50) valga per $n = 0$: si ha $f \in C^1([a,b])$ e, grazie alla (5.33),

$$f(x_0+h) = T^{(0)}_{f,x_0}(h) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x_0+h} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + f(x_0+h) - f(x_0),$$

che è un'identità e quindi abbiamo dimostrato la (5.50) nel caso $n = 0$.

Supponiamo ora che valga la (5.50) per un certo $n \in \mathbb{N}$ è dimostriamo che vale anche per $n+1$. Assumiamo dunque la funzione $f \in C^{n+2}([a,b])$ e integriamo per parti nella (5.50) usando $f^{(n+1)}$ come funzione da derivare (ovvero come f nella (5.46b)) e $(x_0+h-t)^n$ come funzione da integrare (ovvero come g nella (5.46b))

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) ={}& T^{(n)}_{f,x_0}(h) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
={}& T^{(n)}_{f,x_0}(h) + \left[-\frac{1}{(n+1)!}(x_0+h-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x_0+h} \\
&+ \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
={}& T^{(n)}_{f,x_0}(h) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\
={}& T^{(n+1)}_{f,x_0}(h) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x_0+h} (x_0+h-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

che è la (5.50) scritta per $n+1$, come volevamo ottenere. Il teorema è dimostrato. □

5.4 Tecniche di integrazione

In questa sezione riportiamo una raccolta di tecniche di integrazione che permettono di trattare molti, se non tutti, gli integrali elementari[8] di funzioni di una variabile che sarà necessario conoscere durante i primi anni di istruzione universitaria. Iniziamo subito con un risultato che non richiede nemmeno il calcolo diretto.

Proposizione 5.4.1. *Sia $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $F\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora, se f ha una parità*

$$F \text{ ha la parità opposta di } f \tag{5.51}$$

e

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{se } f \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } f \text{ è dispari.} \end{cases} \tag{5.52}$$

Nulla di analogo alle (5.51) e (5.52) si può concludere se f non è né pari né dispari.

[8]Qui bisogna prendere la definizione di *elementare* con un po' di elasticità.

Dimostrazione. Dimostriamo la (5.51) trattando entrambe le parità allo stesso tempo. Sia $f(-x) = \pm f(x)$ e scegliamo come primitiva F la funzione integrale definita in (5.32) scegliendo $x_0 = 0$, ovvero $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Dobbiamo dimostrare che $F(-x) = \mp F(x)$. Applicando il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile con $t = \varphi(s) = -s$ abbiamo $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$ (e $t = 0 \Rightarrow s = 0$; $t = -x \Rightarrow s = -(-x) = x$) e dunque

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -f(-s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^x \pm f(s)\,\mathrm{d}s = \mp\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = \mp F(x),$$

come desiderato. Dimostriamo ora la (5.52): presa una primitiva F di f e stante la (5.51), applichiamo il Teorema 5.2.14-2 di Torricelli–Barrow

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(-a)$$
$$= \begin{cases} 2F(a) = 2\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \left(\begin{array}{l}\text{se } F(-a) = -F(a), \text{ ovvero se } F \text{ è} \\ \text{dispari, ovvero se } f \text{ è pari,}\end{array}\right. \\ 0 & \left(\begin{array}{l}\text{se } F(-a) = F(a), \text{ ovvero se } F \text{ è} \\ \text{pari, ovvero se } f \text{ è dispari.}\end{array}\right. \end{cases}$$

La dimostrazione è conclusa. □

Veniamo ora alla trattazione più sistematica di alcuni integrali.

Integrali immediati. Sono quegli integrali che si risolvono grazie alla (5.42b) (o (5.42c)) e alla (5.45) poiché la funzione integranda è una derivata. Dalle formule (4.11) del Teorema 4.1.16, otteniamo la seguente tabella delle primitive delle funzioni elementari, dove $c \in \mathbb{R}$ è la costante di integrazione, $c' = c + \pi/2$ e $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \mathrm{d}x = x + c \quad \text{e in generale} \quad \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}.n \neq -1), \tag{5.53a}$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \quad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c, \tag{5.53b}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \cot x + c \quad (x \neq k\pi), \tag{5.53c}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c' \quad (x \in [-1,1]), \tag{5.53d}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c', \tag{5.53e}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c, \quad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + c, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + c \ (x \neq 0), \tag{5.53f}$$

$$\begin{gathered} \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c, \quad \int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c, \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x + c, \end{gathered} \tag{5.53g}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{sett}\sinh x + c, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{sett}\cosh x + c, \tag{5.53h}$$

infine, la (4.11i) dà, per α non intero

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (x > 0). \tag{5.53i}$$

Le (5.53) appena scritte si generalizzano al caso di composizioni di funzioni, usando la regola della catena (4.9): notando che

$$I[D[f\circ\varphi]] = I\big[D[f]|_{\varphi}D[\varphi]\big] = I[(f'\circ\varphi)\varphi'] = f\circ\varphi + c,$$

abbiamo

$$\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int (f(\varphi(x)))'\,\mathrm{d}x = f(\varphi(x)) + c, \tag{5.54}$$

che possiamo usare quando φ è una funzione generica e f è una delle funzioni delle (4.11).

Esempio 5.4.2. È giunto il momento di calcolare il limite (2.15). Con una semplice manipolazione abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

nella quale riconosciamo la somma superiore di Riemann $S(f,\mathcal{P})$ o la somma di Cauchy $\sigma(f,\mathcal{P},\Xi_{\mathcal{P}})$ della funzione $f(x) = 1/(1+x)$ sull'intervallo $[0,1]$, subordinata alla partizione uniforme $\mathcal{P} = \{i/n\}_{i=1}^{n}$ e con la scelta $\xi_i = x_i$ per ogni $i = 1,\dots,n$. Siccome la funzione f è continua in $[0,1]$, essa risulta integrabile secondo Riemann per il Teorema 5.1.12 di integrabilità delle funzioni continue; per il Teorema 5.1.17 è dunque integrabile secondo Cauchy e il suo integrale può essere ottenuto calcolando il limite (5.16). Applicando la (5.54) con $f(\cdot) = \log(\cdot)$ e $\varphi(x) = 1 + x$, otteniamo dalla (5.53f)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2.$$

Integrali risolti usando la proprietà di linearità. La proprietà di linearità (5.19) permette di portare fuori dal segno di integrale le costanti moltiplicative (e di moltiplicare e dividere all'occorrenza per ottenere la derivata di una funzione) e di spezzare l'integrale di una somma di funzioni nella somma degli integrali (utile se si stanno integrando dei polinomi, ad esempio, in cui poi si applica la (5.53a) quante volte occorre). La linearità ha anche il vantaggio di permettere di ricostruire le derivate di una funzione, qualora ciò fosse possibile sommando e sottraendo. A titolo di esempio vediamo come integrare la funzione $f(x) = \tan^2 x$. Abbiamo

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + c,$$

dove aggiungere e togliere 1 è servito ad ottenere la (4.11c), e abbiamo concluso usando la (5.42b) e la (5.53a). Un altro integrale un po' più sofisticato è il seguente, dove per fare il primo passo moltiplichiamo e dividiamo per $1+x$ dentro la radice quadrata

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Così facendo, abbiamo ottenuto al denominatore $\sqrt{1-x^2}$, che è distintiva della derivata della funzione arcoseno. Allora, il primo integrale è immediato (secondo la (5.53d)), mentre il secondo, dopo che avremo aggiustato un segno meno, sarà trattabile con la (5.54), con $f(\cdot) = \sqrt{\cdot}$ e $\varphi(x) = 1 - x^2$. Allora possiamo continuare con l'uguaglianza e scrivere

$$= \arcsin x - \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

In questo caso, come in tutti i calcoli di primitive, una buona strategia per verificare la correttezza del risultato ottenuto è derivare: se derivando la primitiva ottenuta si ritrova la funzione integranda, il calcolo è corretto.

Sempre sfruttando la linearità (5.19) dell'integrale, è possibile trovare le seguenti primitive, in cui compaiono prodotti di due funzioni trigonometriche con periodi arbitrari. Vogliamo trovare

$$\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.55}$$

La tecnica risolutiva è la stessa per tutti e tre: si usano le formule di Werner (A.10) e la linearità dell'integrale. Presentiamo il calcolo esplicito del primo. Sapendo che

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}[\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)],$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin((\alpha-\beta)x)}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin((\alpha+\beta)x)}{2(\alpha+\beta)} + c \quad (\alpha \neq \beta).\end{aligned} \tag{5.56a}$$

Usando invece le formule di bisezione, otteniamo (per $\alpha = \beta$)

$$\begin{aligned}\int \sin^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos(2\alpha x)\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha} + c \\ &= \frac{\alpha x - \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)}{2\alpha} + c.\end{aligned} \tag{5.56b}$$

In maniera analoga, si ottengono

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos((\alpha+\beta)x)}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos((\alpha-\beta)x)}{2(\alpha-\beta)} + c \quad (\alpha \neq \beta), \tag{5.56c}$$

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(2\alpha x)}{4\alpha} + c, \tag{5.56d}$$

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((\alpha+\beta)x)}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + c \quad (\alpha \neq \beta), \tag{5.56e}$$

$$\int \cos^2(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2\alpha x)}{4\alpha} + c = \frac{\alpha x + \sin(2\alpha x)}{2\alpha} + c. \tag{5.56f}$$

Se ora consideriamo α e β interi, denotandoli con $m, n \in \mathbb{N}$, possiamo usare le formule appena ottenute per calcolare gli integrali definiti sull'intervallo $[0, 2\pi]$, intervallo su cui sicuramente le funzioni sono periodiche. Usando la (5.56c) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{\cos((m+n)x)}{2(m+n)} + \frac{\cos((m-n)x)}{2(m-n)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq n)$$

e usando la (5.56d) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{\cos(2mx)}{4m}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Usando la (5.56a) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq n)$$

e usando la (5.56b) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2mx)}{4m}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Infine, usando la (5.56e) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} + \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad (m \neq n)$$

e usando la (5.56f) abbiamo

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2mx)}{4m}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che

$$⨍_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{per ogni } m, n \in \mathbb{N}, \tag{5.57a}$$

$$2 ⨍_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 2 ⨍_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}, \tag{5.57b}$$

dove la *delta di Kronecker* δ_{mn} è un selettore e vale 1 se $m = n$ e 0 se $m \neq n$. Le relazioni (5.57) appena trovate si chiamano *relazioni di ortonormalità della base di Fourier* e hanno grande importanza nell'analisi matematica (come si vedrà nel corso di Analisi Matematica II). Notiamo che l'operazione compiuta è

$$2 ⨍_0^{2\pi} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} = \frac{1}{\frac{2\pi}{2}}\int_0^{2\pi},$$

ovvero si sta dividendo l'integrale per il semi-periodo delle funzioni.

Integrali risolti per parti o per sostituzione. Raccogliamo qui alcuni integrali interessanti che si risolvono applicando il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti o il Teorema 5.3.4 di integrazione per sostituzione. Li raccogliamo insieme perché capiterà di usare una combinazione delle due tecniche.

Lavorando ancora sulle funzioni trigonometriche, studiamo come risolvere

$$\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Il calcolo si presenta relativamente facile quando uno dei due esponenti è dispari: in questo caso, infatti, una funzione trigonometrica esce con potenza 1 e verrà assorbita nel differenziale, mentre l'altra, che ora è elevata ad una potenza pari può essere trasformata usando la relazione fondamentale della trigonometria, ovvero la prima delle (1.39). Supponiamo che sia n dispari, ovvero che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2k + 1$. Allora la funzione integranda diventa

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^{2k} x \cos x = \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x = \sin^m (1 - \sin^2 x)^k \cos x$$

e dunque, operando la sostituzione $t = \sin x$ (che dà $\cos x \, dx = dt$), abbiamo

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx = \int t^m (1 - t^2)^k \, dt$$

e ci siamo ridotti ad integrare una funzione polinomiale, riducendo notevolmente la difficoltà del calcolo, una volta svolto il quale torneremo a sostituire $t = \sin x$. Senza ombra di dubbio, la stessa strategia ci permette di trattare il caso in cui sia m ad essere dispari.

Vediamo ora come procedere quando sia m che n sono pari. Anche in questo caso utilizziamo la (1.39) e manipoliamo il fattore contenente il coseno (ponendo $n = 2k$) usando la formula (1.68) del binomio di Newton

$$\begin{aligned}\sin^m x \cos^n x &= \sin^m x (\cos^2 x)^k = \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \\ &= \sin^m x \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^{k-j} (-\sin^2 x)^j = \sin^m x \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \sin^{2j} x \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \sin^{m+2j} x.\end{aligned}$$

Otteniamo in questo caso, sfruttando ancora la (5.19),

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \int \sin^{m+2j} x \, dx.$$

Allora, sappiamo risolvere l'integrale se sappiamo integrare le potenze delle funzioni trigonometriche, come in questo caso

$$S_n := \int \sin^n x \, dx \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove ora l'esponente è un numero naturale pari (è il numero $m + 2j$ nella formula precedente, che è pari perché siamo nel caso in cui m è pari). Ci si renderà conto dalla soluzione di questo integrale che la parità di n non è essenziale e che la strategia può essere adottata anche per n dispari: scriviamo $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$ e utilizziamo il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti, derivando $f(x) = \sin^{n-1} x$ e integrando $g'(x) = \sin x$ (è questa l'unica scelta possibile). Si ottiene

$$\begin{aligned}
S_n &= \int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} x \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n,
\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare S_n leggendo il primo e l'ultimo termine della catena di uguaglianze:

$$S_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}. \tag{5.58a}$$

Abbiamo ottenuto una formula ricorsiva che permette di conoscere S_n se si conosce s_{n-2}, ovvero la funzione di due posti precedente. Allora, tutte le funzioni S_n sono note una volta che si conoscono

$$S_1 = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \quad \text{e} \quad S_2 = \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c, \tag{5.58b}$$

dove abbiamo usato la (5.56b) con $\alpha = 1$. Con lo stesso procedimento, si ottiene la formula ricorsiva per

$$C_n := \int \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

che è

$$C_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} C_{n-2} \tag{5.58c}$$

e anche in questo caso tutta la successione dei C_n è nota una volta che si conoscono

$$C_1 = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c \quad \text{e} \quad C_2 = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c \tag{5.58d}$$

dove abbiamo usato la (5.56f) con $\alpha = 1$.

Occupiamoci ora di altri integrali che si possono risolvere con il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti. Quando si hanno prodotti di potenze di x ed esponenziali, la strategia è di derivare la potenza e di integrare l'esponenziale: in questo modo, in un numero finito di passi (pari al grado del polinomio) si giunge ad integrare, a meno di una costante, la funzione esponenziale e^x. In generale, sia

$$E_n := \int x^n e^x \,\mathrm{d}x.$$

La prima integrazione per parti dà immediatamente la formula ricorsiva:

$$E_n = \int x^n e^x \,\mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x = x^n e^x - n E_{n-1}.$$

La stessa tecnica di derivare il polinomio e integrare l'altra funzione risulta vincente quando si abbiano funzioni trigonometriche come negli integrali

$$CP_n := \int x^n \cos x \, dx \quad \text{e} \quad SP_n := \int x^n \sin x \, dx.$$

In questo caso si sfrutta che derivando una funzione trigonometrica due volte si ottiene la funzione stessa con il segno cambiato. Ci si aspetta che il polinomio diminuisca di due ordini., infatti

$$\begin{aligned} CP_n =& x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx = x^n \sin x - nSP_{n-1} \\ =& x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx \\ =& x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)CP_{n-2}, \\ SP_n =& -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx = -x^n \cos x + nCP_{n-1} \\ =& -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx \\ =& -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)SP_{n-2} \end{aligned}$$

e quindi basterà conoscere CP_1 e CP_2 per conoscere CP_n e SP_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una doppia integrazione per parti permette di risolvere integrali del tipo

$$EC_\alpha := \int e^{\alpha x} \cos x \, dx \quad \text{e} \quad ES_\alpha := \int e^{\alpha x} \sin x \, dx. \tag{5.59}$$

Infatti, applicando il Teorema 5.3.3 di integrazioni per parti due volte abbiamo

$$\begin{aligned} EC_\alpha &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos x + \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin x \, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos x + \frac{1}{\alpha} ES_\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos x + \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin x - \frac{1}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} \cos x \, dx \\ &= \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos x + \sin x)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} EC_\alpha \end{aligned}$$

da cui

$$EC_\alpha = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \cos x + \sin x)}{1 + \alpha^2} \tag{5.60a}$$

e analogamente si ottiene

$$ES_\alpha = \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin x - \cos x)}{1 + \alpha^2}. \tag{5.60b}$$

L'intuizione dietro la soluzione di questi integrali è che l'esponenziale integrato (o derivato) resta sempre se stesso (costanti a parte), mentre due derivazioni (o due integrazioni) delle funzioni trigonometriche restituiscono la funzione trigonometrica con il segno invertito.

Ancora usando il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti possiamo calcolare i seguenti integrali, che pure appaiono in certe applicazioni

$$A_n := \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}, \tag{5.61}$$

dei quali $A_1 = \arctan x + c$ è l'integrale elementare (5.53e). Invece, per $n \geq 2$ si può sommare e sottrarre x^2 al numeratore e ottenere

$$A_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = A_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x,$$

che quindi risulta determinato tramite una formula ricorsiva una volta che sappiamo calcolare l'ultimo integrale. Qui integriamo per parti, spezzando il numeratore nel seguente modo

$$-\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

e notando che il secondo fattore è una derivata completa: usando la (5.54) combinata con la (5.53a), abbiamo che

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-n}(1+x^2)^{1-n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}},$$

che possiamo usare nella formula di integrazione per parti per ottenere

$$\begin{aligned} -\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}A_{n-1} \end{aligned}$$

e dunque la formula ricorsiva

$$A_n = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}A_{n-1}, \tag{5.62}$$

per cui ogni A_n segue, applicando la ricorsione quante volte serve, dalla (5.53e).

5.4.1 Integrazione delle funzioni razionali fratte

Dedichiamo una sezione intera all'integrazione delle funzioni razionali fratte poiché si presentano vari casi che è bene analizzare separatamente. Si tratta di integrali di funzioni che si presentano come rapporti di polinomi, ovvero in cui l'integranda è della forma $f(x) = N(x)/D(x)$, dove sia il numeratore N che il denominatore D sono polinomi; supponuamo che abbiano grado $d_N = \deg(N)$ e $d_D = \deg(D)$. È sempre possibile ridursi al caso in cui $d_N < d_D$: se così non fosse, ovvero se $d_N \geq d_D$, si effettua la divisione di polinomi e si trovano due polinomi Q e R tali che

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

dove necessariamente $\deg(R) =: d_R < d_D$. A questo punto, si sfruttano il Teorema 5.2.1 di linearità dell'integrale e la (5.53a) per integrare Q e resta da integrare il rapporto R/D, in cui il denominatore ha grado maggiore del numeratore. Mettiamoci dunque in questa situazione e studiamo alcuni casi per una funzione razionale fratta $f = N/D$, in cui $d_N < d_D$.

Caso 1: $d_D = 1$. È questo il caso più semplice, siccome la disuguaglianza stretta $d_N < d_D$ forza N ad essere di grado zero, ovvero una costante numerica. Allora siamo posti di fronte all'integrazione seguente

$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\log|x-a| + c,$$

che è ovviamente stata risolta combinando la (5.53f) e la (5.54).

Caso 2: $d_D = 2$. Il denominatore D è un polinomio di secondo grado, che possiamo supporre della forma $D(x) = x^2 + px + q$ con $p, q \in \mathbb{R}$, e il numeratore $N(x)$ è un polinomio di primo grado $N(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si hanno qui tre casi a seconda del segno del discriminante $\Delta = p^2 - 4q$.

Caso 2a: $\Delta < 0$. È questo il caso in cui D non ha radici reali. La strategia è quella di spezzare la frazione N/D nella somma di due contributi, uno dei quali contenga $2x + p$ al numeratore (che essendo la derivata del denominatore si integra con un logaritmo) e l'altro che sia della forma $k/D(x)$, in cui $k \in \mathbb{R}$ è una costante opportuna. Questo secondo verrà opportunamente manipolato per generare la derivata della funzione arcotangente. Vediamo come procedere, usando la tecnica di aggiungere e togliere la stessa quantità dove opportuno

$$\begin{aligned}
\frac{ax+b}{x^2+px+q} &= \frac{a}{2}\cdot\frac{2x+\dfrac{2b}{a}}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\cdot\frac{(2x+p)+\left(\dfrac{2b}{a}-p\right)}{x^2+px+q} \\
&= \frac{a}{2}\cdot\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{2b-ap}{2}\cdot\frac{1}{x^2+px+q}.
\end{aligned}$$

Allora, applicando la (5.19), la (5.53f) e la (5.54), abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \frac{2b-ap}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} \\
&= \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{2b-ap}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q},
\end{aligned}$$

dove nell'argomento del logaritmo non serve il valore assoluto perché il polinomio è positivo. Come annunciato, vorremmo ora esprimere la seconda funzione integranda come la derivata dell'arcotangente, in modo da poter usare le formule (5.53e) e (5.54) per calcolarne la primitiva. L'unica cosa che è possibile fare è completare il quadrato:

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4},$$

dove notiamo che $-\Delta/4 > 0$. Possiamo allora continuare la manipolazione e ottenere

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)^2\right)$$

e quindi otteniamo

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right)^2}$$

e finalmente, eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)$, possiamo continuare con l'uguaglianza avendo

$$= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan t = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right).$$

Abbiamo allora dimostrato che

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{2b-ap}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) + c.$$

Ricordare a memoria la formula appena dimostrata è di dubbia utilità: ciò che occorre sapere quando si deve integrare una funzione che rientra in questo caso sono i passaggi da fare: ottenere la derivata del denominatore se $d_N = 1$ e poi ottenere la derivata dell'arcotangente (e chiaramente il primo passo non va compiuto se $d_N = 0$).

Caso 2b: $\Delta = 0$. Siamo nel caso il cui il denominatore ha una sola radice reale con molteplicità doppia: esiste dunque $r \in \mathbb{R}$ tale che $x^2+px+q = (x-r)^2$. Allora cerchiamo due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{ax+b}{(x-r)^2} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{(x-r)^2} = \frac{Ax-Ar+B}{(x-r)^2}.$$

Per il principio di identità dei polinomi, si deve avere

$$\begin{cases} A = a \\ B - Ar = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = a \\ B = b + ar \end{cases}$$

e dunque

$$\int \frac{ax+b}{(x-r)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x + \int \frac{b+ar}{(x-r)^2}\,\mathrm{d}x = a\log|x-r| - \frac{b+ar}{x-r} + c$$

dove il risultato si ottiene applicando la (5.19) e successivamente la (5.53f) e la (5.54) per il primo integrale e la (5.53a) e la (5.54) per il secondo integrale. Anche in questo caso è poco pratico ricordare a memoria la formula appena dimostrata: serve però ricordare quale procedura utilizzare in presenza di una radice doppia e che ci si devono aspettare un logaritmo ed una funzione inversa.

Caso 2c: $\Delta > 0$. In questo caso esistono due numeri reali $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ radici distinte del denominatore. Con un processo del tutto analogo a quello del caso precedente, decomponiamo la frazione in una somma di due frazioni che hanno $x - r_i$, con $i = 1, 2$, come denominatori. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{x^2+px+q} &= \frac{ax+b}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2} = \frac{Ax - Ar_2 + Bx - Br_1}{(x-r_1)(x-r_2)} \\ &= \frac{(A-B)x - Ar_2 - Br_1}{(x-r_1)(x-r_2)}\end{aligned}$$

e invocando ancora una volta il principio di identità dei polinomi, troviamo A e B come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a = A + B \\ b = -Ar_2 - Br_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A = \dfrac{ar_1 + b}{r_1 - r_2} \\ B = -\dfrac{ar_2 + b}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

e quindi, applicando la (5.19), la (5.53f) e la (5.54), si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{x-r_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x-r_2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{ar_1+b}{r_1-r_2}\log|x-r_1| - \frac{ar_2+b}{r_1-r_2}\log|x-r_2| + c.\end{aligned}$$

Pure in questo caso non apporta molto vantaggio la conoscenza mnemonica della formula appena ricavata; bisogna ricordare il processo di espressione della frazione N/D come somma di frazioni con il denominatore che è del tipo studiato nel Caso 1 e ricavare i coefficienti di conseguenza.

Caso 3: il caso generale. Per trattare il caso generale, ricordiamo le considerazioni fatte all'inizio della sezione, in base alle quali è sempre possibile ricondursi (previo effettuare la divisione tra polinomi) al caso in cui $d_N < d_D$ e al caso in cui il coefficiente del termine di grado massimo del denominatore sia 1. Si cerca di applicare le tecniche finora imparate, per arrivare ad esprimere $N(x)/D(x)$ in somma di frazioni che siano riconducibili ai casi già trattati. Ricordiamo che per il Teorema 1.5.43 fondamentale dell'algebra , se $d_D = n$ allora esistono n radici $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ radici del polinomio $D(x)$. Distinguiamo ora due casi.

Caso 3a: tutte le radici sono semplici. In questa eventualità, possiamo invocare il Corollario 1.5.44 (siccome i coefficienti sono reali) ed ottenere l'esistenza di $r_1, \dots, r_h \in \mathbb{R}$ radici reali e le rimanenti $r_{h+1}, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ radici complesse che necessariamente sono a due a due coniugate. Allora deve essere che $n - h = 2k$ è pari ed esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ tali che le radici complesse sono della forma $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k$. Quindi possiamo esprimere il denominatore come

$$D(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_h)(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_kx+q_k),$$

dove i termini di secondo grado sono ottenuti dai prodotti

$$(x-\alpha_j-i\beta_j)(x-\alpha_j+i\beta_j) = x^2 - 2\alpha_jx + \alpha_j^2 + \beta_j^2 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, k,$$

ed è questo il caso ponendo

$$p_j = -2\alpha_j \quad \text{e} \quad q_j = \alpha_j^2 + \beta_j^2 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, k.$$

Il problema si risolve una volta che si trovano $A_1, \dots, A_h, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ costanti tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \dots + \frac{A_h}{x - r_h} + \frac{a_1 x + b_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{a_k x + b_k}{x^2 + p_k x + q_k}.$$

Applicando il Teorema 5.2.1 di linearità dell'integrale, l'integrazione della frazione $N(x)/D(x)$ è ricondotto ad $h + s$ applicazioni dei risultati visti nei casi 1 e 2a, poco sopra.

Caso 3b: esistono radici multiple. Siano ancora $r_1, \dots, r_h \in \mathbb{R}$ le radici reali, questa volta con molteplicità $\mu_1, \dots, \mu_h$ e siano $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k$ le radici complesse coniugate (sempre come conseguenza del Corollario 1.5.44) tali per cui i trinomi di secondo grado $x^2 + p_j x + q_j$ costruiti al punto precedente abbiano molteplicità ν_j, per $j = 1, \dots, k$. Si deve avere

$$\mu_1 + \dots + \mu_h + 2(\nu_1 + \dots + \nu_k) = n$$

e il denominatore si può ora fattorizzare come

$$D(x) = (x - r_1)^{\mu_1} \cdots (x - r_h)^{\mu_h} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\nu_1} \cdots (x^2 + p_k x + q_k)^{\nu_k}.$$

Prendendo ispirazione dal caso 2b, in cui ad una radice doppia corrispondevano due frazioni, i cui numeratori sono delle costanti e i cui denominatori sono potenze incrementali di $x - r$, in questo caso possiamo decomporre $D(x)$ nel seguente modo

$$\begin{aligned}
D(x) = {} & \frac{A_1^{(1)}}{x - r_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - r_1)^2} + \dots + \frac{A_{\mu_1}^{(1)}}{(x - r_1)^{\mu_1}} \\
& + \frac{A_1^{(2)}}{x - r_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x - r_2)^2} + \dots + \frac{A_{\mu_2}^{(2)}}{(x - r_2)^{\mu_2}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{A_1^{(h)}}{x - r_h} + \frac{A_2^{(h)}}{(x - r_h)^2} + \dots + \frac{A_{\mu_h}^{(h)}}{(x - r_h)^{\mu_h}} \\
& + \frac{a_1^{(1)} x + b_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{a_2^{(1)} x + b_2^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{a_{\nu_1}^{(1)} x + b_{\nu_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\nu_1}} \\
& + \frac{a_1^{(2)} x + b_1^{(2)}}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{a_2^{(2)} x + b_2^{(2)}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \dots + \frac{a_{\nu_2}^{(2)} x + b_{\nu_2}^{(2)}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{\nu_2}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{a_1^{(k)} x + b_1^{(k)}}{x^2 + p_k x + q_k} + \frac{a_2^{(k)} x + b_2^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^2} + \dots + \frac{a_{\nu_k}^{(k)} x + b_{\nu_k}^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{\nu_k}}.
\end{aligned}$$

Ora, le integrazioni del tipo

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - r)^m}$$

si effettuano applicando la (5.53a) (se $m \neq 1$) o la (5.53f) (se $m = 1$). le integrazioni del tipo

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^m} \, \mathrm{d}x$$

(ricordando che deve essere $\Delta < 0$) si effettuano riconducendosi ai casi

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m},$$

aggiungendo e sottraendo termini al numeratore opportunamente. Il primo degli integrali è immediato e si riconduce ad integrali del tipo (5.53a) o (5.53f) tramite la (5.54); per trattare il secondo si completa il quadrato e con la trasformazione $t = (2x+p)/\sqrt{-\Delta}$ ci si riporta ad un integrale del tipo A_m come in (5.61). Si ottiene l'integrale del rapporto di polinomi di partenza usando ripetutamente il Teorema 5.2.1 di linearità dell'integrale. Abbiamo dunque dimostrato il seguente teorema.

Teorema 5.4.3 (integrazione delle funzioni razionali fratte)**.** *Sia* $f\colon \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}$ *una funzione razionale fratta (dove* $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$*). Allora le sue primitive sono ottenute tramite combinazioni lineari di logaritmi e arcotangenti, In particolare, della forma* $\log(ax^2+bx+c)$ *e* $\arctan(\alpha x+\beta)$*, con* $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

Esempi 5.4.4. Presentiamo la soluzione di tre integrali, dove si applica il Teorema 5.4.3 di integrazione delle funzioni razionali fratte, uno per ciascuno dei tre casi che si possono avere per il segno di Δ nel termine quadratico.

1. Si voglia calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$. Siccome $d_N > d_D$, la prima cosa da fare è la divisione tra polinomi, che dà

$$\frac{x^5+2x^4}{x^3+1} = x^2+2x-\frac{x^2+2x}{x^3+1}.$$

Segue che

$$\int \frac{x^5+2x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int (x^2+2x)\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2+2x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+x^2-\int \frac{x^2+2x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$$

ed ora ci preoccupiamo di studiare l'integrale rimanente. Notiamo dapprima che, usando il falso binomio di Newton (1.73) si ha $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ e dunque cerchiamo una decomposizione in somma del tipo

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x}{x^3+1} &= \frac{x^2+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\\ &= \frac{(A+B)x^2-(A-B-C)x+A+C}{x^3+1},\end{aligned}$$

che si ottiene, per il principio di identità dei polinomi, se

$$\begin{cases}A+B=1\\ -A+B+C=2\\ A+C=0\end{cases} \qquad \text{che, risolto, dà} \qquad \begin{cases}A=-1/3\\ B=4/3\\ C=1/3\end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}-\int \frac{x^2+2x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{4x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{2}{3}\int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

dove, notando che $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, abbiamo già fatto un passaggio per avere, al numeratore dell'ultimo integrale da calcolare, la derivata del denominatore. Allora

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{3}\int \frac{2x-1+\frac{1}{2}+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} \\
&= -\frac{2}{3}\log(x^2-x+1) - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

e ci resta l'ultimo integrale da calcolare. Avendo già completato il quadrato, abbiamo

$$\begin{aligned}
-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c
\end{aligned}$$

e riunendo tutti i termini in verde otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5+2x^4}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{2}{3}\log(x^2-x+1) \\
- \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

2. Si voglia calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$. Anche in questo caso, siccome $d_N = d_D$ dobbiamo come prima cosa fare la divisione di polinomi, che dà

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2},$$

da cui

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = x + \int \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

ed osserviamo che il discriminante della parte quadratica del denominatore è zero. Abbiamo infatti una sola radice reale $r = 1$ con molteplicità doppia. Allora cerchiamo una decomposizione in somme del tipo

$$\frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2-(2A+B-C)x+A}{x(x-1)^2}$$

che si ottiene, per il principio di identità dei polinomi, se

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B-C=1 \\ A=1 \end{cases} \qquad \text{che, risolto, dà} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\\ &= \log|x| + \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + c\end{aligned}$$

e riunendo tutti i termini in verde otteniamo

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = x + \log|x(x-1)| - \frac{2}{x-1} + c.$$

3. Si voglia calcolare l'integrale $\int \frac{x^3+4}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$. Come nei casi precedenti, anche in questo caso occorre partire dalla divisione di polinomi, siccome $d_N > d_D$. Questa volta abbiamo

$$\frac{x^3+4}{x^2+3x+2} = x - 3 + \frac{7x+10}{x^2+3x+2},$$

da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+4}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int (x-3)\,\mathrm{d}x + \int \frac{7x+10}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{7x+10}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Il discriminante del denominatore dell'integrale che ci rimane da trattare è positivo, quindi esistono due radici reali distinte del polinomio, $r_1 = -2$ e $r_2 = -1$. Allora cerchiamo una decomposizione del tipo

$$\frac{7x+10}{x^2+3x+2} = \frac{7x+10}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A + 2B}{(x+2)(x+1)}$$

che si ottiene, per il principio di identità dei polinomi, se

$$\begin{cases} A+B=7 \\ A+2B=10 \end{cases} \qquad \text{che, risolto, dà} \qquad \begin{cases} A=4 \\ B=3 \end{cases}$$

e quindi

$$\int \frac{7x+10}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = 4\log|x+2| + 3\log|x+1| + c$$

e riunendo i termini in verde otteniamo

$$\int \frac{x^3+4}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\log|x+2| + 3\log|x+1| + c.$$

5.5 Integrali impropri

Abbiamo visto finora l'integrazione di funzioni definite su intervalli limitati. Inoltre, abbiamo sempre richiesto che esse fossero o continue (e quindi automaticamente limitate per il Teorema 3.2.10 di Weierstrass) o limitate, escludendo così dalla trattazione sia le funzioni definite su intervalli illimitati, sia quelle definite su intervalli limitati e aperti sui quali non sono limitate (si pensi alla funzione $x \mapsto 1/x$ nell'intervallo $(0,1)$, alla funzione $x \mapsto \tan x$ nell'intervallo $[0, \pi/2)$, o alla funzione $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ sull'intervallo $[1, +\infty)$).

Dalle sezioni precedenti conosciamo i seguenti fatti. Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo garantisce che la funzione integrale $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definita nella (5.32) (dove possiamo prendere $x_0 = a$ come estremo inferiore di integrazione e che ora riscriviamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.63}$$

per convenienza) è derivabile in (a,b) e pertanto, per il Teorema 4.1.6, è continua in (a,b). Sappiamo inoltre che esistono le derivate unilaterali $F'_+(a)$ e $F'_-(b)$ negli estremi dell'intervallo, pertanto la funzione F risulta anche continua agli estremi dell'intervallo, e dunque in tutto $[a,b]$.

Tuttavia, la funzione integrale di una funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ risulta continua in $[a,b)$, ma non necessariamente definita in $x = b$. Pertanto se un estremo dell'intervallo è escluso dal dominio della funzione f (o se si tratta di infinito, ovvero se la funzione f è definita su una semiretta) non è chiaro il comportamento della funzione integrale F in quell'estremo. Se $b < +\infty$ e la funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ è limitata e regolare sull'intervallo, ci possiamo aspettare che la sua funzione integrale F sia definita anche in $x = b$, mentre il discorso cambia se $b = +\infty$. Tratteremo i due casi separatamente, riservando l'utilizzo della lettera b per l'estremo dell'intervallo limitato ($b \in \mathbb{R}$), mentre scriveremo esplicitamente $+\infty$ se l'intervallo non è illimitato.

Definizione 5.5.1. *Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice che f è* integrabile in senso improprio *tra a e b se esiste finito il limite $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ e in questo caso si pone*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

e si dice che l'integrale improprio è convergente*.*

Una volta data la definizione di integrabilità in senso improprio al finito (perché $b < +\infty$ e $a > -\infty$), possiamo dare un teorema di caratterizzazione dell'integrabilità in senso improprio.

Teorema 5.5.2 (caratterizzazione dell'integrabilità in senso improprio al finito)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ sia integrabile in senso improprio tra a e b è che*

$$\begin{cases} \textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \bar{x} \in [a,b) \textit{ tale che per ogni } x', x'' \in [\bar{x}, b) \\ \textit{valga} \left| \displaystyle\int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon. \end{cases} \tag{5.64}$$

Dimostrazione. Notiamo che, grazie al Teorema 5.2.11 di spezzamento, la condizione della (5.64) si può scrivere come

$$|F(x'') - F(x')| < \varepsilon, \tag{5.65}$$

dove F è la funzione integrale definita in (5.63). Ricordando il Teorema 3.1.24 (criterio di convergenza di Cauchy), la (5.65) è equivalente a chiedere che F abbia limite finito per $x \to b^-$, proprio come richiesto dalla Definizione 5.5.1. □

Come spesso accade con i teoremi di caratterizzazione, può essere che la condizione (5.64) sia difficile da verificare e per questo è utile avere condizioni sufficienti che garantiscano l'integrabilità in senso improprio. Proponiamo un risultato che si basa sul Corollario 5.2.3 del Teorema 5.2.2 di confronto per integrali.

Teorema 5.5.3. *Siano $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \textit{per ogni } x \in [a, b). \tag{5.66a}$$

Se

$$\textit{esiste} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.66b}$$

allora esistono anche $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *e vale*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.67}$$

Dimostrazione. Come prima cosa osserviamo che dalla (5.66a) segue che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b)$. Stante la (5.66b), usiamo il Teorema 5.5.2 di caratterizzazione dell'integrabilità in senso improprio per ottenere la validità della (5.64). Fissato $\varepsilon > 0$ esiste dunque $\bar{x}$ tale che per ogni $x', x'' \in [\bar{x}, b)$ (e non è restrittivo supporre che $x' < x''$) si abbia

$$\varepsilon > \int_{x'}^{x''} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{(5.66a)}{\geq} \int_{x'}^{x''} |f(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(5.23)}{\geq} \left|\int_{x'}^{x''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|,$$

ma queste sono le caratterizzazioni dell'integrabilità in senso improprio delle funzioni f e $|f|$ tra a e b. Dunque la catena di disuguaglianze può essere scritta con gli integrali tra a e b, dimostrando la (5.67). □

Corollario 5.5.4 (condizione sufficiente per l'intergabilità in senso improprio)**.** *Sia $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione un funzione tale che esiste l'integrale $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ in senso improprio. Allora f è integrabile in senso improprio ed esiste $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Dimostrazione. È sufficiente applicare il Teorema 5.5.3 usando $g(x) = |f(x)|$ e ricordando le proprietà della funzione valore assoluto. □

Diamo la seguente definizione.

Definizione 5.5.5. *Si dice che la funzione $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ ha integrale improprio tra a e b* assolutamente convergente *se esiste finito* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Confrontando le Definizioni 5.5.1 e 5.5.5 si nota la differenza tra integrali impropri convergenti e assolutamente convergenti. In particolare, la seconda condizione implica la prima grazie al Corollario 5.5.4, ma non vale il viceversa. A tal proposito si veda la discussione sull'integrale di Dirichlet (5.75).

L'utilità del Teorema 5.5.3 di confronto, e ancor di più del Corollario 5.5.4 sulla condizione sufficiente per l'integrabilità in senso improprio, emerge quando si riesce a trovare una funzione "campione" della quale sia noto il comportamento. Lo vediamo ora in due casi particolari, a seconda che f sia limitata o meno in $[a, b)$.

La funzione f è continua a tratti e limitata. Ciò significa che esiste $K > 0$ tale che $|f(x)| \le K$ per ogni $x \in [a, b)$. Fissato $\varepsilon > 0$ e presi $x', x'' \in [a, b)$ tali che $x' < x''$, stimiamo

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \overset{(5.23)}{\le} \int_{x'}^{x''} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le K(x'' - x') < \varepsilon$$

se $x'' - x' < \varepsilon/K$. Allora la condizione di integrabilità (5.64) è verificata se si prende $\bar{x} = \max\{a, b - \varepsilon/K\}$ e siccome esso non dipende dalla scelta di x' e x'', otteniamo l'integrabilità in senso improprio.

Notiamo che la continuità a tratti è necessaria per escludere esempi patologici quali la funzione f_D di Dirichlet definita in (1.49).

La funzione f non è limitata. Il prototipo è dato dalle funzioni $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = \frac{1}{(b - x)^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0$$

(notando che se $\alpha < 0$ allora f è un polinomio che si annulla in $x = b$ e l'integrale non è improprio). Ci chiediamo ora per quali valori di $\alpha > 0$ esiste finito l'integrale

$$\int_a^b \frac{1}{(b - x)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

A parte un segno meno che possiamo sempre spendere, l'integrale si può calcolare tramite la (5.54) e la (5.53f), se $\alpha = 1$, o la (5.53i), se $\alpha \ne 1$. Analizziamo i due casi separatamente. Se $\alpha = 1$, dobbiamo valutare

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{b - t} = -\lim_{x\to b^-} [\log(b - t)]_a^x = \log(b - a) - \lim_{x\to b^-} \log(b - x) = +\infty$$

e dunque in questo caso la funzione non è integrabile in senso improprio. Veniamo al caso $\alpha \ne 1$, in cui dobbiamo valutare

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to b^-} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{(b - t)^\alpha} &= -\lim_{x\to b^-} \int_a^x \big(-(b - x)^{-\alpha} \big)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \left[\frac{-1}{1 - \alpha}(b - t)^{1-\alpha} \right]_a^x \\
&= \frac{(b - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} + \lim_{x\to b^-} \frac{1}{(\alpha - 1)(b - x)^{\alpha - 1}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{(b - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b - x)^\alpha} \begin{cases} \text{converge a } \dfrac{(b - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha < 1, \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \ge 1 \end{cases} \tag{5.68}$$

e di conseguenza abbiamo dimostrato il seguente teorema di confronto.

Teorema 5.5.6. *Sia $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ continua (o continua a tratti) tale che esiste $A > 0$ tale che $|f(x)| \le A/|b - x|^\alpha$, con $\alpha < 1$. Allora f è integrabile in senso improprio tra a e b e l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è assolutamente convergente.* □

Osservazione 5.5.7. Il Teorema 5.5.6 appena enunciato si può anche formulare nel seguente modo: se esiste α tale che

$$f(x) \sim \frac{1}{|b-x|^\alpha} \quad \text{per } x \sim b,$$

allora gli integrali impropri

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{|b-x|^\alpha}$$

hanno lo stesso carattere: l'uno converge se e solo se converge anche l'altro. □

Esempi 5.5.8. Presentiamo ora qualche esempio.

1. $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$. Ricordando che $\mathrm{dom}(\log) = (0, +\infty)$, ci rendiamo immediatamente conto che l'integrale è improprio in $x = 0$. La teoria svolta finora ovviamente si adatta al caso in cui sia l'estremo inferiore del dominio di definizione a non appartenere al dominio della funzione. In questo caso, dobbiamo dunque valutare

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log t\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \log t\,\mathrm{d}t \overset{(5.46b)}{=} \lim_{x\to 0^+}\left([t\log t]_x^1 - \int_x^1 \mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}(-x\log x + x - 1) = -1,\end{aligned}$$

ottenendo, con il calcolo diretto, sia la convergenza sia il valore dell'integrale.

2. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\log x}\,\mathrm{d}x$. In questo caso l'integrale è improprio in $x = 1$, punto in cui si annulla il logaritmo e che può essere un asintoto verticale (a seconda del valore di α). In questo caso, ci conviene usare l'Osservazione 5.5.7 e cercare di stabilire come si comporta il logaritmo per $x \sim 1$. Ricordando la (3.17c), possiamo scrivere

$$\log x = \log(1 + (x-1)) \sim (x-1) \quad \text{per } x \sim 1,$$

da cui si ottiene

$$\int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\log x}\,\mathrm{d}x \sim \int_{1/2}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x-1}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/2}^1 (1-x)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{-\mathrm{d}x}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

Dalla (5.68) otteniamo dunque che l'integrale dato converge se $\alpha > 0$, mentre diverge altrimenti.

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,\mathrm{d}x$. L'integrale è improprio in $x = \pi/2$. Siccome sappiamo integrare la funzione tangente, possiamo procedere immediatamente al calcolo del limite

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \tan x\,\mathrm{d}x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[-\log(\cos t)]_0^x = \log(\cos 0) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\log(\cos x) = +\infty\end{aligned}$$

e quindi l'integrale diverge.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^2 x \,\mathrm{d}x$. L'integrale è improprio in $x = \pi/2$ e lo possiamo trattare in due modi: con il calcolo diretto e per confronto, usando l'Osservazione 5.5.7. Con il calcolo diretto abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \tan^2 x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^x (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} [\tan t]_0^x \\ &= -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;\end{aligned}$$

dunque l'integrale diverge. Alla stessa conclusione si sarebbe potuti arrivare notando che per $x \in [\pi/4, \pi/2)$ si ha $\tan x \geq 1$ e dunque $\tan^2 x \geq \tan x$. Allora anche gli integrali sono ordinati e siccome l'integrale della tangente diverge nell'intervallo considerato, per l'esempio precedente, si ha che l'integrale che stiamo considerando diverge per confronto.

Notiamo che non è sempre possibile o immediato ottenere il valore numerico di un integrale improprio convergente. A volte ci si deve accontentare di sapere che converge e forse di avere una possibile stima del valore dell'integrale. □

Osservazione 5.5.9. Abbiamo enunciato i risultati per le funzioni continue a tratti: vediamo in dettaglio che cosa significa. Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a,c) \cup (c,b]$, allora l'integrabilità in senso improprio su $[a,b]$ discende da quella in senso improprio su $[a,c)$ *e* su $(c,b]$. Se la funzione f è limitata è facile intuire il risultato; se la funzione f non è limitata diamo un esempio considerando la funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

In questo caso possiamo prendere $a = -1$, $b = 1$ e $c = 0$. Data la parità della funzione, possiamo studiare l'integrabilità impropria solo in $[0,1]$ (assumendo che valga la (5.52)). Se la funzione risultasse integrabile in senso improprio, concludiamo grazie alla Proposizione 5.4.1, che a posteriori giustifica l'utilizzo della (5.52). Abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}},$$

che è convergente grazie alla (5.68), dalla quale si ricava che l'integrale vale 2. Allora l'integrale cercato vale 4. □

Affrontiamo ora lo studio degli integrali impropri quando la funzione è definita su una semiretta, che per praticità sceglieremo essere quella $[a,+\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. La definizione che diamo è analoga alla Definizione 5.5.1, seguita immediatamente dal teorema di caratterizzazione, che si dimostra come il Teorema 5.5.2.

Definizione 5.5.10. *Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua a tratti che ammetta integrale improprio in ogni intervallo del tipo $[a,b]$. Si dice che f è* integrabile in senso improprio *tra* a *e* $+\infty$ *se esiste finito il limite* $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *e in questo caso si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

e si dice che l'integrale improprio è convergente*. La definizione di estende in modo naturale al caso di una funzione* $f\colon(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ *con le stesse proprietà, e anche nel caso di una funzione* $f\colon(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ *convenendo che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

e notando che il risultato è indipendente dalla scelta del punto $c\in\mathbb{R}$ *in cui applicare il Teorema 5.2.11 di spezzamento.*

Il teorema di caratterizzazione dell'integrabilità in senso improprio all'infinito è analogo a quello per il caso finito.

Teorema 5.5.11 (caratterizzazione dell'integrabilità in senso improprio all'infinito)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione* $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *sia integrabile in senso improprio tra* a *e* $+\infty$ *è che*

$$\begin{cases}\textit{per ogni } \varepsilon>0 \textit{ esiste } \bar{x}\in[a,+\infty) \textit{ tale che per ogni } x',x''\in[\bar{x},+\infty)\\ \textit{valga } \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.\end{cases} \tag{5.69}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è la stessa del Teorema 5.5.2. □

Continuano a valere anche in questo caso, e con la stessa dimostrazione, il Teorema 5.5.3 ed il Corollario 5.5.4.

Teorema 5.5.12. *Siano* $f,g\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

$$|f(x)|\le g(x)\quad \textit{per ogni } x\in[a,+\infty). \tag{5.70a}$$

Se

$$\textit{esiste } \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.70b}$$

allora esistono anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *e* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *e vale*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.71}$$

Corollario 5.5.13 (condizione sufficiente per l'intergabilità in senso improprio)**.** *Sia* $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una funzione un funzione tale che esiste l'integrale* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ *in senso improprio. Allora* f *è integrabile in senso improprio ed esiste* $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Diamo la seguente definizione.

Definizione 5.5.14. *Si dice che la funzione $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ha integrale improprio tra a e $+\infty$* assolutamente convergente *se esiste finito* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Vale anche l'analogo del Teorema 5.5.6, dove ora usiamo la funzione $x \mapsto 1/x^\alpha$ come prototipo. Sia $a > 0$ e studiamo il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha > 0$. Anche qui notiamo che se $\alpha \le 0$ l'integrale non è improprio ed è divergente. Distinguiamo ancora i due casi $\alpha = 1$ e $\alpha \ne 1$, che verranno trattati con le stesse tecniche usate per il caso dell'integrale improprio al finito. Se $\alpha = 1$, dobbiamo valutare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\to+\infty} [\log t]_a^x = \lim_{x\to+\infty} \log x - \log a = +\infty$$

e dunque in questo caso la funzione non è integrabile in senso improprio. Veniamo al caso $\alpha \ne 1$, in cui dobbiamo valutare

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} &= \lim_{x\to b^-} \int_a^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Abbiamo allora dimostrato che

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \le 1, \\ \text{converge a } \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \tag{5.72}$$

e di conseguenza abbiamo dimostrato il seguente teorema di confronto.

Teorema 5.5.15. *Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua (o continua a tratti) tale che esiste $A > 0$ tale che $|f(x)| \le A/|x|^\alpha$, con $\alpha > 1$. Allora f è integrabile in senso improprio tra a e $+\infty$ e l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ è assolutamente convergente.* □

Osservazione 5.5.16. Il Teorema 5.5.15 appena enunciato si può anche formulare nel seguente modo: se esiste α tale che

$$f(x) \sim \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \text{per } x \sim +\infty,$$

allora gli integrali impropri

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}$$

hanno lo stesso carattere: l'uno converge se e solo se converge anche l'altro. □

Esempio 5.5.17. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. La funzione integranda può essere maggiorata da $1/x^2$ (perché $|\sin x| \le 1$) e il Teorema 5.5.15 permette subito di concludere che l'integrale improprio è assolutamente convergente, siccome la funzione $1/x^2$ ha integrale improprio a $+\infty$ assolutamente convergente per la (5.72).

Esempio 5.5.18. Studiamo la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, in caso converga, ne calcoliamo il valore. Ricordando che la funzione esponenziale $x \mapsto e^{-x}$ decade a zero più velocemente di ogni polinomio (basta applicare il Teorema 3.1.15 al limite di successioni (2.9) con $a = e > 1$ ed usare la (2.6f)), l'integrale considerato converge assolutamente per ogni $n \in \mathbb{N}$ per il Teorema 5.5.15. Sia dunque $F_n \in \mathbb{R}$ il valore assunto dall'integrale. È una semplice applicazione del principio di induzione Assioma 1.6.1 dimostrare che

$$F_n \coloneqq \int_0^{+\infty} x^n e^{-n}\,\mathrm{d}x = n! \tag{5.73}$$

e lo si fa applicando la Proposizione 1.6.2. Verifichiamo dapprima che $F_0 = 0! = 1$, calcolando

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\big[-e^{-x}\big]_0^b = 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1.$$

Supponiamo ora che la (5.73) valga e dimostriamo che $F_{n+1} = (n+1)!$. Applicando il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti si ha

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(5.46b)}{=} \lim_{b\to+\infty}\big[-x^{n+1}e^{-x}\big]_0^b + \lim_{b\to+\infty}(n+1)\int_0^b x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to+\infty}\big[-b^{n+1}e^{-b} - 0\big] + (n+1)\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)F_n,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato lo stesso ragionamento dell'inizio dell'esercizio per calcolare il primo limite. La (5.73) è dunque dimostrata.

