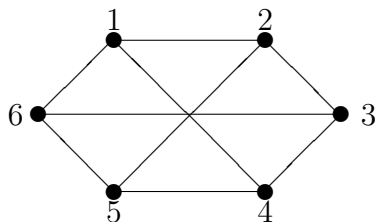


UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO EM INFORMÁTICA
TEORIA DOS GRAFOS

2ª Lista de Exercícios – 2013-1 – Profa Claudia Boeres

1. Existe um grafo bipartido hamiltoniano com número ímpar de vértices? Caso positivo dê um exemplo, e em caso negativo justifique.
2. A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa? Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo: Se um grafo bipartido $G = (V, E)$, com bipartição $V = (A, B)$ possui *caminho hamiltoniano* então $|A| = |B|$.
3. Mostre que qualquer grafo simples G contém pelo menos $m - n + w(G)$ ciclos distintos, onde $w(G)$ é o número de componentes conexas de G .
4. Mostre que se G não tem vértices de grau ímpar, então existem ciclos C_1, C_2, \dots, C_m , com arestas disjuntas, de maneira que $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_m)$.
5. Mostre que um grafo conexo G é euleriano se e somente se cada aresta de G pertence a um número ímpar de ciclos elementares no grafo.
6. Mostre que uma árvore com exatamente dois vértices de grau um é um caminho.
7. Mostre que um grafo é uma floresta se e somente se o seu número de arestas é igual ao seu número de vértices menos o seu número de componentes conexos.
8. Mostre que se G tem exatamente uma árvore geradora T então $G = T$.
9. Mostre que toda árvore é um grafo bipartido.
10. Um caminho P entre dois vértices distintos em um grafo conexo G é dito **diamétrico** se não existe nenhum outro caminho em G cujo comprimento é maior que o comprimento de P . Mostre que todo caminho diamétrico em uma árvore passa pelos seus vértices do centro.
11. Considerando o grafo apresentado abaixo, forneça:



- (a) subgrafos com estrutura de árvore
- (b) árvore geradora
- (c) subgrafo induzido
- (d) o centro do grafo

- (e) o seu diâmetro
- (f) seus vértices periféricos
- (g) Se as m arestas de um grafo são rotuladas e os k caminhos entre dois vértices v e w de G também são rotulados, a **matriz de caminhos** P_{vw} é uma matriz binária de dimensão $k \times m$ na qual a entrada (i, j) representa o fato da aresta j pertencer ao caminho p_i e 0 caso contrário. Defina uma rotulação de arestas para o grafo acima e construa a matriz de caminhos entre os vértices 1 e 3
12. Faça um algoritmo que use a busca em profundidade para determinar se um grafo simples e conexo é acíclico.
13. Uma companhia tem filiais em seis cidades C_1, C_2, \dots, C_6 . O custo de combustível de um voo direto de C_i para C_j é dado na (i, j) -ésima posição da tabela abaixo. O símbolo ∞ é utilizado na tabela para representar que não existe voo direto entre duas cidades. A companhia está interessada em determinar rotas que conectem C_1 a todas as outras cidades de maneira que o consumo total de combustível seja o menor possível. Aplique o algoritmo de Dijkstra para gerar os caminhos de C_1 a todas as outras cidades de maneira a gastar o mínimo possível de combustível. Explique os principais passos do funcionamento do algoritmo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$