Fundamentos de Recursividade

Conceito de Recursividade

- Fundamental em Matemática e Ciência da Computação
  - Um programa recursivo é um programa que chama a si mesmo
  - Uma função recursiva é definida em termos dela mesma
- Exemplos
  - Números naturais, Função fatorial, Árvore
- Conceito poderoso
  - Define conjuntos infinitos com *comandos* finitos

Conceito de Recursividade

- A recursividade é uma estratégia que pode ser utilizada sempre que o cálculo de uma função para o valor n, pode ser descrita a partir do cálculo desta mesma função para o termo anterior (n-1).

Exemplo – Função fatorial:

n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) *....* 1
(n-1)! = (n-1) * (n-2) * (n-3) *....* 1

logo:

n! = n * (n-1)!

Conceito de Recursividade

- Definição: dentro do corpo de uma função, chamar novamente a própria função
  - recursão direta: a função A chama a própria função A
  - recursão indireta: a função A chama uma função B que, por sua vez, chama A

Condição de Parada

- Nenhum programa nem função pode ser exclusivamente definido por si
  - Um programa seria um loop infinito
  - Uma função teria definição circular
- Condição de parada
  - Permite que o procedimento pare de se executar
  - *F(x)* > 0 onde *x* é decrescente
- Objetivo
  - Estudar recursividade como ferramenta *prática*!

Conceito de Recursividade

- Para cada chamada de uma função, recursiva ou não, os parâmetros e as variáveis locais são empilhados na pilha de execução.

Execeção

- Internamente, quando qualquer chamada de função é feita dentro de um programa, é criado um **Registro de Ativação** na **Pilha de Execução** do programa
- O registro de ativação armazena os parâmetros e variáveis locais da função bem como o “ponto de retorno” no programa ou subprograma que chamou essa função.
- Ao final da execução dessa função, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou a função

Exemplo

```
Fat(int n)
    {
    if(n<=0)  return 1;
      else
         return n * Fat(n-1);
}


Main()
     {
     int f;
     f = fat(5);
     printf("%d",f);
     }
```

Complexidade

- A complexidade de tempo do fatorial recursivo é O(n). (Em breve iremos ver a maneira de calcular isso usando **equações de recorrência**)
- Mas a complexidade de espaço também é O(n), devido a pilha de execução

- Ja no fatorial não recursivo a complexidade de espaço é O(1)

```
Fat(int n)
   {
   int f;
   f = 1;
   while(n > 0)
         {
         f = f * n;
         n = n - 1;
         }

   return f;
   }
```

Conceito de Recursividade

- Portanto, a recursividade nem sempre é a melhor solução, mesmo quando a definição matemática do problema é feita em termos recursivos

Fibonacci

- Outro exemplo: **Série de Fibonacci**:
  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\quad n > 2,$
  - $F_0 = F_1 = 1$
  - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

```
Fib(int n) {
    if (n<2)
        return 1;
    else
        return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

Análise da função Fibonacci

- **Ineficiência em Fibonacci**
  - Termos F_{n-1} e F_{n-2} são computados independentemente
  - Número de chamadas recursivas = número de Fibonacci!
  - Custo para cálculo de F_n
    - $O(\phi^n)$ onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803...$
    - *Golden ratio*
    - Exponencial!!!

Fibonacci não recursivo

```
int FibIter(int n)
{
int i, k, F;