5.5.1 Alcune osservazioni sugli integrali impropri

Raccogliamo alcuni fatti sugli integrali impropri, che si possono dedurre da quanto esposto finora.

Legami tra integrali impropri al finito e all'infinito. L'integrabilità in senso improprio al finito (Definizione 5.5.1) può essere ricondotta all'integrabilità impropria all'infinito (Definizione 5.5.10) grazie al Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile. L'idea è quella di trasformare l'intervallo di integrazione $[a, b)$ in un opportuno intervallo del tipo $[c, +\infty)$. Il punto c viene determinato in conseguenza del fatto che la trasformazione $t = \varphi^{-1}(x)$ deve dare $t \to +\infty$ quando $x \to b^-$. La più semplice di queste trasformazioni è

$$t = \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{b-x}, \qquad \text{per } x \in [a, b),$$

che è iniettiva ed invertibile sul suo dominio e dà $c = \varphi^{-1}(a) = 1/(b-a)$. Allora abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(5.48c)}{=} \int_{1/(b-a)}^{+\infty} f\Big(b - \frac{1}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

e dunque l'integrabilità in senso improprio di $x \mapsto f(x)$ tra a e b è equivalente all'integrabilità in senso improprio di $t \mapsto \dfrac{1}{t^2} f\Big(b - \dfrac{1}{t}\Big)$ tra $1/(b-a)$ e $+\infty$.

L'integrabilità in senso improprio all'infinito implica che la funzione è infinitesima? Consideriamo per un istante una funzione positiva $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile in senso improprio secondo la Definizione 5.5.10. Siccome la funzione è positiva, possiamo associare all'integrale il significato geometrico di area del sottografico, come osservato all'inizio del capitolo, e sarebbe naturale pensare che se l'area deve essere finita, allora la funzione deve decadere a zero (e, come sappiamo, deve farlo più velocemente della funzione A/x, con $A > 0$). Saremmo portati a rispondere affermativamente alla domanda, ma la situazione è più sottile di quello che sembra: in effetti, la risposta è affermativa *se* il limite della funzione esiste. È infatti possibile esibire funzioni che sono integrabili in senso improprio all'infinito, ma che non sono infinitesime e ciò è possibile a causa del fatto che non ammettono limite per $x \to +\infty$. Per indovinare quali funzioni possano essere, il prototipo di una funzione che non ha limite all'infinito è dato da una funzione oscillante, in particolare, è facile dimostrare che le funzioni $\sin(x^2)$ e $\cos(x^2)$ sono integrabili in senso improprio tra 0 e $+\infty$. Lo mostriamo per la prima. Si usano il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile con $x^2 = t$ e il Teorema 5.3.3 di integrazione per parti

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{(5.48c)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{(5.46b)}{=} -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \qquad (5.74)$$

nel calcolo del quale (che peraltro non presenteremo[9]) ci accorgiamo che la radice quadrata presenta uno zero in zero. Il secondo integrale, invece viene dominato nel seguente modo $|\cos t|/t^{3/2} \le 1/t^{3/2}$, e quindi converge assolutamente per il Teorema 5.5.15. La convergenza è quindi ottenuta se si dimostra che $-\frac{1}{2}\left[(\cos t)/t^{3/2}\right]_0^{+\infty}$ è un numero reale. Per vedere ciò, si può procedere in due modi: il primo è di usare il Teorema 5.2.11 di spezzamento

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{R} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_R^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

e ora il primo è l'integrale di una funzione continua (perché composizione di funzioni continue, si veda il Teorema 3.2.9) sul dominio chiuso e limitato $[0,R]$ e quindi possiamo applicare il Teorema 5.1.12, mentre il secondo si può trattare ancora cambiando variabile ed integrando per parti e ora non c'è più il rischio di avere uno zero al denominatore nell'addendo valutato agli estremi. Il secondo modo, invece, segue il seguente ragionamento: siccome, nella (5.74), si ottiene un integrale improprio sia in $t = 0$ che in $t = +\infty$ dopo il primo passaggio, possiamo calcolare tale integrale nel senso dei limiti. Allora si può scrivere, scegliendo $1 - \cos t$ come primitiva di $\sin t$ quando si integra per parti (per il motivo che sarà evidente dalle espressioni trovate),

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \int_a^b \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{(5.48c)}{=} \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(5.46b)}{=} \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \left(\left[\frac{1-\cos t}{\sqrt{t}}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1-\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \frac{1}{4}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1-\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t + \lim_{b\to+\infty} \frac{1-\cos\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{b}} - \lim_{a\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{a}}{2\sqrt[4]{a}}
\end{aligned}$$

[9] Siamo ora interessati a valutarne la convergenza o meno. Per il calcolo esplicito servono tecniche proprie dell'analisi di funzioni di variabile complessa che esulano dallo scopo di questo corso. a meno che non trovi una dimostrazione elementare.

dove il primo integrale converge (assolutamente, perché la funzione è non negativa): per $t \to +\infty$, si applica il Teorema 5.5.15, siccome $(1 - \cos t)/t^{3/2} \leq 2/t^{3/2}$, mentre per $t \to 0^+$, in virtù della (3.17b), abbiamo $(1-\cos t)/t^{3/2} \sim \sqrt{t}/2$, e dunque possiamo applicare il Teorema 5.5.6; il secondo limite dà zero, così come il terzo (e il limite si calcola o usando ancora la (3.17b) o usando il Teorema 4.2.17-1). Gli integrali

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

si chiamano *integrali di Fresnel* e hanno applicazioni in ottica.

Una funzione il cui integrale improprio converge ma non assolutamente. Si tratta della funzione $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ che dà luogo all'*integrale di Dirichlet*

$$D(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \tag{5.75}$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ si ha un integrale improprio in entrambi gli estremi di integrazione, ma la funzione risulta limitata in un intorno di zero per il limite notevole (3.10a), mentre per studiarne l'integrabilità in senso improprio all'infinito possiamo integrare per parti usando la stessa strategia utilizzata con l'integrale di Fresnel, ovvero utilizzando $1 - \cos t$ come primitiva della funzione seno.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \left(\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \frac{1-\cos b}{b} - \lim_{a\to 0^+} \frac{1-\cos a}{a};\end{aligned}$$

di questi, il primo integrale si domina per $x \to +\infty$ come $(1 - \cos x)/x^2 \leq 2/x^2$ e quindi converge per il Teorema 5.5.15, mentre per $x \to 0^+$ si comporta come $1/2$ in virtù della (3.17b); il secondo e il terzo convergono a zero. L'esistenza di un valore finito da attribuire a $D(+\infty)$ è quindi dimostrata. Rimandiamo all'Esempio 7.5.8 per il calcolo esplicito, che si effettua con il *Feynman trick*, che presentiamo nella Sezione 7.5.6.

Mostriamo ora invece che l'integrale improprio (5.75) non converge all'infinito, ovvero dimostriamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty, \tag{5.76}$$

dove possiamo prendere $x = \pi$) come estremo inferiore di integrazione perché il contributo nell'intervallo $[0, \pi]$ è finito (perché è lo stesso per l'integrale di cui vogliamo mostrare la divergenza e per $D(+\infty)$). Dato $n \in \mathbb{N}$, costruiamo la successione

$$a_n := \int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$$

della quale vogliamo dimostrare la divergenza: la (5.76) è infatti dimostrata se otteniamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Per stimare dal basso il termine generale a_n della successione dividiamo l'intervallo $[\pi, n\pi]$ in $n - 1$ parti, facciamo debite considerazioni per togliere il valore assoluto e stimiamo la frazione dal basso usando il numeratore più grande possibile. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \cdots + (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{2\pi}\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{3\pi}\,\mathrm{d}t - \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin t}{4\pi}\,\mathrm{d}t + \cdots + (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{n\pi}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t\,\mathrm{d}t \underset{S_1(0,\pi)}{\overset{(7.21b)}{=}} \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi} \int_{2}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}(\log n - \log 2).
\end{aligned}$$

Dunque la successione $\{a_n\}$ è minorata (a meno di una costante) della successione $\{\log n\}$, che diverge. La (5.76) è dunque dimostrata.

5.6 Alcune applicazioni degli integrali

In questa sezione raccogliamo alcune applicazioni elementari del calcolo integrale a problemi di natura geometrica, quali la determinazione di lunghezze, aree e volumi. Abbiamo già visto, all'inizio del capitolo, il legame naturale dell'integrale con l'area della sottografico di una funzione. Ora ci proponiamo di ampliare le applicazioni. In quello che segue consideriamo una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, integrabile al più in senso improprio tra a e b (con la possibilità che $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Calcolo di volumi La prima applicazione che vediamo è quella al calcolo del volume di un solido di rotazione. Benché un solido sia un oggetto tridimensionale e finora abbiamo visto oggetti al massimo bidimensionali (come per esempio la porzione di piano definita dal sottografico di una funzione), la simmetria rotazionale permette di ridurne la complessità e fa sì che tutte le informazioni necessarie per conoscere tale solido siano racchiuse nella funzione che ne descrive il profilo. Definiamo infatti *solido di rotazione* un oggetto tridimensionale ottenuto dalla rotazione di una curva piana attorno ad un asse[10]. In questo modo la curva piana può essere descritta dal grafico di una funzione f di quelle considerate in questa sezione e il volume del solido può essere calcolato integrando sull'intervallo (a,b) il volume di un cilindro di altezza infinitesima e raggio determinato dal valore della funzione f: esso è $\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$ e dunque

$$\mathrm{vol}(\text{solido di rotazione}) = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calcolo di aree di superfici Per mezzo degli integrali siamo in grado di calcolare due tipi di aree: l'area di una porzione di piano compresa tra due curve e

[10] È facile intuire che il fatto che la curva intersechi o meno l'asse è irrilevante: se lo fa in un punto, il solido è essenzialmente composto di due parti che si toccano nel punto di intersezione della curva con l'asse

l'area delle superfici laterali dei solidi di rotazione (per le superfici totali basterà aggiungere l'area dei cerchi che le completano). Ricordando il problema modello che abbiamo studiato per introdurre gli integrali, sappiamo che l'area del sottografico (si veda la Definizione 5.1.1) di una funzione è data da

$$\operatorname{area}(\operatorname{sg}(f;[a,b])) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

cosicché, se abbiamo due funzioni $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ l'area della regione di piano R limitata dai grafici di f e g e dalle rette verticali $x = a$ e $x = b$ è data da

$$\operatorname{area}(R) = \int_a^b \big((f \vee g)(x) - (f \wedge g)(x)\big)\,dx,$$

che si riduce alla più agile formula

$$\operatorname{area}(R) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

qualora si abbia $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in (a,b)$.

L'area della superficie laterale di un solido di rotazione si ottiene invece replicando il ragionamento che ha portato alla formula per il calcolo del volume: si integra lungo il segmento (a,b) la lunghezza di una circonferenza di raggio $f(x)$, che è $2\pi f(x)$, e si ottiene

$$\operatorname{area}(\text{superficie laterale}) = 2\pi \int_a^b f(x)\,dx.$$

Calcolo di lunghezze di curve Gli integrali permettono anche di calcolare la lunghezza di una curva, in particolar modo se essa è esprimibile come il grafico di una funzione. Considerando un piccolo incremento dx, si può approssimare l'incremento $f(x + dx) - f(x) \sim f'(x)\,dx$ e dunque, usando il teorema di Pitagora, la lunghezza del grafico della funzione corrispondente all'incremento dx sull'asse delle ascisse è data da $\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)\,dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. Allora si ha

$$\operatorname{lungh}(\operatorname{graph}(f;(a,b))) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{5.77}$$

Una curva la cui lunghezza è finita si dice *rettificabile*. È chiaro che il grafico di una funzione ha lunghezza non inferiore alla lunghezza dell'intervallo su cui è definita la funzione, poiché la funzione integranda nella formula della lunghezza è sempre ≥ 1. Pertanto, se la funzione f è definita su una semiretta, il suo grafico ha lunghezza infinita. Tuttavia, è possibile avere lunghezza infinita anche nel caso di una funzione definita su un intervallo limitato, come mostreremo nell'Esempio 5.6.3.

Esercizio 5.6.1. Applicare le formule ricavate in questa sezione per ritrovare, dopo avere individuato la funzione f adeguata, lunghezze, aree e volumi degli oggetti geometrici semplici, quali coni, paraboloidi, iperboloidi, ellissoidi, sfere...fateli per davvero, sono divertenti!

Esempio 5.6.2. La *tromba di Torricelli* T è il solido di rotazione il cui profilo è la funzione $f(x) = 1/x$ tra 1 e $+\infty$. Calcoliamone volume, area della superficie laterale e lunghezza del profilo. Il volume è dato da

$$\operatorname{vol}(T) = \pi \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = \pi,$$

Dove abbiamo valutato l'integrale improprio, che converge perché l'esponente al denominatore è $\alpha = 2 > 1$ (si veda la (5.72)), senza il formalismo del limite. La sua superficie laterale ha area

$$\operatorname{area}(T) = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty,$$

sempre ricordando la (5.72). Infine, la lunghezza del profilo della tromba è infinita, siccome il dominio di definizione è $[1, +\infty)$. □

Esempio 5.6.3 (una curva non rettificabile in un dominio limitato)**.** Consideriamo la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{se } x \in (0,1], \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e proponiamoci di calcolare la lunghezza del suo grafico. È facile vedere che la funzione è continua in tutto $[0,1]$, ma non è derivabile nell'origine, quindi la (5.77) si può applicare in ogni sottointervallo del tipo $(h, 1]$ (è facile vedere che si può estendere fino ad includere l'estremo destro, essendo f continua in $x = 1$), ma non si può estendere a $[0,1]$. Per calcolare la lunghezza del grafico di f, o meglio, per mostrare che essa non è limitata, stimeremo la lunghezza dal basso con una quantità che diverge. Intanto, osserviamo che il comportamento di f è oscillante, come la funzione seno, ed è modulato dalle rette $y = \pm x$. Inoltre notiamo che la funzione f si annulla sui reciproci degli interi, perché $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $\pi/x = k\pi$, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Scegliamo ora una coppia di zeri consecutivi $x_{n+1} = 1/(n+1)$ e $x_n = 1/n$. Il punto $x_{n+1/2} \in (x_{n+1}, x_n)$ è tale che $|\sin(x_{n+1/2})| = 1$, infatti si ha

$$|\sin(x_{n+1/2})| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{n+1/2} \right) \right| = \left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \cos(n\pi) \right| = 1$$

e dunque $|f(x_{n+1/2})| = x_{n+1/2} = 2/(2n+1)$. Allora abbiamo

$$\operatorname{lungh}(\operatorname{graph}(f; [x_{n+1}, x_n])) > \operatorname{lungh}(S_n^1) + \operatorname{lungh}(S_n^2),$$

dove S_n^i sono le due corde che congiungono i punti $(x_{n+1}, 0)$ e $(x_{n+1/2}, f(x_{n+1/2}))$ e $(x_{n+1/2}, f(x_{n+1/2}))$ e $(x_n, 0)$, rispettivamente. Queste lunghezze sono facili da calcolare, e una volta ottenuto il valore del membro destro, una stima per difetto della lunghezza del grafico di f si ottiene sommando su n; possiamo quindi dire che

$$\operatorname{lungh}(\operatorname{graph}(f; [0,1])) > \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \big(\operatorname{lungh}(S_n^1) + \operatorname{lungh}(S_n^2) \big).$$

Abbiamo

$$\text{lungh}(S_n^1) = \sqrt{\left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{2}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + 4} \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{lungh}(S_n^2) = \sqrt{\left(\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{2n+1}\right)^2} = \frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{1}{n^2} + 4} \sim \frac{1}{n}$$

e dunque

$$\text{lungh}(\text{graph}(f;[0,1])) > 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 2 \lim_{n\to\infty} \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x} = 2 \lim_{N\to\infty} \log N = +\infty$$

e ciò dimostra la non rettificabilità del grafico di f. □

5.7 Alcuni esercizi svolti e alcuni da svolgere

Presentiamo alcuni esercizi svolti per mostrare come si possono applicare i teoremi visti in questo capitolo. Includiamo anche una lista di esercizi da svolgere e una breve sezione su alcune disuguaglianze di estrema importanza in analisi matematica.

Esercizio 5.7.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

- Dimostrare che $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- Dimostrare che se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ allora necessariamente $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Il risultato vale ancora se si richiede che f sia solo integrabile?

Il primo punto si dimostra semplicemente, applicando il Teorema 5.2.2 di confronto per integrali, usando come funzione di confronto la funzione nulla, che ha integrale zero. La disuguaglianza è immediata.
Il secondo punto si dimostra per assurdo. Supponiamo che esista un punto $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) > 0$. Grazie alla continuità di f, possiamo invocare il Teorema 3.2.7 della permanenza del segno e trovare un raggio $r > 0$ tale che $f(x) \geq f(\bar{x})/2$ per ogni $x \in \bar{I}_r(\bar{x}) \cap [a,b]$. Notiamo che l'insieme $\bar{I}_r(\bar{x}) \cap [a,b]$ è un intervallo della forma $[\alpha,\beta]$ con $r \leq \beta - \alpha \leq 2r$ (il caso in cui $\beta - \alpha = r$ si verifica quando $\bar{x}$ è uno dei due estremi, mentre il caso in cui $\beta - \alpha = 2r$ si verifica quando $\bar{I}_r(\bar{x}) \subseteq [a,b]$). Pertanto

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\bar{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(\bar{x})(\beta - \alpha) \geq \frac{r}{2} f(\bar{x}) > 0,$$

in contraddizione con il fatto che l'integrale deve essere nullo. Infine, se si rinuncia alla continuità, è possibile creare delle discontinuità eliminabili per f mantenendo nullo il valore dell'integrale. Tuttavia f deve essere nulla *quasi ovunque*, altrimenti si può replicare la costruzione appena. vista e trovare che l'integrale è positivo. Per maggiori approfondimenti su che cosa si intenda con la locuzione *quasi ovunque*, si veda la Sezione 7.5.2. □

Esercizio 5.7.2. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Dobbiamo fare alcune considerazioni preliminari: il limite presenta una forma indeterminata del tipo $[0/0]$, ammesso che la funzione integranda sia limitata in $t = 0$, ma questo è il caso in virtù del primo limite notevole nella (3.10a). Siccome dunque la funzione integranda è continua in $t = 0$, notando che il fattore $1/x$ davanti all'integrale è l'ampiezza dell'intervallo di integrazione, possiamo applicare il Corollario 5.2.4 (teorema della media integrale) ed ottenere l'esistenza di un punto $\xi_x \in [x, 2x]$ tale che valga la (5.25), ovvero

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \xi_x}{\xi_x} = 1,$$

dove l'ultima uguaglianza segue ancora dal limite notevole (3.10a), siccome $\xi_x \to 0^+$ per $x \to 0^+$ per il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri. Nell'Esempio 7.5.6 presentiamo una strategia di soluzione alternativa. □

Esercizio 5.7.3. Studiare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

in particolare mostrare che

(a) f è pari, non negativa e uniformemente continua in $\mathbb{R}$;

(b) calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$;

(c) $f(x) \le x^2/2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Partiamo dalla richiesta (a). Per studiare la parità di f calcoliamo

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{s=-t}{\underset{(5.48c)}{=}} \int_0^x -\frac{\sin(-s)}{1+(-s)^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{\sin s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = f(x),$$

dove abbiamo usato il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile e il fatto che la funzione seno è dispari.

Lo studio del segno si rivela la parte più laboriosa, ma anche quella più intrigante. Innanzitutto osserviamo che $f(0) = 0$; vogliamo vedere che $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Siccome la funzione integranda è continua, Il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo garantisce che f è derivabile e quindi possiamo studiarne i punti di minimo tramite lo studio delle derivate (con le tecniche imparate nella Sezione 4.3.2) e cercare di dimostrare che ogni punto di minimo è non negativo; in questo modo si conclude. Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \quad \text{e} \quad f'(x) = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ed abbiamo ottenuto i punti stazionari. Studiamo la derivata seconda per cercare di determinare se questi sono di massimo o di minimo. Si ha

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2)\cos x - 2x\sin x}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow f''(k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{1+(k\pi)^2}$$

e dunque $f''(k\pi) > 0$ se k è pari e $f''(k\pi) < 0$ se k è dispari. Ne segue che i punti di minimo sono i punti $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per la parità della funzione possiamo quindi dire che tutti i punti della forma $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$ sono punti di minimo relativo (abbiamo applicato il Teorema 4.3.15). Siccome la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, abbiamo che il suo valore minimo (nel senso dell'estremo inferiore, perché l'intervallo è illimitato) si ottiene facendo i minimi su intervalli chiusi e limitati finiti che diventano via via più grandi

$$\inf\{f(x) : x \geq 0\} = \lim_{k\to\infty} \min\{f(x) : 0 \leq x \leq 2k\pi\}.$$

Notiamo che la scelta di quale intervallo prendere è arbitraria (un generico $[-R, R]$ con $R \to +\infty$ è la prima che viene in mente), ma qui possiamo sfruttare le oscillazioni della funzione seno e il fatto che sappiamo che nei punti della forma $x = 2k\pi$ la funzione assume un minimo relativo. Per questo motivo, sarà sufficiente dimostrare che $f(2k\pi) \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per concludere. Osservando la funzione integranda, si nota che essa oscilla tra valori positivi e negativi per via della funzione seno, ma le oscillazioni sono via via più lievi a causa del denominatore. L'idea euristica è dunque che in ogni intervallo di ampiezza 2π, a partire dal primo $[0, 2\pi]$, la funzione accumuli più area positiva che area negativa. Per formalizzare questo pensiero, dividiamo l'intervallo $[0, 2k\pi]$ in k intervalli di ampiezza 2π e ciascuno di loro in due parti, nella prima delle quali la funzione integranda è positiva, mentre è negativa nella seconda. Scriviamo

$$\begin{aligned} f(2k\pi) &= \int_0^{2k\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{k} \int_{(2n-2)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{k} \Bigg(\underbrace{\int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=:A_n} + \underbrace{\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=:B_n} \Bigg). \end{aligned}$$

Ora dimostriamo che $A_n + B_n \geq 0$, così ogni addendo della somma appena scritta è non negativo e dunque $f(2k\pi) \geq 0$. Per ottenere ciò, si procede per confronto, notando che i numeri A_n corrispondono agli intervalli dove la funzione integranda è positiva, mentre i numeri B_n corrispondono a quelli dove è negativa. Nell'integrale che definisce B_n cambiamo variabile ponendo $t = s + \pi$ e usiamo il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} B_n &= \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\sin(s+\pi)}{1+(s+\pi)^2}\,\mathrm{d}s = -\int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\sin s}{1+(s+\pi)^2}\,\mathrm{d}s \\ &\geq -\int_{(2n-2)\pi}^{(2n-1)\pi} \frac{\sin s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = -A_n. \end{aligned}$$

Segue che $A_n + B_n \geq 0$ per ogni $n = 1, \ldots, k$, come desiderato.

La richiesta di verificare l'uniforme continuità non è banale, per il fatto che l'intervallo di definizione di f è $\mathbb{R}$, che è illimitato, e quindi non si può applicare semplicemente il Teorema 3.3.4 di Heine–Cantor. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e proponiamoci di trovare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che la Definizione 3.3.2 di continuità uniforme (nella forma scritta nella (3.13a)) sia verificata dalla funzione f. Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \int_0^{x_1} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_2} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot \left| \fint_{x_1}^{x_2} \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \overset{(5.25)}{=} |x_1 - x_2| \cdot \left| \frac{\sin \xi}{1+\xi^2} \right| \leq |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

dove l'applicazione del Corollario 5.2.4 (teorema della media integrale) ha fornito il punto $\xi \in [x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2]$. È ora sufficiente scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ per avere la (3.13a) e con questa la continuità uniforme di f su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora il limite richiesto in (b). Si ha, applicando il Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital ed usando il limite notevole (3.10a),

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2x(1+x^2)} = \frac{1}{2}.$$

Ciò significa che in un intorno dell'origine la funzione f si comporta come la parabola $x^2/2$. La domanda (c) chiede di dimostrare che effettivamente la funzione non è maggiore della parabola considerata. Data la parità, basta dimostrare il risultato per $x \geq 0$. Consideriamo la funzione $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - f(x)$: dobbiamo dimostrare che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Osservando che $g(0) = 0$, concludiamo se dimostriamo che g è monotona, ovvero se riusciamo a dimostrare che $g'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Abbiamo

$$g'(x) = x - \frac{\sin x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2} - \frac{\sin x}{1+x^2} = \frac{x - \sin x}{1+x^2} \overset{(2.11)}{\geq} 0,$$

e quindi otteniamo la condizione richiesta.

Esercizi 5.7.4. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Calcolare i seguenti integrali:
   (a) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int x^3 e^x\,\mathrm{d}x$;
   (e) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2(2x)}$; (f) $\displaystyle\int x^2 \arcsin x\,\mathrm{d}x$; (g) $\displaystyle\int x \arctan^2 x\,\mathrm{d}x$;
   (h) $\displaystyle\int x \arctan(x^2)\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 3\sin x}$; (j) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x$;
   (k) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\log\left[(1+\sin x)^{\sin x}\right]}{\tan x}\,\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^4}$;
   (m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x^\alpha)}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,\mathrm{d}x$, $(\alpha > 0)$; (n) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x \log(\log x)}$.
   Dei seguenti integrali impropri, stabilire la convergenza e, se possibile, calcolarli:
   (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; (p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2/3}}{\sin x}\,\mathrm{d}x$; (q) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$;
   (r) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cosh x}{\sinh x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

2. Trovare una primitiva della funzione $e^{-x^2}(1-2x^2)$.

3. Trovare una primitiva della funzione di Fermi–Dirac $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

4. La densità di elettroni di conduzione in un semiconduttore può essere scritta come
$$u = \gamma_n \int_{E_c}^{+\infty} \sqrt{E - E_c}\, e^{-(E-E_F)/k_B T}\,\mathrm{d}E,$$

dove γ_n è una costante, k_B è la costante di Boltzmann, T è la temperatura e E_c ed E_F sono le energie di conduzione e di Fermi, rispettivamente. Calcolare il valore di u.

5. Calcolare il fattore di Gamow $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

6. Trovare il minimo della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x (t^3-2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

8. Calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}$ e discutere la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log^\alpha x}$ al variare di $\alpha > 0$.

5.7.1 Alcune disuguaglianze importanti in analisi

In questa sezione collezioniamo alcune disuguaglianze interessanti ed importanti in analisi matematica.

Lemma 5.7.5. *Sia $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione continua e strettamente crescente tale che $\varphi(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Sia $\psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ la funzione inversa di φ. Allora, per ogni $x, y \in [0,+\infty)$ vale*

$$xy \le \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^y \psi(v)\,\mathrm{d}v. \tag{5.78}$$

Dimostrazione. Come prima cosa notiamo che grazie al Teorema 3.2.21 la funzione ψ è continua e strettamente crescente, dunque $\psi(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = +\infty$.

Consideriamo ora $x, y \in [0,+\infty)$ e sia $\bar{y} = \varphi(x)$. Ci sono due casi: o $y \ge \bar{y}$ o $y < \bar{y}$. Assumiamo che sia verificato il primo, notando che per trattare il secondo basta scambiare il ruolo di x e y. Partiamo dal secondo membro e iniziamo a fare delle stime

$$\begin{aligned}
\int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \quad + &\quad \int_0^y \psi(v)\,\mathrm{d}v \overset{(5.29)}{=} \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\bar{y}} \psi(v)\,\mathrm{d}v + \int_{\bar{y}}^y \psi(v)\,\mathrm{d}v \\
&\underset{x=\psi(\bar{y})}{\overset{(5.19)}{=}} \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\bar{y}} \psi(v)\,\mathrm{d}v + (y-\bar{y})x + \int_{\bar{y}}^y \underbrace{(\psi(v)-\psi(\bar{y}))}_{\psi \text{ monotona} \Rightarrow \ge 0}\,\mathrm{d}v \\
&\ge \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\bar{y}} \psi(v)\,\mathrm{d}v + (y-\bar{y})x \\
&\underset{(5.48c)}{\overset{v=\varphi(u)}{=}} (y-\bar{y})x + \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^x \underbrace{\psi(\varphi(u))}_{=u}\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= (y-\bar{y})x + \int_0^x \underbrace{(\varphi(u)+u\varphi'(u))}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u\varphi(u))}\,\mathrm{d}u \\
&= (y-\bar{y})x + \big[u\varphi(u)\big]_0^x = (y-\bar{y})x + x\varphi(x) = (y-\bar{y})x + x\bar{y} = xy.
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto la (5.78). □

La disuguaglianza (5.78) permette di ricavare la seguente disuguaglianza tra numeri.

Teorema 5.7.6 (disuguaglianza di Young)**.** *Dati* $x, y \in [0, +\infty)$*,* $p > 1$ *e* $q > 1$ *tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{5.79}$$

sussiste la disuguaglianza di Young

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{5.80}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $x^p = y^q$*. Inoltre, per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale la* disuguaglianza di Young generalizzata

$$xy \leq \varepsilon^p \frac{x^p}{p} + \frac{1}{\varepsilon^q} \frac{y^q}{q}. \tag{5.81}$$

Diamo due dimostrazioni della disuguaglianza di Young, una usando il Lemma 5.7.5 e una usando la concavità (si ricordi la Definizione 4.3.28) della funzione logaritmo.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che $u \mapsto \varphi(u) = u^{p-1}$. Essa è continua e strettamente monotona. Determiniamo la sua inversa $\psi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (che sarà pure continua e strettamente monotona per il Teorema 3.2.21): se $v = \varphi(u) = u^{p-1}$, abbiamo $u = v^{1/(p-1)}$. Dalla (5.79) ricaviamo

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}, \quad \text{da cui} \quad p = \frac{q}{q-1} \quad \text{e dunque} \quad \frac{1}{p-1} = \frac{1}{\frac{q}{q-1} - 1} = q - 1.$$

Allora $u = v^{1/(p-1)} = v^{q-1} = \psi(v)$ (che, come ci aspettiamo, è strettamente crescente e continua). Possiamo allora applicare la (5.78) e ottenere

$$xy \leq \int_0^x \varphi(u)\, \mathrm{d}u + \int_0^y \psi(v)\, \mathrm{d}v = \int_0^x u^{p-1}\, \mathrm{d}u + \int_0^y v^{q-1}\, \mathrm{d}v = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

e la (5.80) è dimostrata. Applicandola ai numeri εx e y/ε si ottiene la (5.81). Per studiare il caso di uguaglianza, notiamo che se $x^p = y^q$, allora

$$xy = x(x^p)^{1/q} = x \cdot x^{p/q} = x^{1+p/q} = x^{1+\frac{1}{q-1}} = x^{q/(q-1)} = x^p = x^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

ovvero abbiamo mostrato che vale l'uguaglianza nella (5.80). Viceversa, assumiamo che valga l'uguaglianza della (5.80) e mostriamo che deve essere $x^p = y^q$. Partiamo dall'uguaglianza, scriviamo q in funzione di p dove opportuno e raccogliamo y^q. Si ha

$$xy = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{p-1}{p} y^q = \frac{y^q}{p}\left(\frac{x^p}{y^q} + p - 1\right),$$

da cui

$$\frac{x}{y^{q-1}} = \frac{x^{p/p}}{y^{q/p}} = \left(\frac{x^p}{y^q}\right)^{1/p} = \frac{1}{p}\left(\frac{x^p}{y^q} + p - 1\right) \quad \Rightarrow \quad t^{1/p} = \frac{1}{p}(t-1) + 1,$$

chiamando ora $t = x^p/y^q$. L'ultima relazione trovata permette di concludere che $t = 1$ e quindi $x^p = y^q$, come desiderato. Infatti, considerando la funzione $t \mapsto t^{1/p}$, notiamo che essa è strettamente concava e coincide con la retta tangente solo nel punto di tangenza. A destra dell'ultima uguaglianza trovata abbiamo l'equazione della retta tangente in $t = 1$, che quindi forza $t = 1$. □

Dimostrazione alternativa della (5.80). La disuguaglianza di convessità (4.51) vale con il segno invertito per le funzioni concave, ovvero, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione concava, se $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in (a, b)$ e se $t \in [0, 1]$, vale

$$f(x_t) \geq (1-t)f(\bar{x}_0) + tf(\bar{x}_1), \tag{5.82}$$

dove x_t è la combinazione convessa di parametro t definita nella (4.50). Applichiamo la (5.82) alla funzione $f(x) = \log x$ con le scelte $t = 1/p$ (e di conseguenza $1 - t = 1 - 1/p = 1/q$, per la (5.79)) $\bar{x}_0 = y^q$ e $\bar{x}_1 = x^p$ e otteniamo

$$\log(x_t) = \log\left(\frac{1}{q}y^q + \frac{1}{p}x^p\right) \geq \frac{1}{q}\log y^q + \frac{1}{p}\log x^p = \log y + \log x = \log(xy).$$

Prendendo gli esponenziali si ottiene la (5.80). □

Teorema 5.7.7 (disuguaglianza di Young per funzioni; disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e siano $p, q > 1$ che soddisfano la* (5.79). *Allora valgono la* disuguaglianza di Young per funzioni

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \leq \frac{1}{p}\int_a^b |x(t)|^p\,dt + \frac{1}{q}\int_a^b |y(t)|^q\,dt, \tag{5.83}$$

la disuguaglianza di Young per funzioni generalizzata, *per ogni $\varepsilon > 0$,*

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon^p}{p}\int_a^b |x(t)|^p\,dt + \frac{1}{\varepsilon^q q}\int_a^b |y(t)|^q\,dt \tag{5.84}$$

e la disuguaglianza di Hölder

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{5.85}$$

Dimostrazione. Date le funzioni $t \mapsto x(t)$ e $t \mapsto y(t)$ come nell'ipotesi, i loro valori assoluti sono, per ogni $t \in [a, b]$, numeri non negativi; come funzioni sono continue, dunque integrabili in $[a, b]$. Integrando la disuguaglianza

$$|x(t)y(t)| \leq \frac{1}{p}|x(t)|^p + \frac{1}{q}|y(t)|^q \quad \text{per ogni } t \in [a, b],$$

tra a e b si ottiene la (5.83). La (5.84) si ottiene, come nella dimostrazione del Teorema 5.80, considerando le funzioni $t \mapsto \varepsilon x(t)$ e $t \mapsto y(t)/\varepsilon$.

Per dimostrare la (5.85) (che è banalmente vera se almeno una delle due funzioni x o y è nulla) consideriamo le funzioni

$$t \mapsto X(t) = \frac{x(t)}{\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}} \quad \text{e} \quad t \mapsto Y(t) = \frac{y(t)}{\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}},$$

che sono ben definite perché stiamo assumendo che né x né y siano la funzione nulla, alle quali applichiamo la disuguaglianza (5.83) (notiamo che i denominatori sono due costanti)

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_a^b |x(t)y(t)|\,\mathrm{d}t}{\left(\displaystyle\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\displaystyle\int_a^b |y(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}} &= \int_a^b |X(t)Y(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(5.83)}{\leq} \frac{1}{p}\int_a^b |X(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q}\int_a^b |Y(t)|^q\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{p}\frac{\displaystyle\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t} + \frac{1}{q}\frac{\displaystyle\int_a^b |y(t)|^q\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b |y(t)|^q\,\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \overset{(5.79)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Si conclude moltiplicando per il denominatore del primo membro. Il teorema è così completamente dimostrato. □

Osservazione 5.7.8. Osserviamo che le disuguaglianze di Young generalizzate (5.81) e (5.84) sono molto utili quando, facendo delle stime, è necessario avere una delle due quantità a secondo membro (diciamo quella contenente x) sufficientemente piccola: per ottenere ciò è sufficiente prendere $\varepsilon > 0$ adeguatamente piccolo e i Teoremi 5.7.6 e 5.7.7 garantiscono che ciò è possibile, alle spese di mettere una costante (molto) grande davanti al termine contenente y.

La prossima disuguaglianza che presentiamo coinvolge integrali e funzioni convesse.

Teorema 5.7.9 (disuguaglianza di Jensen)**.** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ in intervallo di lunghezza finita, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora*

$$\varphi\left(\fint_I f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \fint_I (\varphi \circ f)(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.86}$$

Dimostrazione. Siccome la funzione φ è convessa su tutto $\mathbb{R}$, per ogni punto $y_0 \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza di convessità. Ci è conveniente scriverla in maniera analoga alla (4.47a) nel seguente modo

$$\varphi(y) \geq \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{5.87}$$

dove non stiamo dicendo altro che una funzione convessa giace al di sopra della retta tangente in un suo punto. La differenza con la (4.47a) è che qui usiamo la disuguaglianza larga che risulta verificata con l'uguaglianza proprio nel punto $y_0 \in \mathbb{R}$. Con le scelte

$$y_0 = \fint_I f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad y = f(x)$$

la (5.87) diventa

$$(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) \geq \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(f(x) - y_0) = \varphi'(y_0)f(x) + \varphi(y_0) - y_0\varphi'(y_0)$$

e prendendo la media integrale termine a termine e osservando che la media integrale di una costante è uguale alla costante stessa, otteniamo

$$\fint_I (\varphi \circ f)(x)\,\mathrm{d}x \geq \varphi'(y_0) \fint_I f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(y_0) - y_0\varphi'(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi\left(\fint_I f(x)\,\mathrm{d}x \right),$$

che è la (5.86), come desiderato. □

Proponiamo un'ultima disuguaglianza che ha importanza fondamentale in analisi. Benché goda di interesse indipendente (specialmente nello studio avanzato delle equazioni differenziali), ci sarà utile nella Sezione 6.2 in merito alle equazioni differenziali ordinarie. La presentiamo ora perché essa prescinde dai concetti relativi alle equazioni differenziali.

Lemma 5.7.10 (Grönwall). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso nel suo estremo inferiore a e siano $\alpha, \beta, u\colon I \to \mathbb{R}$ tre funzioni con $\beta, u \in C^0(I)$ e α sia integrabile in I. Se $\beta \geq 0$ e*

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{per ogni } x \in I, \tag{5.88}$$

allora

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^x \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s \qquad \text{per ogni } x \in I. \tag{5.89}$$

Se inoltre α è non decrescente, allora

$$u(x) \leq \alpha(x)e^{\int_a^x \beta(s)\,\mathrm{d}s} \qquad \text{per ogni } x \in I. \tag{5.90}$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione si sfrutteranno un paio di volte dei cambiamenti di nome delle variabili di integrazione. Questo è permesso poiché, lo ricordiamo, le variabili di integrazione sono variabili mute.

Introduciamo la funzione $v\colon I \to \mathbb{R}$ definita, per $s \in I$, da

$$v(s) := e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r} \int_a^s \beta(r)u(r)\,\mathrm{d}r \tag{5.91}$$

(osserviamo che contiene l'integrale a membro destro della (5.88)) e ne calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} v'(s) &= e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}\left(\beta(s)u(s) - \beta(s)\int_a^s \beta(r)u(r)\,\mathrm{d}r\right) \\ &= \beta(s)\left(u(s) - \int_a^s \beta(r)u(r)\,\mathrm{d}r\right)e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r} \leq \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}, \end{aligned} \tag{5.92}$$

dove la disuguaglianza segue dalla (5.88) applicata al termine in parentesi; già si riconosce l'integrando della (5.89). Ora usiamo il teorema fondamentale del calcolo applicato a v. Tenendo conto della (5.92) abbiamo

$$v(x) = v(a) + \int_a^x v'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_a^x \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s.$$

Moltiplicando la (5.91) per l'esponenziale e usando la stima appena ottenuta, si ha

$$\begin{aligned} \int_a^x \beta(s)u(s)\,\mathrm{d}s = v(x)e^{\int_a^x \beta(r)\,\mathrm{d}r} &\leq e^{\int_a^x \beta(r)\,\mathrm{d}r}\int_a^x \alpha(s)\beta(s)e^{-\int_a^s \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^x \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^x \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.93}$$

Combinando la (5.88) con la (5.93) si ottiene la (5.89).

Supponiamo ora che α sia non decrescente, ovvero che $\alpha(s) \leq \alpha(x)$ per ogni $s \leq x$. Usiamo proprio questa disuguaglianza nella (5.89) per ottenere

$$u(x) \leq \alpha(x) + \alpha(x) \int_a^x \beta(s) e^{\int_s^x \beta(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s$$

e, notato che la funzione integranda è una derivata completa rispetto alla variabile s, possiamo scrivere

$$u(x) \leq \alpha(x) - \alpha(x) \left[e^{\int_s^x \beta(r)\,\mathrm{d}r} \right]_{s=a}^{s=x} = \alpha(x) - \alpha(x) \left(1 - e^{\int_a^x \beta(r)\,\mathrm{d}r} \right) = \alpha(x) e^{\int_a^x \beta(s)\,\mathrm{d}s}$$

ed abbiamo ottenuto la (5.90). □

Capitolo 6

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo introduciamo le equazioni differenziali ordinarie come il punto d'unione (uno, ma non il solo) tra calcolo differenziale e teoria dell'integrazione. Un'equazione differenziale è un'*equazione funzionale* (ovvero un'equazione scritta in termini di una funzione) in cui viene stabilita una relazione tra una funzione, le sue derivate, ed eventualmente la variabile libera da cui dipende la funzione. In questo contesto indichiamo con $y\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione della variabile x e diamo senza indugi la seguente definizione.

Definizione 6.0.1 (equazione differenziale)**.** *Siano* $y\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^n(I)$ *e sia* $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione. Un'*equazione differenziale ordinaria *(o* alle derivate ordinarie*)* di ordine *n è un'equazione funzionale del tipo*

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \textit{per ogni } x \in I. \tag{6.1}$$

Se è possibile esplicitare la derivata di ordine n-esimo (quello più alto) e scrivere

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \quad \textit{per ogni } x \in I, \tag{6.2}$$

l'equazione di dice in forma normale. *Se la funzione F e la funzione f non dipendono esplicitamente dalla variabile x, l'equazione si dice* autonoma.

Le equazioni differenziali possono essere classificate, oltre che in base all'ordine, al fatto di essere in forma normale o meno, al fatto di essere autonome, anche in base ad altre proprietà. Una molto importante è la *linearità*, che, se verificata, permette di trovare metodi risolutivi relativamente semplici che dànno una soluzione che spesso si può scrivere in forma esplicita. Un'altra classificazione è in equazioni *omogenee* o non omogenee, a seconda che oltre alla variabile y ci sia un'altra funzione che interviene nell'espressione funzionale. Spesso, le equazioni omogenee descrivono un sistema fisico chiuso, mentre in quelle non omogenee la funzione aggiuntiva può essere interpretata come forzante, come qualcosa che inietta energia nel sistema che si sta studiando. Infatti, nella modellizzazione di fenomeni fisici introdurre le derivate della quantità misurata dalla variabile y significa tracciarne i cambiamenti e stabilire come essi sono legati alla quantità stessa o influenzati da agenti esterni.

Ecco allora che un pendolo in movimento in condizioni ideali di assenza di attrito si muoverà di moto periodico rispetto al tempo e la funzione che descrive l'angolo che il filo forma con la verticale (e che quindi descrive la posizione della massa lungo una circonferenza) è governata dalla forza di gravità che agisce sulla massa: sottostando alla seconda legge della dinamica di Newton, essa è legata all'accelerazione, ovvero alla derivata seconda dell'angolo. L'equazione che si ottiene sarà del second'ordine. Se volessimo scrivere un modello più realistico, dovremmo tenere conto anche dell'attrito, che può essere modellizzato come una funzione della velocità: ecco che anche la derivata prima dell'angolo fa parte dell'equazione. La situazione è la stessa se ci si trova in presenza di una massa, appoggiata su piano orizzontale, che subisce la forza di richiamo di una molla elastica. La legge di Hooke prescrive che questa sia funzione dello spostamento della massa e il moto oscillatorio ha la stessa equazione. Vedremo questi esempi più in dettaglio più avanti. Influenzare questi sistemi dall'esterno (è facile trasformare il pendolo in un'altalena e immaginare di dare la spinta per mantenere o aumentare l'ampiezza delle oscillazioni) corrisponde ad aggiungere un termine forzante e, chiaramente, influenza le soluzioni[1].

In questo capitolo studieremo equazioni differenziali ordinarie del primo e del secondo ordine per le quali si conoscono tecniche risolutive; le presenteremo nella Sezione 6.1. La scelta ricade (solo) su questi casi per due motivi essenziali: il primo è che possono essere attaccati con gli strumenti in possesso finora (dispensando, in particolar modo, dei concetti di algebra lineare); il secondo è che con opportune sostituzioni l'equazione differenziale di ordine n in (6.2) può essere scritta come un sistema di n equazioni differenziali del prim'ordine. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 6.0.2. *L'equazione differenziale* (6.2) *ed il sistema*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{6.3}$$

sono equivalenti nel seguente senso:

1. *se la funzione φ risolve l'equazione* (6.2)*, allora il vettore $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ delle derivate risolve il sistema* (6.3)*;*
2. *se $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ risolve il sistema* (6.3)*, allora φ_1 risolve l'equazione* (6.2).

Dimostrazione. L'asserzione 1 è ovvia. Dimostriamo l'asserzione 2: supponiamo che il vettore $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ risolva (6.3); allora, leggendo le prime $n-1$ equazioni

[1] Anche se non siamo ancora intervenuti sulla regolarità degli attori in scena, non è difficile immaginare che essa sarà un aspetto importante dell'analisi delle equazioni differenziali. L'esempio della spinta dell'altalena si presta alla riflessione che fenomeni fisici della quotidianità (sempre che si vedano ancora le altalene...) sono modellizzabili con funzioni discontinue, perché tale è la funzione che descrive la spinta: essa si attiva – potremmo dire – quando l'altalena raggiunge una determinata posizione e dura molto poco, è pressoché istantanea. Sarebbe dunque opportuno riuscire ad includere funzioni discontinue nella trattazione. Rassicuriamo che è possibile farlo, ma sono necessarie tecniche più sofisticate di quelle che presenteremo in queste note.

da destra a sinistra, risulta

$$\varphi_2 = \varphi_1', \qquad \varphi_3 = \varphi_2', \qquad \dots \qquad \varphi_n = \varphi_{n-1}'$$

e dunque, a cascata,

$$\varphi_2 = \varphi_1', \qquad \varphi_3 = \varphi_2' = (\varphi_1')' = \varphi_1'', \qquad \dots \qquad \varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}$$

e l'ultima equazione dà

$$\varphi_n' = \varphi_1^{(n)} = f\big(x, \varphi_1, \varphi_1' \dots, \varphi_1^{(n-1)}\big),$$

che è la (6.2). La proposizione è così dimostrata. □

Il vantaggio del sistema (6.3) così ottenuto è che esso è disaccoppiato, ovvero non c'è relazione tra una funzione e l'altra se non il rapporto di derivazione: si risolve l'ultima equazione per integrazione, che è un'equazione differenziale del primo ordine

$$y_n'(x) = \tilde{f}(x, y_n(x)) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \quad \text{per ogni } x \in I$$

si risolve poi la penultima per integrazione, e così fino alla prima. In casi più generali, le differenti variabili sono legate tra loro da relazioni più complesse, spesso non lineari e questi descrivono una classe di problemi che va sotto il nome di ***sistemi dinamici***[2]. Tramite la Proposizione 6.0.2 è possibile ridurre sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore a sistemi del prim'ordine. Un esempio per tutti è dato dalle equazioni di Newton $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{x}''$: in componenti esse si scrivono

$$\begin{cases} x'' = f_1(t, x, y, z) \\ y'' = f_2(t, x, y, z) \\ z'' = f_3(t, x, y, z) \end{cases}$$

e ciascuna equazione del second'ordine può essere trasformata in un sistema di due equazioni in due incognite. Allora, il sistema appena scritto è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f_1(t, x_1, y_1, z_1) \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = f_2(t, x_1, y_1, z_1) \\ z_1' = z_2 \\ z_2' = f_3(t, x_1, y_1, z_1) \end{cases}$$

nel senso della Proposizione 6.0.2. Forti di questo risultato, ci concentreremo d'ora in poi su equazioni del prim'ordine in forma normale, ovvero scritte come

$$y' = f(x, y), \tag{6.4}$$

e su equazioni del second'ordine lineari a coefficienti costanti, ovvero scritte come

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

[2] Sono esempi di sistemi dinamici i modelli di dinamica delle popolazioni, tra cui i modelli epidemiologici e il modello *predatore–preda*, o di Lotka–Volterra, che ha trovato il suo successo quando è stato proposto per modellizzare l'evoluzione della fauna ittica nell'Adriatico nel primo Dopoguerra.

complete, o con forzante, se f non è la funzione identicamente nulla, o omogenee, se $f(x) = 0$ per ogni x. Ribadiamo che non ci sarebbe necessità di studiare l'equazione (6.5), se si sviluppasse la teoria per i sistemi di equazioni differenziali; tuttavia, siccome non ci occuperemo di sistemi di equazioni differenziali e siccome queste equazioni si prestano ad essere risolte con metodi relativamente facili, si possono presentare in un contesto autonomo.

Quando si risolve un'equazione differenziale (ammesso e non concesso di riuscire a scrivere la soluzione esplicitamente) ci sono alcune domande che ha senso porsi, tra le quali: *la soluzione esiste?* e se esiste, *la soluzione è unica?* o ancora *come si può trovare una soluzione?* Per motivare la Definizione 6.0.3 di soluzione che daremo tra poco, prestiamo attenzione alle formule (6.1) e (6.2): si richiedono essenzialmente due cose: che la funzione y che risolve l'equazione lo faccia puntualmente, per ogni valore $x \in I$ dell'insieme sulla quale si considera l'equazione differenziale e che gli argomenti di F e f abbiano senso, ovvero che la funzione y sia derivabile (meglio se con continuità) fino all'ordine n.

Definizione 6.0.3 (soluzione di un'equazione differenziale ordinaria)**.** *Una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria*

$$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0$$

è una coppia (φ, I) *dove* $\varphi \in C^n(I)$ *soddisfa la* (6.1)*. In particolare,*

1. *una soluzione dell'equazione del prim'ordine* (6.4) *è una coppia* (φ, I) *con* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1 *tale che*

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \textit{per ogni } x \in I;$$

2. *una soluzione dell'equazione del second'ordine* (6.5) *è una coppia* (φ, I) *con* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *tale che*

$$\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x) = f(x) \quad \textit{per ogni } x \in I.$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali si chiamano anche integrali generali *e i loro grafici* $\operatorname{graph}(\varphi)$ *si chiamano* curve integrali.

Nella Sezione 5.3, occupandoci dell'integrazione indefinita come il problema di ricerca delle primitive, non abbiamo fatto altro che risolvere un'equazione differenziale del prim'ordine, precisamente quella della forma

$$y' = f(x), \tag{6.6}$$

dove il secondo membro non dipende da y. Abbiamo inoltre visto che, siccome l'operazione di derivazione non vede le costanti, l'operazione di integrazione indefinita – ora diciamo la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (6.6) – genera non una sola soluzione, bensì una famiglia di soluzioni: una primitiva particolare e tutte le sua traslate: infatti, combinando la (5.42c) con la (6.6) otteniamo

$$I[f] = I[y'] = I[D[y]] = \tau_{\mathbb{R}}(y),$$

cosicché potremmo dire che la "soluzione" della (6.6) è la famiglia di funzioni

$$\{x \mapsto \varphi(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$$

definite in un opportuno intervallo I. Con questo esempio abbiamo già risposto alle domande che ci siamo posti poc'anzi: *le soluzioni esistono (in condizioni abbastanza generali)*, esse *possono non essere uniche* (a meno che non si imponga loro qualche altra condizione) e *si possono trovare per integrazione* (il che giustifica il nome di integrale generale dato alle soluzioni). Per l'equazione differenziale (6.6) è facile pensare ad una situazione in cui si abbia unicità della soluzione: basta fissare la costante di integrazione $c \in \mathbb{R}$ e ciò può essere fatto in molti modi: si può chiedere che la curva integrale passi per un determinati punto di coordinate (x_0, y_0), oppure si può chiedere che la soluzione abbia una certa pendenza in un certo punto, o ancora che abbia media integrale uguale ad un valore prescelto. In tutti questi casi, si fissa un vincolo che seleziona la funzione $\varphi \in \tau_{\mathbb{R}}(y)$ che lo rispetta ed è facile vedere che, almeno nel caso della (6.6), ciò è sufficiente a garantire l'unicità della soluzione. Ben diversa è la situazione generale della (6.4), e vedremo come trattare questo caso nella Sezione 6.2.

