1.4 联结词全功能集

联结词“↓”有以下性质：

设p、q为命题，则：

- $p \downarrow p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow \neg p$
- $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$
- $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$

对比前面的结果：

- $p \uparrow p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow \neg p$
- $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow p \wedge q$
- $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \vee q$

定义1.15 在一个连接词的集合中，如果一个连接词可由集合中的其它连接词定义，则称此连接词为冗余的连接词，否则称为独立的连接词。

对于连接词集合{¬、∧、∨、→、↔}。由于：

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

所以 →、↔都是冗余的。又考虑{¬、∧、∨}中，由于：

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

所以∨可以看作为冗余的，因此{¬、∧}中无冗余。

类似地，{¬、∨}中也无冗余。

1.4 联结词全功能集

定义1.16 若任意一真值函数都可以用仅含某一连接词集中的连接词的命题公式表示，则称该连接词集为全功能集。若一个连接词的全功能集中不含冗余的连接词，则称它为极小全功能集。

显然：{¬、∧、∨}是全功能集，但不是极小全功能集；而{¬、∧}或，{¬、∨}才是极小全功能集。

p	q	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

例1.22 分别以下列给出的各连接词集中的连接词写出右表中F的一个命题公式。

（1）$\{\neg、\rightarrow\}$，（2）$\{\neg、\wedge\}$，（3）$\{\uparrow\}$，（4）$\{\downarrow\}$

解：（1）$F \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$

（2）$F \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

（3）注意到$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$

$$F \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge (q \uparrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge (q \uparrow q)))$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow (q \uparrow q)) \Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

（4）注意到$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$

$$F \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg((\neg p) \vee q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q$$

1.4 联结词全功能集

显然，基于上一例的结果，{↑}，{↓}均是全功能集，因为：

$$\neg p \Leftrightarrow \neg (p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg (\neg (p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg (p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

同理可说明，{↓}也是全功能集。

1.5.1 对偶式

定义1.18 在仅含{¬，∧，∨}的命题公式A中，将∧与∨对换，若A中含0或1，则将0和1对换，所得到的命题公式称为A的对偶式，记为A^*。

显然：A与A^*互为对偶式，且$(A^*)^* = A$

例1.23 求$p \uparrow q$，$p \downarrow q$的对偶式。

解：因$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

则：$p \uparrow q$的对偶式为$\neg(p \vee q)$，即$p \downarrow q$

同理：$p \downarrow q$的对偶式为$p \uparrow q$

定理1.2 设A和A^*互为对偶式，p_1，p_2，$\ldots p_n$是出现在A和A^*中的全部命题变项，则：

（1）$\neg A(p_1, p_2, \ldots p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n)$

（2）$A(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(p_1, p_2, \ldots p_n)$

证明：其实德·摩根律是对偶原理的特殊情况

由：$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

则：$\neg A(p_1, p_2, \ldots p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n)$

同理：$A(\neg p_1, \neg p_2, \ldots \neg p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(p_1, p_2, \ldots p_n)$

例1.24 设$A^*(p, q, r)$是$\neg p \wedge (\neg q \vee r)$，证明：

$A^*(\neg p, \neg q, \neg r) \Leftrightarrow \neg A(p, q, r)$

证明：因 $A^*(p, q, r)$是$\neg p \wedge (\neg q \vee r)$

则： $A^*(\neg p, \neg q, \neg r)$是$p \wedge (q \vee \neg r)$

但： $A(p, q, r)$是$A^*(p, q, r)$的对偶式，是$\neg p \vee (\neg q \wedge r)$

故： $\neg A(p, q, r)$ 是 $p \wedge (q \vee \neg r)$

所以：$A^*(\neg p, \neg q, \neg r) \Leftrightarrow \neg A(p, q, r)$

即进一步证明了对偶原理（1）

定理1.3 设p_1， $p_{2,}$， $\ldots p_n$是出现在A和B中的命题变项，若$A \Leftrightarrow B$，则$A^* \Leftrightarrow B^*$（对偶原理）。

证明： 由：$A \Leftrightarrow B$

则： $A(p_1,\ldots p_n) \leftrightarrow B(p_1,\ldots p_n)$ 是永真式

故： $A(\neg p_1,\ldots \neg p_n) \leftrightarrow B(\neg p_1,\ldots \neg p_n)$也是永真式