i = 1; F = 0;
for(k = 1; k <= n; k++)
    {
    F += i;
    i = F - i;
    }
return F;
}
```

- Complexidade: O(n)
- Conclusão: não usar recursividade cegamente!

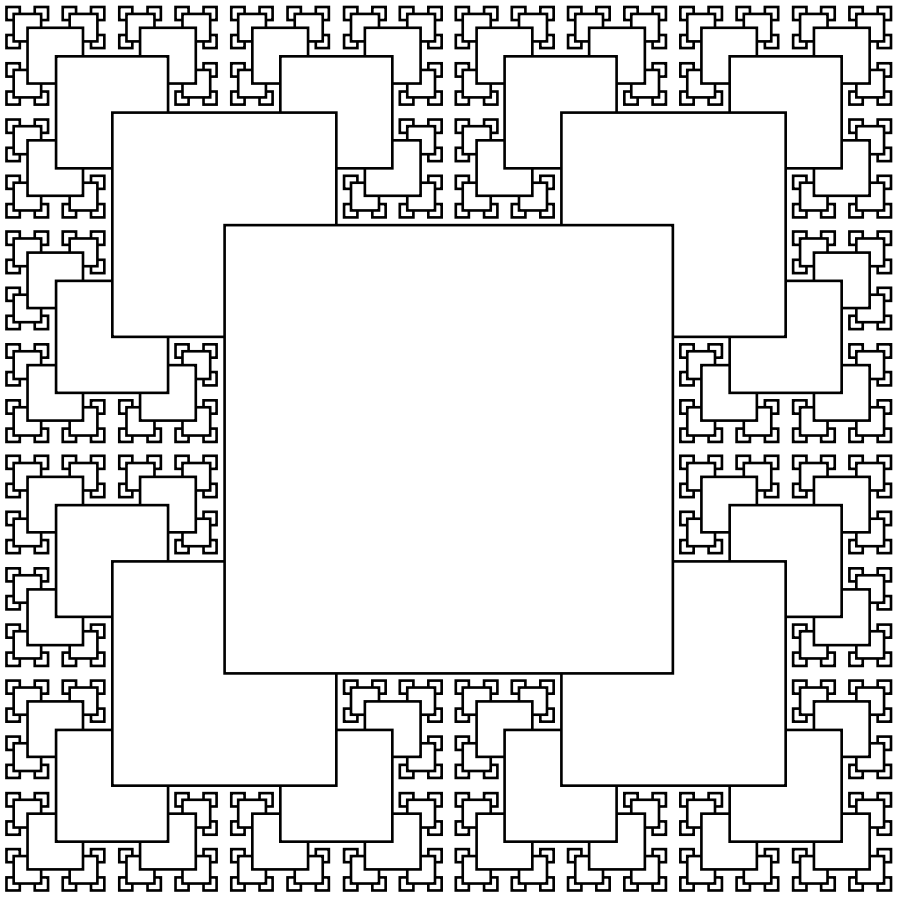
Quando vale a pena usar recursividade

- Recursividade vale a pena para Algoritmos complexos, cuja a implementação iterativa é complexa e normalmente requer o uso explícito de uma pilha
  - Dividir para Conquistar (Ex. Quicksort)
  - Caminhamento em Árvores (pesquisa, backtracking)

Dividir para Conquistar

- **Duas chamadas recursivas**
  - Cada uma resolvendo a metade do problema