Tra tutti i possibili vincoli che si possono imporre per avere l'unicità delle soluzioni, quello più semplice e che ha più riscontro con l'esperienza fisica è quello del primo esempio che abbiamo dato, ovvero il passaggio per un punto del piano cartesiano: ciò che si sta chiedendo è di trovare una funzione che risolva la (6.4) e tale che passi per (x_0, y_0). Se interpretiamo la variabile x come il parametro lungo cui si misura l'evoluzione della funzione y, ovvero il tempo nei sistemi fisici, fissare la condizione (x_0, y_0) significa trovare la soluzione φ che passa da y_0 all'istante x_0. Se x_0 è il tempo in cui si inizia ad effettuare un esperimento, si sta prescrivendo che la quantità y che misuriamo abbia valore iniziale y_0. Il paragone è ancora più chiaro se x è la variabile tempo e y descrive la legge oraria di una particella che si muove: richiedere che $y(x_0) = y_0$ significa prescrivere il punto iniziale della traiettoria.

Definizione 6.0.4 (problema di Cauchy)**.** *Data l'equazione differenziale* (6.4) *e dato un punto* $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} f$*, si chiama* problema di Cauchy *il sistema*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.7}$$

in cui la relazione $y(x_0) = y_0$ *si chiama* condizione iniziale*. Se si cercano soluzioni* (φ, I) *tali che* $x_0 = \min I$ *si parla di problema di Cauchy* in avanti*, se* $x_0 = \max I$ *si parla di problema di Cauchy* all'indietro*, mentre se* $x_0 \in \operatorname{int}(I)$*, si parla di problema di Cauchy* completo*.*

Una soluzione (φ, I) *dell'equazione in* (6.7) *(secondo la Definizione 6.0.3) tale che* $\varphi(x_0) = y_0$ *si dice* soluzione del problema di Cauchy*.*

Esempio 6.0.5. Diamo subito un esempio di problema di Cauchy per un'equazione autonoma che già sappiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

ovvero andiamo alla ricerca di quella funzione che derivata dà se stessa e che nel punto $x_0 = 1$ assume valore $y_0 = 5$. Possiamo attaccare il problema da due punti di vista: il primo è riconoscere che si tratta della funzione esponenziale e che in questo caso la dipendenza dalla costante avviene in modo moltiplicativo. Tutte le funzioni $x \mapsto ke^x$, con $k \in \mathbb{R}$ sono soluzioni dell'equazione e il valore di k viene determinato dalla condizione di Cauchy: $5 = y(1) = ke$ dà $k = 5/e$ e dunque la soluzione è $y(x) = 5e^{x-1}$. Il dominio della soluzione è $I = \mathbb{R}$, perché la funzione esponenziale è definita su tutto l'asse reale. In Figura 6.1 il grafico della soluzione.

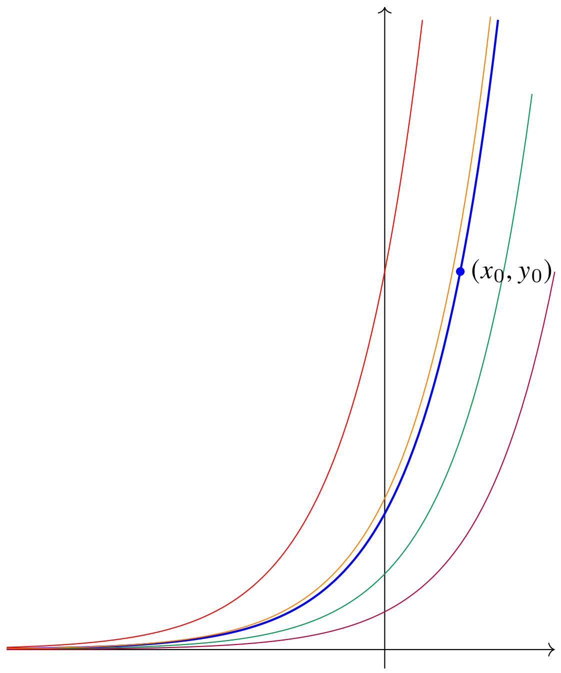


Figura 6.1: La soluzione $y = 5e^{x-1}$ del problema di Cauchy in blu, con il dato iniziale in evidenza. Sono rappresentate altre curve integrali: $y = e^x$ (verde), $y = e^x/2$ (viola), $y = 2e^x$ (arancione) e $y = 5e^x$ (rosso).

In alternativa, avremmo potuto notare che la funzione nulla $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non può essere soluzione del problema di Cauchy perché non soddisfa la condizione iniziale, per cui è possibile dividere per y e vedere a sinistra la derivata rispetto ad x della funzione $\log(y(x))$ (perché la funzione y ha un segno e questo deve essere positivo per non violare la condizione iniziale). Leggendo l'equazione da destra a sinistra abbiamo, grazie al Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile,

$$1 = \frac{y'}{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(y(x)), \quad \text{che integrata dà} \quad \log(y(x)) = x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

dove chiaramente possiamo usare una sola costante di integrazione. Prendendo gli esponenziali in entrambi i membri, abbiamo

$$y(x) = e^{x+c} = ke^x$$

ed abbiamo ottenuto le stesse funzioni che con il primo metodo. □

Abbiamo intuito che per trovare la soluzione di un'equazione differenziale del prim'ordine bisogna fare un'integrazione e la condizione di Cauchy del problema (o condizione iniziale) determina la costante di integrazione e quindi l'unicità della soluzione. Se l'equazione fosse del second'ordine, servirebbero due integrazioni e di conseguenza due costanti di integrazione. Anche in questo caso ci sono varie possibilità, dove la generalizzazione del problema di Cauchy (6.7) si ottiene imponendo il valore in un solo punto x_0 della funzione incognita e della sua derivata prima. È questo il caso della legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato, in cui, prescritta l'accelerazione a, la traiettoria compiuta da un punto materiale è descritta dalla legge $s(t) = s_0 + v_0 t + at^2/2$, che chiaramente è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} s'' = f(t, s, s') = a \\ s(0) = s_0 \\ s'(0) = v_0 \end{cases} \tag{6.8}$$

avendo scelto come istante iniziale il tempo $t_0 = 0$. In alternativa, si potrebbero fissare le condizioni agli estremi del dominio, come nel caso di una corda elastica vibrante ancorata agli estremi a e b. In questo caso la funzione che descrive il moto (che per semplicità assumiamo essere planare) della molla risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') = -\lambda^2 y \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \qquad \text{per } x \in [a, b] \tag{6.9}$$

e rappresenta, ad esempio, la vibrazione di una corda stazionaria quale può essere una corda di violino o di chitarra. Qui il parametro λ è legato agli armonici. È facile rendersi conto che le funzioni che risolvono l'equazione differenziale appena scritta sono $x \mapsto \sin(\lambda x)$ e $x \mapsto \cos(\lambda x)$. Immaginando $[a, b] = [0, \pi]$, a $\lambda = 1$ corrisponde l'armonica fondamentale (un'ansa sola), a $\lambda = 2$ corrisponde l'armonica immediatamente superiore (due anse, un nodo al centro dell'intervallo), e così via. La scelta di imporre il dato sul bordo del dominio $\{a, b\} = \partial[a, b]$ si rivela particolarmente importante in più dimensioni, dove un'equazione analoga alla (6.9), ma adeguatamente modificata per farla diventare un'equazione alle derivate parziali su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, rappresenta la vibrazione di una membrana di tamburo, rimanendo nel conteso musicale, oppure di una piastra ancorata al bordo, se ci spostiamo in un contesto meccanico.

Chiudiamo con esempi e commenti menzionando che il problema di Cauchy per un'equazione di ordine n scritta in forma normale ha la forma

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \\ y(x_0) = y_{0,0} \\ y'(x_0) = y_{0,1} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

dove $y_{0,i} \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$ sono le condizioni iniziali (assieme alla scelta del punto x_0).

Va menzionato che anche fissato il dato iniziale in un problema di Cauchy, l'unicità della soluzione non è garantita: infatti, come vedremo nella Sezione 7.6.1, non è difficile costruire equazioni differenziali, con membri destri f continui, che non godono dell'unicità della soluzione. Tuttavia, nelle applicazioni l'unicità delle soluzioni è importante: assunto il sistema come deterministico[3], ci si aspetta che ad

[3]Per ora ci dovremo accontentare di questi caso, essendo lo studio di sistemi stocastici (ovvero quelli soggetti alle leggi della teoria della probabilità) fuori della portata di queste note.

ogni dato iniziale (x_0, y_0) fissato corrisponda una ed una sola soluzione. Lasciando una bacchetta di ferro lunga un metro con un'estremità in contatto coon il fuoco, la temperatura all'altra estremità, dopo un minuto, sarà un valore ben preciso, e sembra insensato ammettere che un rilevatore di temperatura possa restituire due o più valori.

Parimenti, si può pensare che una piccola variazione delle condizioni iniziali, ovvero la prescrizione della condizione di Cauchy in $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ "vicino" a (x_0, y_0), produca soluzioni che in qualche modo sono "vicine". Usiamo le virgolette perché bisogna stabilire un opportuno concetto di vicinanza, ma, pensando alle curve integrali, si può pensare che i grafici delle due soluzioni non si debbano discostare di molto. Si dice che per i sistemi che godono di questa proprietà vale la *dipendenza continua dai dati iniziali*, mentre si suole parlare di sistemi *caotici* in caso questo non sia verificato (è il caso del famoso esempio del battito d'ali di una farfalla che scatena un uragano dall'altro lato del mondo – piccole variazioni nei dati iniziali causano grandi variazioni nelle soluzioni).

Per questo motivo, ha senso introdurre il concetto di *buona positura* di un problema matematico, concetto che applicheremo al problema di Cauchy.

Definizione 6.0.6 (buona positura secondo Hadamard)**.** *Un problema si dice* ben posto (secondo Hadamard) *se*

1. *ammette una soluzione;*
2. *tale soluzione è unica;*
3. *la soluzione dipende con continuità dai dati iniziali.*

Continuiamo ora con la trattazione delle equazioni di primo e secondo ordine per le quali conosciamo le tecniche risolutive e rimandiamo alla successiva Sezione 6.2 la discussione della buona positura del problema di Cauchy (6.7).

6.1 Metodi risolutivi di alcune equazioni differenziali ordinarie

In questa sezione diamo i metodi risolutivi di alcune equazioni differenziali, con particolare attenzione a quelle del primo e del second'ordine e ad alcune tipologie facilmente trattabili

6.1.1 Equazioni a variabili separabili

Partiamo con il nostro studio dalle equazioni a variabili separabili, che sono equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine non lineari che si presentano nella forma

$$y' = g(x)h(y), \tag{6.10}$$

dove g e h sono funzioni che fattorizzano il membro destro $f(x, y)$ della (6.4). Iniziamo la nostra analisi notando che se $\bar{y}$ è tale che $h(\bar{y}) = 0$, allora si ha $\bar{y}' = 0$, ovvero la funzione $\bar{y}$ è costante. Abbiamo ottenuto che le soluzioni costanti, o *stazionarie*, sono gli zeri della funzione h. Sono quelle da individuare come prima cosa. Una volta individuate le soluzioni costanti (se ce ne sono), si può assumere che la funzione h non si annulli e si può procedere dividendo per $h(y)$ entrambi i membri dell'equazione. Otteniamo così

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x)$$

e notiamo che se $y \mapsto H(y)$ è una primitiva della funzione $y \mapsto 1/h(y)$, invocando il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile, si può scrivere

$$g(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))} = H'(y(x))y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H \circ y)(x) \tag{6.11}$$

e ora integrare rispetto ad x è immediato: la funzione $H \circ y$ è una primitiva della funzione g. Allora, per la Proposizione 4.2.12, se G è un'altra primitiva di g, si ha

$$H(y(x)) = G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{6.12}$$

Ricordando che $h \neq 0$ implica che ha un segno, la funzione H risulta strettamente monotona e pertanto invertibile e ciò dà subito

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c). \tag{6.13}$$

Va osservato che non sempre è possibile invertire esplicitamente la funzione H (nonostante l'inversa esista), quindi può capitare che ci si debba fermare alla forma implicita (6.12) della soluzione. Qualora fosse possibile scrivere in forma esplicita l'inversa H^{-1}, allora l'integrale generale dell'equazione (6.10) è dato dalla (6.13).

Osservazione 6.1.1. Spesso la regola pratica per risolvere un'equazione a variabili separabili (6.10) è la seguente: si scrive $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, si divide per $h(y)$ e "si moltiplica" per $\mathrm{d}x$ in entrambi i lati ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x, \tag{6.14}$$

e si integra a sinistra rispetto ad y e a destra rispetto a x. Nell'espressione ottenuta si fa dipendere la y da x e si ha la soluzione. Facciamo notare che questa è una mera regola pratica o mnemonica per facilitare i passaggi formalmente corretti svolti nella (6.11), senza i quali non vi sarebbe nessuna giustificazione dell'abominio formale dell'integrazione della (6.14). □

Esempi 6.1.2. Vediamo qualche esempio di equazioni a variabili separabili. Risolveremo sia equazioni sia problemi di Cauchy.

1. Osserviamo che il secondo metodo con cui abbiamo risolto l'equazione nell'Esempio 6.0.5 è stato per separazione di variabili. Lì avevamo $g(x) = 1$ e $h(y) = y$.
2. Risolviamo l'equazione $y' = \dfrac{e^x + 1}{e^y + 1}$. In questo caso abbiamo $g(x) = e^x + 1$ e $h(y) = 1/(e^y + 1)$, che non si annulla mai, quindi l'equazione non ammette soluzioni costanti. Forti dell'Osservazione 6.1.1, procediamo con l'integrazione formale e abbiamo

$$(e^y + 1)\,\mathrm{d}y = (e^x + 1)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad e^{y(x)} + y(x) = e^x + x + c,$$

   che non è integrabile con tecniche elementari, quindi ci si deve arrestare qui. Notiamo che il dominio è $I = \mathbb{R}$.

3. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6y^2 x \\ y(1) = 1/25 \end{cases}.$$

Qui possiamo prendere $g(x) = 6x$ e $h(y) = y^2$. C'è una sola soluzione costante, la soluzione nulla $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, che però non è soluzione del problema di Cauchy. Allora, grazie all'Osservazione 6.1.1, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 6x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = 3x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-1}{3x^2 + c}$$

e determiniamo la costante c imponendo che y soddisfi la condizione iniziale. Allora si deve avere che

$$\frac{1}{25} = \frac{-1}{3 + c} \quad \Rightarrow \quad c = -28.$$

La soluzione del problema di Cauchy considerato è dunque $y(x) = \dfrac{-1}{3x^2 - 28}$. Invitiamo a verificare che la scelta di quale termine dotare della costante numerica 6 non influenza il risultato finale. Ancora, notiamo che la soluzione deve essere definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $3x^2 - 28 \neq 0$, ovvero per $x \neq \pm\sqrt{28/3}$. Il dominio della soluzione è pertanto $\big(-\infty, -\sqrt{28/3}\big) \cup \big(-\sqrt{28/3}, \sqrt{28/3}\big) \cup \big(\sqrt{28/3}, +\infty\big)$. Siccome il punto x_0 della condizione iniziale appartiene all'intervallo centrale, si ha $I = \big(\sqrt{28/3}, \sqrt{28/3}\big)$. Il grafico è rappresentato in Figura 6.2.

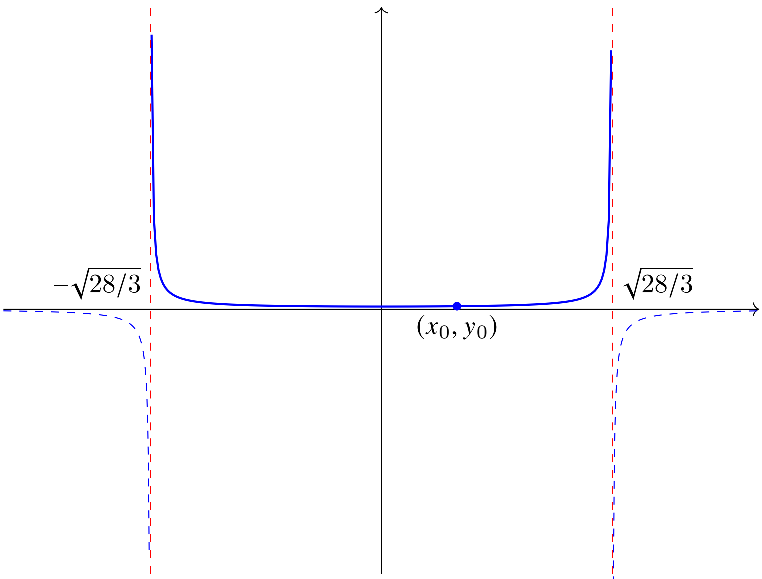


Figura 6.2: La soluzione $y(x) = -1/(3x^2 - 28)$ in blu, con il dato iniziale in evidenza. Sono rappresentati in tratteggio i rami non accettabili della funzione.

4. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

nel quale abbiamo $g(x) = 3x^2 + 4x - 4$ e $h(y) = 1/(2y - 4)$, che è sempre diversa da zero e pertanto non ammette soluzioni costanti. Sempre grazie all'Osservazione 6.1.1 abbiamo

$$(2y - 4)\,\mathrm{d}y = (3x^2 + 4x - 4)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y^2(x) - 4y(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + c,$$

che è conveniente lasciare in forma implicita. La condizione di Cauchy ci permette di determinare c risolvendo la semplice equazione

$$y^2(1) - 4y(1) = 1 + 2 - 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

e pertanto la soluzione $y\colon \mathbb{R} = I \to \mathbb{R}$ soddisfa la relazione $y^2(x) - 4y(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$.

5. Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-y}(2x - 4) \\ y(5) = 0 \end{cases}$$

nel quale abbiamo $g(x) = 2x - 4$ e $h(y) = e^{-y}$, che è sempre diversa da zero e pertanto non ammette soluzioni costanti. Sfruttiamo ancora una volta l'Osservazione 6.1.1 e calcoliamo

$$e^y\,\mathrm{d}y = (2x - 4)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad e^{y(x)} = x^2 - 4x + c.$$

Qui notiamo subito che non tutti i valori di $c \in \mathbb{R}$ sono ammissibili, ma solamente quelli tali per cui $x^2 - 4x + c > 0$, siccome questo è uguale al risultato dell'esponenziale a membro sinistro. Ciò determina l'intervallo I sul quale è definita la soluzione. Se il discriminante $\Delta = 4 - c < 0$ (parabola con la concavità rivolta verso l'alto senza zeri), ovvero $c > 4$, allora si avrà $I = \mathbb{R}$, altrimenti, se $\Delta = 4 - c \geq 0$, l'intervallo I sarà una delle due semirette sulle quali si ha verificata la condizione $x^2 - 4x + c > 0$. Troviamo subito il valore della costante c imponendo la condizione iniziale

$$1 = e^0 = e^{y(5)} = 25 - 20 = c \quad \Rightarrow \quad c = -4,$$

che sancisce che la soluzione è $y\colon I \to \mathbb{R}$ dove $I \ni x_0 = 5$. Risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - 4x - 4 = 0$, troviamo che le intersezioni con gli assi sono in $2 \pm 2\sqrt{2}$ e, siccome $x_0 = 5 > 2 + 2\sqrt{2}$, abbiamo $I = \left(2 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$ e la soluzione è $y(x) = \log(x^2 - 4x - 4)$. In Figura 6.3 il grafico della soluzione.

6. Risolviamo il problema di Cauchy in coordinate polari piane

$$\begin{cases} r' = r^2/\vartheta \\ r(1) = 2 \end{cases}$$

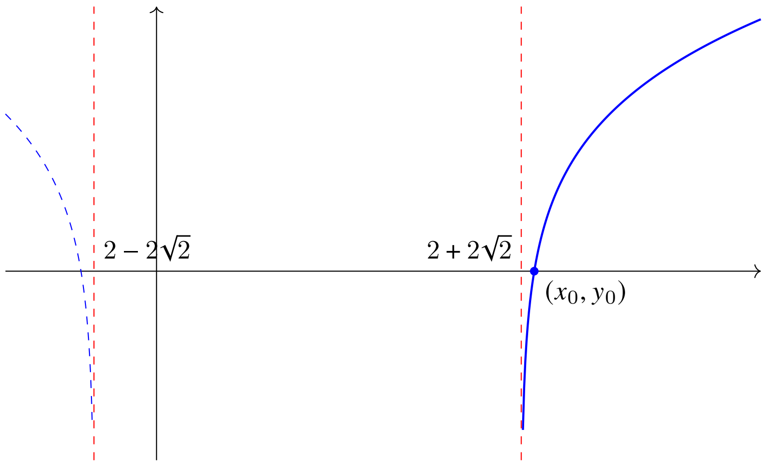


Figura 6.3: La soluzione $y = \log(x^2 - 4x - 4)$ in blu, con il dato iniziale in evidenza. È rappresentato in tratteggio il ramo non accettabile.

nel quale abbiamo $g(\vartheta) = 1/\vartheta$ e $h(r) = r^2$, che ammette la soluzione costante nulla, che però non è soluzione del problema di Cauchy proposto. Sfruttiamo ancora una volta l'Osservazione 6.1.1 e calcoliamo

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{r(\vartheta)} = \log\vartheta + c,$$

dove sappiamo che $\vartheta \neq 0$ perché altrimenti l'equazione non è definita e possiamo scegliere il segno positivo perché la condizione iniziale è data per $\vartheta = 1$. Troviamo il valore della costante c imponendo la condizione iniziale

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{r(1)} = \log 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2},$$

che porta alla soluzione $r\colon I = \left(0, \sqrt{e}\right) \to \mathbb{R}$ definita da $r(\vartheta) = \dfrac{2}{1 - 2\log\vartheta}$. In Figura 6.4 il grafico della soluzione.

Altri esempi si possono trovare negli esercizi svolti nella Sezione 6.1.6.

6.1.2 Equazioni del prim'ordine omogenee nelle variabili

Si tratta di una classe di equazioni del prim'ordine scritte in forma normale (6.4) in cui il membro destro ha una dipendenza particolare dalle variabili x e y: dipende infatti dal rapporto y/x dalle variabili. La forma generale è dunque

$$y' = f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6.15}$$

dove possiamo assumere che la funzione ϕ sia continua. Dipendendo la ϕ dal rapporto $z := y/x$, essa non rileva situazioni in cui sia il numeratore y che il denominatore x sono moltiplicati per la stessa costante $\alpha > 0$ (dove il segno è scelto per

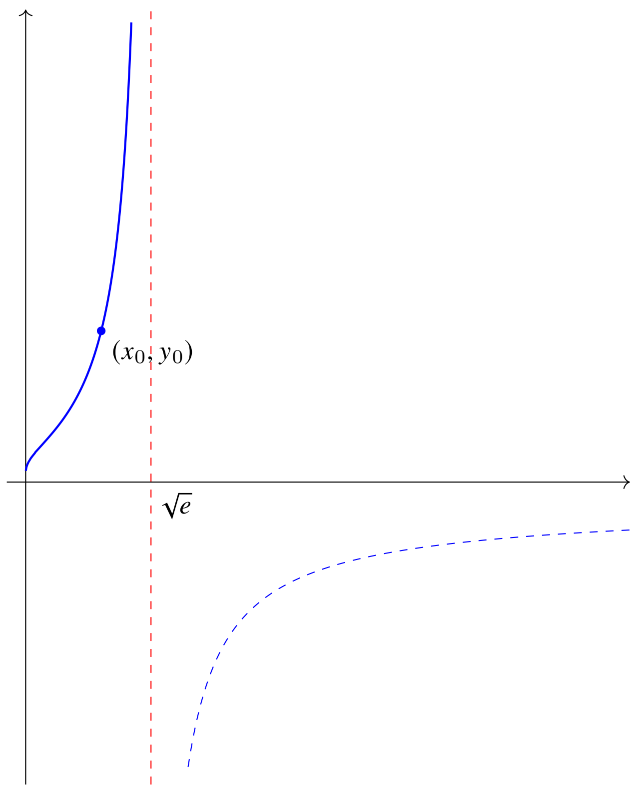


Figura 6.4: La soluzione $r(\vartheta) = \dfrac{2}{1 - 2\log\vartheta}$ in blu, con il dato iniziale in evidenza. È rappresentato in tratteggio il ramo non accettabile.

semplicità, siccome se $\alpha < 0$ la situazione è analoga): infatti $z = y/x = (\alpha y)/(\alpha x)$ e questo dà

$$f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) = \phi\left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right) = f(\alpha x, \alpha y)$$

e il criterio per determinare se l'equazione è omogenea nelle variabili:

> *se la funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ è tale che $f(x, y) = f(\alpha x, \alpha y)$ per ogni $\alpha > 0$, l'equazione differenziale (6.4) che ha f come membro destro è omogenea nelle variabili.* [4]

Questa classe di funzioni merita attenzione particolare perché è di facile risoluzione: cambiando variabile da y a z è possibile ricondurre la (6.15) ad un'equazione a variabili separabili del tipo strutturalmente analogo alla (6.10). Usando la sostituzione proposta, rimpiazziamo la variabile y con la variabile $z = y/x$ nella (6.15). Come prima cosa, osserviamo che, siccome si ha $y(x) = xz(x)$, la regola di derivazione del prodotto (4.6c) dà

$$y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

[4] Per dovere di cronaca: una funzione f tale che $f(\alpha x) = \alpha^n f(x)$ per ogni $\alpha > 0$ si dice *(positivamente) omogenea di grado n* oppure *(positivamente) n-omogenea*. I membri destri delle equazioni differenziali omogenee nelle variabili sono dunque funzioni che sono (positivamente) 0-omogenee nel complesso delle loro variabili.

e dunque abbiamo

$$y' = z + xz' = \phi(z) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{\phi(z) - z}{x}, \tag{6.16}$$

che è un'equazione a variabili separabili in x e z con $g(x) = 1/x$ e $h(z) = \phi(z) - z$. Analizzando l'equazione come fatto nella Sezione 6.1.1, troviamo le soluzioni costanti $\bar{z}$, se esistono, come quelle che annullano la funzione h, ovvero

$$h(\bar{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\bar{z}) - \bar{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\bar{z}) = \bar{z}^{5}$$

e dànno le soluzioni $y(x) = \bar{z}x$, che sono delle rette passanti per l'origine. Altrimenti, quando $\phi(z) - z \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri e (cercare di) risolvere l'equazione usando l'Osservazione 6.1.1. Se H è una primitiva della funzione $1/(\phi(z) - z)$, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{\phi(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \log|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Allora, se H è invertibile si ottiene $z(x) = H^{-1}(\log|x| + c)$ e dunque la soluzione della (6.15) è data da

$$y(x) = xH^{-1}(\log|x| + c), \quad c \in \mathbb{R}, \tag{6.17}$$

dove, al solito, la costante c è determinata dalle condizioni iniziali dell'eventuale problema di Cauchy (6.7) associato alla (6.15).

Esempi 6.1.3. Proponiamo alcuni esempi di risoluzione di equazioni differenziali omogenee nelle variabili.

1. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $xyy' = x^2 + y^2$. Per capire di che tipo di equazione si tratta, dobbiamo scriverla in forma normale (sotto il vincolo che $x \neq 0$ e che $y \neq 0$). Abbiamo

   $$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

   e siccome la dipendenza dal rapporto y/x è manifesta possiamo sancire che si tratta di un'equazione omogenea del tipo (6.15) in cui $\phi(z) = z + 1/z$. La scriviamo nella forma (6.16) che è a variabili separabili per (x, z) e la possiamo risolvere: osserviamo innanzitutto che la condizione per l'esistenza di soluzioni costanti $\phi(z) = z$ dà $1/z = 0$ e quindi non ci sono soluzioni costanti per z (e di conseguenza non ci sono soluzioni di tipo retta per y); inoltre

   $$z' = \frac{\phi(z) - z}{x} = \frac{z + \frac{1}{z} - z}{x} = \frac{1}{zx} \quad \Rightarrow \quad z\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2(x)}{2} = \log|x| + c,$$

   con $c \in \mathbb{R}$ la costante di integrazione. È possibile invertire l'espressione appena ottenuta e ricavare z e dunque la (6.17) dà

   $$y(x) = x\sqrt{2\log|x| + c} = x\sqrt{\log(kx^2)}, \quad k > 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

   con la condizione che $kx^2 \geq 1$.

[5] Alla luce della Definizione 6.2.13 più avanti, tali soluzioni sono punti fissi della funzione ϕ.

2. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. L'equazione si presenta già in forma normale, dunque possiamo direttamente verificare l'omogeneità nelle variabili

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha x + \alpha y}{\alpha x - \alpha y} = \frac{\alpha(x+y)}{\alpha(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y),$$

come si poteva anche verificare raccogliendo x. Allora abbiamo un'equazione del tipo (6.15) con $\phi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Le soluzioni costanti in z sono le soluzioni

$$\phi(z) - z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z^2}{1-z} = 0,$$

e quindi non esistono (e di conseguenza non esistono soluzioni y di tipo retta per l'origine). Risolvendo l'equazione a variabili separabili in z otteniamo

$$\frac{1-z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \arctan(z(x)) - \log\sqrt{1+z^2(x)} = \log|x| + c,$$

che teniamo in questa forma perché non è possibile esplicitare la funzione z.

6.1.3 Equazioni lineari (del primo e del second'ordine)

L'equazione differenziale del problema di Cauchy dell'Esempio 6.0.5 è la più semplice tra le equazioni lineari che si possano trovare. Abbiamo già visto che la soluzione è la funzione esponenziale. In questa sezione ci preoccupiamo di studiare le generalità delle equazioni differenziali lineari per poi concentrarci su quelle del primo ordine a coefficienti variabili e su quelle del secondo ordine a coefficienti costanti.

Un'equazione differenziale lineare di ordine n si presenta come un polinomio Π_n di grado n

$$\Pi_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{6.18}$$

che ha come indeterminata l'operatore di derivazione D: si tratta di una scrittura del tipo

$$\Pi_n(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D^1 + a_n D^0,$$

dove $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ e l'azione di $\Pi_n(D)$ su una funzione y è quella di calcolare le derivate di y dell'ordine la potenza dell'operatore D:

$$\begin{aligned}\Pi_n(D)y &= a_0 D^n[y] + a_1 D^{n-1}[y] + \cdots + a_{n-1}D^1[y] + a_n D^0[y] \\ &= a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y\end{aligned}$$

Osserviamo che se $y \in C^n(I)$, allora $\Pi_n(D)y$ restituisce una funzione di classe $C^0(I)$ e quindi ha senso scrivere equazioni differenziali del tipo

$$\Pi_n(D)y(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I, \tag{6.19}$$

dove f è una funzione (almeno[6]) di classe $C^0(I)$. Se f non è la funzione nulla, allora l'equazione (6.19) si dice *completa* o *forzata*, mentre se $f = 0$ si dice *omogenea*, ed è

[6]Rimandiamo alla Nota 1 per un commento sulla regolarità delle funzioni. Si veda anche la discussione nella Sezione 7.6.1.

immediato vedere che questa ammette sempre come soluzione la soluzione nulla $y = 0$. Inoltre, senza perdita di generalità, possiamo sempre assumere che $a_0 = 1$ (dovendo essere diverso da zero, si può dividere ogni membro dell'equazione per a_0). Infine notiamo che l'equazione omogenea

$$\Pi_n(D)y = 0 \tag{6.20}$$

è anche autonoma.

Ci occupiamo ora di stabilire alcuni risultati riguardo all'equazione omogenea $\Pi_n(D)y = 0$, le sui soluzioni assumiamo appartenere alla classe $C^n(\mathbb{R})$, ovvero di essere definite su tutto $\mathbb{R}$ e di essere n volte derivabili con continuità. Le prime proprietà che dimostriamo sono che ogni traslata di una soluzione y dell'equazione (6.20) è ancora una soluzione dell'equazione e che ogni combinazione lineare di soluzioni della (6.20) è ancora una soluzione.

Proposizione 6.1.4. *Se $y \in C^n(\mathbb{R})$ è una soluzione dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea (6.20) allora, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$, anche la funzione $z(x) := y(x+\tau)$ risolve l'equazione (6.20).*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica, in cui si sfruttano la linearità dell'operatore $\Pi_n(D)$ ed il Teorema 4.1.14 di derivazione della funzione composta

$$\Pi_n(D)z(x) = \Pi_n(D)y(x+\tau) = (\Pi_n(D)y)(x+\tau) = 0,$$

siccome $x + \tau \in \mathbb{R}$ e y risolve la (6.20). □

Proposizione 6.1.5. *Siano $y_1, \dots, y_k \in C^n(\mathbb{R})$ soluzioni della (6.20) e siano date le costanti $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Allora la combinazione lineare (si veda la Definizione 4.3.27) $y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$ è una soluzione della (6.20).*

Dimostrazione. Si tratta di verificare che la funzione y così definita è una soluzione dell'equazione omogenea. Abbiamo

$$\Pi_n(D)y = \Pi_n(D)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \Pi_n(D)(y_i) = 0,$$

che dimostra l'asserto grazie alla linearità dell'operatore D di derivazione. □

Ora possiamo iniziare a studiare più in dettaglio le equazioni di ordine uno e di ordine due, che corrispondono ai polinomi $\Pi_1(\lambda)$ e $\Pi_2(\lambda)$ nella (6.18) della forma

$$\Pi_1(\lambda) = \lambda + a_1 \qquad \text{e} \qquad \Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2,$$

rispettivamente. La teoria per le equazioni differenziali lineari del prim'ordine è semplice a sufficienza per permetterci di studiare il caso di equazioni a coefficienti non costanti, corrispondenti al caso in cui $a_1 = a_1(x)$. Inoltre, per queste equazioni, è di costume indicare con $x \mapsto a(x)$ il coefficiente del termine di ordine zero e con $x \mapsto b(x)$ la forzante.

Equazioni lineari del prim'ordine

Si tratta di equazioni differenziali della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{6.21}$$

con a, b funzioni continue. Partiamo analizzando l'equazione omogenea

$$y' + a(x)y = 0 \tag{6.22}$$

che notiamo subito essere del tipo a (6.10) variabili separabili, dove $g(x) = -a(x)$ e $h(y) = y$. Ancora una volta, abbiamo conferma del fatto che la funzione nulla è soluzione dell'equazione (infatti $y = 0$ è l'unico zero della funzione h); inoltre, siccome la funzione $1/h(y) = 1/y$ ha come primitiva la funzione $H(y) = \log y$, possiamo usare l'Osservazione 6.1.1 per risolvere i passaggi della (6.11), invertire la funzione $y \mapsto H(y) = \log y$ prendendo gli esponenziali di ambo i membri e ottenere la formula esplicita della soluzione come nella (6.13). Dalla (6.22) abbiamo

$$y' = -a(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \log|y(x)| = -A(x) + c, \tag{6.23}$$

dove

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.24}$$

è una primitiva della funzione $x \mapsto a(x)$ e $c \in \mathbb{R}$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione differenziale del prim'ordine lineare omogenea è la famiglia di funzioni

$$y(x) = ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{6.25}$$

La costante $k \in \mathbb{R}$ tiene conto del fatto che la funzione y possa essere negativa. Notiamo alcune proprietà delle soluzioni:

- la funzione nulla, che sappiamo essere soluzione, non è contemplata nei passaggi (6.23), ma è inclusa nella forma (6.25) dell'integrale generale e corrisponde alla scelta $k = 0$;
- le soluzioni della (6.22) hanno segno costante: infatti, l'esponenziale è sempre positivo e il segno della soluzione (6.25) dipende dal segno della costante k.

Possiamo ora studiare l'equazione completa (6.21). Avendo introdotto la funzione A primitiva della funzione a, il membro sinistro della (6.21) ha la struttura di una derivata completa di un prodotto (si ricordi la (4.6c)). È infatti la derivata della funzione $x \mapsto e^{A(x)}y(x)$. La strategia ora è quella di moltiplicare tutta l'equazione (6.21) per $e^{A(x)}$ e cercare di integrare quello che si ottiene al membro destro. Abbiamo dunque

$$e^{A(x)}\big(y' + a(x)y\big) = e^{A(x)}y' + a(x)e^{A(x)}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(e^{A(x)}y\big) = b(x)e^{A(x)}$$

e se ora denotiamo con $x \mapsto B(x)$ una primitiva del membro destro, ovvero

$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{6.26}$$

ricordando la Proposizione 4.2.12 e integrando rispetto ad x, abbiamo

$$e^{A(x)}y(x) = B(x) + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c).$$

Possiamo allora affermare che l'integrale generale dell'equazione differenziale del prim'ordine lineare completa è la famiglia di funzioni

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)}\left(\int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c\right), \\ &= e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right), \end{aligned} \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{6.27}$$

Le espressioni appena scritte devono essere capite a fondo per una loro corretta applicazione (altrimenti si rischia di fare confusione con le variabili e di effettuare le integrazioni in forma non corretta). Può essere utile arrivare a scrivere l'integrale generale (6.27) per gradi:

1. in primo luogo si ricava la funzione A definita nella (6.24);
2. successivamente la funzione B definita nella (6.26);
3. si uniscono tutte le espressioni nella (6.27).

Può essere anche utile ricordare una forma più concisa dell'integrale generale (6.27), avendo ben chiaro il significato dei simboli

$$y = e^{-A}(B+c) = e^{-A}\left(\int be^{A} + c\right) = e^{-\int a}\left(\int be^{\int a} + c\right).$$

Nel caso l'equazione (6.21) fosse accompagnata ad una condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$ la (6.27) va scritta integrando a partire tra x_0 ed il generico punto x ed è

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{x_0}^{s} a(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s + c\right)$$

e la costante di integrazione c è determinata sostituendo $x = x_0$ e $y(x_0) = y_0$, che dà $y_0 = y(x_0) = e^0(0+c)$, da cui si ottiene $c = y_0$. Allora abbiamo scoperto che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è data dalla funzione (si noti l'utilizzo di lettere differenti per le variabili d'integrazione)

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} b(s)e^{\int_{x_0}^{s} a(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s + y_0\right). \tag{6.28}$$

Prima di presentare alcuni esempi, vediamo che forma assume l'integrale generale (6.27) in alcuni casi particolari, ovvero quelli in cui i coefficienti sono costanti e successivamente quello in cui l'equazione è omogenea. Se $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$A(x) = \int a\,\mathrm{d}x = ax \quad \text{e} \quad B(x) = \int be^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a}e^{ax}$$

e dunque la (6.27) diventa

$$y(x) = e^{-ax}\left(\frac{b}{a}e^{ax} + c\right) = ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Dunque, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{è} \quad y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}. \tag{6.29}$$

In particolare, se $b = 0$, abbiamo $y(x) = ce^{-ax}$ e dunque la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{è} \quad y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}, \tag{6.30}$$

come avevamo già trovato per altra via nell'Esempio 6.0.5.

Esempi 6.1.6. Troviamo l'integrale generale di un paio di equazioni differenziali.

1. Si trovi la famiglia delle soluzioni dell'equazione differenziale $xy'+y = x^2$. Come prima cosa, dobbiamo portarla nella forma (6.21) e per fare ciò è necessario escludere $x = 0$ dal dominio della soluzione. Allora possiamo scrivere

   $$y' + \frac{1}{x}y = x, \quad \text{dove} \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad b(x) = x.$$

   Notando che x deve avere un segno, iniziamo a studiare il caso in cui $x > 0$. Usando la (6.24) e la (6.26) otteniamo

   $$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x, \\ B(x) &= \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int xe^{\log x}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}, \end{aligned}$$

   da cui si ottiene la soluzione

   $$y(x) = e^{-\log x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{c}{x} + \frac{x^2}{3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

   Notiamo che se $x < 0$ allora $A(x) = \log(-x)$ e $B(x) = -x^3/3$, da cui si ottiene

   $$y(x) = e^{-\log(-x)}\left(-\frac{x^3}{3} + c\right) = -\frac{1}{x}\left(-\frac{x^3}{3} + c\right) = -\frac{c}{x} + \frac{x^2}{3}, \quad c \in \mathbb{R},$$

   che è la stessa famiglia di soluzioni, in quando il segno meno che emerge nella prima frazione può essere assorbito nella costante $c \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono rappresentate nella Figura 6.5

2. Si trovi la famiglia delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y-x$. Come prima cosa, dobbiamo portarla nella forma (6.21):

   $$y' - y = -x, \quad \text{dove} \quad a(x) = -1 \quad \text{e} \quad b(x) = -x.$$

   Usando la (6.24) e la (6.26) otteniamo

   $$A(x) = \int -1\,\mathrm{d}x = -x; \;\; B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int -xe^{-x}\,\mathrm{d}x = (x+1)e^{-x},$$

   integrando per parti, da cui si ottiene la famiglia di soluzioni

   $$y(x) = e^x\left[(x+1)e^{-x} + c\right] = x + 1 + ce^x, \quad c \in \mathbb{R},$$

   che sono funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Si veda la Figura 6.6.

Ulteriori esempi saranno disponibili nella Sezione 6.1.6. □

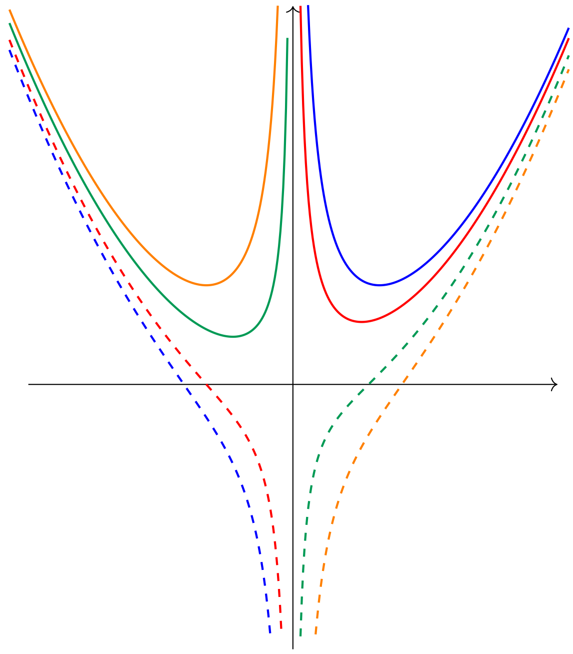


Figura 6.5: La famiglia di soluzioni $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c}{x}$ per alcuni valori di c: $c = 1$ (blu), $c = 1/2$ (rosso), $c = -1$ (arancione) e $c = -1/3$ (verde). La scelta tra il ramo a tratto continuo o tratteggiato viene determinata dalla condizione di Cauchy.

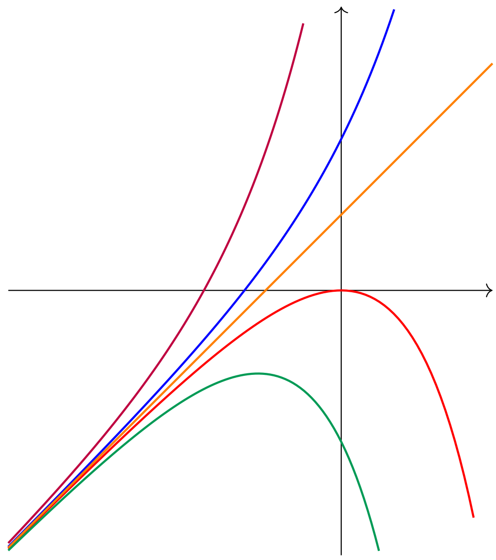


Figura 6.6: La famiglia di soluzioni $y(x) = x+1+ce^x$ per diversi valori del parametro c: $c = 1$ (blu), $c = -1$ (rosso), $c = 0$ (arancione), $c = -3$ (verde) e $c = 5$ (viola).

Equazioni lineari omogenee del second'ordine a coefficienti costanti

In questa sezione ci occupiamo di studiare l'equazione lineare omogenea del second'ordine a coefficienti costanti

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{6.31}$$

ovvero quella associata al polinomio (6.18) della forma

$$\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.32}$$

Introdurremo dei concetti che saranno utili per studiare le proprietà delle soluzioni e che permetteranno di affrontare lo studio dell'equazione forzata, nella prossima sezione. Ricordando la Definizione 6.0.3 di soluzione di un'equazione differenziale, consideriamo una soluzione $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(\mathbb{R})$. Siccome essa deve soddisfare l'equazione, isolando la derivata seconda nella (6.31) si ottiene

$$y'' = -a_1 y' - a_2 y \tag{6.33}$$

e ci si accorge che il membro destro è una funzione di classe C^1. Ciò significa che esiste $y''' \in C^0(\mathbb{R})$ e pertanto che la funzione y è di classe $C^3(\mathbb{R})$. Da questo e dalla Definizione 4.1.19 di derivate successive otteniamo

$$y''' = (y'')' = (-a_1 y' - a_2 y)' = -a_1 y'' - a_2 y'$$

che risulta pertanto una funzione di classe C^1. Allora esiste la derivata quarta della funzione y e si ha $y^{(IV)} \in C^0(\mathbb{R})$: la funzione y risulta pertanto di classe $C^4(\mathbb{R})$. Continuando con questo processo, si ottiene che la soluzione y è di classe $C^k(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e pertanto risulta $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ (si veda la Definizione 4.1.21). Allora, grazie al Teorema 4.2.20, possiamo approssimare la funzione y con il suo polinomio di Taylor $x \mapsto T^{(k)}_{y,x_0}(x)$, dove si è scelto $x_0 \in \mathbb{R}$ il centro dello sviluppo. Possiamo dunque scrivere, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = T^{(k)}_{y,x_0}(x) + o(|x - x_0|^k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{y^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + o(|x - x_0|^k) \tag{6.34}$$

Se ora consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{6.35}$$

associato alla (6.31), possiamo determinare i coefficienti $y^{(j)}(x_0)$. Infatti, denotando $y^{(j)}(x_0) =: y_j \in \mathbb{R}$, le condizioni di Cauchy dànno i primi due elementi della successione dei coefficienti del polinomio di Taylor, mentre gli altri si possono ricavare valutando la formula ricorsiva (6.33) in x_0, che fornisce

$$y_j = y^{(j)}(x_0) = -a_1 y_{j-1} - a_2 y_{j-2} \quad \text{per ogni } j \geq 2. \tag{6.36}$$

Risulta ora evidente come il polinomio di Taylor sia determinato dalla sola condizione di Cauchy: così ci aspettiamo perché la soluzione della (6.31) dipende da due costanti (perché l'equazione è di ordine due) e queste sono fissate dai dati di Cauchy. Il fatto che l'espansione polinomiale della soluzione dipenda da queste due sole costanti è rintracciato nel fatto che tutti i coefficienti del polinomio di Taylor dei termini di grado superiore al primo sono ottenuti tramite la formula (6.36). È stato istruttivo ricavare questo risultato analizzando l'equazione, le sue proprietà ed il problema di Cauchy ad essa associato e ciò è la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 6.1.7. *Supponiamo che $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una soluzione dell'equazione* (6.31)*. Allora essa ammette polinomio di Taylor di tutti gli ordini con i coefficienti che soddisfano la* (6.36)*. Se inoltre y risolve il problema di Cauchy* (6.35)*, allora tutti i coefficienti del polinomio sono determinati e dipendono da y_0 e y_1 (i valori della funzione e della sua derivata prima nel punto x_0) tramite la relazione ricorsiva* (6.36)*.*

Osservazione 6.1.8. Vale anche il viceversa di questo teorema, ovvero se una funzione $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che valga la (6.34) per ogni $k \in \mathbb{N}$, valga la (6.36) per ogni $j \geq 2$ con $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$ assegnati, allora la funzione y è soluzione del problema di Cauchy (6.35).

Il Teorema 6.1.7 e l'Osservazione 6.1.8 implicano l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (6.35).

Corollario 6.1.9. *Fissati un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e fissati i due valori $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ che determinano le condizioni iniziali, la soluzione del problema di Cauchy* (6.35) *è unica.*

Dimostrazione. Il risultato discende immediatamente dalla linearità dell'equazione (6.31). Infatti, supponendo per assurdo che esistano due soluzioni $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ del problema di Cauchy (6.35), consideriamo la loro differenza $y := \bar{y} - \tilde{y}$. Essa soddisfa l'equazione differenziale, infatti

$$\Pi_2(D)y = y'' + a_1 y' + a_2 y = \bar{y}'' - \tilde{y}'' + a_1 \bar{y}' - a_1 \tilde{y}' + a_2 \bar{y} - a_2 \tilde{y} = \Pi_2(D)\bar{y} - \Pi_2(D)\tilde{y} = 0.$$

Inoltre, siccome

$$y(x_0) = \bar{y}(x_0) - \tilde{y}(x_0) = 0 = \bar{y}'(x_0) - \tilde{y}'(x_0) = y'(x_0),$$

essa risolve il problema di Cauchy (6.35) con condizioni iniziali nulle. Allora, in virtù della (6.36), tutti i coefficienti dello sviluppo di Taylor di ogni ordine sono nulli, pertanto $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Segue che $\bar{y} = \tilde{y}$, ovvero che la soluzione è unica. □

Ora prepariamo il terreno per introdurre le soluzioni dell'equazione (6.31): per il Corollario 6.1.9 appena dimostrato, la soluzione del problema di Cauchy (6.35) associato alla (6.31) è unica e ciò succede perché si fissano i dati di Cauchy per $y(x_0)$ e $y'(x_0)$. Da questo possiamo concludere che servono due valori reali per ottenere l'unicità delle soluzioni, quindi possiamo dire che lo spazio $\mathcal{S}$ delle soluzioni dell'equazione (6.31) *ha dimensione due*: è possibile metterlo in corrispondenza biunivoca con i punti del piano $\mathbb{R}^2$. Così come un punto nel piano è identificato dalle sue coordinate, allo stesso modo la soluzione del problema di Cauchy (6.35) è identificata dai valori y_0 e y_1 fissati. Possiamo quindi scrivere che $\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^2$, intendendo questa corrispondenza tra una soluzione (identificata dai due parametri y_0 e y_1) ed un punto nel piano cartesiano (identificato dalla sua ascissa e dalla sua ordinata).

Ciò che permette ad un punto del piano cartesiano di essere identificato dalle sue coordinate è la scelta di due direzioni di riferimento, quella verso destra, che indichiamo con $\boldsymbol{e}_1$, e quella verso l'alto, che indichiamo con $\boldsymbol{e}_2$. Esse misurano l'unità di spostamento e hanno la caratteristica principale di *non* essere parallele (in realtà sono anche ortogonali: uno spostamento lungo l'asse delle ascisse è "invisibile" all'asse delle ordinate, e viceversa). Possiamo identificare $\boldsymbol{e}_1$ con il punto $(1,0)$ (un'unità a destra) e $\boldsymbol{e}_2$ con il punto $(0,1)$ (un'unità verso l'alto) e in tal modo la scrittura $P = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ permette di esprimere la posizione di un punto $P \in \mathbb{R}^2$ qualunque in termini di $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ e delle coordinate di P, che ora si possono vedere come i coefficienti degli elementi $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Pertanto si dice che $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ formano una *base* di $\mathbb{R}^2$ perché è possibile esprimere ogni punto $P \in \mathbb{R}^2$ tramite una combinazione lineare (si veda la Definizione 4.3.27 con $n = 2$) degli elementi della base.