即： $A(\neg p_1,\ldots \neg p_n) \Leftrightarrow B(\neg p_1,\ldots \neg p_n)$

由定理1.2 $\neg A^*(p_1, p_2, \ldots p_n) \Leftrightarrow \neg B^*(p_1, p_2, \ldots p_n)$

即： $A^* \Leftrightarrow B^*$

1.5.2 范式

给定一个命题公式，判断它是永真式、永假式、还是可满足式，这类问题称为判定问题。

前面学过的判定方法：真值表法、等值演算法，但以上方法不适合命题变项数目较多的情形，必须将命题公式化为标准型：主析取范式或主合取范式。

先讲授析取范式和合取范式的概念。

定义1.19 （1）一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式： $A_1 \vee A_{2,} \vee \ldots \vee A_n$ ； 其中A_i（i=1,2, … n）由命题变元或其否定所组成的合取式；

如： $\neg p \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$为析取范式

（2） 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式： $A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n$ ； 其中A_i（i=1,2, … n）由命题变元或其否定所组成的析取式。

如： $\neg p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$为合取范式

1.5 对偶与范式

定理1.4 （范式存在定理） 任一命题公式都存在与它等值的析取范式或合取范式。

✓消去除{¬，∧，∨}外冗余的联结词；

若命题公式中含其它联结词，可用如下基本等值式及置换规则将它们消去：

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \qquad p \nrightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

$$p \bar{\vee} q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \qquad p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

1.5 对偶与范式

✓ 否定号的消去或内移；

用：$\neg\neg p \Leftrightarrow p$；

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q;$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

✓ 利用分配率。

① 求析取范式，使用“$\wedge$”对“$\vee$”的分配律；

② 求合取范式，使用“$\vee$”对“$\wedge$”的分配律。

例1.25 求命题公式：$((p \vee q) \to r) \to p$的合取范式和析取范式。

解：（1）求合取范式

$$((p \vee q) \to r) \to p$$

$\Leftrightarrow (\neg (p \vee q) \vee r) \to p$　　（消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg (\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$　　（消去第二个→）

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$　　（¬内移）

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge(\neg r \vee p)$　　（∨对∧的分配律）

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p\vee \neg r)$　　（等值演算）

显然：合取范式不唯一，以上最后两式都是合取范式。

（2）求析取范式

$$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$ （前面已有结论）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p$ （$\wedge$ 对$\vee$的分配律）

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$ （利用交换律和吸收律）

显然，以上两式均为析取范式。

由于命题公式的合取范式和析取范式不唯一，因此不能作为命题公式的标准型，因此必须引入主合取范式和主析取范式的概念，讨论标准型。

定义1.20 在含n个命题变项的简单合取式中，若每个命题变项与其否定不同时存在，但p_i与$\neg p_i$之一必须出现且仅出现一次，且p_i或$\neg p_i$出现在从左起的第i位上（若命题变项无角标，则按字典顺序），这样的简单合取式称为**极小项**。

如：$p \Leftrightarrow p \wedge 1$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

——极小项m_2与m_3的析取

3个命题变项例

p	q	r	极小项	十进制数	记号
0	0	0	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0	m_0
0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	1	m_1
0	1	0	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	2	m_2
0	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	3	m_3
1	0	0	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	4	m_4
1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	5	m_5
1	1	0	$p \wedge q \wedge \neg r$	6	m_6
1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	7	m_7

一般地，n个命题变项共产生2^n个极小项：$m_0, m_1 \ldots m_{2^n-1}$。

1.5.3 主析取范式

定义1.21 在含n个命题变项的命题公式**A**中，若**A**的析取范式中的简单合取式全部是极小项，则称该析取范式为主析取范式。

例1.26 求上例析取范式$p \vee (q \wedge \neg r)$的主析取范式

$\Leftrightarrow (p \wedge 1 \wedge 1) \vee (1 \wedge (q \wedge \neg r))$

$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge (q \wedge \neg r))$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee \underline{(p \wedge q \wedge \neg r)} \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$\vee \underline{(p \wedge q \wedge \neg r)} \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$

显然：上式是标准的主析取范式。

定理1.5 任何命题公式的主析取范式都是存在的，并且唯一。

求给定命题公式A的主析取范式的步骤如下：

- ✓求A的析取范式A’；
- ✓若A’的某简单合取式B中不含命题变项p_i或$\neg p_i$，则将B展成：

$$B \Leftrightarrow B \wedge 1 \Leftrightarrow B \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B \wedge p_i) \vee (B \wedge \neg p_i)$$

