UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
TEORIA DOS GRAFOS
5ª Lista de Teoria dos Grafos
2013-1 – Profa Claudia Boeres

1. Dado o grafo valorado da Figura 1, forneça uma árvore geradora mínima utilizando um dos algoritmos (Prim ou Kruskal). Descreva os principais passos dos algoritmos utilizados.

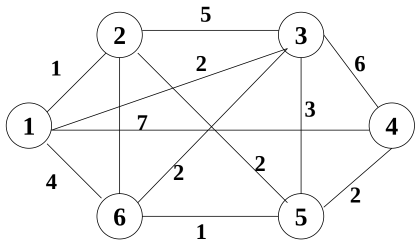

Figure 1: Grafo G

2. Considerando o grafo da Figura 2, forneça:

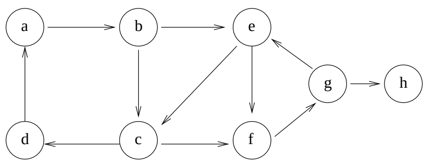

Figure 2: Grafo G_1

a) o grau, semigrau interior e exterior de cada vértice

b) fecho transitivo direto do vértice b.

c) fecho transitivo inverso do vértice b.

d) componentes f-conexas do grafo G_1.

e) um subgrafo induzido por vértices, de pelo menos 4 vértices, que seja acíclico.

3. Dê exemplos de:

(a) um digrafo sf-conexo que não é f-conexo

(b) um digrafo s-conexo que não é sf-conexo

(c) um digrafo acíclico

(d) um grafo não direcionado conexo que possui um matching perfeito

4. Dado o grafo G_2 da Figura 3, determine:

(a) O número cromático de G_2

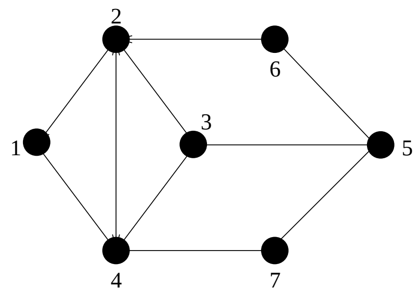

Figure 3: Grafo G_2

(b) um conjunto independente maximal

(c) um conjunto independente máximo

(d) um matching máximo

(e) uma cobertura de arestas minimal

(f) G_2 possui um matching perfeito? Se possui, indique.

(g) o grafo dual de G_2.

5. Determine as faces, as fronteiras e os graus do grafo planar G_2.

6. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é **verdadeira** ou **falsa**. Se for verdadeira, mostre. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) O grafo de linha $L(G)$ de um grafo G é aquele que possui como vértices as arestas de G, sendo dois vértices adjacentes em $L(G)$ se e somente se as arestas correspondentes o forem em G. Então a cardinalidade do *matching* máximo de G é igual à cardinalidade do conjunto independente máximo de $L(G)$.

   (b) Todo grafo bipartido admite um *matching* completo.

   (c) Todo digrafo que possui pelo menos uma fonte e um sumidouro é necessariamente acíclico.

   (d) Todo *matching* perfeito é maximal.

   (e) Todo digrafo acíclico é uma árvore.

   (f) Pode-se definir como *índice cromático* de um grafo G o menor número de cores atribuídas a arestas de G, de maneira que duas arestas adjacentes tenham cores distintas. Se adicionarmos arestas a um grafo G simples, unindo vértices não adjacentes de G e de forma que o seu grau máximo permanece inalterado, o índice cromático de G também permanece inalterado.

   (g) Uma árvore tem no máximo um *matching* perfeito.

   (h) O fecho transitivo direto de um grafo $G = (V, A)$ f-conexo é igual a V.

7. Mostre que:

(a) Um grafo planar G tem número cromático 2 se o grau de cada face de G é par.

(b) Um conjunto K de vértices é uma cobertura de vértices se e somente se $V - K$ é um conjunto independente.

(c) Mostre que toda face em um grafo simples planar maximal em relação a planaridade (nenhuma aresta pode ser adicionada sem destruir a propriedade de planaridade no grafo simples), é um triângulo.

(d) os grafos da Figura 4 são isomorfos mas os seus duais não o são.

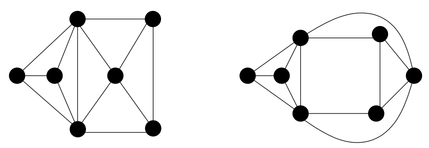

Figure 4: Grafos G_3 e G_4