La caratteristica degli elementi di una base è proprio quella che $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ possegono, ovvero di non essere paralleli: altrimenti non sarebbe possibile raggiungere ogni punto, perché ci si potrebbe muovere solo lungo la direzione comune di $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Questa proprietà si chiama *indipendenza lineare* e viene formalizzata nella prossima definizione.

Definizione 6.1.10 (indipendenza lineare e base)**.** *Due vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ si dicono* linearmente indipendenti *se affinché una loro combinazione lineare sia nulla è necessario che entrambi i coefficienti siano nulli, ovvero se*

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

(Si noti che l'implicazione $\Leftarrow$ è ovvia.)

In caso contrario, ovvero se un vettore è multiplo dell'altro, si dicono linearmente dipendenti*: in questo caso, la combinazione lineare $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ si può annullare anche se uno dei due tra c_1 e c_2 è diverso da zero.*

Una base *di $\mathbb{R}^2$ è un insieme di due vettori linearmente indipendenti*[7].

Nel caso di dipendenza lineare, è facile vedere che un vettore è multiplo dell'altro: supponiamo che il coefficiente ad essere non nullo sia c_1 e ricaviamo $\boldsymbol{v}_1$. Si ha, evidentemente, $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2$, da cui il palese parallelismo dei due vettori.

Fatta l'identificazione $\mathcal{S} \simeq \mathbb{R}^2$ ed introdotto il concetto di base, si otterrà la descrizione completa di $\mathcal{S}$ quando si ottengano due funzioni che assolvono al ruolo di base dello spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$, ovvero quando si identifichino due funzioni $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ linearmente indipendenti. Per essere tali, devono soddisfare la Definizione 6.1.10, ovvero deve essere soddisfatto che

$$\big(c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\big) \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Per procedere serve ora fare due cose:

1. dare un modo per verificare l'indipendenza lineare di due funzioni;
2. trovare effettivamente una base $\{y_1, y_2\}$ dello spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$.

Notiamo innanzitutto che siccome stiamo assumendo che y_1, y_2 risolvono l'equazione (6.31), in virtù del Teorema 6.1.7, deve essere che $y_1, y_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, ovvero $\mathcal{S} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$.

[7] Risulta evidente ed immediata la generalizzazione al caso n-dimensionale: una base dello spazio euclideo ad n dimensioni $\mathbb{R}^n$ è un insieme di n vettori linearmente indipendenti.

Iniziamo con l'introdurre uno strumento che permetta di stabilire l'indipendenza lineare tra due funzioni.

Definizione 6.1.11 ((determinante) wronskiano)**.** *Siano y_1 e y_2 due integrali dell'equazione differenziale del second'ordine omogenea a coefficienti costanti (6.31). Si chiama* (determinante[8]) wronskiano *di y_1 e y_2 la funzione $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$x \mapsto W(x) = W[y_1, y_2](x) := y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \tag{6.37}$$

Proposizione 6.1.12. *Siano y_1 e y_2 due integrali dell'equazione (6.31). Allora il wronskiano $x \mapsto W(x)$ soddisfa la relazione*

$$W(x) = W(x_0)e^{-a_1(x-x_0)}, \tag{6.38}$$

dove a_1 è il coefficiente del termine di ordine uno nella (6.31) e $x_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre, se esiste x_0 tale che $W(x_0) = 0$, allora $W(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. La proprietà che vogliamo dimostrare per la funzione $x \mapsto W(x)$ è identica alla (6.30) e pertanto dimostreremo la proposizione se dimostreremo che il wronskiano risolve l'equazione differenziale $W' + a_1 W = 0$. Si tratta di una semplice verifica, usando la definizione (6.37)

$$\begin{aligned} W' &= y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1'y_2' - y_1''y_2 \overset{(6.33)}{=} y_1(-a_1y_2' - a_2y_2) + y_2(a_1y_1' + a_2y_1) \\ &= -a_1(y_1y_2' - y_1'y_2) = -a_1W, \end{aligned}$$

da cui seguono, per la (6.30), la (6.38) e il fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ o $W(x) = 0$ o $W(x) \neq 0$. □

Il prossimo teorema lega la dipendenza lineare di due soluzioni y_1 e y_2 della (6.31) all'annullarsi del wronskiano W, stabilendo il criterio per l'indipendenza lineare.

Teorema 6.1.13. *Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione (6.31). Esse sono linearmente dipendenti se e solo se $W[y_1, y_2](x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Assumiamo che le due funzioni siano linearmente dipendenti e dimostriamo che $W[y_1, y_2](x) = 0$. Esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e, derivando, si ha

$$c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che sia $c_1 \neq 0$; quindi possiamo ricavare $y_1(x) = -c_2y_2(x)/c_1$ e $y_1'(x) = -c_2y_2'(x)/c_1$ e inserendo queste informazioni nella definizione (6.37) di W si ha

$$W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = -\frac{c_2}{c_1}y_2(x)y_2'(x) + \frac{c_2}{c_1}y_2'(x)y_2(x) = 0.$$

[8] La dicitura "determinante" viene dal fatto che, scrivendo le soluzioni y_1 e y_2 e le loro derivate y_1' e y_2' nella matrice $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$, la funzione W è ottenuta come il suo determinante

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Viceversa, si supponga che $W[y_1, y_2](x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora, per la Proposizione 6.1.12, deve esistere $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, ovvero devono esistere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che[9]

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{6.39}$$

Considerando ora la funzione $x \mapsto y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, notiamo che essa risolve il problema di Cauchy (6.35) con le condizioni iniziali $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ e dunque, con lo stesso ragionamento della dimostrazione del Corollario 6.1.9, possiamo concludere che $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ciò dimostra la dipendenza lineare di y_1 e y_2 e la dimostrazione è conclusa. □

Corollario 6.1.14. *Due integrali y_1 e y_2 dell'equazione differenziale (6.31) sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \textit{se e solo se} \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Dimostrazione. Il risultato è una conseguenza immediata del Teorema 6.1.13 e della Proposizione 6.1.12. □

Infine, possiamo scrivere il seguente teorema.

Teorema 6.1.15. *Ogni soluzione dell'equazione differenziale omogenea (6.31) è dato dalla combinazione lineare di due integrali y_1 e y_2 linearmente indipendenti, ovvero è della forma*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.40}$$

Dimostrazione. Siano y_1, y_2 due integrali linearmente indipendenti dell'equazione (6.31). Allora esse sono una base per lo spazio $\mathcal{S}$ delle soluzioni, il che significa che ogni altra funzione della forma (6.40) è soluzione e dunque appartiene ad $\mathcal{S}$. □

Finora abbiamo dato una regola per determinare l'indipendenza lineare di due soluzioni y_1, y_2 dell'equazione omogenea (6.31), tramite il fatto che il determinante wronskiano di y_1 e y_2 non si deve annullare. Così facendo, abbiamo risposto al punto 1 del programma di determinazione dello spazio $\mathcal{S}$ delle soluzioni. Per rispondere al punto 2 del programma, diamo il seguente teorema, che stabilisce quali sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (6.31) a seconda del discriminante $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ del polinomio caratteristico $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ associato all'equazione. Ricordiamo che, per il Teorema 1.5.43 fondamentale dell'algebra, l'equazione $\Pi_2(\lambda) = 0$ ha due soluzioni che sono complesse coniugate per il Corollario 1.5.44, perché il polinomio è a coefficienti reali.

Teorema 6.1.16. *Sia $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale del second'ordine omogenea a coefficienti costanti (6.31) e sia $\Delta = a_1^2 - 4a_2$ il suo discriminante. Allora*

[9] La condizione che scriviamo viene dall'Algebra Lineare e lega l'annullarsi del determinante di una matrice alla dipendenza lineare dei vettori che formano le sue colonne. Se l'equivalenza delle due condizioni fosse difficile da afferrare in questo momento, sarà sufficiente notare che la (6.39) implica che $W[y_1, y_2](x_0) = 0$.

(a) *se* $\Delta > 0$ *esistono* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *radici reali e distinte e le due funzioni*

$$x \mapsto y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \qquad x \mapsto y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{6.41a}$$

sono due integrali linearmente indipendenti;

(b) *se* $\Delta < 0$ *esistono* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ *radici complesse coniugate e le due funzioni*

$$x \mapsto y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad x \mapsto y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \tag{6.41b}$$

sono due integrali linearmente indipendenti;

(c) *se* $\Delta = 0$ *esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *radice doppia e le funzioni*

$$x \mapsto y_1(x) = e^{\lambda x} \qquad x \mapsto y_2(x) = xe^{\lambda x} \tag{6.41c}$$

sono due integrali linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Per ciascuno dei tre casi, si tratta di dimostrare che $\Pi_2(D)y_i = 0$ per $i = 1, 2$ e che $W[y_1, y_2](x) \neq 0$.

(a) Abbiamo, per $i = 1, 2$, $\Pi_2(\lambda_i) = 0$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \Pi_2(D)y_i &= (y_i)'' + a_1 y_i' + a_2 y_i = a_2 e^{\lambda_i x} + a_1\lambda_i e^{\lambda_i x} + \lambda_i^2 e^{\lambda_i x} \\ &= e^{\lambda_i x}(\lambda_i^2 + a_1\lambda_i + a_2) = e^{\lambda_i x}\Pi_2(\lambda_i) = 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \lambda_2 e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}e^{\lambda_2 x} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0 \end{aligned} \tag{6.43}$$

perché l'esponenziale non si annulla e $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(b) In questo caso, i numeri complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$, sono tali che

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi_2(\alpha \pm i\beta) = (\alpha \pm i\beta)^2 + a_1(\alpha \pm i\beta) + a_2 \\ &= \alpha^2 - \beta^2 \pm 2i\alpha\beta + a_1\alpha \pm i a_1\beta + a_2 = \alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 \pm i\beta(2\alpha + a_1), \end{aligned}$$

da cui deve essere

$$\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2 = 0 \quad \text{e} \quad 2\alpha + a_1 = 0.$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned} \Pi_2(D)e^{\alpha x}\cos(\beta x) &= \big(e^{\alpha x}\cos(\beta x)\big)'' + a_1\big(e^{\alpha x}\cos(\beta x)\big)' + a_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) - \beta^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &\quad + a_1\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - a_1\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) + a_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 + a_1\alpha + a_2)e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ &\quad - \beta(2\alpha + a_1)e^{\alpha x}\sin(\beta x) = 0 \end{aligned}$$

e in maniera analoga $\Pi_2(D)e^{\alpha x}\sin(\beta x) = 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned} W[e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)](x) &= W[\cos(\beta x), \sin(\beta x)](x) \\ &= \beta\cos^2(\beta x) + \beta\sin^2(\beta x) = \beta \neq 0. \end{aligned}$$

(c) La (6.42) dimostra che $\Pi_2(D)y_1 = \Pi_2(D)e^{\lambda x} = 0$. Notiamo che siccome λ è radice doppia valgono $\Pi_2(\lambda) = 0$ e $\Pi_2'(\lambda) = 2\lambda + a_1 = 0$. Allora

$$\begin{aligned}\Pi_2(D)\big(xe^{\lambda x}\big) &= \big(xe^{\lambda x}\big)'' + a_1\big(xe^{\lambda x}\big)' + a_2xe^{\lambda x}\\ &= a_2xe^{\lambda x} + a_1e^{\lambda x}(1+\lambda x) + e^{\lambda x}(\lambda^2x + 2\lambda)\\ &= xe^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) + e^{\lambda x}(2\lambda + a_1)\\ &= xe^{\lambda x}\Pi_2(\lambda) + a_1\Pi_2'(\lambda) = 0\end{aligned}$$

e, in ultimo,

$$W[e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}](x) = e^{\lambda x}\big(xe^{\lambda x}\big)' - xe^{\lambda x}\big(e^{\lambda x}\big)' = e^{2\lambda x} \neq 0.$$

Le funzioni proposte sono dunque soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (6.31) ed il teorema è così dimostrato. □

Abbiamo dunque scoperto che per risolvere un'equazione differenziale del second'ordine lineare a coefficienti costanti omogenea ci si riduce a trovare gli zeri di un polinomio di secondo grado!

Esempi 6.1.17. Vediamo alcuni esempi di ricerca degli integrali di equazioni del tipo (6.31).

1. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0\\ y(0) = 1\\ y(1) = 0\end{cases}$$

in cui notiamo che sono assegnati i valori della funzione y in due punti distinti del dominio. Il polinomio caratteristico è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, che si annulla per $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$, com'è facile calcolare risolvendo l'equazione di secondo grado $\Pi_2(\lambda) = 0$. L'integrale generale è dunque dato da

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e ora ci preoccupiamo di determinare le costanti c_1 e c_2 imponendo le condizioni al contorno. Abbiamo

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2\\ 0 = y(1) = c_1e^{-2} + c_2e^{-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -ec_2\\ 1 = c_2(1-e)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1/(1-e)\\ c_1 = e/(e-1)\end{cases}$$

e dunque la soluzione è $y(x) = \dfrac{e^{1-2x} - e^{-x}}{e-1}$.

2. Risolviamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0\\ y(0) = 1\\ y(1) = 2\end{cases}$$

in cui ancora notiamo che sono assegnati i valori della funzione y in due punti distinti del dominio. Il polinomio caratteristico è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 =$

$(\lambda-2)^2$, che si annulla per $\lambda = 2$ (radice doppia). L'integrale generale è dunque dato da

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e ora ci preoccupiamo di determinare le costanti c_1 e c_2 imponendo le condizioni al contorno. Abbiamo

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 2 = y(1) = c_1 e^2 + c_2 e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2 - e^2 = c_2 e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = (2 - e^2)/e^2 \end{cases}$$

e dunque la soluzione è $y(x) = e^{2x}\left(1 + \dfrac{2-e^2}{e^2}x\right) = e^{2(x-1)}(2x + e^2(1-x))$.

3. *(il pendolo semplice)* Consideriamo un corpo puntiforme di massa m appeso all'estremità libera di una corda di lunghezza ℓ vincolata ad un estremo. Chiamiamo ϑ l'angolo di apertura della corda fuori della posizione di equilibrio, misurato in senso antiorario. La funzione $t \mapsto \vartheta(t)$ descrive l'angolo di apertura in funzione del tempo, quindi la legge oraria del moto del pendolo. Quando la corda forma un angolo ϑ con la verticale, la massa alla sua estremità è soggetta alla forza peso $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$, la cui componente lungo la corda $\boldsymbol{P}_{\text{rad}}$ bilancia la tensione $\boldsymbol{T}$ impedendo movimenti radiali. La componente tangenziale $\boldsymbol{P}_{\tan}$ della forza peso, invece, è responsabile del moto della massa, che descrive un arco di circonferenza, ed è la forza attiva nella seconda legge di Newton $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Abbiamo quindi due equazioni, una di bilancio e una dinamica

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{\text{rad}} = -\boldsymbol{T}, \\ \boldsymbol{P}_{\tan} = \boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{a}, \end{cases}$$

dove il segno meno nella seconda equazione compare perché la forza tende a far chiudere l'angolo. Scrivendo la seconda equazione in funzione dei moduli delle grandezze e usando come variabile l'angolo ϑ riusciamo a scrivere la legge oraria del pendolo. Ricordando che l'accelerazione a in un moto radiale è la derivata seconda dell'angolo rispetto al tempo, e indicando queste derivate con un punto sopra la variabile (usando una notazione tipica della meccanica, anziché il "primo"), abbiamo

$$|\boldsymbol{P}_{\tan}| = m|\boldsymbol{g}| \sin\vartheta = -m|\boldsymbol{a}| = -m|\dot{\boldsymbol{v}}| = -m\ell|\dot{\boldsymbol{\omega}}| = -ml\ddot{\vartheta},$$

dove abbiamo usato le note formule che descrivono l'accelerazione come la derivata della velocità e l'espressione (del modulo) della velocità tangenziale in un moto circolare come la derivata dell'angolo per il raggio. Abbiamo ottenuto la relazione $\ell\ddot{\vartheta} + g\sin\vartheta = 0$ (dove $g = |\boldsymbol{g}|$) che è un'equazione del second'ordine non lineare, a causa della presenza della funzione seno. Tuttavia, nel limite di piccole oscillazioni, ovvero quando $\vartheta \sim 0$, la (3.17a) ci permette di scrivere

$$\ell\ddot{\vartheta} + g\vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell}\vartheta = 0,$$

che ora si presenta nella forma (6.31) con $a_1 = 0$ e $a_2 = g/\ell > 0$. Siamo allora nel caso (b) del Teorema 6.1.16, con $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{g/\ell}$, e otteniamo che le soluzioni dell'equazione del moto sono

$$\vartheta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right), \tag{6.44}$$

dove le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ saranno determinate in funzione delle condizioni al contorno del moto.
L'analisi dimensionale ci permette di confermare la validità del risultato: $[g] = [\mathrm{ms}^{-2}]$ e $[\ell] = [\mathrm{m}]$, quindi $\left[\sqrt{g/\ell}\right] = [\mathrm{s}^{-1}]$, che dimostra che $\sqrt{g/\ell}$ ha le dimensioni di una frequenza: moltiplicandola per un tempo, si ottiene che $t\sqrt{g/\ell}$ è un numero puro, come deve essere per poter essere argomento delle funzioni trigonometriche.
Il moto descritto dalla (6.44) è un moto ideale, perpetuo, di tipo ondulatorio. Se le condizioni al contorno dessero che $c_1 = c_2 = c$ si potrebbe scrivere

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= c\left(\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right) = \sqrt{2}c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)\right)\\ &= \sqrt{2}c\cos\left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \overset{(A.3)}{=} \sqrt{2}c\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

dalla quale emerge la tipica espressione del moto sinusoidale del pendolo.
Ad un risultato analogo si arriva risolvendo, ad esempio, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases}\ddot{\vartheta} + \dfrac{g}{\ell} = 0\\ \vartheta(0) = \pi/6\\ \vartheta'(0) = 0\end{cases}$$

che corrisponde ad aprire il pendolo di $\pi/6$ e rilasciarlo con velocità iniziale nulla. Notiamo che $\sin(\pi/6) = 1/2$ e $\pi/6 \equiv 0,5236$, quindi l'approssimazione $\sin\vartheta(0) \sim \vartheta(0)$ è accettabile. L'equazione è risolta dalla famiglia (6.44) e imponendo le condizioni iniziali troviamo i valori di c_1 e c_2

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{6} = \vartheta(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = c_1\\ 0 = \vartheta'(0) = -c_1\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\sin(0) + c_2\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\cos(0) = c_2\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}c_1 = \pi/6\\ c_2 = 0\end{cases}$$

e dunque la soluzione del problema di Cauchy considerato è

$$\vartheta(t) = \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right).$$

Notiamo che l'ampiezza massima dell'oscillazione è $\pi/6$, determinata dalla condizione iniziale, e che il moto è sinusoidale.

4. *(la molla)* Consideriamo un corpo di massa m che si muove di moto lineare su un piano con attrito (con coefficiente di attrito $c_f > 0$) subendo la forza di richiamo di una molla elastica di costante $k > 0$. Detto x l'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo, la legge di Hooke prescrive che la forza di richiamo sia $F_H = -kx$. La forza di attrito, che si oppone al moto, è $F_f = -c_f v = -c_f\dot{x}$. Allora, l'equazione di Newton si scrive come

$$m\ddot{x} = ma = F = F_H - F_f = -kx - c_f\dot{x} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} + \frac{c_f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

e ancora una volta si ottiene che il moto è descritto da un'equazione differenziale del second'ordine a coefficienti costanti omogenea del tipo (6.31), con

$a_1 = c_f/m$ e $a_2 = k/m$. Notiamo inoltre che possiamo scrivere delle equazioni in dimensione uno, e non vettoriali come nel caso del pendolo, perché tutta la dinamica avviene lungo una sola direzione.

L'equazione di un corpo soggetto ad una forza di richiamo elastica in presenza di attrito presenta tutti i termini del polinomio caratteristico Π_2 associato, quindi il tipo di dinamica che si ottiene è determinato dalla relazione tra i coefficienti c_f e k. Iniziamo subito notando che se si fosse in assenza di attrito, ovvero se $c_f = 0$, allora torniamo a risolvere un'equazione come nel caso del pendolo e le soluzioni sono già scritte nella (6.44) (dove chiaramente comparirà $\sqrt{k/m}$ invece di $\sqrt{g/\ell}$).

Ora possiamo fare una semplificazione siccome si può vedere che, a livello matematico, la massa m non ha alcun ruolo in questa analisi. O decidendo che il corpo ha massa unitaria, o ridefinendo i coefficienti rinormalizzandoli per m ($C \coloneqq c_f/m$ e $K \coloneqq k/m$) è possibile liberarsi del denominatore. L'equazione della quale ci occupiamo è dunque

$$\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0, \tag{6.45}$$

associata a $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + C\lambda + K$ dove ora il significato dei coefficienti è chiaro. Studiamo ora il discriminante di Π_2 e scopriamo come possono essere fatte le soluzioni. Abbiamo $\Delta = C^2 - 4K$ e dunque i tre casi.

(a) $\Delta > 0$, ovvero $C^2 > 4K$. Questo accade se e solo se $C > 2\sqrt{K}$ (perché tutti i coefficienti sono positivi) e corrisponde al caso in cui le costanti fisiche sono tali che $c_f > 2\sqrt{km}$. Si hanno due radici reali distinte λ_1, λ_2 di Π_2 date da

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4K}}{2} = -\frac{C}{2} \pm \frac{\sqrt{C^2 - 4K}}{2},$$

entrambe negative. Allora l'integrale generale della (6.45) è dato da

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\left(-\frac{C}{2} - \frac{\sqrt{C^2-4K}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{C^2-4K}}{2}\right)t} \\ &= c_1 e^{\left(-\frac{c_f}{2m} - \frac{\sqrt{c_f^2-4km}}{2m}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{c_f}{2m} + \frac{\sqrt{c_f^2-4km}}{2m}\right)t} \\ &= e^{-\dfrac{c-ft}{2m}} \left(c_1 e^{-\sqrt{c_f^2-4km}\frac{t}{2m}} + c_2 e^{\sqrt{c_f^2-4km}\frac{t}{2m}} \right). \end{aligned} \tag{6.46a}$$

Abbiamo trovato che quando l'attrito prevale sul richiamo elastico della molla allora il moto è di tipo esponenziale e, a seconda delle condizioni al contorno, si può arrestare in tempo finito.

(b) $\Delta < 0$, ovvero $C^2 < 4K$. Questo accade se e solo se $0 < C < 2\sqrt{K}$ e corrisponde al caso in cui le costanti fisiche sono tali che $0 < c_f < 2\sqrt{km}$. Si hanno due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di Π_2 date da

$$\alpha \pm i\beta = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4K}}{2} = -\frac{C}{2} \pm i\frac{\sqrt{4K - C^2}}{2},$$

con parte reale negativa. Allora l'integrale generale della (6.45) è dato da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-Ct/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4K-C^2}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4K-C^2}}{2}t\right)\right) \qquad (6.46b)\\ &= e^{-\frac{c_f t}{2m}}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{4km-c_f^2}\frac{t}{2m}\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{4km-c_f^2}\frac{t}{2m}\right)\right). \end{aligned}$$

In questo caso abbiamo trovato che quando il richiamo elastico prevale sull'attrito il moto è di tipo oscillatorio. Tuttavia la presenza dell'attrito smorza il moto con l'esponenziale decrescente che quindi risulta modulare le oscillazioni.

(c) $\Delta = 0$, ovvero $C^2 = 4K$. Questo accade se e solo se $C = 2\sqrt{K}$ e corrisponde al caso in cui le costanti fisiche sono tali che $c_f = 2\sqrt{km}$. Si ha una radice reale doppia di Π_2, data da $\lambda = -C/2$. L'integrale generale della (6.45) è dato da

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-Ct/2} = (c_1 + c_2 t)e^{-c_f t/2m}. \qquad (6.46c)$$

Si tratta ancora di un moto modulato da un esponenziale decrescente e corrisponde al caso in cui la massa fa un'oscillazione e poi si ferma.

5. *(il circuito RLC)* Come ultimo esempio, studiamo un altro sistema preso dalla Fisica, il circuito elettrico con un generatore di tensione collegato in serie con una resistenza, un'induttanza e un condensatore. Il generatore fornisce una tensione costante $V(t) = \overline{V}$; la caduta di tensione ai capi della resistenza è data da $V_R(t) = RI(t)$, dove R è la resistenza e $t \mapsto I(t)$ è l'intensità di corrente; la caduta di tensione ai capi dell'induttanza è data da $V_l(t) = LI'(t)$, dove L è l'induttanza; infine, la caduta di potenziale ai capi del condensatore è data da $V_C(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, dove C è la capacità del condensatore. Abbiamo dunque

$$\overline{V} = V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = RI(t) + LI'(t) + V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Derivando rispetto al tempo (e quindi usando il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo per trattare il termine capacitivo), otteniamo

$$RI'(t) + LI''(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

che può essere riscritta nella forma (6.31) dividendo per L

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Si vede immediatamente che l'equazione è passibile della stessa analisi fatta per il moto della molla.

Equazioni lineari complete del second'ordine a coefficienti costanti

In tutti i casi presentati negli Esempi 6.1.17 sono sempre state le condizioni iniziali dei problemi di Cauchy a determinare la funzione incognita, come ci aspettiamo alla luce del Corollario 6.1.9. Se vediamo il problema di Cauchy come la descrizione di un sistema fisico, il fatto che l'equazione associata sia omogenea significa che non ci sono forzanti esterne, ovvero che il sistema evolve solo per mezzo della sua energia interna. In situazioni reali, il moto di un'altalena che oscilla è smorzato e segue le leggi che abbiamo trovato risolvendo il problema della molla con attrito, in particolare il caso (b): si tratta di oscillazioni smorzate. La presenza di qualcuno che spinge l'altalena, oppure la sapiente distensione e contrazione delle gambe per sfruttare il momento angolare, sono da considerarsi come forzanti esterne al sistema: per la spinta è chiaro, mentre per il moto delle gambe l'energia immessa nel sistema è quella che bruciano i muscoli per contrarsi.

Questo semplice esempio ha lo scopo di motivare la necessità di studiare le equazioni differenziali del second'ordine lineari a coefficienti costanti ***complete***, ovvero della forma

$$\Pi_2(D)y = y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{6.47}$$

dove Π_2 è il solito polinomio del second'ordine definito nella (6.32) e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione (almeno) continua. Il problema non è banale, soprattutto se si cercano formule esplicite per la soluzione (come abbiamo fatto finora), anzi talvolta non è possibile scrivere una formula esplicita a meno che la forzante f non abbia una struttura particolare che permetta di assumere che la soluzione abbia una determinata forma. Il nostro scopo ora è quello di considerare una classe particolare di funzioni f che permettano di scrivere soluzioni esplicite dell'equazione (6.47).

Iniziamo la nostra analisi osservando che il membro sinistro mantiene le proprietà di linearità, quindi è interessante capire che cosa succede nel caso si abbiano due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione (6.47). In questa situazione, abbiamo $\Pi_2(D)y_i = f$, per $i = 1, 2$ e possiamo considerare la differenza $y := y_1 - y_2$. Allora

$$\Pi_2(D)y = \Pi_2(D)(y_1 - y_2) = \Pi_2(D)y_1 - \Pi_2(D)y_2 = f - f = 0$$

e abbiamo scoperto che la differenza di due soluzioni della (6.47) risolve l'equazione omogenea (6.31). Ciò significa che se y_h è una soluzione della (6.31) e y_p è una soluzione ***particolare*** della (6.47) ogni altra soluzione y della (6.47) è della forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.48}$$

Allora, la soluzione dell'equazione completa (6.47) sarà determinata dalla (6.48) e il problema si ridurrà alla combinazione dei seguenti passi.

Algoritmo 6.1.18. L'integrale generale (6.48) si ottiene nel seguente modo:

1. soluzione dell'equazione omogenea (6.31) associata: si trova y_h tramite il Teorema 6.1.16;
2. determinazione di una soluzione particolare y_p.

Il primo punto è stato trattato nella sezione precedente; ora ci occuperemo di trattare il secondo punto. Presenteremo due risultati, uno di natura pratica immediata e uno di natura leggermente più teorica. Il primo permette di trattare membri destri del tipo

$$f(x) = P(x)e^{\gamma x}, \quad x \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C}, \tag{6.49}$$

in cui P è un polinomio di grado m

$$P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m, \quad b_i \in \mathbb{R} \text{ per ogni } i \in \{0, \ldots, m\};$$

notiamo che permettere ad γ di essere un numero complesso ha il vantaggio di includere nella trattazione anche le funzioni trigonometriche seno e coseno, che si ottengono quando $\gamma = \rho + i\vartheta$ con $\vartheta \neq 0$. L'idea è ora quella di trovare soluzioni particolari della forma

$$y_p(x) = Q(x)e^{\gamma x},$$

dove la modulazione esponenziale è la stessa del termine forzante e Q è un polinomio di grado opportuno. Si potrebbe pensare che basti prendere un polinomio Q con $\deg Q = \deg P$, ma se per caso γ è una radice del polinomio caratteristico $\Pi_2(\lambda)$ associato all'equazione omogenea, c'è il rischio che una parte di y_p sia già contenuta nelle soluzioni y_1 e y_2, ottenute con il Teorema 6.1.16, che costituiscono y_h. Analogamente a quanto succede nel caso (c) di tale teorema, per trattare l'eventualità di radici multiple è necessario moltiplicare per x una delle funzioni esponenziali. Questo ragionamento porta al seguente teorema, la cui dimostrazione si effettua verificando che la funzione y_p proposta effettivamente soddisfa $\Pi_2(D)y_p = f$.

Teorema 6.1.19. *Sia data l'equazione differenziale del second'ordine a coefficienti costanti completa (6.47) con il membro destro $x \mapsto f(x)$ della forma (6.49). Se γ è una radice di $\Pi_2(\lambda)$ con molteplicità μ, allora una soluzione particolare è data da*

$$y_p(x) = Q(x)e^{\gamma x}, \tag{6.50}$$

dove la funzione $x \mapsto Q(x)$ è un polinomio di grado $\deg Q = \deg P + \mu = m + \mu$

$$Q(x) = a_0 x^{m+\mu} + a_1 x^{m+\mu-1} + \cdots + a_{m+\mu-1}x + a_{m+\mu}, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{6.51}$$

In particolare, se $\Pi_2(\gamma) \neq 0$, ovvero se γ non è una radice del polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (6.31), allora $\deg Q = \deg P$.

Vale inoltre il principio di sovrapposizione*: se la forzante è la sovrapposizione di forzanti del tipo (6.49), ovvero se*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} P_k(x)e^{\gamma_k x},$$

allora una soluzione particolare è data dalla sovrapposizione delle soluzioni particolari associate a ciascuna forzante, ovvero

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{K} y_p^{(k)}(x)$$

con $y_p^{(k)}$ della forma (6.50) per ogni $k = 1, \dots, K$. □

Dimostrazione. Chiedere che la funzione y_p definita nella (6.50) soddisfi l'equazione completa (6.47) significa avere che $\Pi_2(D)y_p(x) = f(x) = P(x)e^{\gamma x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero

$$\begin{aligned} P(x)e^{\gamma x} &= \Pi_2(D)y_p(x) = \big(Q(x)e^{\gamma x}\big)'' + a_1\big(Q(x)e^{\gamma x}\big)' + a_2 Q(x)e^{\gamma x} \\ &= e^{\gamma x}\big(Q''(x) + 2\gamma Q'(x) + \gamma^2 Q(x) + a_1 Q'(x) + a_1\gamma Q(x) + a_2 Q(x)\big) \end{aligned}$$

ovvero deve essere soddisfatta l'uguaglianza

$$\Pi_2(\gamma)Q(x) + \Pi_2'(\gamma)Q'(x) + Q''(x) = P(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \tag{6.52}$$

Ora possiamo distinguere tre casi.

(1) Se γ *non* è radice di Π_2, ovvero se $\Pi_2(\gamma) \neq 0$, il membro sinistro della (6.52) è un polinomio di grado $\deg Q$ e quindi basta che $\deg Q = \deg P$. Ciò corrisponde a scrivere la (6.51) con $\mu = 0$.

(2) Se γ è una radice semplice di Π_2 ($\mu = 1$), ovvero se $\Pi_2(\gamma) = 0$ e $\Pi_2'(\gamma) \neq 0$, la (6.52) si riduce a

$$\Pi_2'(\gamma)Q'(x) + Q''(x) = P(x).$$

Dovendo il membro sinistro essere un polinomio di grado uguale a $\deg P$, serve che $\deg Q' = \deg Q - 1 = \deg P$, ovvero serve cercare Q tale che $\deg Q = \deg P + 1$. Notando che l'operazione di derivazione fa perdere traccia del termine noto di Q, è sufficiente cercare Q della forma $Q(x) = xq(x)$, dove $x \mapsto q(x)$ è un polinomio con $\deg q = \deg P$.

(3) Se γ è una radice doppia di Π_2 ($\mu = 2$), ovvero se $\Pi_2(\gamma) = \Pi_2'(\gamma) = 0$, la (6.52) si riduce a

$$Q''(x) = P(x).$$

Lo stesso ragionamento del caso precedente porta a concludere che è sufficiente cercare il polinomio Q delle forma $Q(x) = x^2 q(x)$, ancora con q un polinomio di grado $\deg q = \deg P$.

In tutti e tre i casi, i coefficienti dei polinomi Q o q vengono determinati tramite il principio di identità dei polinomi, confrontando i termini dello stesso grado.

Il principio di sovrapposizione è una conseguenza immediata della linearità dell'operatore Π_2. □

Definizione 6.1.20 (risonanza)**.** *Sia data un'equazione differenziale del second'ordine completa a coefficienti costanti con una forzante del tipo in* (6.49)*. Se γ è una radice del polinomio caratteristico Π_2 associato all'equazione omogenea, si dice che si è in presenza di un fenomeno di* risonanza*.*

Osserviamo che il fenomeno di risonanza accade nei casi (2) e (3) della dimostrazione del Teorema 6.1.19, ovvero quando, essendo γ una radice del polinomio caratteristico Π_2, è necessario aumentare il grado del polinomio Q per non riottenere, come soluzione particolare, una soluzione, tra quelle determinate dal Teorema 6.1.16, dell'equazione omogenea associata.

La dimostrazione del Teorema 6.1.19 mette già in evidenza come procedere per la determinazione della soluzione particolare $x \mapsto y_p(x)$. Nel caso in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ la casistica è completamente chiara, mentre se assumiamo che sia $\gamma = \rho + i\vartheta \in \mathbb{C}$ con $\vartheta \neq 0$, siamo in grado di trattare forzanti del tipo

$$f(x) = P(x)e^{\rho x}\cos(\vartheta x) \quad \text{oppure} \quad f(x) = P(x)e^{\rho x}\sin(\vartheta x),$$

dove $\deg P = m$. Allora, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = x^\mu e^{\rho x}\big(q_1(x)\cos(\vartheta x) + q_2(x)\sin(\vartheta x)\big), \tag{6.53}$$

dove $\deg q_1 = \deg q_2 = \deg P = m$ e $\mu = 0$ se non si ha risonanza (ovvero quando $\Pi_2(\gamma) = \Pi_2(\rho + i\vartheta) \neq 0$). Altrimenti, con riferimento ai tre casi trattati nella dimostrazione del Teorema 6.1.16, abbiamo

(a) $\Delta > 0$: esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ radici reali e distinte di Π_2. Allora, se $\vartheta = 0$ e o $\rho = \lambda_1$ o $\rho = \lambda_2$ si deve porre $\mu = 1$;

(b) $\Delta < 0$: esistono $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ radici complesse coniugate di Π_2. Allora, se $\rho = \alpha$ e $\vartheta = \beta$ si deve porre $\mu = 1$;

(c) $\Delta = 0$: esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ radice doppia di Π_2. Allora, se $\vartheta = 0$ e $\rho = \lambda$ si deve porre $\mu = 2$.

Esempi 6.1.21. Presentiamo qualche esempio di soluzione di equazioni del second'ordine complete.

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + y' - 6y = 2e^{-x}$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 2$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = -1$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$ che ha radici $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$; siccome $\gamma \neq \lambda_1$ e $\gamma \neq \lambda_2$ non ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = Ae^{-x}$, dove $Q(x) = A$ è il polinomio di grado zero che serve cercare in ottemperanza al Teorema 6.1.19. Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(A - A - 6A) = 2e^{-x} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}$$

e dunque l'integrale generale è

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}.$$

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y''+4y = e^x \cos x$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 1$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = 1+i$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2+4$ che ha radici $\pm 2i$; siccome $\gamma \neq \pm 2i$ non ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = e^x(A \cos x + B \sin x)$, dove $q_1(x) = A$ e $q_2(x) = B$ sono i polinomi di grado zero che serve cercare in ottemperanza al Teorema 6.1.19 e alla (6.53). Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo

$$y_p'' + 4y_p = e^x(2B \cos x - 2A \sin x) + 4e^x(A \cos x + B \sin x) = e^x \cos x$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2B + 4A = 1 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/10 \\ B = 1/10 \end{cases}$$

e dunque l'integrale generale è

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{e^x}{10}(2 \cos x + \sin x).$$

3. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = x^2 + 1$, quindi $\deg P = m = 2$ e $\gamma = 0$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$ che ha radici $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$; siccome $\gamma \neq \lambda_1$ e $\gamma \neq \lambda_2$ non ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = c_1 e^{-x}+c_2 e^{-2x}$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = Q(x)e^0 = Ax^2+Bx+C$, in ottemperanza al Teorema 6.1.19. Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo

$$\begin{aligned} y_p'' + 3y_p' + 2y_p = x^2 + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2Ax^2 + (2B + 6A)x + 2A + 3B + 2C = x^2 + 1 \end{aligned}$$

ovvero se e solo se

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2B + 6A = 0 \\ 2A + 3B + 2C = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/2 \\ C = 9/4 \end{cases}$$

e dunque l'integrale generale è

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}.$$

4. Trovare l'integrale generale dell'equazione $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 1$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = 2$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ che ha $\lambda = 2$ radice doppia. Siccome $\gamma = \lambda$, siamo nel caso (c) in cui si ha risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = Q(x)e^{2x} = x^2 q(x) e^{2x}$ con $\deg q = \deg P = 0$ e dunque $y_p(x) = Ax^2 e^{2x}$, in ottemperanza al punto (3) del Teorema 6.1.19. Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2Ae^{2x} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

e dunque l'integrale generale è

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}.$$

Altri esempi sono disponibili nella Sezione 6.1.6.

Equazioni del second'ordine riconducibili al primo

Ci sono alcune equazioni del second'ordine che sono facilmente risolubili per integrazioni successive, e quindi è come se si stessero risolvendo due equazioni del prim'ordine in cascata. Scriviamo l'equazione in forma normale (6.2) e vediamo che se il membro destro ha alcune caratteristiche particolari l'equazione è facilmente integrabile. Supponiamo che f non dipenda da y: la (6.2) diventa dunque

$$y'' = f(x, y, y') = f(x, y').$$

In questo caso, si pone $z = y'$ e di conseguenza $z' = y''$ e l'equazione diventa

$$z' = f(x, z).$$

Questa ha come soluzione una funzione $x \mapsto z(x)$ (che alcune volte è possibile determinare esplicitamente). Se ora $x \mapsto Z(x)$ è una primitiva di z, si ottiene

$$y(x) = \int z(x)\,\mathrm{d}z = Z(x) + c$$

e notando che z stessa dipende da una costante di integrazione si recupera la dipendenza di y da due costanti di integrazione.

Esempio 6.1.22. Si integri l'equazione $y'' - (y')^2 = 1$. Appurato che non c'è dipendenza da y, possiamo procedere al cambiamento di variabile $z = y'$ e scriviamo l'equazione come

$$z' - z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z' = z^2 + 1$$

che ora è evidentemente a variabili separabili, con $g(x) = 1$ e $h(z) = 1 + z^2$. Allora, usando l'Osservazione 6.1.1 abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \arctan(z(x)) = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad z(x) = \tan(x + c_1)$$

e dunque abbiamo l'equazione $y' = \tan(x + c_1)$, che sappiamo integrare ottenendo $y(x) = -\log(\cos(x + c_1)) + c$.

6.1.4 Altre equazioni notevoli

Oltre alle classi di equazioni già presentate, ve ne sono altre che, nonostante il carattere non-lineare, hanno una struttura particolare che le rende trattabili con un cambiamento di variabile opportuno. Ne presentiamo due, che possono avere interesse per le applicazioni.

Equazioni di Bernoulli

Si tratta di equazioni nella forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \tag{6.54}$$

dove $a, b \in C^0(I)$ per un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$ è una costante reale. Notiamo immediatamente che, siccome le potenze di esponente reale sono definite solo quando la base è positiva, si cercheranno soluzioni positive se $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Vediamo immediatamente che la funzione $y(x) = 0$ per ogni $x \in I$ è soluzione dell'equazione, quindi ogni soluzione non nulla avrà segno costante (e questo si può giustificare rigorosamente alla luce del Teorema 6.2.17 che enunceremo nella prossima sezione). Per trattare l'equazione, distinguiamo due casi.

- Se $m = 1$, l'equazione diventa $y' = (a(x) + b(x))y$, che è quindi a variabili separabili, con $g(x) = a(x) + b(x)$ e $h(y) = y$, e quindi può essere studiata con le tecniche della Sezione 6.1.1.
- Se $m \neq 1$, limitandoci a cercare soluzioni positive, cerchiamo se esiste un cambio di variabile che permetta di semplificare l'equazione. Ci rendiamo conto che nel caso $m = 0$ l'equazione è lineare del prim'ordine, come in (6.21), segno di a a parte, e quindi siamo in grado di risolverla. La domanda è dunque: esiste un modo per ridurre la (6.54) ad un'equazione del prim'ordine lineare? Proponiamo di cercare una funzione $x \mapsto z(x)$ tale che $y(x) = z^\alpha(x)$ in modo che l'equazione diventi lineare nella variabile z. Imponendo che una y di tale forma sia soluzione, scriviamo

  $$y' = \alpha z^{\alpha-1} z' = a(x) z^\alpha + b(x) z^{\alpha m} \quad \text{e dunque} \quad \alpha z' = a(x) z + b(x) z^{\alpha(m-1)+1}.$$

  Per far sì che quest'ultima equazione sia del tipo (6.21), occorre che l'esponente di z nell'ultimo termine sia zero, ovvero che $\alpha = 1/(1-m)$. La sostituzione $z(x) = y^{1-m}(x)$ dà quindi un'equazione lineare in z, che si può risolvere e successivamente si esprime la soluzione $y(x) = z^{1/(1-m)}(x)$.

Notiamo che l'equazione al punto 6 degli Esempi 6.1.2 è di tipo Bernoulli, con $a(\vartheta) = 0$, $b(\vartheta) = 1/\vartheta$ e $m = 2$ (mantenendo i nomi delle variabili come nell'esempio).

Equazioni di Riccati

Si tratta di equazioni nella forma

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{6.55}$$

dove $a, b, c \in C^0(I)$ per un certo intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. La strategia per risolvere questa equazione è introdurre una variabile ausiliaria e studiare l'equazione risolta da quella variabile. Il ragionamento è il seguente: supponiamo che $x \mapsto w(x)$ sia una soluzione dell'equazione e che $x \mapsto y(x)$ sia un'altra soluzione distinta da w. Allora necessariamente $y - w \neq 0$ e possiamo scrivere questa differenza come una funzione che non si annulla, ovvero della forma $x \mapsto 1/v(x)$, per una certa funzione v che dobbiamo determinare. Una volta determinata v, si ricava la forma delle soluzioni come

$$y(x) = w(x) + \frac{1}{v(x)},$$

dove w è la soluzione nota e v sarà stata determinata. Si determina v imponendo che y, come stiamo assumendo, risolva l'equazione. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
y' = w' - \frac{v'}{v^2} &= a(x)\left(w + \frac{1}{v}\right)^2 + b(x)\left(w + \frac{1}{v}\right) + c(x) \\
&= a(x)w^2 + 2a(x)\frac{w}{v} + \frac{a(x)}{v^2} + b(x)w + \frac{b(x)}{v} + c(x) \\
&\Downarrow \\
-\frac{v'}{v^2} &= + 2a(x)\frac{w}{v} + \frac{a(x)}{v^2} + \frac{b(x)}{v} \\
&\Downarrow \\
v' &= -\left(2a(x)w(x) + b(x)\right)v - a(x),
\end{aligned}$$

che ora è nella forma (6.21) e si sa risolvere. Si faccia attenzione che si sta assumendo che la funzione w sia nota, quindi questo procedimento si poggia sull'essere in grado di determinare una soluzione in modo facile e poi usare questa per determinare la soluzione generale.

6.1.5 Sulla ricerca di integrali particolari dell'equazione forzata: il metodo di variazione delle costanti

Nelle sezioni precedenti abbiamo dato alcune regole per la ricerca di soluzioni particolari delle equazioni lineari complete del prim'ordine e del second'ordine a coefficienti costanti. Ripercorriamo ciò che è stato fatto, partendo dal caso meno esaustivo.

- Per le equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti costanti, abbiamo scritto l'equazione completa $\Pi_2(D) = f(x)$ nella (6.47); abbiamo capito che una soluzione si trova sommando l'integrale generale y_h dell'equazione omogenea e un integrale particolare y_p dell'equazione completa (6.48);

ci siamo messi alla ricerca dell'integrale particolare per alcune forzanti f di tipo speciale (6.49) e abbiamo dimostrato il Teorema 6.1.19 che, tramite la (6.50) (dettagliata poi nella (6.53) in caso di risonanza), ci ha fornito un modo per trovare una soluzione particolare. La linearità dell'equazione e la costanza dei coefficienti hanno avuto un ruolo fondamentale nella determinazione di questi risultati.

- Per le equazioni differenziali lineari del prim'ordine, siamo stati in grado di trattare una situazione più generale, ovvero quella di equazioni, sia omogenee che complete, a coefficienti non costanti. La strategia in quel caso è stata quella di accorgersi che moltiplicando l'equazione per l'esponenziale di una primitiva del coefficiente dell'equazione omogenea, la funzione $x \mapsto A(x)$ definita nella (6.24), portava ad una semplificazione e alla possibilità di trovare la soluzione per integrazione. La funzione da integrare è stata scritta esplicitamente nel membro destro della (6.26) ed ha permesso di giungere alla formula risolutiva (6.27).

È l'analisi della seconda strategia di soluzione che permette di giungere ad un metodo generale che va sotto il nome di *metodo di variazione delle costanti*. Analizziamo la forma della formula risolutiva (6.27), leggendone le prima riga e svolgendo il prodotto: abbiamo

$$y(x) = \underbrace{e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x}_{y_p(x)} + \underbrace{ce^{-A(x)}}_{y_h(x)}, \tag{6.56}$$

dove riconosciamo la forma (6.25) dell'integrale generale dell'equazione omogenea $y'+a(x)y = 0$ associata all'equazione completa che vogliamo risolvere. La decomposizione additiva (6.56) della (6.27) mette allora in evidenza che l'integrale generale dell'equazione completa (con il secondo membro dato dalla funzione $x \mapsto b(x)$) si ottiene come somma dell'integrale dell'equazione omogenea y_h e di un integrale particolare y_p che dipende – così come succede nel caso delle equazioni del second'ordine – dalla forzante specifica.

Ciò che bisogna evincere dalla (6.56) è che l'integrale particolare y_p è ottenuto tramite quella formula i cui ingredienti sono la soluzione dell'equazione omogenea associata ed il termine forzante, i quali possiamo separare in due contributi: l'esponenziale $e^{-A(x)}$, che è la soluzione dell'equazione omogenea e il termine che lo moltiplica, ovvero la funzione $x \mapsto B(x)$ definita nella (6.26). Scrivendo $y_p(x) = B(x)e^{-A(x)}$ notiamo che questa espressione è strutturalmente analoga a quella dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y_h(x) = ce^{-A(x)}$, a meno del fatto che la *costante* davanti all'esponenziale costante non è!

L'idea del metodo di variazione delle costanti è precisamente la seguente: nota una soluzione $x \mapsto y_h(x)$ dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare facendo variare la costante davanti ad y_h, ovvero si cerca una soluzione della forma

$$y_p(x) = c(x)y_h(x) = c(x)e^{-A(x)} \tag{6.57}$$

e si trova la funzione $x \mapsto c(x)$ imponendo, al solito, che y_p sia una soluzione. Vediamo che cosa succede per il caso dell'equazione lineare del prim'ordine completa:

$$\begin{aligned} y_p'(x) + a(x)y_p(x) &= c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} \\ &= c'(x)e^{-A(x)} = b(x), \end{aligned} \tag{6.58}$$

da cui si ottiene che

$$c'(x) = b(x)e^{A(x)} \tag{6.59}$$

e per integrazione di trova lo stesso termine che nella (6.26) abbiamo chiamato $B(x)$. Non utilizzando la forma esplicita di $y_h(x) = e^{-A(x)}$, ma lasciando indicata y_h, la (6.58) si scrive come

$$\begin{aligned} y_p'(x) + a(x)y_p(x) &= c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + a(x)c(x)y_h(x) \\ &= c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{[y_h'(x) + a(x)y_h(x)]}_{=\,0,\ \text{dall'eq. omog.}} = b(x) \end{aligned} \tag{6.60}$$

e dunque la (6.59) diventa

$$c'(x) = \frac{b(x)}{y_h(x)} \qquad \Rightarrow \qquad c(x) = \int \frac{b(x)}{y_h(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{6.61}$$

Ripercorrere la costruzione della soluzione particolare per l'equazione del prim'ordine è illuminante perché dà la strategia per applicare il metodo di variazione delle costanti per le equazioni di ordine superiore. In questo modo, saremo in grado di integrare equazioni del tipo (6.47) con forzanti $x \mapsto f(x)$ non necessariamente nella forma particolare data dalla (6.49). Per equazioni del second'ordine, abbiamo visto che lo spazio delle soluzioni $\mathcal{S}$ dell'equazione omogenea è generato da due soluzioni $x \mapsto y_1(x)$ e $x \mapsto y_2(x)$ linearmente indipendenti. L'equivalente della (6.57) è cercare soluzioni particolari della forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \tag{6.62}$$

dove le y_i sono quelle date dal Teorema 6.1.16 (ma potrebbero essere due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea a coefficienti non costanti). Come abbiamo fatto con l'equazione del prim'ordine, dobbiamo imporre che la soluzione particolare y_p scritta nella (6.62) risolva l'equazione. Notiamo che ci sono due funzioni incognite ora, $x \mapsto c_1(x)$ e $x \mapsto c_2(x)$ e dunque dobbiamo trovare due condizioni che permettano di determinarle. Una di questa è il fatto che y_p risolva l'equazione completa, l'altra è ottenuta imitando il fatto che se le $x \mapsto c_i(x)$ sono costanti la loro derivata si annulla. La richiesta che facciamo è dunque

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{6.63}$$

In questo modo, otteniamo una semplificazione dei calcoli, infatti abbiamo

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x) \\ &\overset{(6.63)}{=} c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

e dunque abbiamo

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

da cui, inserendo nell'equazione, otteniamo

$$\begin{aligned} \Pi_2(D)y_p &= y_p'' + a_1y_p' + a_2y_p \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_2(x)y_2''(x) \\ &\quad + a_1\big(c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)\big) + a_2\big(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\big) \\ &= c_1(x)\underbrace{\Pi_2(D)y_1}_{=0} + c_2(x)\underbrace{\Pi_2(D)y_2}_{0} + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione, assieme alla (6.63), permette di scrivere un sistema di due equazioni nelle due incognite c_i'

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{6.64}$$

che possiamo risolvere con il metodo di Cramer, notando che il determinante della matrice dei "coefficienti" è $W[y_1, y_2](x)$. In questo modo, otteniamo

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \quad \text{e} \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} \tag{6.65}$$

e ora basta integrare. Notiamo che è necessario che y_1 e y_2 siano linearmente indipendenti, in modo tale che il wronskiano a denominatore non si annulli.