- ✓将重复出现的命题变项、永假式及重复出现的极小项“消去”；
- ✓将极小项按由小到大的顺序排列，并用“∑”表示。

例1.27 求$p \wedge q \vee r$的主析取范式。

解法1： $p \wedge q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$（析取范式）

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r)$

$\Leftrightarrow \underline{(p \wedge q \wedge r)} \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\quad \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \underline{(p \wedge q \wedge r)}$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

$\quad \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \underline{(p \wedge q \wedge r)}$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)$

也可利用真值表法求命题公式的主析取范式：

例1.27 求上例$p \wedge q \vee r$的主析取范式。

解法2：真值表见右图

显然：主析取范式为$\sum(1,3,5,6,7)$——与解法1的结果完全一致!

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

总结，主析取范式有以下用途：

- ✓ 判断两个命题公式是否等值；
- ✓ 判断命题公式的类型。

例1.28 求 $((p \vee q) \to r) \to p$ 的主析取范式

解： 原式 $\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p$ （析取范式）

$\Leftrightarrow (p \wedge 1 \wedge \neg r) \vee (1 \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge 1 \wedge 1)$

$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r))$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$

1.5.4 主合取范式

求一个命题公式的主合取范式的方法与求其主析取范式完全一样，只是具体表达式的形式不一样而已，因此略，请大家自学。

P1.29 **A、B、C、D**四个人中要派**2**人出差，满足下列**3**个条件有几种派法？如何派？

① 若**A**去，则**C**和**D**中要去**1**人；

② **B**和**C**不能都去；

③ **C**去则**D**要留下。

解：令**A、B、C、D**分别表示这**4**个人去出差，则以上**3**个条件符号化为：

① $A \to (C \bar{\vee} D)$

② $B \uparrow C$

③ $C \to \neg D$

则：$(A \to (C \bar{\vee} D)) \wedge (B \uparrow C) \wedge (C \to \neg D) \Leftrightarrow 1$

1 $\Leftrightarrow (A\rightarrow(C\,\overline{\vee}\,D)) \wedge (B\uparrow C) \wedge (C\rightarrow\neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee(C\wedge\neg D) \vee(\neg C\wedge D))) \wedge (\neg B\vee\neg C) \wedge (\neg C\vee\neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A\vee(C\wedge\neg D) \vee(\neg C\wedge D))) \wedge$

$((\neg B \wedge\neg C) \vee (\neg B \wedge\neg D) \vee ((\neg C \wedge\neg C) \vee ((\neg C \wedge\neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg C) \vee$

$(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D) \vee (\neg B\wedge C\wedge\neg D)$

$\vee (\neg B\wedge\neg C\wedge D) \vee (\neg C \wedge D)$ (析取范式)

$\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg C) \vee (\neg B\wedge C\wedge\neg D)$

$\vee (\neg B\wedge\neg C\wedge D) \vee (\neg C \wedge D)$ (析取范式)

结论： $B \wedge D$、 $A \wedge C$、 $A \wedge D$三种派法之一

作业：

第一章习题

1.10

1.12（2）（4）

1.13

1.19

1.20

1.6.1 推理的基本概念

推理——从前提推出结论的思维过程。

前提——已知的命题公式。

结论——从前提出发运用推理规则推出的命题公式。

定义1.24 若**A**和**B**是两个命题公式，当且仅当**A** $\rightarrow$ **B**为永真式，即**A**$\Rightarrow$ **B**，称**B**为**A**的有效结论，或称**B**可由**A**逻辑地推出。

上述定义可以推广到n个前提的情形：

当且仅当$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$为永真式，则称**B**是一组前提$A_1, A_2, \ldots, A_n$的有效结论。

例1.31 判断下列各推理是否正确：

（1）如果天气凉快，小王就不去游泳。天气凉快，所以小王就没去游泳。

解：符号化，设：

p：天气凉快；q：小王去游泳

前提：$p \rightarrow \neg q$，p　　结论：$\neg q$

形式结构：$((p \rightarrow \neg q) \wedge p) \rightarrow \neg q$ 是否为永真式?