- **Muito usado na prática**
  - Solução eficiente de problemas
  - Decomposição
- **Não se reduz trivialmente como fatorial**
  - Duas chamadas recursivas
- **Não produz recomputação excessiva como fibonacci**
  - Porções diferentes do problema

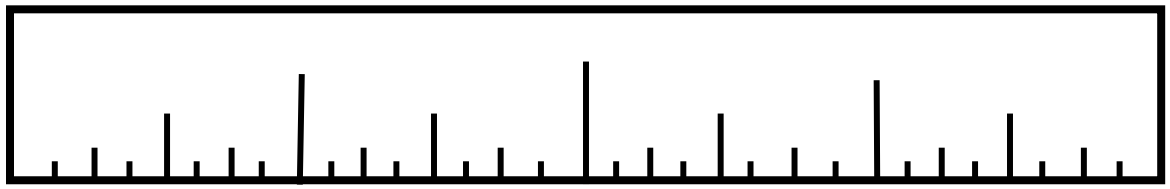
Outros exemplos de recursividade



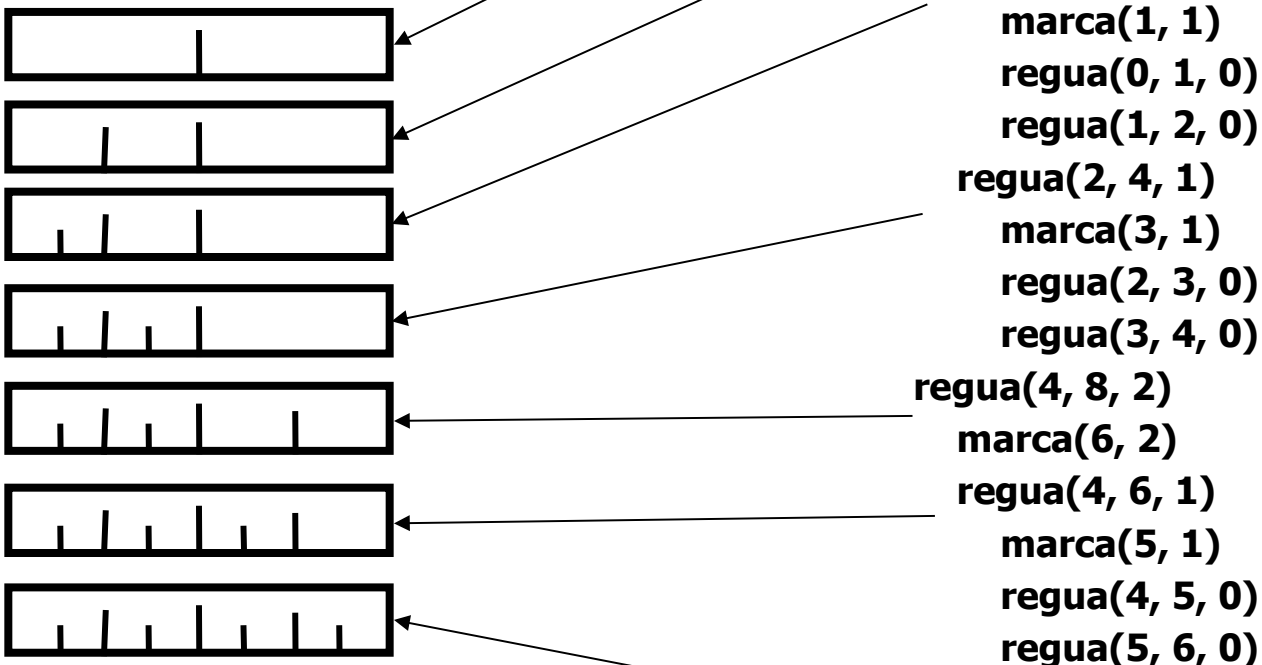
```
void estrela(int x,int y, int r)
{
  if ( r > 0 )
  {
    estrela(x-r, y+r, r div 2);
    estrela(x+r, y+r, r div 2);
    estrela(x-r, y-r, r div 2);
    estrela(x+r, y-r, r div 2);
    box(x, y, r);
  }
}
```

Exemplo simples: régua