Esempio 6.1.23. Presentiamo un esempio di applicazione del metodo di variazione delle costanti per risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{\cosh x},$$

che è del second'ordine lineare a coefficienti costanti completa, ma con la forzante

$$x \mapsto \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$$

che non rientra nella classe (6.49) di funzioni speciali che sappiamo trattare. Come prima cosa troviamo le soluzioni dell'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 3 = 0$, il cui polinomio caratteristico è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, che ha radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Allora, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.66}$$

L'applicazione del metodo di variazione delle costanti ci porta a dover risolvere le integrazioni (6.65), per scrivere le quali abbiamo bisogno del wronskiano $W[y_1, y_2](x)$, che in questo caso è dato dalla (6.43)

$$W[y_1, y_2](x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} = 2e^{4x}.$$

Allora la (6.65) diventa

$$c_1'(x) = -\frac{e^{3x}}{2e^{4x}\cosh x} = -\frac{1}{e^{2x} + 1}, \quad c_2'(x) = \frac{e^x}{2e^{4x}\cosh x} = \frac{e^{-2x}}{e^{2x} + 1}$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int c_1'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = -\int \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \mathrm{d}x + \int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2}\big(\log\left(e^{2x} + 1\right) - 2x\big) \\ c_2(x) &= \int c_2'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{-2x}\,\mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}\,\mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} - \int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\big(\log\left(e^{2x} + 1\right) - 2x - e^{-2x}\big), \end{aligned}$$

dove l'integrale $\int(e^{2x}-e^{-2x})/(e^{2x}+1)$ è stato calcolato sfruttando la sostituzione $t = e^{2x}$ e dove non teniamo conto delle costanti di integrazione negli integrali indefiniti perché rientrerebbero nelle costanti di integrazione c_1, c_2 della (6.66). La soluzione particolare (6.62) è dunque

$$y_p(x) = \frac{e^x}{2}\big(\log\left(e^{2x}+1\right)-2x\big)+\frac{e^{3x}}{2}\big(\log\left(e^{2x}+1\right)-2x-e^{-2x}\big).$$

6.1.6 Alcuni esercizi svolti e alcuni da svolgere

Presentiamo lo svolgimento di alcuni esercizi.

1. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

in cui l'equazione è a variabili separabili con $g(x) = x$ e $h(y) = 1+y^2$. Notato che l'equazione non ammette soluzioni costanti, usiamo l'Osservazione 6.1.1 per risolvere l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \arctan(y(x)) = \frac{x^2}{2}+c$$

e osserviamo che il membro destro deve appartenere all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, perché tale è l'immagine della funzione arcotangente. Una volta trovato il valore della costante c, questa condizione determina il dominio I della soluzione. Sostituendo la condizione di Cauchy otteniamo $\pi/4 = \arctan 1 = \arctan(y(0)) = c$, da cui deve essere

$$\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

che determina la condizione $x \in \big(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\big) = I$. Allora la soluzione è

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in I$$

ed è rappresentata in Figura 6.7.

2. Si trovi la famiglia delle soluzioni dell'equazione $y' = \dfrac{x^2 y}{1+x^3}$. Riconosciamo subito che si tratta di un'equazione a variabili separabili dove $g(x) = x^2/(1+x^3)$ e $h(y) = y$, che porta ad avere $y = 0$ come soluzione costante. Altrimenti, osservando che la soluzione deve avere un segno, possiamo risolvere l'equazione applicando l'Osservazione 6.1.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^3} \quad \Rightarrow \quad \log|y(x)| = \frac{1}{3}\log|1+x^3|+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

e dunque la soluzione è, togliendo il valore assoluto sulla funzione y con il simbolo $\pm$ a membro destro,

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm k\sqrt[3]{|1+x^3|}, \quad k > 0, \\ &= k\sqrt[3]{|1+x^3|}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

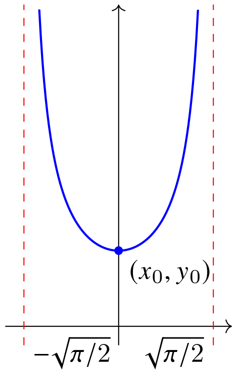


Figura 6.7: La soluzione $y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ definita in $I = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

Includendo $k = 0$ si recupera la funzione nulla, mentre permettendo a k di variare in tutto l'asse reale si può fare a meno del simbolo $\pm$. La funzione appena scritta racchiude in sé quattro differenti rami, a seconda del segno di k e a seconda che il valore sotto la radice venga tolto col segno + o col segno −. Siccome il discrimine è il punto $x = -1$, abbiamo che l'intervallo di definizione delle soluzioni è $I = (-\infty, -1)$ oppure $I = (-1, +\infty)$, se $k \neq 0$, mentre si ha $I = \mathbb{R}$ se $k = 0$, ovvero quando si seleziona la funzione nulla. Alcune soluzioni sono disegnate nel grafico in Figura 6.8.
Osserviamo che i quattro rami definiti sulla semiretta al limite toccano $(-1, 0)$ al limite per $x \to -1^{\pm}$, che però non appartiene agli intervalli I quando essi ***non*** sono il dominio della funzione nulla. Il punto $(-1, 0)$ appartiene solo all'integrale $y = 0$, ovvero alla soluzione costante. Non bisogna meravigliarsi di ciò: se il punto $(-1, 0)$ appartenesse anche ad altre curve integrali, allora ci sarebbero problemi di ambiguità nella definizione della derivata $y'(-1)$: essa dovrebbe essere contemporaneamente uguale a zero (per via della soluzione nulla) e non esistere (perché tende a ∞) se il punto appartenesse a qualche altra curva integrale diversa dal grafico della funzione nulla.

3. Si trovi la famiglia delle soluzioni dell'equazione $y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right)$. Riconosciamo subito che si tratta di un'equazione a variabili separabili dove $g(x) = x$ e $h(y) = 1 + 1/y = (y+1)/y$, che porta ad avere $y \neq 0$ come condizione sulla soluzione e $y = -1$ come soluzione costante. Altrimenti, possiamo risolvere l'equazione applicando l'Osservazione 6.1.1

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{y+1} = x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y+1} = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c,$$

con il primo membro che si integra trattando la funzione razionale fratta e dà $y - \log|1+y|$. Siccome non è possibile esplicitare la funzione y in funzione di x, dobbiamo lasciare la soluzione scritta in forma implicita

$$y(x) - \log|1 + y(x)| = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

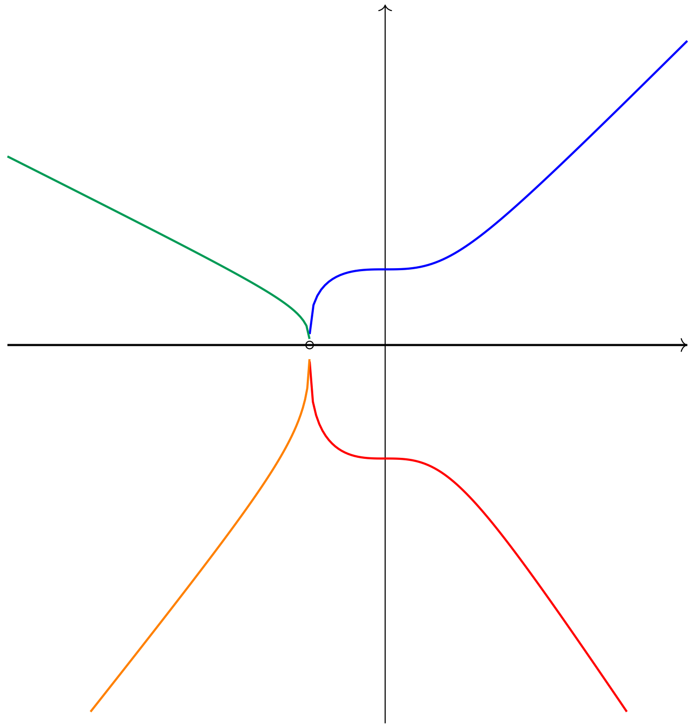


Figura 6.8: Alcune soluzioni della famiglia $y(x) = k\sqrt[3]{|1+x^3|}$, per i valori di $k = 0$ (nero) con $I = \mathbb{R}$, $k = 1$ (blu), $k = -3/2$ (rosso) definite in $I = (-1, +\infty)$, $k = -1/2$ (verde) e $k = -5/4$ (arancione) definite in $I = (-\infty, -1)$.

4. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nel quale riconosciamo che l'equazione è del prim'ordine lineare con $a(x) = -2x$ e $b(x) = 1$. Calcoliamo le primitive A e B delle (6.24) e (6.26) con $x_0 = 0$

$$A(x) = \int_0^x a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x -2s\,\mathrm{d}s = -x^2,$$
$$B(x) = \int_0^x b(s)e^{A(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s,$$

che non possiamo integrare ulteriormente con tecniche elementari. La soluzione ha la forma (6.28) e quindi abbiamo

$$y(x) = e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + 1\right) = e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-s^2}\,\mathrm{d}s,$$

che è definita su $I = \mathbb{R}$. Nota la (7.26), ragionando sulla simmetria della funzione integrale, possiamo stimare che

$$y(x) \in \left[e^{x^2}, \left(1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)e^{x^2}\right) \subseteq [1, +\infty).$$

5. Si trovi la famiglia delle soluzioni dell'equazione $(1+x^2)y' + 2xy = 1$. Riconosciamo subito che si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare dove individuiamo le funzioni $x \mapsto a(x)$ e $x \mapsto b(x)$ dopo aver diviso per il coefficiente di y': ciò è possibile perché $1 + x^2 \geq 1$ ed in particolare non si annulla mai. Allora troviamo $a(x) = 2x/(1+x^2)$ e $b(x) = 1/(1+x^2)$, che porta ad avere

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \log(1+x^2);$$
$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{\log(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x$$

Allora la famiglia delle soluzioni è data, secondo la (6.27), da

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x)+c) = \frac{x+c}{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

definita su $I = \mathbb{R}$; alcune soluzioni sono rappresentate in Figura 6.9.

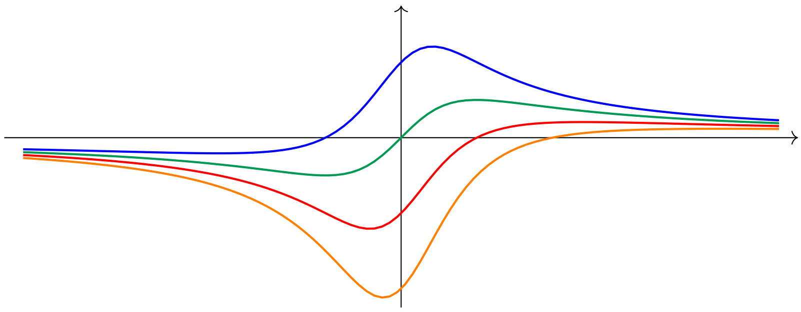


Figura 6.9: Alcune soluzioni della famiglia $y(x) = \dfrac{x+c}{1+x^2}$, per i valori di $c = 0$ (verde), $c = 1$ (blu), $c = -1$ (rosso) e $c = -2$ (arancione).

6. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x-2y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

in cui l'equazione differenziale è a variabili separabili con $g(x) = e^x$ e $h(y) = e^{-2y}$. Siccome $h(y) \neq 0$ per ogni y, non ci sono soluzioni costanti. Allora possiamo dividere per $h(y)$ e usare l'Osservazione 6.1.1 per trovare l'integrale generale

$$e^{2y}\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{2y(x)}}{2} = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo il valore di c imponendo la condizione iniziale

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^{2y(0)}}{2} = e^0 + c = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{e^2}{2} - 1,$$

da cui la soluzione soddisfa

$$e^{2y(x)} = 2e^x + e^2 - 2 \quad \text{e passando ai logaritmi} \quad y(x) = \log\sqrt{2e^x + e^2 - 2},$$

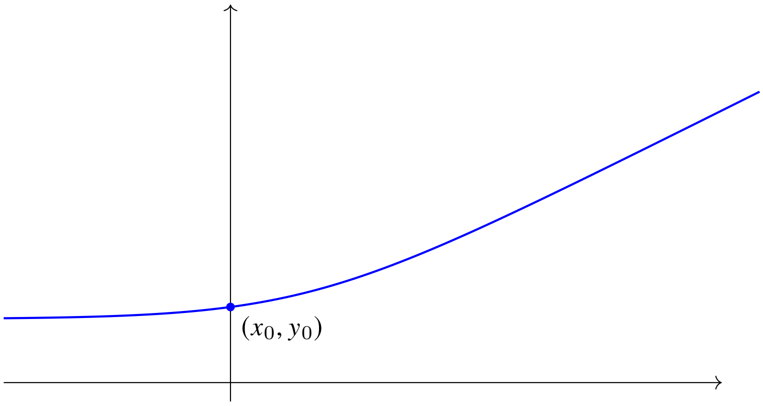


Figura 6.10: La soluzione $y(x) = \log \sqrt{2e^x + e^2 - 2}$.

che è facile verificare essere definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico è rappresentato in Figura 6.10

7. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $xy' - y + \log x = 0$. Si tratta di un'equazione del prim'ordine lineare completa, con il vincolo $x > 0$ (altrimenti il logaritmo non è definito) che permette di dividere per x e scriverla nella forma $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\log x}{x}$, per cui abbiamo $a(x) = -1/x$ e $b(x) = -(\log x)/x$. Allora, le (6.24) e (6.26) dànno

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\log x;$$
$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\log x}{x}e^{-\log x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log x + 1}{x},$$

dove abbiamo integrato per parti, e perciò l'integrale generale è, secondo la (6.27)

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c) = x\left(\frac{\log x + 1}{x} + c\right) = \log x + 1 + cx, \qquad c \in \mathbb{R},$$

e alcune curve sono rappresentate in Figura 6.11.

8. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y' - \dfrac{y}{x + x^2} = x - 2$. Anche questa equazione è del prim'ordine lineare completa con $a(x) = -1/(x+x^2)$ e $b(x) = x - 2$, con il vincolo che $x \neq -1, 0$. le (6.24) e (6.26) dànno

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}x}{x(x+1)} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \log\left|\frac{x+1}{x}\right|;$$
$$B(x) = \int b(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x = \int (x-2)e^{\log|(x+1)/x|}\,\mathrm{d}x.$$

Scegliendo $I = (0, +\infty)$, in cui la frazione dentro il valore assoluto è positiva (succede anche per $x \in (-\infty, -1)$), abbiamo

$$A(x) = \log \frac{x+1}{x} \quad \text{e} \quad B(x) = \int \frac{x^2 - x - 2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x - 2\log x,$$

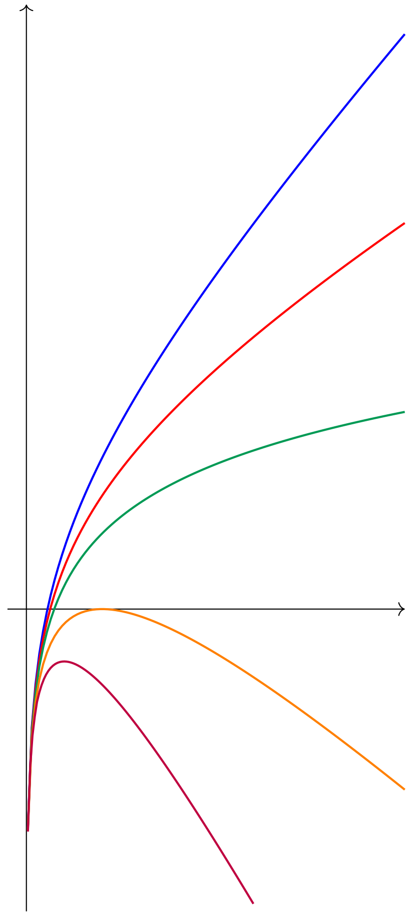


Figura 6.11: Alcune soluzioni della famiglia $y(x) = \log x + 1 + cx$, per i valori di $c = 0$ (verde), $c = 1$ (blu), $c = 1/2$ (rosso), $c = -1$ (arancione) e $c = -2$ (viola).

e dunque la soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)}(B(x) + c) = \frac{x}{x+1}\left(\frac{x^2}{2} - x - 2\log x + c\right).$$

9. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 - y - \log y)e^{x^2} \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

in cui l'equazione differenziale è a variabili separabili con $g(x) = e^{x^2}$ e $h(y) = 1 - y - \log y$. La funzione h si annulla per $y = 1$, che quindi è la soluzione costante. Considerato il dato di Cauchy e il solito fatto, verificato in questo caso, che due curve integrali non si possono incrociare, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

10. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 3$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = 2$.

Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2-3\lambda-4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$ che ha radici $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$; siccome $\gamma \neq \lambda_1$ e $\gamma \neq \lambda_2$ non ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{4x}$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = Ae^{2x}$, in ottemperanza al Teorema 6.1.19. Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = 3e^2x \quad \Leftrightarrow \quad -6Ae^{2x} = 3e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Dunque l'integrale generale è

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

11. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y''-2y'+y = 5$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 5$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = 0$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ radice doppia; siccome $\gamma \neq \lambda$ non ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = (c_1 + c_2x)e^x$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = Ae^0 = A$, in ottemperanza al Teorema 6.1.19. Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo
$$y_p'' - 2y_p' + y_p = 5 \quad \Leftrightarrow \quad A = 5.$$
Dunque l'integrale generale è
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2x)e^x + 5.$$

12. Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y''+y = 3\cos x$. Il secondo membro è del tipo (6.49) con $P(x) = 3$, quindi $\deg P = m = 0$ e $\gamma = i$. Applichiamo l'Algoritmo 6.1.18. Abbiamo $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 =$ che ha come radici $\alpha \pm i\beta = \pm i$; siccome $\gamma = \beta$ ci sarà risonanza. Troviamo immediatamente $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ e cerchiamo y_p della forma $y_p(x) = x(A\cos x + B\sin x)$, in ottemperanza al Teorema 6.1.19 ed alla (6.53). Imponendo che y_p risolva l'equazione, otteniamo
$$y_p'' + y_p = 3\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2B\cos x - 2A\sin x = 3\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = 3/2 \end{cases}$$
e dunque l'integrale generale è
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + \left(c_2 + \frac{3}{2}x\right)\sin x.$$

13. Stabilire se le seguenti equazioni differenziali del second'ordine hanno soluzioni limitate su $[0, +\infty)$. Premettiamo alle equazioni quello che occorre fare per risolvere l'esercizio: si troveranno integrali generali $y(x) = y(x; c_1, c_2)$ in funzioni delle costanti di integrazione $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per rispondere alla richiesta bisogna essere in grado di determinare se è possibile scegliere dei valori di c_1 e c_2 che generano soluzioni limitate per $x \in [0, +\infty)$.
    (a) $y'' + y' - 2y = 0$. Il polinomio caratteristico associato è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$. L'integrale generale è allora dato da
    $$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

e vediamo che nessuna scelta di $c_2 \in \mathbb{R}$ inficia la limitatezza per $x \to +\infty$ dell'esponenziale decrescente, mentre è necessario che $c_1 = 0$ in modo tale che, quando $x \to +\infty$, si abbia $y(x) \to 0$ (che è l'unico modo per avere soluzioni limitate).

(b) $y'' + 2y' + y = 0$. Il polinomio caratteristico associato è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. L'integrale generale è allora dato da

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

e vediamo che, siccome l'esponenziale decrescente determina il comportamento all'infinito contro il polinomio $c_1 + c_2 x$, ogni scelta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ è accettabile.

(c) $y'' + 4y' + 13y = 0$. Il polinomio caratteristico associato è $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$ ed ha radici $\alpha \pm i\beta = -2 \pm 3i$. L'integrale generale è allora dato da

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

e vediamo che, siccome l'esponenziale decrescente determina il comportamento all'infinito contro le funzioni trigonometriche, ogni scelta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ è accettabile.

14. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 12y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

Calcoliamo gli zeri del polinomio caratteristico $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda + 4)(\lambda - 3)$ e otteniamo $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 3$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}.$$

Determiniamo c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali, ovvero

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 1 = y'(0) = -4c_1 + 3c_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -1/7 c_2 = 1/7 \end{cases}$$

e dunque si ha

$$y(x) = -\frac{1}{7}\left(e^{-4x} - e^{3x}\right).$$

15. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} .$$

Calcoliamo gli zeri del polinomio caratteristico $\Pi_2(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(2\lambda + 3)$ e otteniamo $\lambda_1 = -3/2$ e $\lambda_2 = 0$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 e^{-3x/2} + c_2.$$

Determiniamo c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali, ovvero

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 3 = y'(0) = -\frac{3}{2}c_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

e dunque si ha

$$y(x) = -2e^{-3x/2} + 3.$$

16. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}.$$

Calcoliamo gli zeri del polinomio caratteristico $\Pi_2(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$ e otteniamo $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Determiniamo c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali, ovvero

$$\begin{cases} 2 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 3 = y'(0) = -3c_1 - 2c_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = -7c_2 = 9 \end{cases}$$

e dunque si ha

$$y(x) = -7e^{-3x} + 9e^{-2x}.$$

Esercizi 6.1.24. Risolvere i seguenti esercizi.

1. Trovare l'integrale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$
2. Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni
   (a) $y' = (y^2 + y - 6)\log x$.
   (b) $y' = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$.
   (c) $y' = 2x(y - 1)$.
   (d) $y' = \dfrac{x + 1}{y}$.
   (e) $y' = 4y(1 - y)$.
   (f) $xy' - 2y = x^3$.
   (g) $y' = \sin x(y + \cos x)$.
   (h) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.
   (i) $y' = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)y + x + x^2$.
   (j) $y' + \dfrac{y}{x(\log x + 1)} = 3$.
   (k) $y' + \dfrac{xy}{1 + x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = 0$.

(l) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$.

(m) $y'' + 3y' - 10y = 0$.

(n) $y'' + y' + y = 0$.

(o) $y'' + y' = 0$.

(p) $y'' + y = 0$.

(q) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

(r) $xy'' = y'$.

(s) $xy'' + y' = 8x$.

3. Trovare l'integrale del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$.

4. Trovare l'integrale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 - 1}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases}$.

5. Trovare l'integrale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3x^2 y - 3x^4 + 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

6.2 Buona positura del problema di Cauchy

In questa sezione ci occupiamo di dimostrare la buona positura secondo Hadamard (Definizione 6.0.6) del problema di Cauchy (6.7) per un'equazione differenziale ordinaria del prim'ordine. Per i nostri scopi, sarà sufficiente affrontare questo caso, siccome abbiamo visto nella Proposizione 6.0.2 che un'equazione di ordine n è equivalente ad un sistema di n equazioni del prim'ordine: si applica la teoria che stiamo per presentare all'ultima equazione e poi si procede a ritroso fino alla prima.

Osservando la struttura del problema di Cauchy (6.7), ci si rende conto che per dimostrare il programma di Hadamard è necessario dare condizioni sul membro destro f che permettano di dimostrare l'esistenza della soluzione, la sua unicità e la dipendenza continua dai dati iniziali. Divideremo l'impresa in due parti: con il Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf dimostreremo l'esistenza e unicità (punti 1 e 2 della Definizione 6.0.6), mentre con il Teorema 6.2.20 di dipendenza continua dimostreremo il punto 3 della Definizione 6.0.6. Ammoniamo che entrambi i teoremi sono alquanto tecnici e richiedono alcuni risultati preliminari su funzioni lipschitziane (si veda la Definizione 3.3.5), su una classe di funzioni chiamate *contrazioni* e sul Lemma 5.7.10 di Grönwall, che servirà per ottenere la dipendenza continua.

6.2.1 Preliminari

In questa sezione raccogliamo i risultati preliminari per una completa comprensione dei Teoremi 6.2.17 e 6.2.20. Per apprezzare al meglio i concetti che introdurremo è necessario allargare i nostri orizzonti e considerare una struttura matematica molto generale che va sotto il nome di *spazio metrico*. Se lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è la naturale estensione della retta reale $\mathbb{R}$ a n dimensioni (si pensi al piano $\mathbb{R}^2$ e allo spazio $\mathbb{R}^3$, cui tutti sono familiari), uno spazio metrico è la naturale estensione di

$\mathbb{R}^n$ al caso di infinite dimensioni. Si tratterà di un insieme non vuoto X (i cui elementi possono essere funzioni e che si possono chiamare *punti*, in generale) su cui è presente una struttura metrica, ovvero una funzione che permette di misurare la distanza tra due punti, ovvero tra due elementi dello spazio X. Sulla retta reale, questo lavoro è esplicitato tramite la funzione valore assoluto: dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ la loro distanza è ottenuta calcolando $d_{\mathbb{R}}(x_1, x_2) := |x_1 - x_2|$. In generale, però, ci sono funzioni distanza che non sono generate dal(l'analogo del) valore assoluto.

Definizione 6.2.1 (spazio metrico). *Si chiama* spazio metrico *una coppia* (X, d) *formata da un insieme non vuoto* X *e da una funzione* $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$, *chiamata* distanza *o* metrica, *che gode delle seguenti proprietà:*

(i) *per ogni* $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ *e vale* 0 *se e solo se* $x = y$;

(ii) *(simmetria) per ogni* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) *(disuguaglianza triangolare) per ogni* $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Estendiamo alcuni concetti noti a questo contesto più generale.

Definizione 6.2.2 (intorno sferico in uno spazio metrico). *Siano* (X, d) *uno spazio metrico,* $x_0 \in X$ *e* $r > 0$. *Si chiama* intorno sferico di centro x_0 e raggio r *nella metrica* d *il sottoinsieme di* X *definito come*

$$B_r(x) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}. \tag{6.67}$$

Definizione 6.2.3. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. Una* successione *di* X *è un'applicazione di* $\mathbb{N}$ *in* X. *Se* $\{x_n\} \subseteq X$ *è una successione di punti di* X, *il punto* $x_0 \in X$ *si dice* limite *della successione* $\{x_n\}$ *se*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0. \tag{6.68}$$

Notiamo che il limite di una successione di punti in uno spazio metrico è definito, attraverso l'uso della funzione distanza, come il limite della successione numerica $d(x_n, x_0)$: se questa è infinitesima, si dice che $x_n \to x_0$ per $n \to \infty$.

Teorema 6.2.4 (di unicità del limite). *Valgono i seguenti fatti:*

1. *se una successione* $\{x_n\}$ *di punti di* X *ammette limite* x_0, *allora esso è unico;*
2. *ogni successione estratta da una successione convergente è convergente e converge allo stesso limite.*

Dimostrazione. La dimostrazione si deduce dagli analoghi risultati per le successioni di numeri reali ed è lasciata per esercizio. □

La definizione di successione di Cauchy si estende alle successioni in spazi metrici come ci si aspetta.

Definizione 6.2.5 (successione di Cauchy in spazi metrici). *Una successione* $\{x_n\} \subseteq X$ *si dice* di Cauchy *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che per ogni* $m, n > \nu$ *si abbia*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{6.69}$$

Definizione 6.2.6 (spazio metrico completo). *Uno spazio metrico* (X, d) *si dice* completo *se ogni successione di Cauchy* $\{x_n\} \subseteq X$ *converge ad un elemento di* X.

Osservazione 6.2.7. Notiamo i seguenti fatti.

- È immediato notare che lo spazio $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$, con la distanza $d_{\mathbb{R}}$ introdotta poco sopra, è uno spazio metrico completo. Le successioni di Cauchy sono quelle di cui abbiamo parlato nella Definizione 2.2.22.

- Consideriamo l'insieme $X = (0, 1)$ e dotiamolo della distanza $d_{\mathbb{R}}$. Lo spazio metrico $\big((0, 1), d_{\mathbb{R}}\big)$ *non* è completo. Infatti, la successione $\{x_n\}$ definita da $x_n = 1/n$ è di Cauchy, ma non converge: il suo limite è 0, ma $0 \notin (0, 1)$.

Vediamo un esempio importante.

Esempio 6.2.8. Sia $C^0([a, b])$ l'insieme delle funzioni continue su $[a, b]$ introdotto nella Definizione 4.1.21. Considerando la distanza d definita da

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \tag{6.70}$$

si rende $\big(C^0([a, b]); d\big)$ uno spazio metrico.

Teorema 6.2.9 (completezza degli spazi di funzioni continue)**.** *Lo spazio metrico* $\big(C^0([a, b]); d\big)$ *con la distanza d definita nella* (6.70) *è completo.* □

Definizione 6.2.10 (punto di accumulazione)**.** *Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d). Un punto $x \in X$ si dice* di accumulazione *per Y (si confronti con la Definizione 3.1.6) se ogni intorno sferico di x (si veda la Definizione 6.2.2) contiene almeno un punto di Y diverso da x.*

Definizione 6.2.11 (compattezza)**.** *Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico (X, d) si dice* compatto *se ogni successione $\{x_n\} \subseteq Y$ ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di Y.*
Se $Y = X$, si dice che (X, d) è uno spazio metrico compatto.

Anche negli spazi metrici vale il teorema di Bolzano–Weierstrass, che viene enunciato in questa forma.

Teorema 6.2.12 (Bolzano–Weierstrass (♥))**.** *Un sottoinsieme infinito Y di uno spazio metrico compatto (X, d) ha un punto di accumulazione in X.*

Dimostrazione. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme infinito e sia $\{x_n\} \subseteq Y$ una successione di punti di Y. Siccome Y è infinito, si può supporre che

$$x_n \neq x_m \quad \text{se} \quad n \neq m. \tag{6.71}$$

Siccome X è compatto, applicando la Definizione 6.2.11, si ottiene che $\{x_n\}$ converge ad un punto $x_0 \in X$, che, in virtù della (6.71), è un punto di accumulazione per Y. □

Si notino la differenza e dell'enunciato e della dimostrazione rispetto al caso $X = \mathbb{R}$. Si noti inoltre come il caso $X = \mathbb{R}$ sia un caso particolare dell'enunciato appena dato.

Presentiamo ora un teorema di punto fisso che ha molte applicazioni sia nell'analisi matematica che nell'analisi numerica, in quanto fornisce un metodo di approssimazione che può essere implementato per approssimare problemi legati alle equazioni differenziali, come si nota nell'Osservazione 6.2.18.

Definizione 6.2.13. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\mathcal{F} : X \to X$ un'applicazione.*

- *Un punto $\bar{x} \in X$ tale che $\mathcal{F}(\bar{x}) = \bar{x}$ si chiama* punto fisso *per $\mathcal{F}$.*
- *Se esiste una costante $\lambda \in [0, 1)$ tale che*

$$d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq \lambda d(x, y) \qquad \textit{per ogni } x, y \in X, \tag{6.72}$$

l'applicazione $\mathcal{F}$ si chiama contrazione.

Il teorema che ci apprestiamo a dimostrare stabilisce che ogni contrazione in uno spazio metrico completo ha un unico punto fisso.

Teorema 6.2.14 (punto fisso delle contrazioni – Banach–Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo non vuoto e sia $\mathcal{F} : X \to X$ una contrazione. Allora esiste unico $\bar{x} \in X$ punto fisso per $\mathcal{F}$. Inoltre, dato $x_0 \in X$ qualunque e definita la successione*

$$x_1 = \mathcal{F}(x_0), \qquad x_n = \mathcal{F}(x_{n-1}), \qquad \textit{per ogni } n = 1, 2, \ldots \tag{6.73}$$

per induzione, si ha

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^n(x_0), \tag{6.74}$$

dove si definiscono $\mathcal{F}^0 = \mathrm{id}$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ e, per induzione, $\mathcal{F}^n := \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{n-1}$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ e sia $\{x_n\}$ la successione definita nella (6.73). Dimostriamo che è di Cauchy in X. Sfruttando la (6.72), iniziamo a stimare

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\mathcal{F}(x_{n-1}), \mathcal{F}(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$$

e iterando otteniamo

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_0, x_1). \tag{6.75}$$

Presi $m, n \in \mathbb{N}$ e supponendo $m > n$ senza perdita di generalità, usando la disuguaglianza triangolare ripetutamente, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\overset{(6.75)}{\leq} \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} d(x_0, x_1) \\
&= d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k \leq d(x_0, x_1) \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k = d(x_0, x_1)\lambda^n \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^k \\
&\leq d(x_0, x_1)\lambda^n \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k \overset{(1.72)}{=} d(x_0, x_1)\lambda^n \lim_{m\to\infty} \frac{1-\lambda^m}{1-\lambda} \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1),
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che $\lambda < 1$, ottenendo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in X e che pertanto converge, data la completezza di X: esiste allora $\bar{x} \in X$ tale che

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Usando ancora la definizione di contrazione (6.72), abbiamo

$$d(\mathcal{F}(\bar{x}), \mathcal{F}(x_n)) \leq \lambda d(\bar{x}, x_n) \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

che implica che

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(x_n) = \mathcal{F}(\bar{x})$$

e dunque

$$\mathcal{F}(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x},$$

dimostrando che $\bar{x}$ è un punto fisso per $\mathcal{F}$. L'unicità segue ragionando per assurdo: si supponga che esista $\tilde{x} \in X$ tale che $\tilde{x} = \mathcal{F}(\tilde{x})$. Allora, usando la (6.72) ancora una volta, abbiamo

$$d(\bar{x}, \tilde{x}) = d(\mathcal{F}(\bar{x}), \mathcal{F}(\tilde{x})) \leq \lambda d(\bar{x}, \tilde{x});$$

siccome $\lambda < 1$ ciò è possibile solo se $d(\bar{x}, \tilde{x}) = 0$, ovvero se $\tilde{x} = \bar{x}$. □

Come scopriremo nell'enunciato del Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf, la condizione cruciale che garantisce l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (6.7) è la lipschitzianità della funzione f rispetto alla variabile y. Presentiamo allora la definizione di funzione lipschitziana per funzioni di più variabili quando si chieda che la disuguaglianza (3.15) sia verificata solo in una variabile.

Definizione 6.2.15. *Una funzione* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supseteq \Omega = I \times J \to \mathbb{R}$ *si dice* lipschitziana in y uniformemente rispetto ad x *se è continua e se esiste* $L > 0$ *tale che*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \qquad \textit{per ogni } y_1, y_2 \in J. \tag{6.76}$$

Ogni costante L *che rende vere la* (6.76) *si dice* una *costante di Lipschitz e la più piccola di tali* L *è detta* la *costante di Lipschitz della funzione* f *e si denota spesso con* $\mathrm{Lip}(f; J)$.
Se $L = 1$ *la* f *si dice* funzione non espansiva*, perché non aumenta le distanze tra i punti, mentre se* $0 \le L < 1$ *risulta che* f *è una contrazione (si veda la Definizione 6.2.13).*

La formula (6.76) dice che se la funzione f dipende da due (o più) gruppi di variabili (x e y, nel nostro caso), per determinare la lipschitzianità rispetto ad uno di questi gruppi di variabili, è sufficiente trattare le altre come parametri.

Dalle formule della Definizione 6.2.15 che definiscono la lipschitzianità di una funzione, si evince che questa caratteristica è legata al comportamento delle derivate della funzione. In particolare, la costante di Lipschitz è legata al massimo dei rapporti incrementali. Si può dimostrare che una condizione sufficiente per la lipschitzianità è la limitatezza delle derivate.

6.2.2 I teoremi di esistenza e unicità e di dipendenza continua dai dati iniziali

Siamo pronti per presentare i teoremi di esistenza e unicità e di dipendenza continua dai dati iniziali per il problema di Cauchy (6.7). Scriveremo due enunciati separati in modo da poter offrire commenti puntuali quando necessario.

Ci prepariamo ora a dimostrare il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali e presentiamo un risultato di equivalenza del problema di Cauchy con un problema integrale. Consideriamo d'ora in poi un generico dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la cui generica coordinata è $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Fissato un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, consideriamo il problema di Cauchy (6.7) dove (x_0, y_0) è la condizione iniziale. Una soluzione di questo sistema sarà data da una coppia (φ, I) che soddisfa la Definizione 6.0.3, ovvero tale che φ soddisfa l'equazione $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ per ogni $x \in I$ e tale che $\varphi(x_0) = y_0$.

Lemma 6.2.16. *Una coppia* (φ, I) *risolve il problema di Cauchy* (6.7) *se e solo se*

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s \qquad \textit{per ogni } x \in I. \tag{6.77}$$

Dimostrazione. Supponiamo che (φ, I) sia una soluzione del sistema (6.7); allora

$$\varphi(x) - y_0 = \varphi(x) - \varphi(x_0) \overset{(5.33)}{=} \int_{x_0}^{x} \varphi'(s)\, \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, \mathrm{d}s,$$

che è la (6.77). Viceversa, assumiamo che la (6.77) valga; derivandola rispetto a x e sostituendo $x = x_0$ otteniamo

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{per ogni } x \in I \qquad \text{e} \qquad \varphi(x_0) = y_0 + 0,$$

rispettivamente; (φ, I) soddisfa dunque il sistema (6.7). □

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy (6.7). Lo enunceremo in dimensione generica, per il sistema (6.7), ma lo dimostreremo nel caso $n = 1$. Ciò ha il vantaggio di semplificare l'esposizione senza ledere la generalità del risultato. Anticipiamo che per dimostrare il teorema ci serviremo di due elementi: dimostreremo che una certa mappa definita in un sottoinsieme opportuno delle funzioni continue è una contrazione (si vedano la Definizione 6.2.13 e la formula (6.72)) e sfrutteremo il Lemma 6.2.16 di equivalenza tra il problema differenziale e l'equazione integrale (6.77).

Teorema 6.2.17 (Picard–Lindelöf di esistenza e unicità)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana nella variabile y uniformemente rispetto alla variabile x secondo la Definizione 6.2.15 e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto assegnato. Allora esiste unica la soluzione del problema di Cauchy* (6.7)*.*

Dimostrazione. Siccome Ω è aperto e $(x_0, y_0) \in \Omega$, esiste un intorno rettangolare di (x_0, y_0) tutto contenuto in Ω, ovvero esistono $a, b > 0$ tali che $R := \overline{I}_a(x_0) \times \overline{I}_b(y_0) \subseteq \Omega$. Chiaramente abbiamo che $R = [x_0-a, x_0+a]\times[y_0-b, y_0+b]$ e siccome è un insieme compatto, per il Teorema 3.2.10 di Weierstrass, la funzione f ammette massimo e minimo su R: in particolare, esiste $M > 0$ tale che $|f(x, y)| \leq M$ per ogni $(x, y) \in R$.

Fissiamo ora $\lambda \in (0, 1)$ e, per un motivo che sarà chiaro a breve, definiamo

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{\lambda}{L}\right\} \tag{6.78}$$

e costruiamo il rettangolo $R' := \overline{I}_\alpha(x_0)\times\overline{I}_b(y_0) = [x_0-\alpha, x_0+\alpha]\times[y_0-b, y_0+b]$. Stiamo, eventualmente, restringendo attorno a x_0 la finestra su cui ci concentriamo.

Con le notazioni usuali, con $C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big)$ denotiamo l'insieme delle funzioni continue definite per $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$; consideriamo il sottoinsieme

$$K := \left\{g \in C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big) : g(\overline{I}_\alpha(x_0)) \subseteq \overline{I}_b(y_0)\right\}$$

delle funzioni continue su $\overline{I}_\alpha(x_0)$ il cui grafico è contenuto in R'. Ciò significa che $|g(x) - y_0| \leq b$ per ogni $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$, per ogni $g \in K$. Su K consideriamo la norma del sup indotta per il fatto di essere un sottoinsieme di $\big(C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big), \|\cdot\|_\infty\big)$:

$$\|g\|_K = \max\left\{|g(x)| : x \in \overline{I}_\alpha(x_0)\right\}.$$

Per poter applicare il Teorema 6.2.14 delle contrazioni in $(K, \|\cdot\|_K)$ dobbiamo dimostrare che K è chiuso. Essendo K un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo, K risulta esso stesso completo e pertanto soddisfa le ipotesi del Teorema 6.2.14 delle contrazioni. Dimostreremo la chiusura di K dimostrando che ogni successione di elementi di K convergente ha limite contenuto in K[10]. Sia dunque una successione $\{g_n\} \subseteq K$ di funzioni che converge ad un elemento $g \in C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big)$. Abbiamo, per ogni $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$,

$$|g(x) - y_0| = \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - y_0| \leq b$$

e ciò implica che $g \in K$ e di conseguenza che K è chiuso in in $C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big)$.

[10] Questo segue da un teorema di caratterizzazione della chiusura di un insieme, che non dimostriamo.

Definiamo ora l'applicazione $\mathcal{F}\colon K \to C^0\big(\overline{I}_\alpha(x_0)\big)$ tramite

$$\mathcal{F}(g)(x) \coloneqq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, g(s))\,\mathrm{d}s \tag{6.79}$$

e studiamone le caratteristiche. Innanzitutto, se $g \in K$ e $s \in \overline{I}_\alpha(x_0)$, la coppia $(s, g(s)) \in R' \subseteq \Omega$ e quindi $f(s, g(s))$ è ben definita. Notiamo inoltre che, siccome f è continua, $\mathcal{F}(g)$ è ben definita per il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo, ed è almeno continua essa stessa (in realtà sappiamo che è derivabile).

Dimostriamo che $\mathcal{F}(K) \subseteq K$. Per fare ciò, dobbiamo vedere che la funzione $\mathcal{F}(g)$ restituisce un valore in $\overline{I}_b(y_0)$ per ogni $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$. Abbiamo

$$|\mathcal{F}(g)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(s, g(s))\,\mathrm{d}s \right| \overset{(5.23)}{\leq} \int_{x_0}^{x} |f(s, g(s))|\,\mathrm{d}s \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b,$$

dove abbiamo sfruttato la (6.78).

Ora dimostriamo che $\mathcal{F}$ è una contrazione di K in sé: dobbiamo dimostrare che vale la (6.72), che declinata in questa situazione assume la forma

$$\|\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(h)\|_\infty \leq \lambda \|g - h\|_\infty \qquad \text{per un certo } \lambda \in (0, 1). \tag{6.80}$$

La costante di contrattività λ sarà quella fissata all'inizio della dimostrazione e che contribuisce a definire α nella (6.78). Fissiamo $g, h \in K$ e $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$ e stimiamo

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(g)(x) - \mathcal{F}(h)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, g(s))\,\mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} f(s, h(s))\,\mathrm{d}s \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} [f(s, g(s)) - f(s, h(s))]\,\mathrm{d}s \right| \\
&\overset{(5.23)}{\leq} \int_{x_0}^{x} |f(s, g(s)) - f(s, h(s))|\,\mathrm{d}s \leq L \int_{x_0}^{x} |g(s) - h(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\leq L \Big(\max_{s \in \overline{I}_\alpha(x_0)} \{|g(s) - h(s)|\} \Big) |x - x_0| \\
&\leq L\alpha \|g - h\|_\infty \leq \lambda \|g - h\|_\infty,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la lipschitzianità di f e la (6.78). Prendendo ora il massimo al variare di $x \in \overline{I}_\alpha(x_0)$ in entrambi i membri, otteniamo la (6.80) e, ricordando che λ era stato scelto in $(0, 1)$, abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}\colon K \to K$ è una contrazione.

Per il Teorema 6.2.14 delle contrazioni, esiste allora un unico punto fisso φ di $\mathcal{F}$, ovvero una funzione $\varphi \in K$ tale che

$$\varphi(x) = \mathcal{F}(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s)), \mathrm{d}s \qquad \text{per ogni } x \in \overline{I}_\alpha(x_0),$$

ma questa altro non è che la relazione (6.77). Grazie al Lemma 6.2.16, concludiamo che la coppia $\big(\varphi, \overline{I}_\alpha(x_0)\big)$ è una soluzione del problema di Cauchy (6.7). Il teorema è così dimostrato. □

Osservazione 6.2.18. Il teorema appena dimostrato offre alcuni spunti di riflessione.

1. Il risultato è di natura locale: dà esistenza ed unicità *in piccolo*, ovvero in un intorno di x_0. Questo intorno dipende dai dati del problema f e (x_0, y_0) e dalla geometria del dominio Ω ovvero da quanto grandi possono essere i raggi a e b degli intorni iniziali, dai valori di L e M e infine dalla scelta di $\lambda \in (0, 1)$.
2. La dimostrazione è in qualche modo costruttiva. Lo è attraverso l'applicazione del Teorema 6.2.14 delle contrazioni.
3. Il metodo permette di approssimare la soluzione attraverso le iterazioni di punto fisso che, per il Teorema 6.2.14 convergono alla φ. Questo è molto importante perché viene sfruttato dai metodi più elementari di approssimazione numerica.
4. Combinando la definizione (6.79) dell'applicazione $\mathcal{F}$ con l'iterazione di punto fisso (6.73) si ottiene il modo di convergere alla soluzione. La potenza della combinazione di questo metodo è che, siccome per il Teorema 6.2.14 delle contrazioni *ogni* punto iniziale ha come limite delle iterazioni l'unico punto fisso della contrazione, allora è possibile partire dalla funzione costante $y = y_0$. Immessa nella (6.79) essa genera una funzione $x \mapsto y_1(x)$. Immessa la y_1 nella (6.79) a sua volta, si ottiene una funzione $x \mapsto y_2(x)$ e così si può costruire la successione di funzioni $\{y_n\}$ che converge, per la (6.74), alla funzione φ soluzione del problema di Cauchy. Le funzioni y_n così costruite si chiamano *iterate di Peano–Picard*.
5. La scelta di definire α nella (6.78) ha il vantaggio di avere le stime di limitatezza e contrattività in maniera pulita. Se non si fosse fatto *così presto*, si sarebbe dovuto osservare alla fine di ogni stima.
6. Il Teorema 6.2.17 tratta i primi due punti della Definizione 6.0.6 di buona positura secondo Hadamard.

Abbiamo la garanzia che la soluzione sia definita per tutti i valori in cui è definita la f se il dominio Ω è di tipo *striscia*, ovvero è della forma $\Omega = I \times \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto.

Teorema 6.2.19. *Valgano le ipotesi del Teorema 6.2.17 di esistenza ed unicità, con la condizione che $\Omega = I \times \mathbb{R}$ sia di tipo striscia. Allora, dato $(x_0, y_0) \in \Omega$ il problema di Cauchy (6.7) ha un'unica soluzione definita su tutto I.*

Dimostrazione. Diamo solamente l'idea della dimostrazione. Uno degli ostacoli, nella dimostrazione del Teorema 6.2.17 di esistenza e unicità, all'esistenza per tutti i tempi è che la soluzione può colpire il bordo "orizzontale" del rettangolo R, ovvero può capitare che ci sia un valore x^* per cui $|y(x^*) - y_0| = b$. Data la particolare forma di Ω in questo caso, fissato $(x_0, y_0) \in \Omega$, lo stesso insieme Ω può essere considerato come l'intorno R di (x_0, y_0). □

Occupiamoci ora di dimostrare la dipendenza continua dai dati iniziali, ovvero di dimostrare che anche il terzo punto della Definizione 6.0.6 di buona positura secondo Hadamard è soddisfatto. Il Lemma 5.7.10 di Gröwall ci permette di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 6.2.20 (di dipendenza continua dai dati iniziali)**.** *Assumiamo che valgano le stesse ipotesi del Teorema 6.2.17 di esistenza e unicità e denotiamo con (φ, I) la soluzione del problema di Cauchy (6.7) con dato $(x_0, y_0) \in \Omega$ e con (ψ, J) la soluzione del problema di Cauchy (6.7) con dato $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in \Omega$. Per ogni $x \in I \cap J$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se*

$$\|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\| < \delta_\varepsilon,$$

allora si ha

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon. \tag{6.81}$$

Se, inoltre, $\tilde{x}_0 = x_0$, allora

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |y_0 - \tilde{y}_0| e^{L(x-x_0)}, \tag{6.82}$$

dove $L > 0$ è la costante di Lipschitz di f.

Dimostrazione. Dal Teorema 6.2.17, sappiamo che I e J sono intervalli centrati in x_0 e $\tilde{x}_0$, rispettivamente; li denotiamo con $I = [x_0 - \bar{\alpha}, x_0 + \bar{\alpha}]$ e $J = [\tilde{x}_0 - \tilde{\alpha}, \tilde{x}_0 + \tilde{\alpha}]$. Inoltre, sappiamo che $I \cap J$ è un intervallo chiuso (perché intersezione di due intervalli chiusi) che denotiamo con $I \cap J = [a, b]$.

Dimostreremo la (6.81) usando il Lemma 5.7.10 di Grönwall. Per fare ciò, dobbiamo costruirci una funzione u che soddisfi la stima (5.88) con funzioni α e β opportune. Consideriamo dunque la funzione

$$u(x) := |\varphi(x) - \psi(x)|^2 \qquad \text{per } x \in I \cap J, \tag{6.83}$$

della quale calcoliamo la derivata prima (notiamo che prendere il quadrato di un valore assoluto è la stessa cosa che prendere il quadrato della base)

$$u'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi(x) - \psi(x))^2 = 2(\varphi(x) - \psi(x))(\varphi'(x) - \psi'(x)).$$

Applichiamo ora il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo a u e usiamo le proprietà del valore assoluto ($X \le |X|$ per ogni $X \in \mathbb{R}$ e la Proposizione 1.5.24-2) e la lipschitzianità di f

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(a) + \int_a^x u'(s)\,\mathrm{d}s \\
&\le |\varphi(a) - \psi(a)|^2 + 2\int_a^x |\varphi(s) - \psi(s)| \cdot |\varphi'(s) - \psi'(s)|\,\mathrm{d}s \\
&= |\varphi(a) - \psi(a)|^2 + 2\int_a^x |\varphi(s) - \psi(s)| \cdot |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\le |\varphi(a) - \psi(a)|^2 + 2L\int_a^x |\varphi(s) - \psi(s)|^2\,\mathrm{d}s = |\varphi(a) - \psi(a)|^2 + 2L\int_a^x u(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

La disuguaglianza cui siamo giunti è la (5.88) con la u definita in (6.83), $\alpha(x) = |\varphi(a) - \psi(a)|^2$ e $\beta(x) = 2L$, entrambe costanti. Possiamo quindi applicare il Lemma 5.7.10 di Grönwall e ottenere la (5.90) nel nostro caso

$$|\varphi(x) - \psi(x)|^2 \le |\varphi(a) - \psi(a)|^2 e^{\int_s^x 2L\,\mathrm{d}s} = |\varphi(a) - \psi(a)|^2 e^{2L(x-a)}$$

da cui

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(a) - \psi(a)| e^{L(x-a)}. \tag{6.84}$$

Usando la continuità delle soluzioni φ e ψ, possiamo trovare tre costanti $C, C_\varphi, C_\psi > 0$ tali che

$$\begin{aligned}
|\varphi(a) - \psi(a)| &\le |\varphi(a) - \varphi(x_0)| + |\psi(\tilde{x}_0) - \psi(a)| + |\varphi(x_0) - \psi(\tilde{x}_0)| \\
&\le (C_\varphi + C_\psi)|x_0 - \tilde{x}_0| + |y_0 - \tilde{y}_0| \le C(C_\varphi + C_\psi + 1)\|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\|.
\end{aligned}$$

Allora la (6.84) diventa

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le C(C_\varphi + C_\psi + 1)e^{Lb}\|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\|.$$

che risulta minore di ε se $\|(x_0, y_0) - (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\| < \varepsilon C^{-1}(C_\varphi + C_\psi + 1)^{-1} e^{-Lb} =: \delta_\varepsilon$.

Nel caso in cui $\tilde{x}_0 = x_0$ si può prendere $a = x_0$ e concludere direttamente dalla (6.84), oppure tramite la formulazione equivalente (6.77), che dà, usando ancora la lipschitzianità di f

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \psi(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s - \tilde{y}_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + L \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - \psi(s)|\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

e usando il Lemma 5.7.10 di Grönwall nella forma (5.90) otteniamo la (6.82). □

Con il Teorema 6.2.17 di esistenza e unicità e il Teorema 6.2.20 di dipendenza continua dai dati iniziali abbiamo finalmente dimostrato la buona positura del problema di Cauchy (6.7). Va notato che l'ipotesi di lipschitzianità della f a membro destro è piuttosto forte, ma è ben noto che se questa viene a mancare si può ancora dimostrare un teorema di esistenza (si veda il Teorema 7.6.1 di esistenza di Peano), ma l'unicità delle soluzioni non è garantita e il fenomeno del *pennello di Peano* (presentato nella Sezione 7.6.1) ne è un esempio.