✓真值表法

✓等值演算法

✓主析取范式法

✓真值表法

构造公式$((p \to \neg q) \wedge p) \to \neg q$的真值表，确定公式真值全部为1，则公式为永真式，所以推理正确。

✓等值演算法

使用等值演算方法证明$((p \to \neg q) \wedge p) \to \neg q \Leftrightarrow 1$，则公式为永真式，所以推理正确。

✓主析取范式法

$$((p \to \neg q) \wedge p) \to \neg q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow \sum(0,1,2,3)$$

则公式为永真式，所以推理正确。

1.6.2 构造证明法

人们在研究推理过程中，发现一些重要的永真蕴涵式，我们把这些永真蕴涵式称为推理定律，下面我们给出这些推理定律。

1.6 推理理论

附加： $A \Rightarrow A \vee B$

化简：$A \wedge B \Rightarrow A$

假言推理：$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

拒取式：$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

析取三段论：$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

假言三段论：$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$

等价三段论： $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$

构造性二难：$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

1.6 推理理论

常用的推理规则：

前提引入：任何步骤，均可以引入前提。

结论引入：任何步骤，所证明的结论都可作为后续证明的前提。

置换：在任何步骤，命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换。如：可用$\neg p \vee q$置换 $p \to q$

合取引入：A，$B \Rightarrow A \wedge B$

假言推理：$A \to B$，$A \Rightarrow B$

附加：$A \Rightarrow A \vee B$

化简：$A \wedge B \Rightarrow A$

拒取式：$A \to B$，$\neg B \Rightarrow \neg A$

析取三段论：$A \vee B$，$\neg B \Rightarrow A$

假言三段论：$A \to B$，$B \to C \Rightarrow A \to C$

构造性二难：$A \to B$，$C \to D$，$A \vee C \Rightarrow B \vee D$

举例说明构造证明法的运用

例1.32 若数a是实数，则它不是有理数就是无理数。若a不能表示成分数，则它不是有理数。a是实数且它不能表示成分数，所以a是无理数。

解：首先将简单命题符号化：

p：a是实数；　　q：a是有理数；

r：a是无理数；　　s：a能表示成分数。

前提：$p \to q \vee r$，$\neg s \to \neg q$，$p \wedge \neg s$

结论：r

前提：$p \to q \vee r$，$\neg s \to \neg q$，$p \wedge \neg s$

结论：r

证明：

①	$p \wedge \neg s$	前提引入
②	p	①化简
③	$\neg s$	①化简
④	$p \to q \vee r$	前提引入
⑤	$q \vee r$	② ④假言推理
⑥	$\neg s \to \neg q$	前提引入
⑦	$\neg q$	③ ⑥假言推理
⑧	r	⑤⑦ 析取三段论

1.6 推理理论

在构造证明时，采用一些技巧会带来许多方便，通常的技巧是：

✓附加前提证明法

若推理结构具有形式：

$$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B) \qquad (*)$$

（*）中的结论也为蕴涵式，则可加工结论中的前件作为推理的前提，即：

$$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg (A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n) \vee \neg A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_{2,} \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$$

称**A**为附加前提，称此证明方法为附加前提证明法。

例1.33 用附加前提法证明下列推理：

前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg s \vee p$，q

结论：$s \to r$

证明：
① s 附加前提引入
② $\neg s \vee p$ 前提引入
③ p ①②析取三段论
④ q 前提引入
⑤ $p \wedge q$ ③④合取
⑥ $(p \wedge q) \to r$ 前提引入
⑦ r ⑤⑥假言推理

✓归谬法

若推理结构具有形式：$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$　（*）

若将$\neg B$也作为前提能推出矛盾，比如说得出 $A \wedge \neg A$，则说明（*）中的蕴涵式为永真式。即：

$$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg (A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B)$$

即：$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B)$为永假式正好与（*）为永真式等价，即：$(A_1 \wedge A_{2,} \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$

称此证明方法为归谬法。

例1.34 用归谬法证明下列推理：

前提：$(p \wedge q) \rightarrow r$， $\neg r \vee s$，p， $\neg s$

结论： $\neg q$

证明：

① q	结论的否定引入
② $\neg r \vee s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③析取三段论
⑤ $(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ p	前提引入
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论
⑩ $q \wedge \neg q$	①⑨合取

例1.35 给出下面8个命题公式：

（1） $(p \wedge q) \rightarrow p \vee q$；

（2） $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$；

（3） $(\neg(q \rightarrow p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$；

（4） $p \wedge q \wedge r$；

（5） $(p \rightarrow q) \wedge r$;

（6） $(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (p \wedge q \rightarrow q)$；