```
int regua(int l,int r,int h)
{
  int m;
  if ( h > 0 )
  {
    m = (l + r) / 2;
    marca(m, h);
    regua(l, m, h - 1);
    regua(m, r, h - 1);
  }
}
```



Execução: régua



```
regua(0, 8, 3)
  marca(4, 3)
  regua(0, 4, 2)
    marca(2, 2)
    regua(0, 2, 1)
      marca(1, 1)
      regua(0, 1, 0)
      regua(1, 2, 0)
    regua(2, 4, 1)
      marca(3, 1)
      regua(2, 3, 0)
      regua(3, 4, 0)
  regua(4, 8, 2)
    marca(6, 2)
    regua(4, 6, 1)
      marca(5, 1)
      regua(4, 5, 0)
      regua(5, 6, 0)
    regua(6, 8, 1)
      marca(7, 1)
      regua(6, 7, 0)
      regua(7, 8, 0)
```

Análise de Complexidade O

- **`Define-se uma função de complexidade f(n) desconhecida`**
  - n mede o tamanho dos argumentos para o procedimento em questão
- **`Identifica-se a equação de recorrência T(n):`**
  - Especifica-se T(n) como uma função dos termos anteriores
  - Especifica-se a condição de parada (e.g. T(1))

Análise da Função Fatorial

- Qual a equação de recorrência que descreve a complexidade da função fatorial?

$$\begin{cases} T(n) = 1 + T(n-1) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = 1 + T(n-1)$$
$$T(n-1) = 1 + T(n-2)$$
$$T(n-2) = 1 + T(n-3)$$
$$\ldots$$
$$T(2) = 1 + T(1)$$

Análise de Funções Recursivas

- Além da análise de custo do tempo, deve-se analisar também o custo de espaço

- Qual a complexidade de espaço da função fatorial (qual o tamanho da pilha de execução)?

Análise de Funções Recursivas

- Considere a seguinte função:

```
Pesquisa(n)
{
   (1)  if (n <= 1)
   (2)       ‘ inspecione elemento ’ e termine;
         else
        {
   (3)      para cada um dos n elementos ‘ inspecione elemento’;
   (4)      Pesquisa(n/3) ;
        }
}
```

Análise de Funções Recursivas

- Qual a equação de recorrência?

  $T(n) = n + T(n/3)$

  $T(1) = 1$

- Resolva a equação de recorrência
  - Dicas:
    - Pode fazer a simplificação de n será sempre divisível por 3
    - Somatório de uma PG finita: $(a_0 – r^n)/(1-r)$

Resolvendo Equação

- Substitui-se os termos $T(k),\ k < n,$ até que todos os termos $T(k),\ k > 1,$ tenham sido substituídos por fórmulas contendo apenas $T(1)$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + T(n/3) \\
T(n/3) &= n/3 + T(n/3/3) \\
T(n/3/3) &= n/3/3 + T(n/3/3/3) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
T(n/3/3\cdots/3) &= n/3/3\cdots/3 + \overbrace{T(n/3\cdots/3)}^{1 \rightarrow n/3^K = 1 \rightarrow n = 3^K}
\end{aligned}
$$

Resolvendo Equação

Considerando que $T(n/3^K) = T(1)$ temos:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{K-1} (n/3^i) + T(1) = n \sum_{i=0}^{K-1} (1/3^i) + 1$$

Aplicando a fórmula do somatório de uma PG finita $(a_0 - r^n)/(1-r)$, temos:

$$n\ (1 - (1/3)^K)/(1 - 1/3) + 1$$
$$n\ (1 - (1/3^K))/(1 - 1/3) + 1$$
$$n\ (1 - (1/n))/(1 - 1/3) + 1$$
$$(n - 1)/(2/3) + 1$$
$$3n/2 - ½$$

O(n)

Exercício

- Crie uma função recursiva que calcula a potência de um número:
  - Como escrever a função para o termo n em função do termo anterior?
  - Qual a condição de parada?
- Qual a complexidade desta função?

Função de Potência Recursiva

```
int pot(int base, int exp)
{
  if (!exp)
    return 1;

  /* else */
  return (base*pot(base, exp-1));
}
```

Análise de complexidade:

```
  T(0) = 1;
  T(b,n) = 1 + T(b,n-1);
```

O(n)

Exercício

- Implemente uma função recursiva para computar o valor de 2^n

- O que faz a função abaixo?

```
void f(int a, int b) { // considere a > b
    if (b = 0)
        return a;
    else
        return f(b, a % b);
}
```

Respostas

- ```
  Pot(int n) {
      if (n==0)
          return 1;
      else
          return 2 * Pot(n-1);
  }
  ```
- Algoritmo de Euclides. Calcula o MDC (máximo divisor comum) de dois números a e b
  ```