Osservazione 6.2.21. Cogliamo l'occasione per far notare che, benché la stima di stabilità (6.82) permetta di dimostrare il punto 3 del programma di buona positura della Definizione 6.0.6, non sempre si rivela utile. Prendiamo, a titolo di esempio, l'equazione differenziale $y' = y$, il cui secondo membro è lipschitziano con $L = 1$, e i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = \varepsilon > 0 \end{cases}$$

il primo dei quali ha soluzione $\varphi(x) = 0$ e il secondo dei quali ha soluzione $\psi(x) = \varepsilon e^x$. Non importa quanto piccolo sia $\varepsilon > 0$, le due soluzioni divergono per $x \to +\infty$. È pertanto molto importante ricordare che la (6.82), così come la (6.81), valgono per tempi piccoli vicino al tempo iniziale.

Approssimazione numerica delle soluzioni

Il teorema di esistenza di Peano, che presenteremo nella Sezione 7.6.1 e che si basa sulla sola continuità rispetto ad y della f, è sufficiente a dimostrare come, per tempi piccoli, ovvero molto vicini al dato iniziale x_0 del problema di Cauchy, le soluzioni approssimate dell'equazione convergano uniformemente alla soluzione. Questo risultato ha enorme utilità nell'approssimazione numerica delle soluzioni delle equazioni differenziali.

L'idea è la seguente e si basa su una discretizzazione (a passo uniforme nel più semplice dei casi, adattiva se le funzioni in oggetto permettono questa flessibilità numerica) dell'intervallo delle ascisse e nel calcolo "facile" di una curva che si spera approssimi la soluzione vera al tendere a zero della finezza della discretizzazione. La discretizzazione (termine più proprio dell'analisi numerica) altro non è che una partizione dell'intervallo I nel senso già noto per il calcolo delle somme di Riemann per gli integrali.

Il problema di Cauchy in considerazione è quello scritto nella (6.7). Supponiamo di sapere che (φ, I) è una soluzione e consideriamo un valore T tale che $[x_0, T] \subseteq I$.

Ciò è sempre possibile perché I è aperto. Fissiamo un intero $N \in \mathbb{N}$ e dividiamo l'intervallo $[x_0, T]$ in N parti (non necessariamente equispaziate)

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = T,$$

e, per ogni $x \in [x_{i-1}, x_i]$, per ogni $i = 1, \ldots, N$, costruiamo la curva

$$\psi_N(x) := \psi_N(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, \psi_N(x_{i-1}))(x - x_{i-1}). \tag{6.85}$$

Quella appena costruita altro non è che la spezzata che passa per $(x_{i-1}, \psi_N(x_{i-1}))$ ed ha pendenza $f(x_{i-1}, \psi_N(x_{i-1}))$. Stiamo dunque approssimando la soluzione con una poligonale che soddisfa l'equazione nei nodi della discretizzazione dell'intervallo temporale. Il teorema di convergenza è il seguente.

Teorema 6.2.22 (Peano)**.** *Sia dato il problema di Cauchy* (6.7) *con f continua nella variabile y. Allora, la successione di funzioni $\{\psi_N\}$ costruita in* (6.85) *converge uniformemente ad una soluzione su $[x_0, T]$, per T sufficientemente vicino a x_0.* □

6.2.3 Intervalli massimali di esistenza

Abbiamo visto nella Sezione 6.1.3 che le soluzioni delle equazioni differenziali del second'ordine a coefficienti costanti (6.31) e (6.47) sono definite su tutto l'asse reale, mentre non è sempre così né per le equazioni a variabili separabili (6.10), in cui è necessario tenere in considerazione il dominio della funzione $x \mapsto g(x)$, né per le equazioni lineari del prim'ordine (6.21), in cui è necessario tenere in considerazione i domini delle funzioni $x \mapsto a(x)$ e $x \mapsto b(x)$.

Consideriamo il problema di Cauchy (6.7) per un'equazione del prim'ordine in forma normale. Il risultato "migliore" che possiamo dare, riguardo all'esistenza delle soluzioni, è quello del Teorema 6.2.19, che, oltre a richiedere che il membro destro $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sia una funzione lipschitziana nella variabile y (perché devono valere le ipotesi del Teorema 6.2.17 di esistenza ed unicità), necessita di un'ipotesi specifica sulla geometria dell'insieme Ω su cui è definito il membro destro, ovvero che sia della forma $\Omega = I \times \mathbb{R}$, di tipo striscia. È questo l'unico risultato che garantisce che la soluzione sia definita su tutto l'insieme I. Occorre infatti ricordare che la soluzione fornita dal Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf è garantita solo sull'insieme $\overline{I}_\alpha(x_0)$, e data la costruzione di α nella (6.78), tale intorno può essere molto ridotto.

La lezione da imparare da questi teoremi è che se si hanno ipotesi abbastanza forti sul dominio ($\Omega = I \times \mathbb{R}$) e sulla regolarità della funzione a membro destro (lipschitzianità nella variabile y), allora la soluzione non può che essere definita su tutto l'insieme I. Al contrario, se il dominio non è di tipo striscia, o se la funzione f a membro destro non è lipschitziana, allora le soluzioni saranno solamente definite attorno al punto base della condizione di Cauchy e possono addirittura sviluppare fenomeni di esplosione al finito, ovvero avere asintoti verticali. È questo il caso di molti problemi di Cauchy che abbiamo studiato in dettaglio nella Sezione 6.1. Tra gli altri, è questo il caso del problema di Cauchy proposto al punto 1 degli Esercizi 6.1.24. Vediamolo un po' più nel dettaglio per capire che cosa aspettarci e per motivare le definizioni che daremo a breve.

Esempio 6.2.23. Studiamo le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6.86}$$

al variare della condizione iniziale $y_0 \in \mathbb{R}$. Possiamo farlo alla luce dei risultati presentati nella Sezione 6.2.2, oltre, ovviamente, tramite gli strumenti pratici per ricavare le soluzioni presentati nella Sezione 6.1. L'equazione è a variabili separabili, con $g(x) = 1$ e $h(y) = y^2$, che dà $y = 0$ come soluzione costante. Se $y_0 = 0$, la soluzione è la funzione nulla ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo anche studiare l'equazione dal punto di vista del Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf: la funzione a membro destro $(x, y) \mapsto f(x, y)$ è lipschitziana su ogni intervallo chiuso e limitato. Infatti, la derivata di f rispetto alla variabile y è $\partial_y f(x, y) = 2y$. Abbiamo dunque la garanzia che il problema di Cauchy abbia soluzione unica definita in un intorno opportuno di x_0. Inoltre, l'unicità fa sì che due curve integrali di problemi di Cauchy differenti non si intersecano e quindi, in particolare, le soluzioni hanno il segno del dato iniziale: avremo $y(x) > 0$ per ogni $x \in I$, se $y_0 > 0$, e $y(x) < 0$ per ogni $x \in I$, se $y_0 < 0$, dove I è un intorno di $x_0 = 0$. Inoltre, siccome f è di classe C^∞, ci possiamo aspettare che la soluzione y sia pure di classe C^∞.

Integriamo l'equazione con il procedimento dell'Osservazione 6.1.1 e otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-1}{x + c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

per la quale determiniamo la costante c imponendo la condizione iniziale. Si ottiene

$$y_0 = y(0) = \frac{-1}{0 + c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{y_0}$$

e dunque la soluzione è

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}.$$

Notiamo subito che il dominio di questa funzione è $\operatorname{dom} y = \mathbb{R} \setminus \{1/y_0\}$ e pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è (y, I), dove I è la semiretta di $\operatorname{dom} y$ che contiene $x_0 = 0$. Sarà dunque la semiretta aperta verso $-\infty$ se $y_0 > 0$ e sarà quella aperta verso $+\infty$ se $y_0 < 0$. A titolo di esempio, consideriamo $y_0 = 1$ e $y_0 = -2$. Le soluzioni sono rappresentate nella Figura 6.12 dove abbiamo messo in evidenza gli asintoti verticali $x = 1$ e $x = -1/2$ ed i domini delle soluzioni: $(-\infty, 1)$ per il problema con $y_0 = 1$ e $(-1/2, +\infty)$ per il problema con $y_0 = -2$.

Osservazione 6.2.24. Gli effetti della mancanza di lipschitzianità globale della funzione f sono evidenti: il dominio della soluzione è determinato dalla soluzione stessa, non più dall'equazione, e non è possibile determinarlo a priori, prima di risolvere direttamente il problema di Cauchy.

L'Esempio 6.2.23, tuttavia, traccia anche la via per capire che cosa serve analizzare per studiare le soluzioni nelle situazioni in cui la condizione di Lipschitz (6.76) sia soddisfatta solo localmente, in un intorno di (x_0, y_0). Servono infatti una definizione di soluzione locale e un concetto di soluzione *massimale*, per definite il quale sarà necessario dare la definizione di prolungamento di una soluzione. L'idea del prolungamento è abbastanza intuitiva da comprendere e l'Esempio 6.2.23 ci può venire ancora in aiuto. Il Teorema 6.2.17 di esistenza ed unicità ci dice che esiste (ed è unica) una soluzione al problema di Cauchy (6.86) in un intorno simmetrico del punto iniziale $x_0 = 0$. Tuttavia, l'analisi delle soluzioni ci permette di concludere che l'intervallo di definizione è una semiretta (quindi non simmetrico ed in particolare illimitato in una direzione). Consideriamo il problema 6.86 associato al valore iniziale $y_0 = 1$, per fissare le idee. Il Teorema 6.2.17 ci fornisce una soluzione

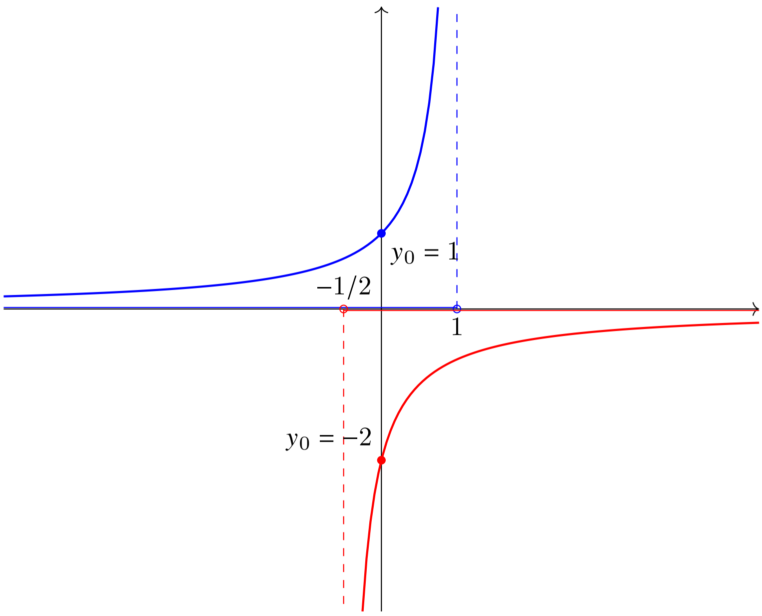


Figura 6.12: Le soluzioni dei problemi di Cauchy (6.86) con $y_0 = 1$ (blu) e con $y_0 = -2$ (rosso).

definita in un intervallo del tipo $[-r, r]$ (per un certo $r > 0$ e certamente minore di 1). Quello che possiamo aggiungere, studiando l'espressione analitica della soluzione $y(x) = 1/(1-x)$ è che essa è definita in tutta la semiretta $(-\infty, 1)$ e che se $(\varphi_1, [-r, r])$ è la soluzione data dal teorema di esistenza ed unicità e $(\varphi_2, (-\infty, 1))$ è la soluzione che abbiamo trovato essere definita su tutta la semiretta, allora nell'intervallo $[-r, r]$ (che risulta essere l'intersezione dei domini delle due soluzioni) si deve avere che $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, grazie all'unicità. È naturale chiedersi per quanto si possa prolungare una soluzione e se esista una soluzione cosiddetta *massimale* che non può essere più prolungata.

Per studiare aspetto, richiamiamo, mettendo in evidenza la dipendenza dal dominio, la notazione di grafico di una funzione definita nella (3.1). Data una funzione $f \colon A \to \mathbb{R}$ e dato $I \subseteq A$ un sottoinsieme, denotiamo con il simbolo

$$\operatorname{graph}(f; I) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{6.87}$$

il grafico di f ristretto ad I, ovvero l'insieme delle coppie ordinate di punto nel dominio e immagine considerando solo i punti del dominio che sono I.

Diamo ora una versione più dettagliata del concetto di soluzione di un problema di Cauchy, mettendo in evidenza alcune sfumature delle Definizione 6.0.3 e 6.0.4.

Definizione 6.2.25. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, sia $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua (o anche lipschitziana nella variabile y uniformemente rispetto ad x) e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto dato. Si consideri il problema di Cauchy (6.7) per l'equazione differenziale del prim'ordine associata alla funzione f con dato iniziale (x_0, y_0).*

- *Si dice che (φ, I) è una soluzione* locale *del problema di Cauchy se verifica le condizioni della Definizione 6.0.4 e se $\operatorname{graph}(\varphi; I) \subseteq \Omega$.*

- *Data una soluzione locale* (φ, I) *del problema di Cauchy* (6.7)*, si definisce* prolungamento *della soluzione una coppia* $(\hat{\varphi}, \hat{I})$ *che sia ancora una soluzione locale del problema di Cauchy* (6.7) *e tale che* $\hat{I} \supseteq I$ *e* $\hat{\varphi}|_I = \varphi$.
- *Una soluzione* (φ, I) *del problema di Cauchy* (6.7) *è detta* soluzione massimale *quando non esiste nessun suo prolungamento in senso stretto* $(\hat{\varphi}, \hat{I})$ *(ovvero tale che* $\hat{I} \supsetneq I$*) che sia ancora soluzione del problema di Cauchy.*

Osservazione 6.2.26. Osserviamo subito che, anche in ipotesi di lipschitzianità di f in y uniformemente rispetto ad x, la soluzione unica data dal Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf è una soluzione locale, essendo definita sull'intorno $\bar{I}_\alpha(x_0)$ costruito nella dimostrazione. Applicando questo teorema al problema di Cauchy dell'Esempio 6.2.23, supponendo $y_0 = 1$, si otterrebbe esistenza in un intorno $\bar{I}_\alpha(0) = [-\alpha, \alpha]$ con $\alpha < 1$. Tuttavia, abbiamo visto che in quel caso la soluzione è definita su tutta la semiretta $(-\infty, 1)$, che quindi risulta essere l'intervallo di definizione della soluzione massimale.

Per domini $\Omega = I \times \mathbb{R}$ di tipo striscia, invece, la soluzione fornita dal Teorema 6.2.19 è massimale, poiché è automaticamente definita su tutto l'intervallo I che definisce il dominio del membro destro (per $x \notin I$ nemmeno l'equazione è definita).

Infine, osserviamo che ogni soluzione è un prolungamento di se stessa, onde la richiesta che non esista un prolungamento in *senso stretto* per poter chiamare *massimale* una soluzione. □

Diamo ora un risultato (piuttosto astratto) che garantisce l'esistenza di una soluzione massimale per un problema di Cauchy.

Teorema 6.2.27. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *un aperto e* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione localmente lipschitziana nella variabile* y *uniformemente rispetto alla variabile* x *(ovvero lipschitziana secondo la Definizione* 6.2.15 *in ogni sottoinsieme chiuso e limitato* K *di* Ω*). Allora esiste ed è unica la soluzione massimale per ogni problema di Cauchy* (6.7) *associato alla funzione* f*. Inoltre, fissato* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *il dato di Cauchy, ogni soluzione locale è la restrizione di una soluzione massimale.*

Dimostrazione. La dimostrazione dell'esistenza della soluzione massimale è costruttiva, ma il processo è astratto: costruiremo una funzione della forma $(y, \operatorname{dom} y, \mathbb{R})$, così come nella Definizione 1.4.1. Il codominio è necessariamente $\mathbb{R}$ perché stiamo trattando funzioni reali. Costruiremo il dominio $\operatorname{dom} y$ della soluzione massimale e a partire da questo (e dalle proprietà che lo definiscono) assegneremo ad ogni punto $x \in \operatorname{dom} y$ il valore $y(x)$ della soluzione massimale.

Partiamo fissando un dato di Cauchy $(x_0, y_0) \in \Omega$ e consideriamo tutte le soluzioni locali del problema di Cauchy (6.7) passanti per (x_0, y_0), che raccogliamo in un insieme $\mathcal{S}$, che quindi è definito come

$$\mathcal{S} := \left\{(\varphi, I_\varphi) : I_\varphi \ni x_0, \varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x) = f(x\varphi(x)) \text{ per ogni } x \in I_\varphi, \operatorname{graph}(\varphi; I_\varphi) \subseteq \Omega\right\}$$

dove abbiamo messo in evidenza il fatto che l'intervallo di definizione può variare da soluzione a soluzione. La prima osservazione da fare è che $\mathcal{S} \neq \emptyset$, grazie al Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf: infatti, la lipschitzianità (locale) della funzione f garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione del problema di Cauchy. Consideriamo ora due soluzioni $(\varphi, I_\varphi), (\psi, I_\psi) \in \mathcal{S}$ e dimostriamo che esse coincidono nell'intersezione dei loro domini (cosa che ci aspettiamo per l'unicità della soluzione). Sia dunque $I := I_\varphi \cap I_\psi$ e supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} \in I$ tale che $\varphi(\bar{x}) \neq \psi(\bar{x})$. Siccome φ e ψ risolvono lo stesso problema di Cauchy con dato iniziale $\varphi(x_0) = y_0 = \psi(y_0)$, si deve necessariamente avere $\bar{x} \neq x_0$; possiamo perciò supporre, senza perdita di generalità, che sia $\bar{x} > x_0$. Osserviamo che l'intervallo $[x_0, \bar{x}] \subseteq I$ e quindi ha senso considerare il punto

$$x^* := \sup\left\{x \in [x_0, \bar{x}] : \varphi(\xi) = \psi(\xi) \text{ per ogni } \xi \in [x_0, x]\right\} \tag{6.88}$$

a partire dal quale le due soluzioni assumono valori differenti. Siccome le funzioni sono continue, deve essere $x^* < \bar{x}$, cosicché si ha la garanzia che $x^* \in I$, ovvero appartiene ancora all'intersezione dei domini di φ e ψ. Dalla definizione di x^* si ha anche che $\varphi(x^*) = \psi(x^*) =: y^*$. Allora, siccome le soluzioni coincidono in x^* consideriamo il problema di Cauchy associato all'equazione differenziale con dato $y(x^*) = y^*$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x^*) = y^* \end{cases}$$

del quale è facile vedere che φ e ψ sono soluzioni locali. Ma allora, in virtù dell'unicità della soluzione garantita dal Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf, esse devono coincidere in un intorno di x^*, ovvero si ottiene che $\varphi(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in [x_0, \hat{x}]$, con $\hat{x} > x^*$. Ciò contraddice la proprietà di massimalità con cui è stato definito x^* nella (6.88). Abbiamo dunque dimostrato che due qualunque soluzioni locali del problema di Cauchy (6.7) coincidono nell'intersezione dei loro domini.

Consideriamo ora l'unione dei domini delle funzioni dell'insieme $\mathcal{S}$, ovvero l'insieme

$$J := \bigcup_{(\varphi, I_\varphi) \in \mathcal{S}} I_\varphi\,,$$

che risulta un intervallo aperto perché ogni I_φ lo è, e osserviamo la seguente cosa: se $x \in J$, tutte le funzioni $(\varphi, I_\varphi) \in \mathcal{S}$ che sono definite in x, ovvero tali che $x \in I_\varphi$, per quanto appena dimostrato, assumono lo stesso valore, diciamo $\tilde{y}$. Siccome tale $\tilde{y}$ è unico, risulta ben definita l'associazione $J \ni x \mapsto \tilde{y}$, che ci permette di definire una funzione. Definiamo dunque la funzione y tale che ad ogni $x \in J$ associa l'unico valore assunto da tutte le soluzioni del problema di Cauchy (6.7) che sono definite in x. In questo modo si ha chiaramente che $\operatorname{dom} y = J$. Dimostriamo ora che tale funzione $(y, J, \mathbb{R})$ rispetta la definizione di soluzione massimale.

Abbiamo già osservato che $x_0 \in J$. Sia ora $x \in J$. Siccome, dalla definizione di unione, esiste $I_\varphi \ni x$, succede che y coincide con φ in un intorno di x e pertanto, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, y sia risolve l'equazione differenziale, sia è tale che $y(x_0) = y_0$: queste sono le condizioni affinché (y, J) sia una soluzione del problema di Cauchy. Siccome J è definito come l'unione dei domini I_φ di tutte le soluzioni che passano per (x_0, y_0), risulta una soluzione massimale e inoltre, data ogni altra soluzione (φ, I_φ), si ha che $\varphi = y|_{I_\varphi}$.

Come ultima cosa, dimostriamo l'unicità di y. Supponiamo che z sia un'altra soluzione massimale del problema di Cauchy (6.7). Siccome z è una soluzione, essa deve essere una restrizione della soluzione massimale y. Se ora z non coincidesse con y, la soluzione y sarebbe un prolungamento in senso stretto della z, che perderebbe la caratteristica di massimalità. Con ciò il teorema è dimostrato. □

6.3 Studi qualitativi

In questa sezione presentiamo alcuni studi qualitativi delle equazioni differenziali. Questi sono particolarmente utili quando si studia un'equazione differenziale che non è facilmente integrabile. Lo scopo di fare uno studio qualitativo, come suggerisce l'aggettivo, è quello di riuscire ad estrarre proprietà delle soluzioni, in primis la loro esistenza ed eventualmente unicità, senza risolvere l'equazione. Altre proprietà che si riescono spesso a dedurre sono la regolarità della soluzione, la monotonia (o l'individuazione degli intervalli di monotonia), l'eventuale presenza di asintoti e infine alcune informazioni quantitative, quali, ad esempio, il valore della derivata di un certo ordine nel punto in cui è data la condizione di Cauchy.

Il bagaglio di strumenti teorici che permettono di estrapolare queste informazioni è molto vasto (in buona sostanza, tutti gli strumenti connessi allo studio di una funzione sono leciti) e comprende, tra i più importanti, i Teoremi 6.2.17 e 6.2.19 e un risultato alquanto interessante che prende il nome di Teorema dell'asintoto. Inoltre, se la funzione f a membro destro di un'equazione differenziale del prim'ordine informa normale fosse solo continua, ma non lipschitziana né derivabile, si potrebbe ricorrere al Teorema 7.6.1 di esistenza di Peano, che garantisce l'esistenza (anche se non l'unicità) di una soluzione locale.

Precisiamo che non ci sono regole vere e proprie per condurre gli studi qualitativi, se non il cercare di ottenere le proprietà menzionate poco sopra per ogni equazione che si sta studiando. Non va escluso che in alcuni casi è anche possibile scrivere la soluzione esplicitamente.

Teorema 6.3.1 (dell'asintoto)**.** *Sia $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si supponga che esistano i limiti*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad e \qquad \mu = \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\mu = 0$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo e supponiamo che $\mu \neq 0$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità che $\mu > 0$, finito o meno. Dalla Definizione 3.1.14 di limite (in particolare dalle (3.4c) se $\mu \in \mathbb{R}$ e (3.4d) se $\mu = +\infty$), sappiamo che preso un numero $m \in (0, \mu)$ a piacere esiste $R > 0$ tale che per ogni $x > R$ si ha $f'(x) > m$. consideriamo ora la funzione $\varphi\colon (R, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) := f(x) - mx$: essa è derivabile in $(R, +\infty)$ ed è tale che

$$\varphi'(x) = f'(x) - m > m - m = 0 \qquad \text{per ogni } x \in (R, +\infty),$$

da cui segue, per il Corollario 4.2.8 che φ è crescente in $(R, +\infty)$. Scelto allora $\bar{x} \in (R, +\infty)$, si ha, per la monotonia, che

$$\varphi(x) > \varphi(\bar{x}), \qquad \text{ovvero} \qquad f(x) > f(\bar{x}) + m(x - \bar{x}), \qquad \text{per ogni } x > \bar{x}.$$

Siccome $m > 0$, ciò è sufficiente, per il Teorema di confronto per dimostrare che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, incorrendo in contraddizione con la finitezza di λ. □

Il teorema appena dimostrato permette di ricavare informazioni sul comportamento di una funzione e della sua derivata all'infinito, in presenza di un asintoto orizzontale. È particolarmente utile per studiare il comportamento per tempi lunghi delle soluzioni delle equazioni differenziali, come vedremo nei prossimi esempi.

Esempio 6.3.2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6.89}$$

e si studi il comportamento delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$. Come prima cosa cerchiamo di capire se la soluzione esiste ed è unica. La funzione $f(x, y) = \arctan y$ è una funzione continua (la dipendenza dalla sola variabile y rende l'equazione autonoma e a variabili separabili) ed inoltre è derivabile rispetto ad y e la derivata

$$\partial_y f(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

è una funzione continua a sua volta e limitata da 1. Allora la f è sicuramente lipschitziana nella variabile y su tutto $\mathbb{R}$ e pertanto la soluzione del problema di Cauchy (6.89) esiste ed è unica in virtù del Teorema 6.2.17. Inoltre, siccome $\operatorname{dom} f = \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è di tipo striscia, il Teorema 6.2.19 garantisce che la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, che quindi è l'intervallo massimale di esistenza. Notiamo immediatamente che $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ è l'unica soluzione costante, e pertanto la funzione nulla divide le altre soluzioni in due classi e seconda del segno. Abbiamo già ricavato le seguenti informazioni: la soluzione esiste unica su tutto $\mathbb{R}$; è la funzione nulla se $y_0 = 0$, mentre è (tutta) positiva o negativa (lo ribadiamo, per l'unicità) a seconda che si abbia $y_0 > 0$ o $y_0 < 0$, rispettivamente.

Siccome se $y_0 > 0$ risulta che $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dall'equazione si ottiene che $y'(x) = \arctan y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero la soluzione è strettamente crescente, mentre si ottiene che è strettamente decrescente, con lo stesso ragionamento, se $y_0 < 0$. Invocando la regolarità della funzione arcotangente e ricordando che la soluzione $(y, \mathbb{R})$ deve essere di classe C^1, per composizione risulta che anche y' è di classe C^1, ovvero che y è di classe C^2. Pertanto, studiando la derivata seconda

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = \frac{\arctan y(x)}{1 + y^2(x)}$$

si ottiene che essa ha lo stesso segno di y (perché è così per il numeratore, mentre il denominatore è sempre positivo). Abbiamo allora ottenuto che se $y_0 > 0$ la soluzione sarà convessa, mentre se $y_0 < 0$ la soluzione sarà concava. Riusciamo a dire che

$$y'(0) = \arctan(y_0) \quad \text{e} \quad y''(0) = \frac{\arctan(y_0)}{1 + y_0^2}.$$

Utilizzando la monotonia e il Teorema 6.3.1 dell'asintoto riusciamo anche a studiare i limiti della soluzione per $x \to \pm\infty$. Lo facciamo nel caso $y_0 > 0$, l'altro essendo analogo. Siccome la funzione è monotona crescente, essa ammette i limiti $\lambda_\pm = \lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x)$ e si ha

$$0 \leq \lambda_- < y_0 < \lambda_+. \tag{6.90}$$

Per $x \to -\infty$ la soluzione è dunque monotona crescente e limitata, pertanto necessariamente $\lambda_- \in \mathbb{R}$. Siccome, per la regolarità di y e per la continuità dell'arcotangente, esistono anche i limiti

$$\mu_\pm = \lim_{x \to \pm\infty} y'(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \arctan y(x) = \arctan(\lambda_\pm), \tag{6.91}$$

invocando il Teorema 6.3.1 dell'asintoto otteniamo che siccome $\lambda_- \in \mathbb{R}$ allora $\mu_- = 0$. Rileggendo la (6.91) alla luce di questa informazione, si ottiene

$$0 = \mu_- = \arctan(\lambda_-) \quad \Rightarrow \quad \lambda_- = 0$$

e dunque $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 0$. Per il limite a $+\infty$, intuitivamente si ha $\lambda_+ = +\infty$. Lo possiamo dimostrare supponendo per assurdo che si abbia $\lambda_+ \in \mathbb{R}$ ed usando ancora il Teorema 6.3.1 dell'asintoto, che ci dice che deve essere $\mu_+ = 0$. Utilizzando ancora la (6.91) con questa nuova informazione, otteniamo

$$0 = \mu_+ = \arctan(\lambda_+) \quad \Rightarrow \quad \lambda_+ = 0,$$

ma questo è in contrasto con la (6.90). Deve quindi essere $\lambda_+ = +\infty$. □

Esempio 6.3.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\sqrt{1+x^2+y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6.92}$$

e cerchiamo di scrivere lo sviluppo di Maclaurin della soluzione al second'ordine. Prima di tutto studiamo il membro destro $f(x, y) = x\sqrt{1+x^2+y^2}$. Intuitivamente, nella variabile y, ha un andamento lineare e ciò dovrebbe lasciar intuire che la funzione è lipschitziana. Lo possiamo verificare studiando la derivata parziale

$$\partial_y f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sqrt{1+x^2+y^2}\right) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \le y$$

e quindi è limitata su ogni insieme limitato. Il Teorema 6.2.17 garantisce l'esistenza di una soluzione locale in un intorno di $x_0 = 0$. Inoltre, siccome la funzione f è di classe C^1, si ottiene che y' è di classe C^1 e quindi y è di classe C^2. Derivando l'equazione otteniamo l'espressione della derivata seconda

$$\begin{aligned} y''(x) = (y'(x))' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sqrt{1+x^2+y^2(x)}\right) = \sqrt{1+x^2+y^2(x)} + x\frac{x+y(x)y'(x)}{\sqrt{1+x^2+y^2(x)}} \\ &= \sqrt{1+x^2+y^2(x)} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2(x)}}\left(1+y(x)\sqrt{1+x^2+y^2(x)}\right) \end{aligned}$$

e dunque i valori

$$y'(0) = 0 \quad \text{e} \quad y''(0) = 1.$$

Allora, il polinomio di Maclaurin del second'ordine della soluzione è

$$T^{(2)}_{y,0}(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2},$$

da cui possiamo dedurre che $y(x) = x^2/2 + o(x^2)$ per $x \sim 0$. □

Esempio 6.3.4 (l'equazione logistica)**.** Studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(k-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6.93}$$

che ha il nome di equazione logistica ed è un modello di crescita di popolazioni. Nella (6.93) sono presenti delle costanti di modellizzazione che tengono conto del tassi di riproduttività degli individui e di una disponibilità limitata di risorse. Non volendoci addentrare nello sviluppo o nella giustificazione del modello, abbiamo ridotto queste costanti ad una (che idealmente tiene conto di tutte le altre una volta che si sono scelte delle opportune unità di misura), la costante k presente nell'equazione. Assumiamo che $k > 0$ (e tra poco vedremo come mai quest'ipotesi è sensata) e anche che $y \geq 0$, essendo che è la variabile che conta il numero degli individui presenti nella popolazione al "tempo" x. Per capire meglio il significato dell'equazione, facciamo notare che il modello di crescita di popolazioni più crudo cui si possa pensare prescrive che la variazione degli individui y' sia direttamente proporzionale al numero degli individui presenti nella popolazione (perché ovviamente aumentano le possibilità riproduttive). Un'equazione del genere si scrive come $y' = \beta y$, dove $\beta > 0$ è il tasso di nascita. Il problema di Cauchy (6.93) sarebbe allora lo stesso che nell'Esempio 6.0.5 e l'andamento delle soluzioni è rappresentato in Figura 6.1: sono curve esponenziali che divergono. Questo corrisponderebbe a non avere il termine in parentesi nell'equazione in (6.93) (dopo avere rinormalizzato il tasso di nascita a $\beta = 1$). È chiaro che un tale modello è poco realistico. La prima correzione che si può fare è nell'aggiungere l'effetto che l'ambiente ha risorse limitate e che quindi oltre una certa popolazione queste iniziano a scarseggiare, favorendo l'estinzione (o una minore propensione alla riproduttività) degli individui: si tratta del termine entro parentesi, che per il fatto di avere un segno negativo davanti ad y ha l'effetto che se la popolazione è ingente l'effetto di decrescita è determinato da $-y^2$, che domina rispetto a ky se y è molto grande.

Spiegate le caratteristiche del modello, affrontiamo ora lo studio dell'equazione con gli strumenti che abbiamo a nostra disposizione. Il membro destro è $f(x, y) = y(k-y) = ky-y^2$, che è una funzione continua e inoltre ha derivata pari a $\partial_y f(x, y) = k-2y$ che risulta limitata su ogni insieme limitato che contenga la variabile y. Allora il Teorema di Picard–Lindelöf garantisce esistenza ed unicità locale della soluzione del problema di Cauchy (6.93) e questa soluzione può essere estesa per massimalità su $I = [0, +\infty)$ (immaginando x come variabile temporale, ha senso studiare l'evoluzione futura della popolazione). L'equazione è autonoma e a variabili separabili e le soluzioni costanti sono gli zeri della funzione $h(y) = y(k - y)$, ovvero $y(x) = 0$ per ogni $x \in I$ (corrispondente a non avere individui nella popolazione) e $y(x) = k$ per ogni $x \in I$, da cui si evince che la costante k rappresenta la popolazione di equilibrio. Inoltre, per unicità, queste due soluzioni costanti sono due barriere e non possono essere intersecate da nessun'altra soluzione. Ciò significa che se la popolazione iniziale è $y_0 \in (0, k)$ allora $y(x) \in (0, k)$ per ogni $x \in I$ e se $y_0 > k$ allora $y(x) > k$ per ogni $x \in I$.

Per capire l'andamento delle soluzioni, ne studiamo la monotonia. Lo studio del segno di y' ci porta a dedurre che $\operatorname{sgn}(y') = \operatorname{sgn}(y(k - y))$ e questo è positivo se $y \in (0, k)$ e negativo se $y > k$ (la quantità y è sempre positiva, quindi il segno è determinato da $k - y$). Pertanto, se il dato iniziale y_0 è maggiore di k, la popolazione decrescerà, ma essendo limitata dalla soluzione costante $y = k$, possiamo applicare il Teorema 6.3.1 dell'asintoto e ottenere che, siccome $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, il limite della derivata $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)(k - y(x)) = \lambda(k - \lambda)$ è nullo. Allora, non potendo essere $\lambda = 0$, deve necessariamente essere $\lambda = k$. Abbiamo dimostrato che se il sistema parte da una situazione di sovrappopolazione allora tende a stabilizzarsi verso la soluzione stazionaria al crescere del tempo. Viceversa, partendo con un dato iniziale $y_0 \in (0, k)$ la derivata y' è maggiore di zero, quindi la funzione cresce. Essendo limitata dall'alto dalla soluzione costante $y = k$, sempre applicando il Teorema 6.3.1 dell'asintoto, si ottiene che $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = k$ anche in questo caso. Partendo da una popolazione modesta, sotto la soglia di equilibrio $y = k$, la popolazione crescerà fino a raggiungere, asintoticamente, il valore di equilibrio.

Possiamo ricavare ulteriori informazioni: siccome la soluzione y è di classe C^1 per definizione ed il membro destro è un prodotto di funzioni di classe C^1, tale risulta la derivata prima y', permettendoci di concludere che y è di classe C^2. Allora possiamo studiare la derivata seconda

$$y''(x) = (y'(x))' = (k - 2y)y' = y(k - y)(k - 2y),$$

il cui segno è determinato dal segno del prodotto dei termini tra parentesi. Si ottiene che $y'' > 0$ per $y \in (0, k2)$ e per $y > k$. Ciò significa che le soluzioni dei problemi di Cauchy con. dato iniziale $y_0 > k$ sono decrescenti e convesse per ogni $x \in I$, mentre quelle con dato iniziale $y_0 \in (0, k)$, ovvero quelle confinate a stare nella striscia orizzontale tra le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = k$ sono crescenti e convesse finché non è raggiunto il valore di popolazione $y = k/2$ e concave oltre quel valore.

Da ultimo, ora che sappiamo che cosa aspettarci, possiamo risolvere l'equazione. Scrivendola come $y' = ky - y^2$ è possibile riconoscere un'equazione di tipo Bernoulli (6.54) con $a(x) = k$, $b(x) = -1$ e $m = 2$. La trasformazione da fare è dunque $y = x^\alpha$ con $\alpha = 1/(1 - m) = -1$. Nella variabile z, l'equazione ha la forma $z' + kz = 1$, che, come deve essere, è lineare (e in questo caso addirittura a coefficienti costanti) e la (6.29) ci dice che

$$z(x) = z_0 e^{-kx} + \frac{1}{k},$$

dove $z_0 = 1/y_0$. Trasformando in y, otteniamo che la soluzione del problema di Cauchy (6.93) per l'equazione logistica è

$$y(x) = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-kx}} \qquad x \in I = [0, +\infty),$$

che si chiama *curva logisitca* o *sigmoide* (anche se questo secondo nome è più utilizzato quando $I = \mathbb{R}$). Un grafico di alcune curve integrali si trova nella Figura 6.13.

Esempio 6.3.5. Si studi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y - x| \\ y(0) = a \end{cases} \tag{6.94}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Il membro destro è $f(x, y) = |y - x|$, per il quale è facile mostrare la lipschitzianità globale, infatti, grazie alla disuguaglianza triangolare inversa (si veda la Proposizione 1.5.24-3), abbiamo

$$\big||y_1 - x| - |y_2 - x|\big| \leq |y_1 - x - y_2 + x| = |y_1 - y_2|$$

che dimostra che vale la (6.76) con $L = 1$. Il Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf garantisce allora l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale; osservando che il dominio della funzione f è $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e quindi è di tipo striscia, il Teorema 6.2.19 garantisce che la soluzione è definita su tutto l'asse reale. Pertanto, per ogni $a \in \mathbb{R}$ ci aspettiamo di ottenere una soluzione unica $(y_a, \mathbb{R})$. Ci chiediamo se esistano soluzioni costanti, a derivata nulla. Ciò vorrebbe dire che deve essere $f(x, y) = |y - x| = 0$, ovvero $y(x) = x$, che costante non è. Tuttavia questo suggerisce di passare alla variabile $z(x) := y(x) - x$ e di scrivere il problema di Cauchy (6.94) per la funzione z. Siccome $z' = y' - 1$, abbiamo

$$\begin{cases} z' = |z| - 1 \\ z(0) = a \end{cases} \tag{6.95}$$

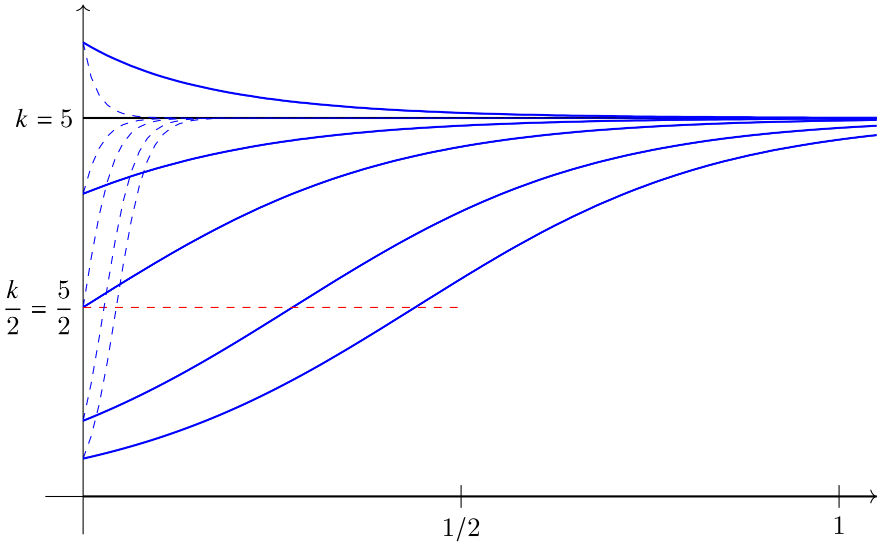


Figura 6.13: Alcune soluzioni dei problemi di Cauchy (6.93) con $k = 5$ e $y_0 = 1/2, 1, 5/2, 4, 6$ (blu); sono anche evidenziate le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = 5$ (nero). La figura non è in scala: l'asse x è stato dilatato di un fattore 10 per far risaltare il cambio ci concavità (in blu tratteggiato senza la dilatazione). In rosso tratteggiato l'ordinata $y = k/2 = 5/2$ dove si trovano i punti di flesso.

che ora analizziamo. Il secondo membro $f(x, z)$ ora non dipende da x, quindi l'equazione è autonoma (ma non immediatamente integrabile); è lipschitziano su tutto $\mathbb{R}$, e ammette soluzioni costanti $|z| - 1 = 0$, ovvero $z(x) = \pm 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In virtù dell'unicità delle soluzioni, queste sono barriere invalicabili e sono ottenute per $a = \pm 1$. Dunque il piano è diviso in tre regioni, a seconda della posizione del dato iniziale $z(0) = a$: distinguiamo le due regioni tali che $|a| > 1$ e la regione in cui $|a| < 1$, che dobbiamo analizzare separatamente. La sola informazione su a determina la regione in cui si trova il grafico della soluzione e da ciò riusciremo a dedurre preziose informazioni sul comportamento della soluzione.

- Sia $a > 1$. In questo caso, siccome siamo sopra la barriera data dalla soluzione costante $z = 1$, si avrà $z(x) > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque avremo $|z| = z > 1$. Da qui ricaviamo tre informazioni: la prima è che la funzione è crescente, perché $z' = |z| - 1 > 1 - 1 = 0$; la seconda è che possiamo risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} z' = z - 1 \\ z(0) = a \end{cases} \tag{6.96}$$
(come faremo tra poco); la terza è che una volta scritta l'equazione senza valore assoluto deduciamo che la soluzione è di classe C^∞ (con il solito argomento ricorsivo) – in particolare è di classe C^2 e lo studio della derivata seconda $z'' = (z')' = (z-1)' = z' = z - 1 > 0$ ci dice che le soluzioni z_a sono convesse per ogni $a > 1$.

L'equazione in (6.96) è lineare e anche a variabili separabili. Le tecniche delle Sezioni 6.1.1 o 6.1.3 ci fanno arrivare a

$$z_a(x) = 1 + (a-1)e^x \tag{6.97}$$

che è una funzione esponenziale, è crescente (perché $a - 1 > 0$) ed è consistente con tutta l'analisi qualitativa svolta prima di risolvere l'equazione.

- Sia $a < -1$. In questo caso, siccome siamo sotto la barriera data dalla soluzione costante $z = -1$, si avrà $z(x) < -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque avremo $|z| = -z > 1$. Da qui ricaviamo tre informazioni: la prima è che la funzione è crescente, perché $z' = -z - 1 > 1 - 1 = 0$; la seconda è che possiamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -z - 1 \\ z(0) = a \end{cases} \tag{6.98}$$

(come faremo tra poco); la terza è che una volta scritta l'equazione senza valore assoluto deduciamo che la soluzione è di classe C^∞ (con il solito argomento ricorsivo) – in particolare è di classe C^2 e lo studio della derivata seconda $z'' = (z')' = (-z-1)' = -z' = z + 1 < 0$ ci dice che le soluzioni z_a sono concave per ogni $a < -1$.
L'equazione in (6.98) è lineare e anche a variabili separabili. Le tecniche delle Sezioni 6.1.1 o 6.1.3 ci fanno arrivare a

$$z_a(x) = -1 + (a+1)e^{-x} \tag{6.99}$$

che è una funzione esponenziale, è crescente (perché $a + 1 < 0$ – si noti il segno meno all'esponente) ed è consistente con tutta l'analisi qualitativa svolta prima di risolvere l'equazione.

- Sia $|a| < 1$, ovvero sia $-1 < a < 1$. Siamo ora nella regione di piano compresa tra le barriere $z = \pm 1$, quindi si ha $|z(x)| < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e da qui otteniamo immediatamente che la soluzione è strettamente decrescente: infatti, $z' = |z| - 1 < 1 - 1 = 0$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, dunque, la soluzione z_a è strettamente monotona e limitata. Usando il Teorema 3.1.27 (e l'Esercizio 3.1.28) si ottiene che esistono i limiti

$$\lambda_- = \lim_{x\to-\infty} z_a(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} z_a(x) \quad \text{e} \quad \lambda_+ = \lim_{x\to+\infty} z_a(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} z_a(x);$$

inoltre, è possibile passare ai limiti $x \to \pm\infty$ nell'equazione in (6.95) ottenendo che esistono i limiti

$$\mu_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} z_a'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (|z_a(x)| - 1) = |\lambda_\pm| - 1.$$

Siccome $\lambda_\pm$ sono finiti, il Teorema 6.3.1 dell'asintoto garantisce che $\mu_\pm = 0$ e dunque otteniamo $|\lambda_\pm| = 1$. Siccome deve essere $\lambda_+ < \lambda_-$, abbiamo dimostrato che, per ogni $a \in (-1,1)$ la soluzione z_a corrispondente ammette limiti a $\pm\infty$ e si ha

$$\lambda_- = \lim_{x\to-\infty} z_a(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} z_a(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_+ = \lim_{x\to+\infty} z_a(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} z_a(x) = -1.$$

La monotonia stretta e la limitatezza permettono anche di dedurre che ogni soluzione z_a avrà un unico punto di flesso ed esiste un unico punto $x_a \in \mathbb{R}$ in cui la soluzione z_a taglia l'asse x, ovcero tale che $z_a(x_a) = 0$. Osserviamo che se $a = 0$ abbiamo $x_a = 0$, se $a \in (0, 1)$, abbiamo $x_a > 0$ e se $a \in (-1, 0)$ abbiamo $x_a < 0$. Inoltre, se $x < x_a$ la soluzione sarà positiva, quindi $z_a(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, x_a)$, mentre se $x > x_a$ la soluzione sarà negativa, quindi $z_a(x) < 0$ per ogni $x \in (x_a, +\infty)$. Sfruttando queste informazioni sul segno, possiamo risolvere esplicitamente l'equazione incollando le soluzioni dei sistemi (6.96) e (6.98) per $x < x_a$ e $x > x_a$, rispettivamente. Distinguiamo due casi a seconda che a sia negativo o meno.

- Sia $0 \le a < 1$. In questo caso sappiamo che la (6.97) è la soluzione per $x \le x_a$ (dove $z_a \ge 0$) e questa si deve raccordare con una soluzione del tipo (6.99) (ma con una costante diversa da $a + 1$ perché ora nel ramo negativo non si ha la condizione ci Cauchy) $z^c(x) = -1+ce^{-x}$ per $x > x_a$. Imponendo che la soluzione (6.97) si annulli per $x = x_a$, troviamo il valore di x_a, che a sua volta, imponendo la continuità della soluzione (ovvero che $z^c(x_a) = 0$), permette di trovare il valore c. Abbiamo

$$0 = z_a(x_a) \overset{(6.97)}{=} 1 + (a-1)e^{x_a} \quad \Rightarrow \quad x_a = \log \frac{1}{1-a}$$

  e di conseguenza

$$0 \overset{!}{=} z^c(x_a) = -1 + ce^{-x_a} = -1 + c(1-a) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{1-a}.$$

  Abbiamo trovato che la soluzione è dunque

$$z_a(x) = \begin{cases} 1 + (a-1)e^x & \text{se } x \le \log \dfrac{1}{1-a}, \\ -1 + \dfrac{1}{1-a}e^{-x} & \text{se } x > \log \dfrac{1}{1-a}. \end{cases}$$

- Sia $-1 < a < 0$. In questo caso sappiamo che la (6.99) è la soluzione per $x \ge x_a$ (dove $z_a \le 0$) e questa si deve raccordare con una soluzione del tipo (6.97) (ma con una costante diversa da $a - 1$ perché ora nel ramo positivo non si ha la condizione ci Cauchy) $z^c(x) = 1 + ce^x$ per $x < x_a$. Imponendo che la soluzione (6.99) si annulli per $x = x_a$, troviamo il valore di x_a, che a sua volta, imponendo la continuità della soluzione (ovvero che $z^c(x_a) = 0$), permette di trovare il valore c. Abbiamo

$$0 = z_a(x_a) \overset{(6.99)}{=} -1 + (a+1)e^{-x_a} \quad \Rightarrow \quad x_a = \log(a+1)$$

  e di conseguenza

$$0 \overset{!}{=} z^c(x_a) = 1 + ce^{x_a} = 1 + c(a+1) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-1}{a+1}.$$

  Abbiamo trovato che la soluzione è dunque

$$z_a(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{a+1}e^x & \text{se } x < \log(a+1), \\ -1 + (a+1)e^{-x} & \text{se } x \ge \log(a+1). \end{cases}$$

Notiamo che in questo caso le soluzioni cambiano concavità una volta e precisamente quando tagliano l'asse x.

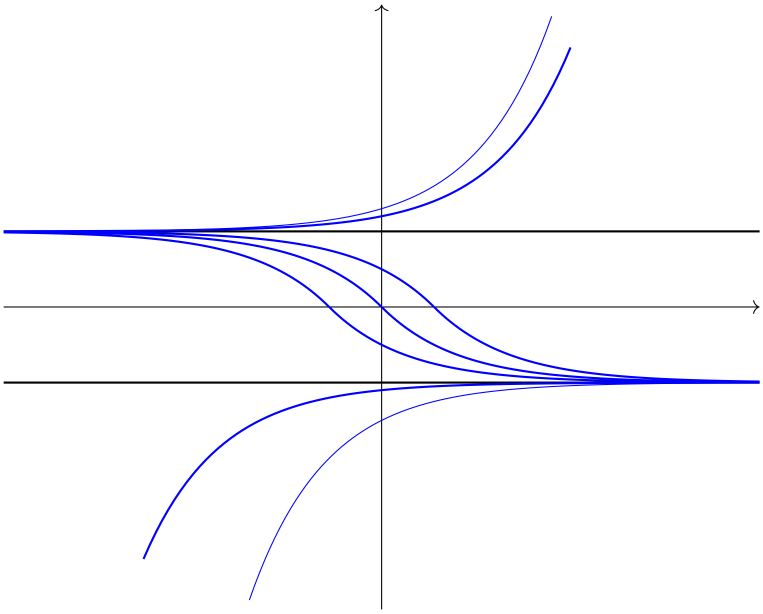


Figura 6.14: Alcune soluzioni dei problemi di Cauchy (6.95) con dati iniziali $a = -1.1, -1/2, 0, 1/2, 1.2$ (blu spesso) $a = -1.5, 1.3$ (blu leggero); sono anche evidenziate le soluzioni costanti $y = \pm 1$ (nero).