（7） $q \rightarrow (p \rightarrow r)$；

（8） $(p \rightarrow q) \rightarrow r$。

① 用真值表法证明（1）与（2）不等值;

② 用真值演算法证明（3）与（4）等值;

③ 用主析取范式法证明（5）与（6）等值;

④ 用主合取范式法证明（7）与（8）不等值。

证明：①给出（1）与（2）的真值表如下，说明不等值：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(\neg p \vee \neg q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1

证明：②用真值演算法证明（3）与（4）等值：

（3） $(\neg(q \to p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

（4） $p \wedge q \wedge r$

从（3）开始演算：

（3）$\Leftrightarrow (\neg(q \to p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg q \vee p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow 0 \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

$\Leftrightarrow$ （4）

证明：③用主析取范式法证明（5）与（6）等值：

先求（5）的主析取范式：

（5）$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$

再求（6）的主析取范式：

（6）$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge r \wedge (p \wedge q \to q)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \wedge 1$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$

证明：④用主合取范式法证明（7）与（8）不等值：

先求（7）的主合取范式：

（7）$\Leftrightarrow q \to (p \to r) \Leftrightarrow q \to (\neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r \Leftrightarrow M_6$

再求（8）的主合取范式：

（8）$\Leftrightarrow (p \to q) \to r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$

显然：（7）与（8）不等值

例1.36 将公式$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$ 化成下列各功能完备集中的公式：

（1）$\{\neg, \rightarrow\}$，（2）$\{\neg, \wedge, \vee\}$，（3）$\{\neg, \wedge\}$，（4）$\{\neg, \vee\}$

解：（1）$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg p \vee q) \rightarrow r) \vee \neg(r \rightarrow (\neg p \vee q)))$$

$$\Leftrightarrow \neg(((\neg p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow \neg(r \rightarrow (p \rightarrow q)))$$

$$\Leftrightarrow \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg(r \rightarrow (p \rightarrow q)))$$

（2）$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q))$$

例1.36 将公式$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$化成下列各功能完备集中的公式：

（1）$\{\neg, \rightarrow\}$，（2）$\{\neg, \wedge, \vee\}$，（3）$\{\neg, \wedge\}$，（4）$\{\neg, \vee\}$

解：（3）$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg(p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \wedge \neg(r \wedge (p \wedge \neg q))$$

（4）$(\neg p \vee q) \leftrightarrow r$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (\neg r \vee (\neg p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee r)) \vee \neg(\neg r \vee (\neg p \vee q)))$$

例1.37 将用附加前提证明法和不用附加前提证明法证明下列推理：

前提：$p \vee q$，$p \rightarrow r$，$q \rightarrow s$　结论：$\neg s \rightarrow r$

证明：方法一，用附加前提证明法证明：

① $\neg s$	附加前提引入
② $q \rightarrow s$	前提引入
③ $\neg q$	①②拒取式
④ $p \vee q$	前提引入
⑤ p	③④析取三段论
⑥ $p \rightarrow r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

例1.37 将用附加前提证明法和不用附加前提证明法证明下列推理：

前提：$p \vee q$，$p \to r$，$q \to s$　　结论：$\neg s \to r$

证明：方法二，不用附加前提证明法证明：

① $q \to s$	前提引入
② $\neg q \vee s$	①置换
③ $\neg\neg s \vee \neg q$	②置换
④ $\neg s \to \neg q$	③置换
⑤ $p \vee q$	前提引入
⑥ $\neg\neg q \vee p$	⑤置换
⑦ $\neg q \to p$	⑥置换
⑧ $\neg s \to p$	④⑦假言三段论
⑨ $p \to r$	前提引入
⑩ $\neg s \to r$	⑧⑨假言推理

- 了解命题和9个连结词的概念，深刻理解其中5个连结词，熟练掌握将复合命题符号化的方法。
- 理解公式，成真、成假赋值，及公式的类型等概念，熟练掌握利用真值表判断公式类型的方法。
- 理解等值式的概念，掌握置换定理和全功能集、极小全功能集的概念，熟记24个等值式并熟练掌握它们的应用（等值演算法）。
- 熟练掌握求主析取范式的方法，了解主析取范式的应用（标准型）。
- 了解推理、前提、有效结论、证明的概念，理解推理的形式结构，掌握判断推理是否正确的方法，熟练掌握用已知的推理规则构造证明的方法。

作业：

第一章习题

1.16（2）（4）

1.17 （4）

1.18

1.19

1.21（3）

1.22