Le soluzioni del problema di Cauchy (6.95) sono rappresentate in Figura 6.14. Ricordando ora che $y(x) = x + z(x)$, possiamo scrivere le soluzioni del sistema (6.94) da cui siamo partiti. La soluzione è

$$y_a(x) = \begin{cases} x + 1 + (a-1)e^x & \text{se } a \geq 1, \\ \left.\begin{cases} x + 1 + (a-1)e^x & \text{se } x \leq \log \dfrac{1}{1-a} \\ x - 1 + \dfrac{1}{1-a} e^{-x} & \text{se } x > \log \dfrac{1}{1-a} \end{cases}\right\} & \text{se } 0 \leq a < 1, \\ \left.\begin{cases} x + 1 - \dfrac{1}{a+1} e^x & \text{se } x < \log(a+1) \\ x - 1 + (a+1)e^{-x} & \text{se } x \geq \log(a+1) \end{cases}\right\} & \text{se } -1 < a < 0, \\ x - 1 + (a+1)e^{-x} & \text{se } a \leq -1, \end{cases}$$

che sono rappresentate in Figura 6.15

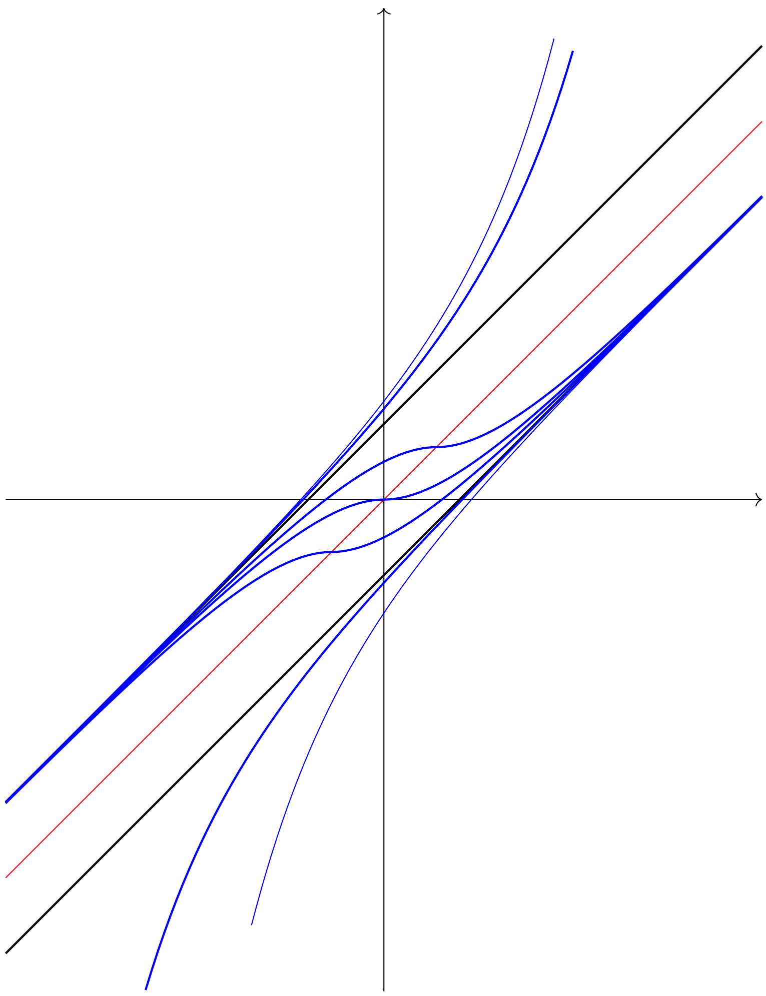


Figura 6.15: Alcune soluzioni dei problemi di Cauchy (6.95) con dati iniziali $a = -1.1, -1/2, 0, 1/2, 1.2$ (blu spesso) $a = -1.5, 1.3$ (blu leggero); sono anche evidenziate le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = \pm 1$ (nero). È anche rappresentata la retta $y = x$ (rosso) lungo la quale ci sono i punti di flesso.

Capitolo 7

Approfondimenti

Questo capitolo di approfondimenti contiene materiale aggiuntivo rispetto a quello dei capitoli precedenti e ha lo scopo di illustrare alcuni concetti che possono essere omessi in una conoscenza di base dell'analisi matematica. Ci sembra opportuno raccogliere questi argomenti per dare una presentazione più completa e per offrire alcuni spunti di approfondimento sulla vastità e la ricchezza dell'analisi.

7.1 Concetti di base

7.1.1 La definizione assiomatica dei numeri naturali

Quando, nella Sezione 1.5, abbiamo introdotto l'insieme $\mathbb{N}$ nella (1.33), l'abbiamo presentato come un oggetto noto. Il matematico Giuseppe Peano propose un gruppo di assiomi che definiscono l'insieme dei numeri naturali. Si tratta di una definizione, appunto, assiomatica, come quella che abbiamo dato dell'insieme dei numeri reali nella Sezione 1.5.1. Peano propone di caratterizzare la terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$, dove $\mathbb{N}$ è l'insieme (1.33), 0 è un elemento di $\mathbb{N}$ e $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione *successore*, tramite le seguenti proprietà.

Assiomi 7.1.1 (di Peano)**.** *Le seguenti cinque affermazioni sono gli assiomi di Peano:*

1. *Esiste un numero* $0 \in \mathbb{N}$.
2. *Esiste una funzione* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *(chiamata* successore*).*
3. $m \neq n$ *implica* $\sigma(m) \neq \sigma(n)$.
4. $\sigma(n) \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.
5. *Se* $S \subseteq \mathbb{N}$ *è un insieme tale che*
   - *(i)* $0 \in S$,
   - *(ii)* $n \in S$ *implica* $n + 1 \in S$,

   allora $S = \mathbb{N}$.

Presentiamo un'analisi delle informazioni contenute negli assiomi, senza dare più dettagli, perché si andrebbe molto oltre la portata di questo corso. Il primo assioma dice che l'insieme $\mathbb{N}$ non è vuoto, specificandone un elemento, lo zero. Il secondo assioma dice che esiste una funzione, la funzione successore σ, il cui dominio è $\mathbb{N}$ (quindi si potranno definire altre funzioni con dominio $\mathbb{N}$). Il terzo assioma dice che la funzione successore è iniettiva, mentre il quarto dice che non è suriettiva (perché 0 non è il successivo di nessun numero). La funzione successore $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non può essere quindi biunivoca e questo esclude che $\mathbb{N}$ abbia un numero finito di elementi. Del principio di induzione, il quinto assioma, abbiamo già parlato abbondantemente nella Sezione 1.6, nella quale abbiamo anche visto sue varie applicazioni.

Chiudiamo sottolineando che la potenza degli Assiomi 7.1.1 di Peano è nel fatto che ogni altra terna $(\mathbb{X}, 0_{\mathbb{X}}, \xi)$ che li soddisfi risulta essere "la stessa" che la terna $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$, nel senso che esiste una funzione biunivoca che trasforma $(\mathbb{N}, 0, \sigma)$ in $(\mathbb{X}, 0_{\mathbb{X}}, \xi)$.

7.1.2 Altri insiemi numerici?

7.1.3 Contare oggetti: introduzione al calcolo combinatorio

Definizione 7.1.2. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; si definiscono:*

- *il* fattoriale di *n, che si indica con $n!$, come il prodotto dei numeri naturali da 1 ad n,*

$$n! := n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \tag{7.1a}$$

e restituisce il numero di modi in cui si possono disporre n oggetti; inoltre, si pone

$$0! := 1; \tag{7.1b}$$

- *se $k \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$, il* coefficiente binomiale *"n su k", che si indica con $\binom{n}{k}$, come*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k!)} \tag{7.2}$$

e restituisce il numero di modi in cui si possono disporre n oggetti presi k alla volta;

- *se $k \in \mathbb{N}$, il* coefficiente binomiale generalizzato *"α su k" è definito da*

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \tag{7.3}$$

Notiamo che manipolando i fattoriali nella (7.2), essa si può scrivere anche nella forma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!},$$

che è la motivazione per la generalizzazione (7.3) ad $\alpha \in \mathbb{R}$ qualunque.

Proposizione 7.1.3 (proprietà del fattoriale e dei coefficienti binomiali)**.** *Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (e in questo caso per ogni $k \in \mathbb{N}$) valgono le seguenti* *proprietà:*

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad \text{(ricorsività)} \tag{7.4a}$$
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad e \qquad \binom{\alpha}{1} = \alpha \tag{7.4b}$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad e \qquad \binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} \tag{7.4c}$$
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad e \qquad k\binom{\alpha}{k} = \alpha\binom{\alpha-1}{k-1} \tag{7.4d}$$

Dimostrazione. La dimostrazione delle (7.4) è immediata e si ottiene usando le definizioni (7.1), (7.2) e (7.3). Per dimostrare la (7.4a) notiamo che

$$(n+1)! = (n+1)\cdot \underbrace{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}_{n!} = (n+1)n!$$

dove abbiamo usato la definizione (7.1). Usando la (7.2) e tenendo conto della (7.1b) possiamo scrivere

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0!)} = 1, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1!} = \alpha.$$

Per dimostrare le (7.4c), manipoliamo il secondo membro usando la definizione (7.2) e la (7.4a) per ottenere il primo:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)(n-k)!}\\ &= \frac{n![n+1-k+k]}{k(k-1)!(n+1-k)(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

La stessa dimostrazione vale per dimostrare l'uguaglianza con il coefficiente binomiale generalizzato. La dimostrazione delle (7.4d) è questione di una semplice verifica,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

dove abbiamo usato la (7.4a) due volte; la stessa dimostrazione dà anche la relazione per il coefficiente binomiale generalizzato. La dimostrazione è conclusa. □

Dato $n \in \mathbb{N}$, il fattoriale $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n. È utile avere una formula che permetta di calcolarlo senza ricorrere alla (7.4a). Vale, in proposito, il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo alla Sezione 7.5.3.

Teorema 7.1.4 (formula di Stirling)**.** *Per grandi valori di $n \in \mathbb{N}$ vale l'approssimazione*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{7.5}$$

Appare in alcune formule, tra le altre, certe legate agli integrali di funzioni trigonometriche, il simbolo

$$n!! := n(n-2)(n-4)\cdots\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ è dispari,}\\ 2 & \text{se } n \text{ è pari,}\end{cases} \tag{7.6}$$

chiamato *semifattoriale* o *doppio fattoriale*, che è il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali a n che hanno la stessa parità di n. Ad esempio,

$$6!! = 6\cdot 4\cdot 2 = 48; \qquad 9!! = 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = 945.$$

7.1.4 L'insieme di Cantor ?

7.2 Successioni

7.2.1 Massimo limite e minimo limite ?

7.2.2 La costruzione dei numeri reali

7.2.3 La successione $\{\sin n\}$

In questa sezione ci occupiamo della successione di numeri reali $\{\sin n\}$: dimostreremo una proprietà di densità di un opportuno insieme in $\mathbb{R}$ che ha come conseguenza il fatto che la successione $\{\sin n\}$ non ammette limite.

La strategia che adotteremo è la seguente: mostreremo che, scelto un qualunque numero $\ell \in [-1,1]$, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{\sin n_k\}_k$ che converge a ℓ, ovvero tale che $\lim\limits_{k\to\infty} \sin n_k = \ell$. Per fissare la notazione, ricordiamo la Definizione 2.1.6 di sottosuccessione e definiamo che cosa si intende per punto limite.

Definizione 7.2.1 (punto limite)**.** *Sia $\{x_n\}$ una successione reale e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dice che ℓ è un* punto limite *di $\{x_n\}$ se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$. L'insieme dei punti limite di una successione $\{x_n\}$ si indica con $\mathcal{L}(x_n)$.*

Dalla definizione dell'insieme dei punti limite e dall'unicità del limite si ottiene subito che una successione reale $\{x_n\}$ ha limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\mathcal{L}(x_n) = \{\ell\}$, ovvero se l'insieme dei punti limite è un singoletto che contiene il limite come unico elemento. Osserviamo che si ha, ad esempio, $\mathcal{L}(\cos(n\pi)) = \{-1, 1\}$.

Rammentiamo un'ultima definizione prima di presentare il teorema che ci interessa dimostrare.

Definizione 7.2.2 (densità di un insieme)**.** *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ due insiemi. Si dice che A è denso in B se per ogni elemento $b \in B$ esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ di elementi di A tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.*

È ben nota la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, conseguenza della proprietà archimedea dei numeri reali. Il concetto di densità si può estendere a situazioni più generali, ma non ci soffermiamo su questo aspetto ora.

Teorema 7.2.3. *Si ha*

$$\mathcal{L}(\sin n) = [-1, 1]. \tag{7.7}$$

Dimostrazione. Come annunciato, per dimostrare la (7.7) si mostrerà che un qualunque numero in $[-1, 1]$ potrà essere raggiunto come limite di un'opportuna sottosuccessione di $\{\sin n\}$. Dato dunque $\ell \in [-1, 1]$, dobbiamo costruire una successione $k \mapsto n_k$ tale che $\sin n_k \to \ell$ per $k \to \infty$, ovvero tale che la distanza

$$0 \leq |\sin n_k - \ell|$$

possa essere resa piccola a piacere. Sia ora $x \in [0, 2\pi)$ tale che $\sin x = \ell$; possiamo scrivere equivalentemente che

$$0 \leq |\sin n_k - \ell| = |\sin n_k - \sin x| = |\sin(n_k - 2\pi m_k) - \sin x| \leq |n_k - 2\pi m_k - x|, \quad (7.8)$$

dove abbiamo sfruttato prima la periodicità della funzione seno, con $m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qualunque, e poi la continuità della funzione seno. Allora la tesi segue se dimostriamo che l'insieme di numeri della forma

$$D := \{p - 2\pi q : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \quad (7.9)$$

è denso in $[0, 2\pi)$. Se così fosse, infatti, per ogni $x \in [0, 2\pi)$ esiste una successione di numeri $\{n_k - 2\pi m_k\}_k \subseteq D$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} (n_k - 2\pi m_k) = x$$

e quindi,

$$\lim_{k\to\infty} \sin n_k = \lim_{k\to\infty} \sin(n_k - 2\pi m_k) = \sin x = \ell,$$

come richiesto. La densità di D in $[0, 2\pi)$ è stabilita nella Proposizione 7.2.5. □

Osservazione 7.2.4. Notiamo che nella scelta del multiplo m_k nella (7.8) è necessario escludere che possa essere $m_k = 0$, perché se $n_k \in \mathbb{N}$ non è possibile rendere la distanza $|n_k - x|$ piccola a piacere per un punto $x \in [0, 2\pi)$ generico. Di conseguenza notiamo che $0 \notin D$, perché π è irrazionale. Infine, non è restrittivo supporre che $p \neq 0$, perché altrimenti D conterrebbe elementi negativi, che chiaramente non appartengono a $[0, 2\pi)$. L'insieme D che ci interessa è dunque il seguente

$$D := \{p - 2\pi q : p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \quad (7.10)$$

ed è di questo che ci occupiamo nella prossima proposizione. □

Proposizione 7.2.5. *L'insieme D definito nella* (7.10) *è denso in* $[0, 2\pi)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è articolata in due passi.

Passo 1: 0 è punto di accumulazione per D. Affermiamo che

$$\inf_{p,q\in\mathbb{N}} |p - 2\pi q| = 0. \quad (7.11)$$

Usando la definizione di estremo inferiore, la (7.11) è equivalente a dimostrare che

$$\text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ esistono } p_k, q_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tali che } |p_k - 2\pi q_k| < \frac{1}{k}. \quad (7.12)$$

Per dimostrare la (7.12) fissiamo un numero $k \in \mathbb{N}$ e consideriamo, per ogni $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, i numeri $\langle 2\pi i \rangle$, dove usiamo il simbolo $\langle \cdot \rangle$ per indicare la funzione mantissa, ovvero la parte decimale di un numero, definita nella (1.45). Abbiamo $k+1$ numeri: necessariamente[1], ce ne sono almeno due di loro distinti, diciamo $\langle 2\pi i_k \rangle$ e $\langle 2\pi j_k \rangle$, che distano tra loro al più $1/k$, ovvero

$$\frac{1}{k} > \left|\langle 2\pi i_k \rangle - \langle 2\pi j_k \rangle\right| = \left|2\pi i_k - 2\pi j_k - [2\pi i_k] + [2\pi j_k]\right| = |p_k - 2\pi q_k|,$$

dove abbiamo definito $p_k := i_k - j_k$ e $q_k := [2\pi i_k] - [2\pi j_k]$; qui non è illecito supporre che $i_k > j_k$; altrimenti si inverte. La (7.12) è dunque dimostrata.

Passo 2: densità. Sia $x \in [0, 2\pi)$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Nel passo 1 abbiamo dimostrato che esistono $p_k, q_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $d_k := p_k - 2\pi q_k$ soddisfa

$$-\frac{1}{k} < d_k < \frac{1}{k}.$$

Ricordando che $d_k \in D$ e dunque non è nullo, distinguiamo due casi a seconda del segno di d_k.
Se $d_k > 0$, abbiamo $0 < d_k < 1/k$; definiamo l'intero

$$r_k := \left[\frac{x}{d_k}\right] \tag{7.13a}$$

e osserviamo che, per le proprietà della funzione parte intera (si vedano la Definizione 1.5.27 e il Lemma 1.5.26), possiamo dedurre il seguente fatto

$$\frac{x}{d_k} - r_k < 1 \quad \Rightarrow \quad x - r_k d_k = x - \underbrace{(p_k r_k - 2\pi q_k r_k)}_{=:d_k^*} < d_k < \frac{1}{k}.$$

Se $d_k < 0$, abbiamo $0 > d_k > -1/k$; definiamo l'intero

$$r_k := \left[\frac{x - 2\pi}{d_k}\right] \tag{7.13b}$$

e osserviamo che $r_k > 0$ e, per le stesse proprietà della funzione parte intera, possiamo dedurre il seguente fatto

$$0 < \frac{x-2\pi}{d_k} - r_k < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 > x - 2\pi - r_k d_k = x - \underbrace{(p_k r_k - 2\pi(q_k r_k - 1))}_{=:d_k^*} > d_k > -\frac{1}{n}.$$

Qualunque sia il segno di d_k, abbiamo trovato un elemento $d_k^* \in D$ (che ha una delle due espressioni nelle (7.13)) tale che

$$|x - d_k^*| < \frac{1}{k},$$

ma allora basta far tendere $k \to \infty$ e ottenere che la successione $\{d_k^*\}$ converge a x. La densità segue dall'arbitrarietà di x. □

[1]Si può dare una formalizzazione di questa *necessità* invocando il *principio dei cassetti*: se ci sono $k+1$ oggetti da distribuire in k cassetti, allora esiste un cassetto che contiene più di un oggetto. Nel nostro caso, i cassetti sono i k intervalli di ampiezza $1/k$ in cui si può dividere l'intervallo $[0, 1)$ e i $k+1$ oggetti sono le mantisse $\langle 2\pi i \rangle$. Il fatto che due oggetti stiano nello stesso cassetto vuol dire che sono entrambi nello stesso intervallo ampio $1/k$, pertanto la loro distanza è minore di $1/k$.

Il Teorema 7.2.3 è dunque dimostrato ed il problema è completamente risolto.

Segnaliamo, per il lettore incuriosito, che la Proposizione 7.2.5 è un'istanza di un risultato più generale sula densità di alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. In particolare, vale il seguente teorema, la cui dimostrazione si può effettuare generalizzando e raffinando, dove servisse, quella della Proposizione 7.2.5.

Teorema 7.2.6. *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'insieme $D_\alpha := \{p + \alpha q \,:\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se α è irrazionale.* □

Osservazione 7.2.7. È opportuno notare che quella proposta non è l'unica via per dimostrare che la successione $\{\sin n\}$ non ha limite. Sfruttando il Teorema 2.2.5, è possibile stabilire che una successione ***non*** ha limite se si trovano due sottosuccessioni distinte che convergono a limiti distinti, allora non esiste il limite della successione madre. Ciò che è curioso è che un metodo per costruirle si basa sul Teorema 7.2.6. Per densità, si trovano infatti due successioni $\{d_k^1\}, \{d_k^2\} \subseteq D_{2\pi}$ tali che, ad esempio, $d_k^1 \to 0$ e $d_k^2 \to \pi/2$ per $k \to \infty$. Abbiamo fatto qualcosa nello stesso spirito per la funzione $x \mapsto \sin(1/x)$ nel limite $x \to 0$ nell'Osservazione 3.1.21. □

7.2.4 Successioni definite per ricorsione

Esercizio 7.2.8.

Sia $\{x_n\}$ la successione reale definita dalla ricorsione

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}, \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Dimostrare che

1. $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. $x_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. $\{x_n\}$ è una successione decrescente;
4. esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ e calcolarlo.

7.3 Funzioni reali di variabile reale

7.3.1 Teoremi sulle funzioni continue: riflessioni e controesempi

Controesempi al Teorema 3.2.10

Il Teorema 3.2.10 ha solamente un'ipotesi sull'intervallo di definizione della funzione f, ovvero che esso sia chiuso e limitato ed una sola ipotesi sulla funzione stessa, ovvero che essa sia continua. Se queste vengono a mancare il teorema non vale. Lo mostriamo con alcuni controesempi. Nel primo, rinunciamo alla continuità considerando

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{4 - x^2} & \text{se } x \in [-2, 2] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Figura 7.1(a). Il dominio è l'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, ma f presenta una discontinuità (eliminabile) in $x = 0$. L'immagine è $(0, 2]$ e dunque esiste il massimo di f, che è pari a 2 ed è assunto in $x_M^{(1)} = -2$ e $x_M^{(2)} = 2$, ma non esiste il minimo: si ha infatti $0 = \inf f([-2, 2])$, ma non esiste $x \in [-2, 2]$ tale che $f(x) = 0$, pertanto non è il minimo.

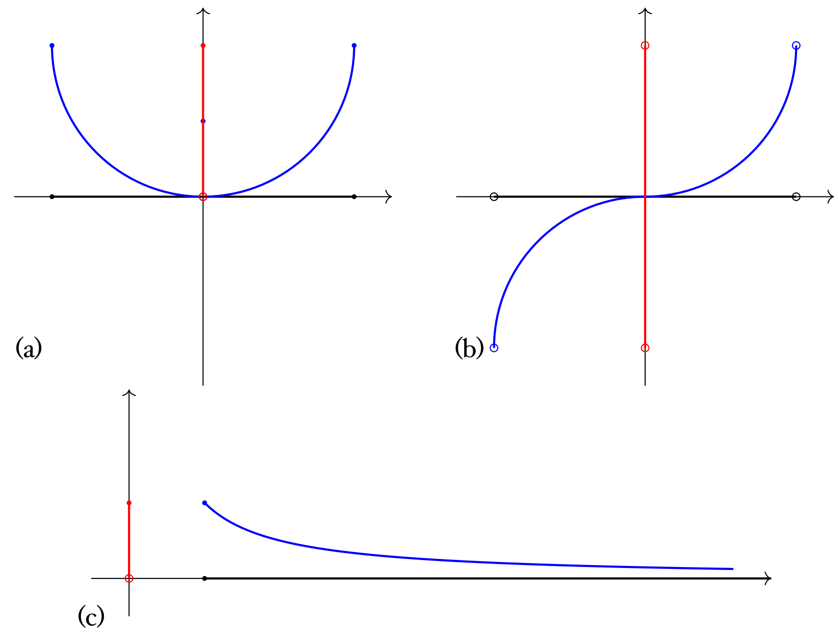


Figura 7.1: Controesempi al Teorema 3.2.10: (a) una funzione non continua; (b) un intervallo non chiuso e limitato; (c) un intervallo chiuso in un estremo ma non limitato. Evidenziati in nero sono i domini, in rosso le immagini; pallino pieno = punto incluso; tondino = punto escluso.

Ora vediamo che cosa succede se si rinuncia alla chiusura dell'intervallo. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} - 2 & \text{se } x \in (-2, 0] \\ 2 - \sqrt{4 - x^2} & \text{se } x \in [0, 2) \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in Figura 7.1(b). Il dominio è $(-2, 2)$, che aperto e l'immagine è $(-2, 2)$. Pertanto avremo che $\inf f((-2, 2)) = -2$ e $\sup f((-2, 2)) = 2$, ma né massimo né minimo esistono. Un esempio ancora più lampante della stessa situazione è quello della funzione tangente sull'intervallo $-\pi/2, \pi/2$, nel quale non è nemmeno limitata.

Un altro controesempio è dato dalla funzione continua $f(x) = 1/x$ definita sull'intervallo $[1, +\infty)$. Anche se l'intervallo è chiuso in 1, esso non è limitato, e quindi non si ottiene la chiusura dell'immagine all'infinito. Infatti, in questo caso abbiamo $\max f([1, +\infty)) = 1$ e $\inf f([1, +\infty)) = 0$, ma il minimo non esiste (Figura 7.1(c)).

semicontinuità?

7.3.2 Dimostrazione del Teorema 1.5.43 fondamentale dell'algebra

In questa sezione presentiamo la dimostrazione del Teorema 1.5.43 fondamentale dell'algebra. Il motivo per cui non poteva essere presentata quando abbiamo enunciato il teorema è che si basa sul Teorema 3.2.10 di Weierstrass, attraverso il seguente lemma e sulla definizione di continuità di una funzione di variabile complessa.

Lemma 7.3.1. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora f ammette minimo assoluto. Viceversa, se il limite fosse $-\infty$, f ammetterebbe massimo assoluto*

Dimostrazione. Dalla Definizione 3.1.14-4, la (3.4d) garantisce che per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste $R_K > 0$ tale che $f(x) > K$ se $x \in (-\infty, -R_K) \cup (R_K, +\infty)$. In particolare, la restrizione $f|_{[-R_K,R_K]}\colon [-R_K, R_K] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua perché restrizione di una funzione continua e ad essa si può applicare il Teorema 3.2.10 di Weierstrass che garantisce l'esistenza del minimo assoluto. □

Non vedremo in questa sede le funzioni di variabile complessa con la loro formalizzazione come abbiamo fatto per le funzioni di variabile reale, ma non è difficile immaginare che cosa voglia dire che una funzione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua. La Definizione 3.2.1 di continuità di una funzione si estende con le stesse notazioni sostituendo la variabile z alla variabile x. Resta solo da intendere che cosa sia un intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$: la Definizione 1.5.20 di intorno si estende con gli stessi simboli ai numeri complessi, dove in questo caso si intende che $|z - z_0|$ è la norma del numero complesso $z - z_0$, ovvero la distanza di z da z_0: siccome i numeri complessi sono elementi del piano, i punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - z_0| < r$, per un certo $r > 0$ fissato sono tutti e soli i punti del disco di centro z_0 e raggio r, ovvero quelli bordati dalla circonferenza di centro z_0 e raggio r. In $\mathbb{R}$ si chiamavano intorni simmetrici ed erano intervalli aperti centrati in un punto x_0 e ampiezza $2r$; in $\mathbb{C}$ sono dischi di centro z_0 e raggio r. Una volta che questo concetto è chiaro, la definizione di continuità di una funzione di variabile complessa è la stessa che si dà per una funzione di variabile reale.

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

Dimostrazione del Teorema 1.5.43. Sia $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Ci interessa dimostrare che P ha almeno uno zero. Se questo vale, si può procedere per induzione su n e concludere, come vedremo alla fine della dimostrazione.

Consideriamo la funzione $|P|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ottenuta prendendo la norma del polinomio P. Essa è una funzione continua (perché tali sono i polinomi) che verifica $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$. Siamo quindi nelle ipotesi del Lemma 7.3.1 che garantisce che la funzione $|P|$ ha minimo assoluto e dunque almeno un punto di minimo assoluto $z_{\min}$. Dimostriamo che P ha uno zero se dimostriamo che $|P(z_{\min})| = 0$. Procediamo per assurdo, supponendo che $|P(z_{\min})| \neq 0$ e costruiamo il polinomio $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definito da

$$Q(z) \coloneqq \frac{P(z_{\min} + z)}{P(z_{\min})}.$$

Esso è non costante perché è un semplice riscalamento di P, che a sua volta diverge ed è tale che

$$Q(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad |Q(z)| = \frac{|P(z_{\min} + z)|}{|P(z_{\min})|} \geq 1 \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}. \tag{7.14}$$

La prima proprietà è ovvia, mentre la seconda discende dal fatto che $z_{\min}$ è un punto di minimo assoluto per $|P|$.

Ora dobbiamo trovare un modo utile per presentare il polinomio Q: dalle informazioni che abbiamo, sappiamo che il suo termine noto è 1, e quindi esistono un intero $m \geq 1$, una costante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e un polinomio R eventualmente nullo, tali che

$$Q(z) = 1 + cz^m + z^{m+1}R(z).$$

Analogamente a $|P|$, anche per $|R|$ valgono le considerazioni fatte precedentemente, in particolare essa è una funzione continua da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ e per il Teorema 3.2.10 di Weierstrass (opportunamente adattato al caso di una funzione di variabile complessa, ma sempre a valori reali!) possiamo dire che esiste una costante $M > 0$ tale che $|R(z)| \leq M$ per ogni $|z| \leq 1$. Da qui segue che

$$|Q(z)| \leq |1 + cz^m| + M|z|^{m+1} \qquad \text{per ogni } |z| \leq 1. \tag{7.15}$$

L'idea è quella di giungere ad una contraddizione trovando un valore di z per il quale la disuguaglianza in (7.14) vale con il segno $<$. Per fare ciò, conviene scrivere sia c che z in forma esponenziale: esitono dunque ϑ, φ e $\rho \in [0, +\infty)$ e $r \in (0, +\infty)$ tali che

$$z = \rho e^{i\vartheta} \qquad \text{e} \qquad c = re^{i\varphi}$$

e dunque

$$1 + cz^m = 1 + r\rho e^{i(\varphi + m\vartheta)}. \tag{7.16}$$

Scegliendo $\vartheta = (\pi - \varphi)/m$, il numero in (7.16) è reale (infatti vale $1 + r\rho^m e^{i\pi} = 1 - r\rho^m$) e risulta strettamente positivo scegliendo $\rho < r^{-1/m}$. Allora, dalla (7.15) abbiamo

$$|Q(z)| \leq (1 - r\rho^m) + M\rho^{m+1} = 1 - \rho^m(r - M\rho)$$

e questo numero è minore di 1 se $\rho < r/M$. In definitiva, scegliendo

$$\rho < \min\left\{1, r^{-1/m}, r/M\right\}$$

(il confronto con 1 è necessario per rispettare il vincolo $|z| \leq 1$), abbiamo violato la disuguaglianza in (7.14), dimostrando così che $P(z_{\min}) = 0$, come avevamo annunciato.

Se il grado di P era $n = 1$, il teorema è dimostrato, altrimenti abbiamo appena dimostrato che P contiene $z - z_{\min}$ come fattore e quindi esiste $\bar{P}$ polinomio di grado $n - 1$ tale che $P(z) = (z - z_{\min})\bar{P}(z)$ e basta applicare lo stesso ragionamento al polinomio $\bar{P}$ e così via fino a giungere ad un polinomio di grado 1. $\square$

7.4 Calcolo differenziale

7.4.1 Controesempi ai Teoremi di Rolle e Lagrange

Presentiamo in questa sezione alcuni controesempi ai Teoremi 4.2.1 di Rolle e 4.2.3 di Lagrange, per far capire la necessità di tutte le ipotesi che si fanno sulle funzioni. Il lavoro che faremo è quello di togliere una per una una sola delle ipotesi e di produrre un controesempio ai teoremi: esibiremo delle funzioni (anche solo attraverso uno schizzo grafico) che non soddisfano i teoremi.

Controesempi al Teorema 4.2.1 di Rolle

Presentiamo in sequenza tre funzioni che non soddisfano solo una delle ipotesi del Teorema 4.2.1 di Rolle.

1. Sia violata la condizione $f(a) = f(b)$: dobbiamo individuare una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) tale che non esista nessun punto $\xi \in (a,b)$ che verifica $f'(\xi) = 0$. Un segmento di retta (evidentemente non orizzontale) è continuo in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), con derivata costante e non nulla. Si veda il grafico in Figura 7.2(a).
2. Sia violatala condizione di derivabilità in (a,b): dobbiamo individuare una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e tale che $f(a) = f(b)$. Violare la derivabilità è facile introducendo un punto angoloso. Si veda il grafico in Figura 7.2(b).
3. Sia violata la condizione di continuità in $[a,b]$: dobbiamo individuare una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b)$, ma che non sia continua in $[a,b]$. Ricordando il Teorema 4.1.6, la derivabilità in (a,b) implica la continuità in (a,b), quindi la funzione che cerchiamo deve essere discontinua in $[a,b] \setminus (a,b)$, ovvero agli estremi $\{a,b\}$. Basta che lo sia in uno solo di loro. Si veda il grafico in Figura 7.2(c).

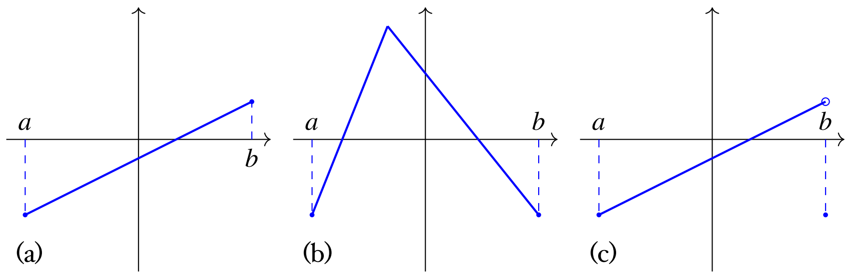


Figura 7.2: Controesempi al Teorema 4.2.1: (a) una funzione che non verifica $f(a) = f(b)$; (b) una funzione non derivabile in (a,b); (c) una funzione non continua in $[a,b]$.

Controesempi al Teorema 4.2.3 di Lagrange

Si vede immediatamente che i controesempi 2. e 3. al Teorema 4.2.1 di Rolle assolvono pure la funzione di essere controesempi del Teorema 4.2.3 di Lagrange. Qui è un accidente che si abbia $f(a) = f(b)$, ma si capisce bene che questa eventualità può essere rimossa senza che vengano meno i controesempi. I casi (b) e (c) in Figura 7.2 forniscono l'intuizione grafica.

7.4.2 Sulle formule di Taylor

Le formule di Taylor hanno notevole importanza perché dànno un risultato di approssimabilità di una funzione generica (a patto che sia sufficientemente regolare) in termini di polinomi. Nelle formule (4.25) e (4.27) abbiamo visto una stima qualitativa ed una quantitativa, rispettivamente, del resto, ovvero dell'errore che si commette nel sostituire ad una funzione il suo polinomio di Taylor di ordine n. Un ulteriore risultato di tipo quantitativo è dimostrato nel Teorema 5.3.7, dove il resto è stimato a mezzo di un integrale, come si vede nella (5.50). In questa sezione, proponiamo altre versioni del resto, e quindi della stima dell'errore. Inoltre, usiamo lo sviluppo di MacLaurin (4.37a) della funzione esponenziale per dimostrare l'irrazionalità del numero di Nepero e.

Stima dell'errore nella formula di Taylor

Irrazionalità di e

Sfruttando lo sviluppo dell'esponenziale (4.37a) si può presentare una facile dimostrazione del fatto che $e \notin \mathbb{Q}$. Iniziamo scrivendo la (4.37a) arrestata all'ordine n con il resto di Lagrange: esiste $c_n \in (0, x)$ tale che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{c_n}}{(k+1)!} x^{k+1}; \tag{7.17}$$

senza perdita di generalità, abbiamo supposto $x > 0$. In virtù di ciò, si ha immediatamente che $e^{c_n} \leq e^x$. Supponiamo ora per assurdo che esistano $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $e = p/q$ e che $q > 3$ e scriviamo la (7.17) per $x = 1$ e $n = q$

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{e^{c_q}}{(q+1)!} =: s + r, \tag{7.18}$$

dove $c_q \in (0, 1)$ è il punto determinato dal Teorema 4.2.21. Moltiplichiamo il membro destro e il membro sinistro per $q!$ e facciamo le seguenti considerazioni:

$$q! s = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$$

in quando $k!$ divide $q!$ pere ogni $k \leq q$; inoltre,

$$0 < q! r = q! \frac{e^{c_q}}{(q+1)!} \leq \frac{e}{q+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

per cui $q! r$ non è intero. Siccome $q! e = q! p/q = (q-1)! p$ è intero a sua volta, non è possibile avere

$$q! e = q! s + q! r,$$

da cui segue l'irrazionalità di e.

che cosa succede nei punti angolosi? sottodifferenziale?

il metodo di Newton

7.4.3 Ancora sulla convessità: definizione generale

In questa sezione presentiamo la definizione generale di convessità che prescinde dalle proprietà di regolarità della funzione e invece fa leva su proprietà geometriche di un insieme particolare legato alla funzione. Procediamo con ordine. Nella Definizione 4.3.27 abbiamo presentato la definizione di combinazione convessa di due punti $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_1$ della retta reale (formula (4.50)). Questa definizione, opportunamente estesa, permette di stabilire quando un insieme è convesso e vale per sottoinsiemi qualunque dello spazio euclideo ad n dimensioni, $\mathbb{R}^n$. Come notazione, useremo lettere in grassetto per indicare i punti dello spazio a più dimensioni: in questo modo, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ è il generico punto dello spazio $\mathbb{R}^n$, ottenuto facendo il prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{R}$. Il lettore è sicuramente avvezzo allo spazio $\mathbb{R}^2$, che è il piano cartesiano, e allo spazio $\mathbb{R}^3$, che è lo spazio tridimensionale che si usa per modellizzare la realtà che ci circonda.

Definizione 7.4.1 (insieme convesso)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto. Si dice che A è* convesso *se per ogni $\bar{\boldsymbol{x}}_0, \bar{\boldsymbol{x}}_1 \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$ il punto*

$$\boldsymbol{x}_t \coloneqq (1-t)\bar{\boldsymbol{x}}_0 + t\bar{\boldsymbol{x}}_1$$

appartiene ad A, ovvero se l'insieme A contiene tutto il segmento *di estremi $\bar{\boldsymbol{x}}_0$ e $\bar{\boldsymbol{x}}_1$ per ogni scelta di $\bar{\boldsymbol{x}}_0, \bar{\boldsymbol{x}}_1 \in A$.*

La visualizzazione di questa proprietà è immediata in dimensione 2 e in dimensione 3.

Definizione 7.4.2 (epigrafico)**.** *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definisce* epigrafico *di f l'insieme*

$$\operatorname{epi}(f) \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a,b), y \geq f(x)\}, \tag{7.19}$$

ovvero l'insieme dei punti del piano che si trovano sopra il grafico della funzione f.

Siamo ora pronti per dare la definizione generale di funzione convessa. La enunceremo per funzioni reali di variabile reale, ma segnaliamo che si estende anche a funzioni reali di più variabili, fatte le dovute modifiche.

Definizione 7.4.3. *Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che essa è convessa in (a,b) se l'epigrafico* $\operatorname{epi}(f)$ *definito in (7.19) è un insieme convesso di $\mathbb{R}^2$ secondo la Definizione 7.4.1.*

7.5 Integrazione

In questa sezione riportiamo alcuni approfondimenti sul calcolo integrale.

7.5.1 Generalizzazione del Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo

Nella Sezione 5.1 abbiamo visto che la continuità di una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una condizione sufficiente per l'integrabilità (Teorema 5.1.12), ma chiaramente ci sono funzioni non continue che sono integrabili (per esempio le funzioni monotone limitate non continue, dove la monotonia è sufficiente per l'integrabilità, Teorema 5.1.13). Per questo motivo ha senso chiedersi se il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo valga in ipotesi più generali della continuità della funzione integranda f. La risposta è affermativa e vale il seguente risultato.

Teorema 7.5.1 (fondamentale del calcolo integrale)**.** *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione che risulta integrabile su ogni sottointervallo $[\alpha,\beta] \subseteq I$ e $a \in I$. Allora*

1. *la funzione integrale $F : I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.20}$$

è continua;

2. *se la funzione f è continua in un punto $x_0 \in I$, allora la funzione F è derivabile in x_0 e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo i due enunciati.

1. La tesi afferma che la funzione integrale F definita nella (7.20) è continua in tutto il suo dominio I. Per dimostrare ciò, basta prendere un generico punto $x_0 \in I$ e dimostrare la continuità di F in x_0. Consideriamo un intorno $I_r(x_0) \subseteq I$, per un certo $r > 0$ (sarà sufficiente un intorno destro o sinistro di x_0 se esso è un estremo di I), e notiamo che f è integrabile in $\overline{I}_r(x_0)$ per ipotesi; dunque f è limitata in $\overline{I}_r(x_0)$, ovvero esiste $M_r > 0$ tale che $|f(x)| \le M_r$ per ogni $x \in \overline{I}_r(x_0)$. Allora, usando il Teorema 5.2.11 di spezzamento, otteniamo

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le M_r |x - x_0| \qquad \text{per ogni } x \in I_r(x_0),$$

che altro non è che la definizione di continuità della funzione F nel punto x_0 (basta infatti far tendere $x \to x_0$).

2. Sia ora $x_0 \in I$ un punto in cui la funzione f è continua e, dato $x \in I$ un altro punto, definiamo $R_x := (x \wedge x_0, x \vee x_0)$. Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo, consideriamo il rapporto incrementale di F in R_x e applichiamo il Corollario 5.2.4 (teorema della media integrale, di veda la (5.24)). Otteniamo

$$\inf_{\xi \in R_x} f(\xi) \le \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \fint_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \sup_{\xi \in R_x} f(\xi).$$

La continuità di f in x_0 implica che

$$\lim_{x \to x_0} \inf_{\xi \in R_x} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \sup_{\xi \in R_x} f(x),$$

pertanto, applicando il Teorema 3.1.18-5 dei carabinieri, concludiamo che esiste il limite del rapporto incrementale di F quando $x \to x_0$, quindi F è derivabile in x_0; inoltre vale $F'(x_0) = f(x_0)$.

Il teorema è così dimostrato. □

Osservazione 7.5.2. Notiamo che la continuità della funzione integrale F ottenuta nel Teorema 7.5.1 è solo semplice e non uniforme: infatti la costante M_r dipende dall'intorno $I_r(x_0)$ scelto e a questo livello non è (garantito che sia) uniforme rispetto a r, ovvero indipendente da r.

Esercizio 7.5.3. Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ la funzione segno (si veda la (1.48)) e, dato $a \in \mathbb{R}$, sia $F_a(x)$ la sua funzione integrale a partire da a come definita in (7.20). Scrivere F_a esplicitamente e commentare sul comportamento al variare di a.

funzioni AC?

7.5.2 Proprietà definite q.o. ?

tecniche di quadratura?

7.5.3 Ancora sulle tecniche di integrazione

Usando le (5.58) è possibile ottenere delle interessanti formule quando l'integrazione sia definita tra 0 e π. Indicando questi numeri con $C_n(0,\pi)$ e $S_n(0,\pi)$, rispettivamente, iniziamo studiandoli per piccoli valori di n. Dalla (5.58c) notiamo che il termine esplicito contiene la funzione seno, che si annulla in $x = 0, \pi$, pertanto ci si riduce alla relazione $C_n(0,\pi) = \frac{n-1}{n} C_{n-2}(0,\pi)$. Dalla (5.58d) troviamo che

$$C_1(0,\pi) = [\sin x]_0^\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{2k+1} = 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

quindi potranno essere non nulli sono i termini di indice pari. Iniziamo a vederne l'andamento, partendo dalla seconda delle (5.58d)

$$\begin{aligned}
C_2(0,\pi) &= \left[\frac{x + \sin x \cos x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi, \\
C_4(0,\pi) &= \frac{3}{4} C_2(0,\pi) = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\pi, \\
C_6(0,\pi) &= \frac{5}{6} C_4(0,\pi) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\pi,
\end{aligned}$$

e già si intravede l'andamento. In generale, si ha dunque (rimandiamo alla (7.6) per la definizione del semifattoriale)

$$C_n(0,\pi) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases} \tag{7.21a}$$

Veniamo ora ai $S_n(0,\pi)$. Dalla (5.58a) notiamo, con un ragionamento analogo al precedente, che il termine esplicito si annulla e pertanto la relazione ricorrente è $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$. Dalle (5.58b) abbiamo

$$S_1(0,\pi) = -[\cos x]_0^\pi = 2 \quad \text{e} \quad S_2(0,\pi) = \left[\frac{x - \sin x \cos x}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$$

e dunque si ricavano le espressioni

$$S_n(0,\pi) = \begin{cases} 2\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases} \tag{7.21b}$$

Non sarà ora difficile verificare che

$$C_n(0,\pi/2) = S_n(0,\pi/2) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases} \tag{7.21c}$$

Formula di Wallis per π. Usando la (7.21b) è possibile ricavare una formula per approssimare il valore di π. Ricordando il comportamento delle potenze $x \mapsto x^n$ sull'intervallo $[0, 1]$, in particolare che $m < n$ implica $x^m > x^n$, se $n = 2k$ è pari possiamo dire che

$$(\sin x)^{2k+1} \leq (\sin x)^{2k} \leq (\sin x)^{2k-1},$$

da cui, calcolando i rispettivi $S_\bullet(0, \pi)$, si ottiene

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \pi \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot 2$$

e dunque, dividendo per il coefficiente di π si ha

$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2k+1} \leq \pi \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{2}{2k}$$
$$\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leq \pi \leq \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{k}$$

e per continuità deve necessariamente esistere un valore $\theta_k \in (0, 1/2)$ tale che

$$\pi = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{k+\theta_k}. \tag{7.22}$$

Ora, siccome $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+\theta_k} = 1$, per il Teorema 2.2.8-5 dei carabinieri si ha che

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{k}, \tag{7.23}$$

che è nota come *formula di Wallis* per π. La (7.22) può essere scritta come

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+\theta_k}} \qquad \text{con } \theta_k \in (0, 1/2), \tag{7.24}$$

che può essere utile per stime con i semifattoriali e che ora intendiamo manipolare per mettere in evidenza il comportamento del rapporto dei semifattoriali in funzione di π e di k. Vogliamo esprimere il membro destro isolando $1/\sqrt{\pi k}$ e per questo possiamo procedere con la tecnica usata per trattare gli integrali delle funzioni razionali fratte. L'uguaglianza

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+\theta_k}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+\theta_k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + \frac{A}{\sqrt{k+\theta_k}} = \frac{A\sqrt{\pi k} + \sqrt{k+\theta_k}}{\sqrt{\pi k}\sqrt{k+\theta_k}}$$

è soddisfatta se

$$A\sqrt{\pi k} + \sqrt{k+\theta_k} = \sqrt{k} \quad \Leftrightarrow \quad A\sqrt{\pi} + \sqrt{1+\frac{\theta_k}{k}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1 - \sqrt{1+\frac{\theta_k}{k}}}{\sqrt{\pi}}.$$

Siccome siamo interessati a grandi valori di k, ricordando che $\theta_k \in (0, 1/2)$, possiamo usare la (4.37l) con $\alpha = 1/2$ e ottenere che

$$A = \frac{1 - \sqrt{1+\frac{\theta_k}{k}}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{1 - 1 - \frac{\theta_k}{2k}}{\sqrt{\pi}} = -\frac{\theta_k}{2k\sqrt{\pi}}$$

e dunque la (7.24) diventa

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+\theta_k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} - \frac{\theta_k}{2k\sqrt{\pi}\sqrt{k+\theta_k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + O(k^{-3/2}). \tag{7.25a}$$

Dalla (7.22), possiamo scrivere

$$\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{k+\theta_k} \quad \text{e dunque} \quad \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi(k+\theta_k)}}{2k+1}$$

e manipolando l'ultima frazione vogliamo mettere in evidenza il comportamento del tipo $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/k}$. Possiamo procedere nel seguente modo, usando ancora la (4.37l) con $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi(k+\theta_k)}}{2k+1} &= \frac{\sqrt{\pi k}\sqrt{1+\frac{\theta_k}{k}}}{2k+1} \sim \frac{\sqrt{\pi k}}{2k} \cdot \frac{2k+\theta_k}{2k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\left(\frac{2k+1}{2k+1} + \frac{\theta_k - 1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{\theta_k - 1}{2\sqrt{k}(2k+1)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + O(k^{-3/2}),\end{aligned}$$

da cui troviamo l'approssimazione

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + O(k^{-3/2}). \tag{7.25b}$$

Oltre all'interesse che hanno di per sé, le (7.25) saranno utili per il prossimo punto.

Calcolo dell'area sottesa dalla gaussiana In questo paragrafo diamo due dimostrazioni del calcolo di un integrale improprio di una funzione non integrabile con tecniche elementari. In una dimostrazione, procediamo usando opportunamente le (7.25) per fare delle stime. Nell'altra mostriamo come si possa ottenere lo stesso risultato con l'astuzia di calcolare l'integrale in due dimensioni e sfruttare un cambiamento di variabile.

Proposizione 7.5.4 (integrale della gaussiana)**.** *Vale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \tag{7.26}$$

Dimostrazione 1. Consideriamo la funzione $t \mapsto e^{-t}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ e notiamo che vale la catena di disuguaglianze

$$1 - t \le e^{-t} \le \frac{1}{1+t},$$

la prima delle quali è conseguenza della stretta convessità della funzione esponenziale nel punto $t = 0$ (si veda la (4.47a) con $r = +\infty$), mentre per provare la seconda si può procedere prendendo lo sviluppo di Maclaurin della funzione esponenziale arrestato al prim'ordine (si veda la (4.37a)) e verificare che $1 - t + o(t) \le 1/(1+t)$. Ponendo $t = x^2$ abbiamo

$$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2},$$

da cui, prendendo la potenza k-esima e integrando si ottiene

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^k\,\mathrm{d}x < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\,\mathrm{d}x < \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x. \tag{7.27}$$

Il primo integrale è esteso all'intervallo $[-1,1]$ perché al di fuori di esso la potenza non è definita se k è pari, mentre è zero se k è dispari. La seconda disuguaglianza segue dal fatto che le funzioni e^{-t} e $1/(1+t)$ si toccano solamente in $t = 0$ (e dunque $x = 0$). Valutiamo gli integrali agli estremi della catena di disuguaglianze. Per il primo applichiamo il Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile facendo la sostituzione $x = \cos\theta$ (che porta a $\mathrm{d}x = -\sin\theta\;\mathrm{d}\theta$, $x = -1$ dà $\theta = \pi$ e $x = 1$ dà $\theta = 0$) e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(1-x^2)^k\,\mathrm{d}x &= -\int_{\pi}^{0}(a-\cos^2\theta)^k\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi}(\sin\theta)^{2k+1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= S_{2k+1}(0,\pi) \overset{(7.21b)}{=} 2\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \overset{(7.25b)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{k}} + O(k^{-3/2}).\end{aligned} \tag{7.28a}$$

Notiamo che l'ultimo integrale della catena di disuguaglianze è del tipo (5.61) e applicando la (5.62) per k volte[2] otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x = A_k(-\infty,+\infty) = \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}\pi \overset{(7.25a)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{k-1}} + O(k^{-3/2}). \tag{7.28b}$$

La (7.28a) e la (7.28b) sono molto simili: l'errore $O(k^{-3/2})$ è lo stesso in entrambe le formule, mentre il denominatore dei termini con la radice differisce leggermente. Studiamo ora la differenza

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{k-1}} - \sqrt{\frac{\pi}{k}} &= \frac{\dfrac{\pi}{k-1}-\dfrac{\pi}{k}}{\sqrt{\dfrac{\pi}{k-1}}+\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}} = \sqrt{\pi}\cdot\frac{\dfrac{1}{k(k-1)}}{\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{k}}} \sim \sqrt{\pi}\cdot\frac{\dfrac{1}{k(k-1)}}{2\sqrt{\dfrac{1}{k}}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{k}}{k(k-1)} = O(k^{-3/2})\end{aligned}$$

e quindi possiamo assorbire la differenza tra $\sqrt{\pi/(k-1)}$ e $\sqrt{\pi/k}$ nell'o-grande. In virtù di questo, dalla (7.27) e dalle (7.28), otteniamo, operando il il cambio di variabile $t = \sqrt{k}x$ (che dà $\mathrm{d}t = \sqrt{k}\,\mathrm{d}x$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\left[\sqrt{\frac{\pi}{k}} + O(k^{-3/2})\right] = \sqrt{\pi} + O(k^{-1})$$

e ora la (7.26) segue prendendo il limite $k \to \infty$. □

[2] Si ha

$$\begin{aligned}A_n(-\infty,+\infty) &= \left[\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2n-3}{2n-2}A_{n-1}(-\infty,+\infty) = \frac{2n-3}{2n-2}A_{n-1}(-\infty,+\infty) \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}A_{n-1}(-\infty,+\infty) = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2(n-1)-3}{2(n-1)-2}A_{n-2}(-\infty,+\infty) \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}A_{n-2}(-\infty,+\infty) = \cdots = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}A_1(-\infty,+\infty) \overset{(5.53e)}{=} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi.\end{aligned}$$

Dimostrazione 2. La seconda dimostrazione che proponiamo è più agevole e necessita di tecniche meno arzigogolate, in particolar modo non necessita delle stime della (7.27); al contrario, attacca il problema direttamente. Il prezzo da pagare è l'utilizzo di tecniche dell'analisi in dimensione superiore. Segnaleremo dove queste intervengono, e per il momento ci si può accontentare di accettare due delle uguaglianze che scriveremo come atto di fiducia. Vedremo che sarà facile integrare il membro destro della (7.26) (o meglio, un integrale ad esso legato) usando un teorema di cambiamento di variabile in più dimensioni. Iniziamo studiando il quadrato dell'integrale in (7.26)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \overset{\text{(AF)}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.29}$$

La prima uguaglianza segue scrivendo il quadrato come prodotto di due fattori uguali e sfruttando che la variabile di integrazione è muta, quindi le si può dare il nome che si preferisce (quindi abbiamo cambiato il secondo integrale dalla variabile x alla variabile y). Il primo atto di fiducia (AF) sta nel fatto che il prodotto dei due integrali su $\mathbb{R}$ si possa scrivere come un integrale su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ del prodotto delle funzioni. Il visibile vantaggio di questa scrittura è che ora all'esponente leggiamo (l'opposto del)la distanza al quadrato del punto di coordinate (x, y) dall'origine. Interviene ora il cambiamento di variabile: analogamente a quanto fatto nella forma trigonometrica dei numeri complessi (1.51), possiamo rappresentare un punto nel piano cartesiano in funzione della sua distanza $\rho > 0$ dall'origine e dell'angolo $\vartheta \in [0, 2\pi]$ che la congiungente con l'origine forma con il semiasse positivo delle ascisse

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \text{e dunque} \qquad \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \leftrightsquigarrow (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi].$$

Ora vogliamo cambiare le coordinate nell'integrazione (7.29): la versione del Teorema 5.3.4 in dimensione superiore si applica nello stesso modo, una volta che vengono individuati i nuovi estremi di integrazione (e in questo caso di ha $\rho \in [0, +\infty)$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$) e il cambiamento dei differenziali. Qui va compiuto il secondo atto di fiducia: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{(AF)}}{=} \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\vartheta$ e dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &\overset{\text{(AF)}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{(AF)}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &\overset{(1)}{=} \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta\right)\left(-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -2\rho e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right) = -\pi\left[e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= -\pi(0-1) = \pi, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (1) segue dal fatto che l'integrale in $\mathrm{d}\rho$ non contiene la variabile ϑ e pertanto è una costante rispetto all'integrazione in $\mathrm{d}\vartheta$ ed esce dall'integrale; abbiamo anche speso un passaggio a mettere in evidenza che ora stiamo integrando (a meno del fattore $-1/2$) la derivata completa di $e^{-\rho^2}$[3]. La (7.26) segue ora prendendo le radici quadrate. □

[3]Si noti che l'integrale esteso a $[0, +\infty)$ è da intendersi in senso improprio.

7.5.4 Dimostrazione del Teorema 7.1.4

Per dimostrare la formula (7.5), ricordiamo la definizione del simbolo di Landau $\sim$ (si veda la Definizione 3.4.3) nel contesto degli infiniti. Facendo riferimento alla Definizione 3.4.6-2., la formula (7.5) può essere riscritta come

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n (\sqrt{2\pi n} + \alpha_n), \tag{7.30}$$

dove α_n è una successione tale che $|\alpha_n| \leq M$ per un certo $M > 0$. Dimostreremo la (7.30) manipolando un certo integrale, precisamente l'integrale F_n che abbiamo calcolato nella (5.73). Per fare ciò, ci serviremo del Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile due volte, del Teorema 5.2.11 di spezzamento e di oculate scelte.

Dimostrazione della (7.30). Iniziamo con i primi semplici passaggi, effettuando la sostituzione $x = z + n$ (che cambia gli estremi di integrazione in $-n$ e $+\infty$ e il differenziale $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}z$)

$$\begin{aligned} n! = F_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x \overset{(5.48c)}{=} \int_{-n}^{+\infty} (z+n)^n e^{-z-n}\,\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z}\,\mathrm{d}z \qquad (7.31a) \\ &\overset{(5.29)}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[\int_{-n}^{0} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z}\,\mathrm{d}z + \int_{0}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z}\,\mathrm{d}z\right], \qquad (7.31b) \end{aligned}$$

dove abbiamo raccolto n e portato fuori dall'integrale tutti i termini che non contengono la variabile d'integrazione z per ottenere la penultima riga. Per l'ultima uguaglianza, abbiamo usato la naturale estensione del Teorema 5.2.11 di spezzamento quando il dominio è illimitato. Si inizia già a vedere la forma della (7.30): l'ordine principale è messo in evidenza.

Il prossimo passaggio motiva lo spezzamento dell'integrale (7.31a) separando i domini in cui z varia a seconda del segno. L'idea è quella di trasformare l'integrale (7.31a), con un cambiamento di variabile, nell'integrale (7.26), il cui valore è $\sqrt{\pi}$. Procediamo a ritroso imponendo che l'integranda debba essere uguale all'integranda dell'integrale gaussiano e poi vediamo che gli estremi di integrazione si adattano di conseguenza. Imponendo quindi che

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n e^{-z} = e^{-t^2},$$

ricaviamo

$$t^2 = z - n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \tag{7.32}$$

e dunque possiamo sostituire

$$t = -\sqrt{z - n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \qquad \text{e} \qquad t = \sqrt{z - n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)} \tag{7.33}$$

nel primo e nel secondo integrale in (7.31b), rispettivamente. La necessità di spezzare a seconda del segno di z è ora più evidente. Nel primo integrale in (7.31b), con la prima sostituzione in (7.33), otteniamo che $t \to -\infty$ per $z \to -n$ e che $t = 0$ per

$z=0$; nel secondo integrale in (7.31b), con la seconda sostituzione in (7.33), otteniamo che $t=0$ per $z=0$ e che $t\to+\infty$ per $z\to+\infty$. In entrambi i casi, dalla (7.32), il cambio del differenziale è

$$2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}z-\frac{n/n}{1+z/n}\mathrm{d}z=\frac{z}{z+n}\mathrm{d}z,$$

dal quale si deduce che

$$\mathrm{d}z=2t\left(1+\frac{n}{z}\right)\mathrm{d}t. \tag{7.34}$$

Questa formula non è ancora corretta perché compare un fattore contenente z nel secondo membro. Per liberarcene ed esprimerlo in funzione di t, torniamo alla (7.32) ed usiamo la formula di Taylor con resto di Lagrange (4.34) arrestata al prim'ordine per la funzione $X\mapsto\log(1+X)$ per $X\to 0$, che ci dà

$$\log(1+X)=X-\frac{X^2}{2(1+\xi)^2},\qquad \text{per un certo } \xi=\xi(X)\in(0,X)$$

Nel nostro caso, siccome $X=z/n$, possiamo prendere $\xi=\theta\frac{z}{n}$ per un certo $\theta=\theta(z)\in(0,1)$, e otteniamo

$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2}\frac{1}{(1+\xi)^2}=\frac{z}{n}-\frac{z^2}{2n^2}\frac{1}{\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}.$$

Inseriamo l'espressione ottenuta nella (7.32) e ricaviamo (ricordando che il logaritmo era moltiplicato per n)

$$t^2=\frac{z^2}{2n}\frac{1}{\left(1+\theta\frac{z}{n}\right)^2}\quad \text{che manipolata dà}\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{\sqrt{2n}t}-\frac{\theta}{n},\quad \text{da cui}\quad \frac{n}{z}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}t}-\theta.$$

Dall'ultima formula scritta, possiamo continuare con la (7.34)

$$\mathrm{d}z=2t\left(1+\frac{n}{z}\right)\mathrm{d}t=2t\left[(1-\theta)+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}t}\right]\mathrm{d}t=\left[\sqrt{2n}+2t(1-\theta)\right]\mathrm{d}t,$$

dove ora $(0,1)\ni\theta=\theta(z)=\vartheta(t)$. La dipendenza di θ da t è ereditata dalla dipendenza da z tramite il legame (7.32). Il leggero cambio di notazione è dovuto al fatto che come funzione di t è diversa dalla funzione di z; nonostante ciò, rimangono lo stesso valore numerico ed il fatto che si tratti di una quantità compresa tra 0 ed 1. Ricordando i commenti fatti sui cambiamenti degli estremi di integrazione, possiamo continuare con la (7.31b) e scrivere

$$\begin{aligned}
n! &= \left(\frac{n}{e}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\left[\sqrt{2n}+2t(1-\vartheta)\right]\mathrm{d}t\\
&= \left(\frac{n}{e}\right)^n\left[\sqrt{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\theta)2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\theta)2te^{-t^3}\,\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

Notando che ora il primo integrale dentro la parentesi vale $\sqrt{\pi}$, per la (7.26), manca da stimare il secondo integrale. Esplicitando per un momento la dipendenza di θ da t, scriviamo

$$\alpha_n := \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\theta(t)) 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} (1-\theta(t)) 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} (1-\theta(t)) 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

e notiamo che il primo integrale a secondo membro è negativo, mentre il secondo integrale a secondo membro è positivo; in entrambi, la quantità $(1-\theta(t))$ è compresa tra 0 e 1, quindi entrambi gli integrali possono essere maggiorati, in valore assoluto, da

$$\int_0^{+\infty} 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-t^2} \right]_0^b = 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b^2} = 1.$$

Allora abbiamo che $|\alpha_n| \leq 2$ e la (7.30) è completamente dimostrata; con ciò, si ha la dimostrazione del Teorema 7.1.4. □

7.5.5 Integrali dipendenti da parametri

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, il Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo stabilisce una relazione tra la funzione integrale F, definita nella (5.32), di f e la f stessa, sancendo che $F'(x) = f(x)$; la (5.30) prescrive che invertire gli estremi di integrazione comporta un cambiamento di segno. Allora è possibile derivare una funzione integrale quando la dipendenza da x è nell'estremo inferiore: definendo

$$\widetilde{F}(x) := \int_x^{x_0} f(f)\,\mathrm{d}t,$$

abbiamo

$$\widetilde{F}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x). \tag{7.35}$$

Ciò è il primo passo verso la generalizzazione del Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo a funzioni di tipo integrale in cui si abbia dipendenza da x in entrambi gli estremi di integrazione (chiaramente attraverso due funzioni, altrimenti gli estremi di integrazione coinciderebbero e l'integrale sarebbe nullo, ricordando ancora la (5.30)). Il seguente lemma è di facile dimostrazione (cambiamo leggermente la notazione rispetto alla (7.35) in preparazione del successivo Teorema 7.5.7).

Lemma 7.5.5. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e siano $\psi, \varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ sono due funzioni di classe $C^1([c,d])$, allora la funzione*

$$[c,d] \ni y \mapsto \Phi(y) := \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.36}$$

è derivabile in (c,d) e vale

$$\Phi'(y) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(\psi(y))\psi'(y). \tag{7.37}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria di due variabili $G\colon (c,d)^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$(c,d)^2 \ni (u,v) \mapsto G(u,v) := \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$$

che risulta derivabile rispetto a ciascuna delle variabili grazie al Teorema 5.2.14 fondamentale del calcolo. Infatti, basta considerare un punto $x_0 \in [a,b]$ e scrivere l'integrale come

$$\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^v f(x)\,\mathrm{d}x,$$

grazie al Teorema 5.2.11 di spezzamento. Allora, si ottiene che esistono le derivate parziali di G rispetto ad u e v e si ha

$$G_u(u,v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) = -f(u) \qquad \text{e} \qquad G_v(u,v) = \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = f(v),$$

dove abbiamo usato la (7.35) per la prima uguaglianza. Notiamo che si ha $\Phi(y) = G(\psi(y),\varphi(y))$ e applicando ora il Teorema 4.1.14 di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi'(y) &= G_u(\psi(y),\varphi(y))\psi'(y) + G_v(\psi(y),\varphi(y))\varphi'(y)\\ &= f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(\psi(y))\psi'(y),\end{aligned}$$

che è la (7.37), come volevamo. □

Esempio 7.5.6. Riprendiamo l'Esercizio 5.7.2 in cui si chiede di calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t}{x}$$

Riconoscendo che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi per $x \to 0^+$ e che le ipotesi del Teorema 4.2.17-1 di de l'Hôpital sono soddisfatte, possiamo calcolare il limite studiando il limite del rapporto delle derivate. Con la simbologia usuale scriviamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin x}{x}\right) = 1,$$

dove abbiamo applicato il Lemma 7.5.5 con $\psi(x) = x$ e $\varphi(x) = 2x$. Naturalmente il risultato ottenuto è lo stesso che usando il Teorema della media integrale. □

Se anche la funzione f dipende dalle due variabili (x,y), il Lemma 7.5.5 si può generalizzare e tale risultato prende il nome di Teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Teorema 7.5.7 (derivazione sotto il segno di integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con la sua derivata parziale $f_y = \partial f/\partial y$ rispetto ad y in $[a,b]\times[c,d]$. Siano inoltre $\psi,\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ due funzioni di classe $C^1([c,d])$. Allora la funzione*

$$[c,d] \ni y \mapsto \Phi(y) := \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{7.38}$$

è derivabile in (c, d) *e vale*

$$\Phi'(y) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f_y(x, y)\,\mathrm{d}x + f(y, \varphi(y))\varphi'(y) - f(y, \psi(y))\psi'(y). \quad (7.39)$$

Dimostrazione. Iniziamo notando che la richiesta che f_y sia continua serve per garantirne l'integrabilità e dare senso all'integrale a membro destro nella (7.39). Definiamo ora la funzione ausiliaria $G\colon (c, d)^3 \to \mathbb{R}$ tramite

$$G(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

ovvero la funzione che ha come variabili la variabile y che non viene integrata e gli estremi di integrazione. Derivando la funzione G rispetto alla variabile y si ottiene

$$G_y(y, u, v) = \int_u^v f_y(x, y)\,\mathrm{d}x$$

che è un risultato ragionevole da intuire, ma che richiederebbe una dimostrazione formale (sulla quale ci permettiamo di soprassedere). Il Lemma 7.5.5 ha già trattato le derivate parziali G_u e G_v e, notando che $\Phi(y) = G(y, \psi(y), \varphi(y))$, applichiamo ancora una volta il Teorema 4.1.14 di derivazione della funzione composta e otteniamo

$$\begin{aligned}\Phi'(y) &= G_y(y, \psi(y), \varphi(y)) + G_u(\psi(y), \varphi(y))\psi'(y) + G_v(\psi(y), \varphi(y))\varphi'(y) \\ &= \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f_y(x, y)\,\mathrm{d}x + f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(\psi(y))\psi'(y),\end{aligned}$$

che è la (7.39), come desiderato. □

7.5.6 *The Feynman trick.*

Il *Feynman trick* è un metodo per calcolare integrali definiti di funzioni che non posseggono una primitiva elementare e si basa sul Teorema 7.5.7 di derivazione sotto il segno di integrale nel caso semplice in cui $\psi(y) = a$ e $\varphi(y) = b$, ovvero quando si abbia un integrale della forma

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

per il quale sappiamo che, nelle ipotesi del teorema, si ha

$$\Phi'(y) = \int_a^b f_y(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

L'idea del *Feynman trick* per calcolare l'integrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è la seguente:

1. si vede l'integrale I (che è un numero reale) come la valutazione di una funzione $\alpha \mapsto I(\alpha)$ in un particolare valore α^*, dove la dipendenza da α è introdotta nella funzione integranda

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x; \quad (7.40)$$

la dipendenza da α deve essere introdotta in un modo opportuno, con lo scopo e di mantenere le proprietà di convergenza dell'integrale di partenza, e di semplificare (si veda il punto 3) il calcolo;

2. si applica il Teorema 7.5.7 alla funzione $\alpha \mapsto I(\alpha)$, ottenendo

$$I'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x; \tag{7.41}$$

3. l'introduzione opportuna della dipendenza da α è quella che rende facile l'integrazione rispetto ad x nell'integrale (7.41), eseguendo la quale si ottiene

$$I'(\alpha) = \int_a^b f_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = g(\alpha); \tag{7.42}$$

4. la relazione (7.42) appena ottenuta altro non è che un'equazione differenziale per la funzione I, in particolare la ricerca della primitiva, che si trasforma in un problema di Cauchy (6.7) per la I una volta che si fissa il dato $I(\alpha_0) = I_0$, naturalmente scegliendo α_0 in modo tale che l'integrale nella (7.40) con $\alpha = \alpha_0$ sia facile da calcolare;
5. integrando la (7.42) rispetto ad α si ottiene una costante di integrazione, che viene fissata imponendo il dato iniziale: se $\alpha \mapsto G(\alpha)$ è una primitiva della funzione $\alpha \mapsto g(\alpha)$, si ha

$$\begin{cases} I'(\alpha) = g(\alpha) \\ I(\alpha_0) = I_0 \end{cases} \quad \text{che dà} \quad \begin{cases} I(\alpha) = G(\alpha) + c \\ I(\alpha_0) = I_0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad c = I_0 - G(\alpha_0);$$

allora $I(\alpha) = G(\alpha) + I_0 - G(\alpha_0)$ da cui $I = I(\alpha^*) = G(\alpha^*) + I_0 - G(\alpha_0)$.

Esempio 7.5.8. Vediamo l'applicazione del *Feynman trick* al calcolo dell'integrale di Dirichlet (5.75) $D(+\infty)$. Abbiamo

$$D(+\infty) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

e dobbiamo trovare un modo di introdurre la dipendenza da un parametro α nella funzione integranda in maniera che la convergenza dell'integrale tra 0 e $+\infty$ (che abbiamo dimostrato nella Sezione 5.5.1) sia mantenuta. La scelta ricade dunque sul moltiplicare la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ per una funzione che decada a zero all'infinito e che derivata renda facile l'integrazione rispetto ad x: ciò che rende l'integrazione non elementare è la presenza della x al denominatore, quindi conviene trovare una funzione di x e α che derivata rispetto ad α semplifichi o addirittura elimini la x al denominatore (ricordiamo il punto 3 della procedura). Consideriamo allora la funzione

$$f(x,\alpha) = e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

cosicché l'integrale diventa una funzione di α

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

e si recupera l'integrale desiderato scegliendo $\alpha^* = 0$: infatti, per $\alpha = \alpha^* = 0$ abbiamo $f(x,0) = f(x)$ e $I(0) = I = D(+\infty)$. Notiamo anche che $I(+\infty) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) =$

0, così da prendere $\alpha_0 = +\infty$ nel passo 4. Procediamo calcolando la derivata rispetto ad α: il Teorema 7.5.7 dà

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

e qui si vede l'efficacia della scelta della dipendenza da α. L'integrale che dobbiamo ora calcolare è $-ES_{-\alpha}$ tra 0 e $+\infty$ e ricordando la (5.60b) possiamo scrivere

$$I'(\alpha) = -\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\right]_{x=0}^{x=b} = -\frac{1}{1+\alpha^2} =: g(\alpha)$$

e questa è la (7.42), che ora è di facile integrazione. Infatti,

$$I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int g(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = -\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha^2} = -\arctan\alpha + c$$

e possiamo determinare c sapendo che

$$0 = I(+\infty) = \lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = -\lim_{\alpha\to+\infty}\arctan\alpha + c = -\frac{\pi}{2}+c.$$

Otteniamo subito $c = \pi/2$ e dunque $I(\alpha) = -\arctan\alpha + \pi/2$. Possiamo perciò concludere che

$$D(+\infty) = I = I(0) = -\arctan 0 + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{ovvero} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizi 7.5.9. Calcolare i seguenti integrali usando il *Feynman trick*.
(a) $I(\alpha) = \int_0^{\pi}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$, per $|\alpha|\geq 1$; (b) $\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

[Suggerimento: nel primo α è già presente, nel secondo provare a metterlo come coefficiente di x al numeratore.]

funzione Gamma
convoluzione e delta di Dirac?

7.6 Equazioni differenziali ordinarie

7.6.1 Altri risultati di esistenza

In questa sezione riportiamo altri due risultati di esistenza che ha senso considerare quando le ipotesi del Teorema 6.2.17 di esistenza e unicità non sono soddisfatte, in particolare quando il membro destro f non è lipschitziano nella variabile y. In ipotesi di continuità di f, il Teorema 7.6.1 di esistenza di Peano garantisce l'esistenza di una soluzione al problema di Cauchy (ma non l'unicità, come discusso più avanti); se la f è ancora meno regolare (in particolare discontinua) si riesce a recuperare l'esistenza di soluzioni, ma bisogna introdurre un'opportuna definizione di soluzione. Siccome la regolarità sarà il problema, le soluzioni di cui si parlerà prendono il nome di *soluzioni deboli*; ciononondimeno, questo indebolimento del concetto di soluzione è giustificato dalla vastità delle applicazioni che equazioni differenziali con membri destri discontinui trovano.

Teorema 7.6.1 (di esistenza di Peano)**.** *Sia $f \in C^0(\Omega)$ e sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto assegnato. Allora esiste una soluzione del problema di Cauchy* (6.7)*.*

Dimostrazione. La dimostrazione si può costruire seguendo le orme della dimostrazione del Teorema 6.2.17 di Picard–Lindelöf e concettualmente si dimostra che la stessa applicazione $\mathcal{F}$ definita nella (6.79) ha un punto fisso; tuttavia, non avendo a disposizione l'ipotesi di lipschitzianità, non ci si può basare sul Teorema 6.2.14 delle contrazioni, ma ci si basa sul Teorema di punto fisso di Schauder, che richiede solamente la continuità dell'applicazione $\mathcal{F}$ (a spese di dover chiedere convessità e compattezza dell'insieme su cui $\mathcal{F}$ è definita). □

La differenza principale tra il Teorema 7.6.1 di esistenza di Peano e il Teorema 6.2.17 di esistenza e unicità di Picard–Lindelöf è nel fatto che la sola continuità del membro destro f non garantisce l'unicità delle soluzioni. Ciò significa che in questa situazione, fissato $(x_0, y_0) \in \Omega$, ci possono essere più curve integrali che passano per (x_0, y_0). L'esempio principale di questo fenomeno va sotto il nome di *pennello di Peano* ed è illustrato dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{7.43}$$

che possiamo integrare senza difficoltà. L'equazione è a variabili separabili e si ottiene

$$y^{-1/2}\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; 2y^{1/2}(x) = 2x + c \;\Rightarrow\; \sqrt{y(x)} = x + c \quad\Rightarrow\quad y(x) = (x + c)^2,$$

dove il parametro $c \in \mathbb{R}$ viene determinato dalla condizione iniziale. Imponendo che $y(0) = 0$, si ricava $c = 0$, quindi la funzione $y(x) = x^2$ risolve il problema di Cauchy (7.43). Allora, definendo

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

abbiamo costruito una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e dunque possiamo affermare che la coppia $(\varphi, \mathbb{R})$ è una soluzione del problema di Cauchy (7.43) secondo la Definizione 6.0.4. Notiamo tuttavia che per ogni $\tau > 0$ la traslata

$$\varphi_\tau(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \le \tau \\ (x - \tau)^2 & \text{se } x \ge \tau \end{cases}$$

è ancora un funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ che risolve il problema di Cauchy (7.43). Allora, per ogni $\tau > 0$, la coppia $(\varphi_\tau, \mathbb{R})$ è una soluzione del problema di Cauchy (7.43) secondo la Definizione 6.0.4. È evidente che tutte queste funzioni sono diverse tra loro ma risolvono il problema di Cauchy (7.43), il quale pertanto non ha soluzione unica (si veda la Figura 7.3). La non unicità si poteva intuire immediatamente osservando che anche la funzione nulla risolve il problema di Cauchy (7.43).

Con poco sforzo, modificando il problema di Cauchy (7.43) in

$$\begin{cases} y' = 2|y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{7.44}$$

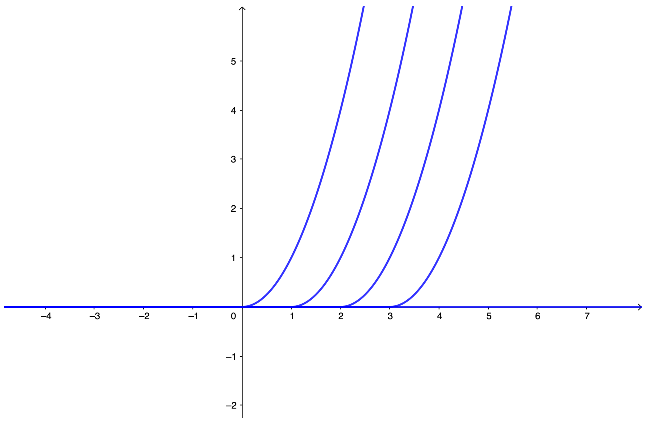


Figura 7.3: Il fenomeno del *pennello di Peano*: nel grafico sono riportate le soluzioni φ_τ per $\tau = 0, 1, 2, 3$ e la soluzione nulla.

si vede che oltre alla soluzione nulla $(0, \mathbb{R})$ ogni funzione del tipo

$$\varphi_{\sigma,\tau}(x) \coloneqq \begin{cases} -(x-\sigma)^2 & \text{se } x \leq \sigma \\ 0 & \text{se } \sigma \leq x \leq \tau \\ (x-\tau)^2 & \text{se } x \geq \tau \end{cases}$$

per $\sigma < 0 < \tau$ è soluzione del problema di Cauchy (7.44) e i grafici sono rappresentati in Figura 7.4.

Ricordando il Lemma 6.2.16 che stabilisce l'equivalenza tra il problema di Cauchy (6.7) e l'equazione integrale (6.77), notiamo che non è necessario che la funzione f sia continua affinché l'integrale a membro destro abbia senso. A livello dell'equazione differenziale, tali membri destri possono essere considerati se si rinuncia alla continuità della derivata y'. Facciamo notare che questa situazione non è semplicemente un vezzo della generalità matematica, ma è quello che succede in fenomeni naturali comuni, come ad esempio il rimbalzo di una palla contro un ostacolo, oppure l'urto tra due palle da biliardo: in questi casi, si ha un cambiamento istantaneo della velocità, che quindi risulta discontinua. Le ipotesi specifiche che devono essere soddisfatte per trattare questi casi sono alquanto tecniche ed esulano dalla portata di queste note, ma permettono di stabilire un teorema di esistenza della soluzione che va sotto il nome di Teorema di Carathéodory; come il Teorema 7.6.1 di Peano, esso garantisce l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy (6.7), seppur partendo da ipotesi più deboli e garantendo l'esistenza di una soluzione definita in modo più debole, in particolare non è richiesta la regolarità C^1, proprio perché è ammesso che y' sia discontinua.

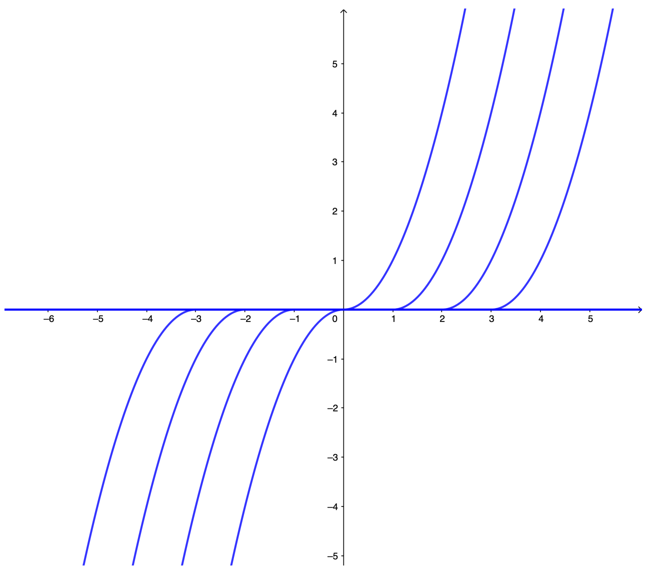


Figura 7.4: Il fenomeno del *pennello di Peano*: nel grafico sono riportate le soluzioni $\varphi_{\sigma,\tau}$ per $-\sigma, \tau = 0, 1, 2, 3$ e la soluzione nulla.

Capitolo 8

Alcuni esercizi non standard per Analisi I[1]

Questo capitolo contiene una raccolta di esercizi meno classici e solitamente un po' più impegnativi di quelli più tradizionali che si svolgono in preparazione per l'esame di Analisi I. I prerequisiti sono le conoscenze di un buon corso di Analisi I, nulla di più (sebbene possano esistere metodi di risoluzione più avanzati e brevi). Gli esercizi hanno associato un livello di difficoltà (che ovviamente è del tutto arbitrario):

Difficoltà	
$*$	Easyyy.
$**$	Due cioccolatini.
$***$	Tanti cioccolatini.
$****$	Complesso, livello Bicerin.
$*****$	Dove è la mia medaglia Fields?

Esercizio 8.0.1 ($***$)**.** Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

Soluzione. Vediamo due metodi per la soluzione.

Metodo 1 Dalla formula di Maclaurin (4.37b) per il logaritmo, prendendo il limite per $n \to \infty$ si ottiene la seguente uguaglianza $\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}$, detta *sviluppo in serie del logaritmo*, che vale per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < 1$. Per un teorema sulle serie di funzioni, noto come Teorema di Abel, e sfruttando la continuità della funzione logaritmo, è possibile calcolare il limite per $x \to 1^-$ nella funzione a sinistra dell'uguale e sostituire $x = 1$ a destra, ottenendo

$$\ln(2) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{8.1}$$

[1] A cura di Leonardo Massai.

La (8.1) è chiamata anche *serie armonica alternata* o *serie di Mercator*. Ora, posto $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, valutiamo la differenza

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

A questo punto, calcoliamo $a_n - a_1$ sfruttando la formula appena trovata e poi cambiando opportunamente l'indice della sommatoria:

$$a_n - a_1 = \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{j=3}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

Notiamo che l'ultima espressione somiglia molto alla (8.1). Ricordando che $a_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$ si ha

$$a_n = \sum_{j=3}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + \frac{1}{2} = \sum_{j=3}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} + 1 - \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

Ora è facile concludere:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2)$$

Metodo 2 L'idea è quella di ricondurre il limite a una somma integrale. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann, allora si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.2}$$

Poniamo ora $a = 0$ e $b = 1$, la (8.2) diventa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Consideriamo adesso la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1/(1+x)$ e usiamola nella somma integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{n}}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Quindi abbiamo mostrato che il limite di partenza è uguale a un certo integrale che per fortuna sappiamo calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

Esercizio 8.0.2 (∗ ∗ ∗∗)**.** Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

Soluzione. Prima un po' di preliminari: dimostriamo che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots,$$

come si può intuire prendendo il limite per $n \to \infty$ nella (4.37a). Si ha

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

A questo punto, preso $n \geq 2$, si ha

$$en! = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) \tag{8.3}$$

e notiamo che il termine $m_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ è un numero intero; infatti

$$m_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2n! + \frac{1 \cdot \cancel{2} \ldots n}{\cancel{2}} + \frac{1 \cdot \cancel{2 \cdot 3} \ldots n}{\cancel{2 \cdot 3}} + \cdots + 1$$

Chiamiamo inoltre $r_n = n! \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, allora la (8.3) diventa $en! = m_n + r_n$. Notiamo inoltre che

$$\frac{1}{n+1} < r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n-1}$$

e quindi abbiamo dimostrato che $\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n-1}$, il che, per il Teorema dei carabinieri implica che $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ e inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} < \lim_{n\to\infty} n r_n < \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \implies 1 < \lim_{n\to\infty} n r_n < 1 \implies \lim_{n\to\infty} n r_n = 1$$

Ora, torniamo al nostro limite e usiamo tutti i risultati fin qui ottenuti

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi m_n + 2\pi r_n) = \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi r_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi n r_n \frac{\sin(2\pi r_n)}{2\pi r_n} = 2\pi$$

Notiamo che abbiamo usato il fatto che $m_n \in \mathbb{Z}$ unito alla periodicità del seno, che $r_n \to 0$ e $n r_n \to 1$ oltre al limite notevole del seno.

Esercizio 8.0.3 (∗)**.** Calcolare il doppio limite $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{n^2(x-1)}$.

Soluzione. Ci sono vari modi, i più interessanti sono i primi due che presentiamo che non fanno uso del Teorema di de l'Hôpital:

Metodo 1 Fissato n, sia $f(x) = x+x^2+\cdots+x^n-n$, allora per definizione di derivata si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(1)}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}|_{x=1}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Metodo 2 Usando il falso binomio di Newton (1.73), si può notare che

$$\begin{aligned} x-1 &= (x-1)\cdot 1 \\ x^2-1 &= (x-1)\cdot(x+1) \\ x^3-1 &= (x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) \\ &\vdots \\ x^n-1 &= (x-1)\cdot\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right) \end{aligned}$$

e se sommiamo membro a membro si ottiene

$$x+x^2+\cdots+x^n-n = (x-1)\left(1+(1+x)+(1+x+x^2)+\cdots+(1+\cdots+x^{n-1})\right)$$

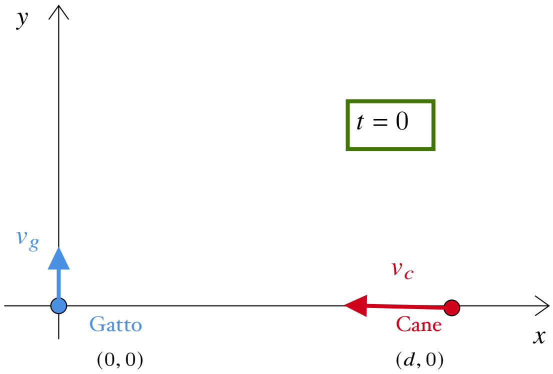
Possiamo ora sostituire nel limite

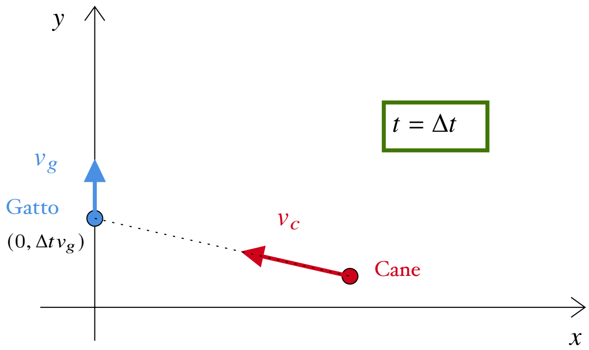
$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{n^2(x-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\lim_{x\to 1}\left(1+(1+x)+(1+x+x^2)+\cdots+(1+\cdots+x^{n-1})\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Metodo 3 Basta un'applicazione del Teorema 4.2.17 di de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{n^2(x-1)} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\frac{1+2x^2+\cdots+nx^{n-1}}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 8.0.4 $(****)$. **Prova a prendermi:** Un gatto dorme placidamente in un campo quando improvvisamente si accorge di un cane che lo punta. Il gatto scappa allora dal cane muovendosi di moto rettilineo uniforme a velocità v_g. Il cane lo insegue muovendosi a velocità $v_c > v_g$ e puntando, istante per istante, sempre nella direzione in cui si trova il gatto. Fissato un sistema di riferimento, supponiamo che il gatto parta dal punto $(0,0)$ mentre il cane parte da $(d,0)$ così che la distanza iniziale tra i due è d. Supponiamo inoltre che il gatto scappi lungo l'asse y, così che i vettori velocità siano perpendicolari all'istante iniziale $t=0$. Raffiguriamo la situazione al tempo iniziale $t=0$ e dopo un certo tempo $t=\Delta t$ nelle due figure qui sotto:



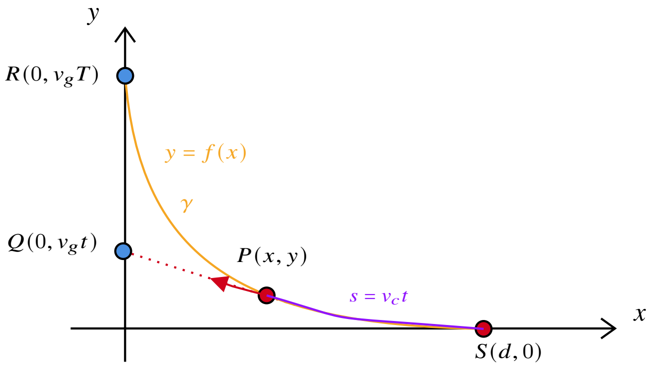


La domanda è: dopo quanto tempo il cane riuscirà ad acchiappare il povero gatto? (prima o poi ci riesce visto che $v_c > v_g$).

FAQ:

- *Servono conoscenze particolari di fisica?* No.
- *Quanto è difficile?* Abbastanza, potreste aver bisogno di finire il corso di Analisi I prima di poterlo approcciare. Oppure si può arrivare a una soluzione più semplice.
- *Suggerimento?* Si può partire pensando a cosa deve soddisfare la retta tangente alla traiettoria seguita dal cane quando questo è nel generico punto (x, y)...
- *Perché la gente si fa queste domande?* Eh...qui poi apriremo un sondaggio.

Soluzione. Il cane che insegue descriverà una curva γ chiamata in gergo *a curve of pursuit* nel piano xy. Facciamo riferimento alla figura seguente:



Al generico tempo t la retta tangente alla curva γ nel punto $P(x, y)$ passa dal punto $Q = (0, v_g t)$ sull'asse delle y. Questo significa che la derivata in P della curva, cioè $y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ sarà

$$y' = \frac{y - v_g t}{x}$$

risolvendo per t otteniamo

$$t = \frac{y - xy'}{v_g} \tag{8.4}$$

Ora, sia s la distanza coperta dal cane dal punto S al punto P (fare riferimento alla figura sopra), cioè la lunghezza dell'arco di curva SP misurato lungo γ. Usando la formula per la lunghezza di un arco di curva otteniamo:

$$s = \int_x^d \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi = -\int_d^x \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi$$

e visto che $s = v_c t$ si ha

$$t = \frac{s}{v_c} = -\frac{1}{v_c}\int_d^x \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi. \tag{8.5}$$

Eguagliando (8.4) e (8.5) abbiamo che

$$-\frac{v_g}{v_c}\int_d^x \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi = y - xy';$$

a questo punto deriviamo ambo i membri rispetto ad x e semplifichiamo

$$-\frac{v_g}{v_c}\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - xy') = y' - (y' + xy'') = -xy'',$$

così da ottenere la seguente equazione differenziale del secondo ordine non lineare

$$\sqrt{1 + (y')^2} = kxy'', \quad k = \frac{v_c}{v_g} > 1.$$

Per risolverla, possiamo porre $w = y'$ e risolvere per separazione delle variabili nella nuova variabile w

$$\sqrt{1 + w^2} = kxw' = kx\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \iff \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 + w^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{kx}$$

da cui, integrando ambo i membri, otteniamo

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1+w^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{kx} + c \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{arcsinh} w = \frac{1}{k}\ln x + \ln c_1$$

e la costante c_1 si trova imponendo la condizione iniziale per $x = d$, ovvero $w = y'(d) = 0$, da cui

$$0 = \frac{1}{k}\ln d + \ln c_1 \implies c_1 = e^{-\frac{1}{k}\ln d}$$

e di conseguenza

$$\operatorname{arcsinh} w = \frac{1}{k}\ln x - \frac{1}{k}\ln d = \frac{1}{k}\ln\frac{x}{d}.$$

Risolviamo l'equazione sopra in w e scriviamo tutto in termini di esponenziali grazie alla relazione $\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = w = \sinh\left(\frac{1}{k}\ln\frac{x}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{1/k} - \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/k}\right).$$

L'ultima equazione è facilmente integrabile

$$y = \frac{1}{2}\int\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{1/k} - \left(\frac{x}{d}\right)^{-1/k}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1/k+1}\left(\frac{x}{d}\right)^{1/k+1} - \frac{d}{1-1/k}\left(\frac{x}{d}\right)^{1-1/k}\right) + c.$$

Troviamo ora la costante di integrazione c usando la condizione iniziale per $x = d$, ovvero $y = 0$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1/k+1}\left(\frac{d}{d}\right)^{1/k+1} - \frac{d}{1-1/k}\left(\frac{d}{d}\right)^{1-1/k}\right) + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{dk}{k^2-1}.$$

Abbiamo finalmente l'equazione della traiettoria seguita dal cane:

$$y = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{k}+1}\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{k}+1} - \frac{1}{1-\frac{1}{k}}\left(\frac{x}{d}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right) + \frac{dk}{k^2-1}$$

Per ottenere l'agognato tempo T al quale il cane raggiunge il gatto, poniamo $x = 0$ e osserviamo che il gatto avrà percorso una distanza pari a $y = f(0) = v_g T$ (punto R in figura) al tempo T

$$y = f(0) = \frac{dk}{k^2-1} = \frac{dv_c/v_g}{(v_c/v_g)^2 - 1} = \frac{v_g v_c}{v_c^2 - v_g^2}d = v_g T$$

da cui, finalmente, possiamo ricavare T

$$T = d\frac{v_c}{v_c^2 - v_g^2}$$

Esercizio 8.0.5 (∗∗). Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 - \sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione. Mostriamo una possibile soluzione passo passo

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x+\sin x}{1+(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}(\cos x-\sin x)}{1+(\cos x-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{1}{2}\arctan(\cos x-\sin x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 8.0.6 $(\ast\ast\ast)$**.** Mostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Benché ci siano varie soluzioni, la più rapida ed elegante è notare che $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$ (immediata conseguenza della (A.3)) e quindi si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^\alpha x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^\alpha x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

e dunque $I = \pi/4$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.0.7 $(\ast\ast\ast\ast)$**.** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Soluzione. Notiamo che si tratta di un integrale improprio poiché la funzione integranda non è definita né in $x = 0$ né in $x = 1$. Tuttavia, la funzione è integrabile in quanto si verifica facilmente che $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$ e quindi non ci sono problemi di illimitatezza della funzione integranda.

Ciò che rende davvero complicato questo esercizio è che l'integranda non ammette primitive elementari. Per calcolare l'integrale definito useremo una tecnica di derivazione sotto il segno di integrale che in questo caso è conosciuta come *Feynman's trick* (si veda la Sezione 7.5.6).

Definiamo la funzione $I(\alpha)$ nel seguente modo:

$$I(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

Notiamo che il valore dell'integrale che vogliamo calcolare corrisponde a $I(1)$. Adesso, deriviamo rispetto a α [2]:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cancel{\ln(x)}x^\alpha}{\cancel{\ln(x)}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\end{aligned}$$

Ma allora si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \qquad \Longrightarrow \qquad I(\alpha) = \int \frac{1}{\alpha+1}\,\mathrm{d}\alpha = \ln|\alpha+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Per trovare la costante c, si può notare che

$$I(0) = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = 0 = \ln|0+1| + c = c$$

e quindi $c = 0$. In definitiva si ha

$$I(\alpha) = \ln|\alpha+1| \qquad \Longrightarrow \qquad I(1) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

Esercizio 8.0.8 ($* * **$)**.** Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

Soluzione. Presentiamo una soluzione e un suggerimento.

Metodo 1 Sia

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,\mathrm{d}x;$$

dalla (5.58a) non è difficile vedere che vale $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Ponendo ora $A_n = nI_n^2$, vale la relazione

$$A_n = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}A_{n-2}.$$

Inoltre $A_1 = 4, A_2 = \pi^2/2$ e

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n^3}{(n+1)(n-1)^2}\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}.$$

Dal fatto che $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi^2}{8} > 1$ e $\frac{n^3}{(n+1)(n-1)^2} > 1$ per ogni $n \geq 1$, segue per induzione che $A_{n+1}/A_n > 1$ e quindi la successione A_n è crescente. Dall'equazione sopra si ricava

$$\left(n^2 - 2n\right)A_n = \left(n^2 - 2n + 1\right)A_{n-2}$$

[2] Qui porteremo la derivata sotto il segno di integrale senza farci troppe domande sulla legittimità di questo passaggio. Infatti, in generale non si può sempre derivare sotto il segno di integrale ma ci sono dei teoremi che ci garantiscono quando può essere fatto (vedere *Teorema della convergenza dominata* e *Teorema della convergenza monotona* che di solito si studiano in Analisi II). Qui chiediamo un "atto di fiducia" allo studente e ci limitiamo a dire che questo è uno di quei casi fortunati dove la cosa si può fare.

e quindi

$$\frac{A_{n-2}}{A_n} = 1 - \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}$$

da cui, facendo la produttoria

$$A_n A_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n} A_1 A_2 = \frac{4(n-1)\pi^2}{n}$$

Siccome il secondo membro di questa equazione è finito, allora la successione A_n deve tendere a un limite finito A. Facendo il limite si ricava $A^2 = 4\pi^2 \implies A = 2\pi$. Dalla definizione di A_n segue

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{A_n} = \sqrt{2\pi}$$

e quindi in definitiva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}} \sqrt{n} I_n = \sqrt{2\pi e}.$$

Metodo 2 Provare a calcolare il limite usando la (7.21b).

Appendice A

Formule trigonometriche elementari

In questa appendice raccogliamo alcuni fatti e formule elementari. Ricordiamo le formule fondamentali (1.39) della trigonometria. Come si vede dai grafici nelle Figure 1.11 e 1.12, le funzioni trigonometriche non sono lineari, quindi è necessario trovare formule opportune per esprimere il seno, il coseno e la tangente (la cotangente si ottiene semplicemente prendendo l'inverso della tangente) di una somma o una differenza di angoli tramite le funzioni seno, coseno e tangente degli angoli stessi.

Iniziamo con la seguente considerazione, che sarà il punto d'origine delle dimostrazioni di tutte le formule che ci interessano. Siano α e β due angoli come in Figura A.1 e consideriamo l'angolo differenza $\alpha-\beta$. Le proprietà di congruenza dei

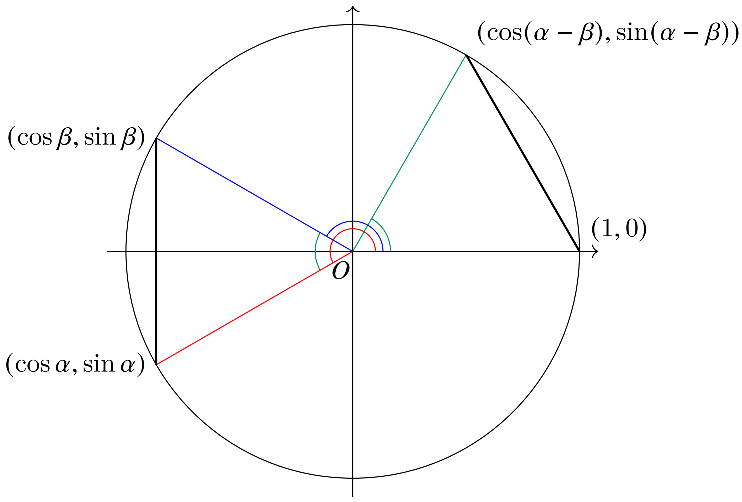


Figura A.1: Gli angoli α (rosso), β (blu) e $\alpha-\beta$ (verde). I segmenti in nero hanno la stessa lunghezza.

triangoli ci permettono di dire che i due segmenti marcati in nero hanno la stessa lunghezza, che possiamo calcolare con la formula della distanza tra due punti. Abbiamo allora

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$

da cui, svolgendo i quadrati e usando la prima delle (1.39), otteniamo

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{A.1a}$$

che si chiama *formula di sottrazione del coseno*. Scrivendo $\beta=-(-\beta)$, possiamo facilmente ricavare la formula di *addizione del coseno*:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))\overset{(A.1a)}{=}\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta),$$

da cui, usando la parità del coseno e la disparità del seno, si ottiene

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{A.1b}$$

Le (A.1) si possono condensare nella seguente forma

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta. \tag{A.2}$$

Ricordando ora che per ogni angolo ω vale

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\cos\omega,\\[2mm] \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\sin\omega,\end{cases} \tag{A.3}$$

possiamo scrivere (prendendo $\omega=\alpha+\beta$)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\&\overset{(A.1)}{=}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,\end{aligned}$$

da cui, usando le (A.3) si ottiene la *formula di addizione del seno*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \tag{A.4a}$$

e da questa

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))\overset{(A.4a)}{=}\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

e, ancora usando le parità, la *formula di sottrazione del seno*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{A.4b}$$

Anche le (A.4) si possono condensare e nella forma

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta. \tag{A.5}$$

Le *formule di addizione e sottrazione della tangente* si ottengono dalla seconda delle (1.39) e dalle (A.2) e (A.5): abbiamo

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}\underset{(A.2)}{\overset{(A.5)}{=}}\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta},$$

da cui, dividendo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ (così da far apparire ancora la tangente), abbiamo

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}. \tag{A.6}$$

Scegliendo ora $\beta = \alpha$ nella (A.1b), nella (A.4a) e nella (A.6), otteniamo le *formule di duplicazione*.[1] Si ha

$$\sin(2\alpha) \overset{(A.4a)}{=} 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{A.7a}$$

$$\cos(2\alpha) \overset{(A.1b)}{=} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \tag{A.7b}$$

$$\tan(2\alpha) \overset{(A.6)}{=} \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \tag{A.7c}$$

Scrivendo ora la ultime due forme della (A.7b) con $\alpha/2$ al posto di α e ricavando $\sin(\alpha/2)$ e $\cos(\alpha/2)$, otteniamo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \tag{A.8}$$

dove l'ultima è stata ottenuta dalle prime due ricordando la seconda delle (1.39). Le (A.8) si chiamano *formule di bisezione*.

È spesso utile, sia per risolvere equazioni che per il calcolo degli integrali, esprimere le funzioni seno, coseno e tangente di un angolo in termini della tangente della metà dell'angolo. Il vantaggio è che chiamando poi $t = \tan(\alpha/2)$ si ottengono funzioni razionali nell'indeterminata t. Partiamo dalla (A.7c) che diventa immediatamente

$$\tan\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)} = \frac{2t}{1-t^2}, \tag{A.9a}$$

che ora manipoliamo per ricavare le espressioni di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di t. Ricordando la prima e la seconda delle (1.39), abbiamo

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2},$$

da cui, elevando al quadrato, si ricava

$$\left(1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}\right)\sin^2\alpha = \frac{4t^2}{(1-t^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Estraendo la radice quadrata si ha l'espressione di $\sin\alpha$; usando la prima delle (1.39) e ricavando $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ si ottiene, in definitiva

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{A.9b}$$

Le (A.9) si chiamano *espressioni di seno, coseno e tangente come funzioni razionali della tangente della metà dell'angolo*. Quando applicate per risolvere gli integrali, con conseguente adattamento del differenziale secondo quanto prescritto dal Teorema 5.3.4 di cambiamento di variabile, prendono il nome di *sostituzione di Weierstrass*.

[1] Si confronti con il punto 2. degli Esercizi 1.5.45.

È utile segnalare altri due gruppi di formule che permettono di trasformare prodotti di seni e coseni in somme o differenze di seni e coseni o o viceversa. Sommando la (A.1a) e la (A.1b) si ottiene la seguente relazione

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]; \tag{A.10a}$$

sottraendo alla (A.1a) la (A.1b) si ottiene la seguente relazione

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]; \tag{A.10b}$$

infine, sommando la (A.4a) e la (A.4b) si ottiene la seguente relazione

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]; \tag{A.10c}$$

Le formule (A.10) appena trovate si chiamano *formule di Werner*. Da queste si ricava un altro gruppo di formule, dette *formule di prostaferesi*, sostanzialmente invertendo il senso di lettura. Poniamo $\alpha+\beta = p$ e $\alpha-\beta = q$ e ricaviamo α e β in funzione di p e q

$$\begin{cases}\alpha+\beta = p\\ \alpha-\beta = q\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2\alpha = p+q\\ 2\beta = p-q\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha = \dfrac{p+q}{2}\\ \beta = \dfrac{p-q}{2}\end{cases}$$

e riscriviamo le formule di Werner. Si ottengono (rimpiazzando ora p e q)

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{A.11a}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{A.11b}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{A.11c}$$

scambiando β con $-\beta$ nella (A.11c), si ottiene

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{A.11d}$$

Usando la seconda delle (1.39) e la (A.5), si possono anche scrivere le formule analoghe per la tangente

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{A.11e}$$

dove si è usata dell'algebra elementare, e che sono valide qualora il denominatore non sia nullo.

Indice analitico