4.5.1 等价关系

定义4.19 设**R**为非空集合**A**上的关系，若**R**是自反的，对称的和传递的，则称**R**为**A**上的**等价关系**，即：对任意的$x, y \in$ **A**，$<x,y> \in$ 等价关系**R**，记为$x \sim y$。

等价关系的关系图特征：每一结点都有自回路；任意两个结点之间或者没有边连接，或者是双向边连接；依次检查每个结点x，把从x出发的长度不超过n的所有路径的终点找到，x到这样的终点一定有边。

等价关系的关系矩阵特征：主对角线上元素全为1，对称阵，不过传递性的矩阵表现太复杂。但补充了快速检测方法：若关系R是传递的$\Leftrightarrow$只要A^2的第i行j列元素非零$\Rightarrow$ A的第i行j列元素非零

例4.24 设Z为整数集，R={<x, y>|$x≡y$(mod$k$)}，证明：模k同余关系R是等价关系。

证明：设任意的$x,y,z\in Z$

I：因为$a-a=k\cdot 0\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R$

II：若$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow a\equiv b\left(\bmod k\right)\Rightarrow a-b=kt$（$t$为整数）

$$\Rightarrow b-a=-kt\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R$$

III：若$\langle a,b\rangle\in R,\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow a\equiv b\left(\bmod k\right)$且$b\equiv c\left(\bmod k\right)$

$$\Rightarrow a-b=kt,\quad b-c=ks,\quad (t,s\text{为整数})$$

$$\Rightarrow a-c=a-b+b-c=k\left(t+s\right)\Rightarrow a\equiv c\left(\bmod k\right)\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R$$

综上所述：R是等价关系。

例4.24 设Z为整数集，$R=\{<x, y> \mid x \equiv y \pmod{k}\}$

R为等价关系。

特别地：$k=3$，有：1~4~7，2~5~8，3~6~9

$k=5$，有：…-10~-5~0~5~10~…

…-9~-4~1~6~11~…

…-8~-3~2~7~12~…

…-7~-4~3~8~13~…

…-6~-1~4~9~14~…

设**R**是非空集合**A**上的等价关系，则**A**上相互等价的元素构成了**A**的若干个子集，叫做等价类。下面给出等价类的定义。

定义4.20 设**R**为非空集合**A**上的关系，对任意的$x \in A$，令集合：$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge x R y\}$，则称$[x]_R$为$x$关于**R**形成的等价类。

例4.25 设Z为整数集，R是同余模3的关系，即：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in Z \wedge y\in Z \wedge x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 3)\}$$

确定由Z的元素所产生的等价类。

解：由例4.24知R是等价关系，则由R产生的等价类是：

$$[1]_R=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}=[4]_R=[-2]_R=\ldots$$

$$[2]_R=\{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}=[5]_R=[-1]_R=\ldots$$

$$[3]_R=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}=[6]_R=[0]_R=\ldots$$

$$Z=[1]_R\cup[2]_R\cup[3]_R$$

$$=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}\cup\{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

$$\cup\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$$

定理4.11 设R为非空集合A上的关系，对$\forall x,y \in$ A，则：

（1）$[x]_R \neq \varnothing$，且$[x]_R \subseteq A$;

（2）若$<x, y> \in R \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$

（3）若$<x, y> \notin R$，则：$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$

（4）$\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$

证明：（2）充分性：因$z \in [x]_R = [y]_R$，则：$<x, z> \in R$

且$<z, y> \in R$，则$<x, y> \in R$

必要性：$< x, y> \in R$，设$z \in [x]_R \Rightarrow zRx \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in [y]_R$

即：$[x]_R \subseteq [y]_R$

同理可证：$[y]_R \subseteq [x]_R$，则：$[x]_R = [y]_R$

其余证明略

$Z=[1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R$

$=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\} \cup \{\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$

$\cup \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$

4.5.2 商集

定义4.21 设R为非空集合A上的关系，对任意的$x \in A$，其等价类$\{[x]_R \mid x \in A\}$称为A关于R的商集，记为A/R。

根据商集的定义，我们知道例4.25中商集：

$Z/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$且$Z= [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R$

定义4.22 设**A**是非空集合，若存在一个**A**的子集合簇（类）π（ $\pi \subseteq$ **P(A)**），满足：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）π中任意两个元素不相交

（3）π中所有元素的并集等于**A**

则称π为集合**A**的一个**划分**， π中的元素为**划分块**。

如：**子矩阵是矩阵的划分**

例4.26 考虑$A=\{a,b,c,d\}$的下列子集类，是否是划分？

（1）$\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ （2）$\{\{a, b, c, d\}\}$

（3）$\{\{a, b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$ （4）$\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

（5）$\{\{a\}, \{b, c\}\}$

显然，有：

（1）✓和（2）✓均为A的划分；

（3）✗不是A的划分，因为其中的元素$\{a, b\}$与$\{a, d\}$相交；

（4）不是A的划分，因为$\varnothing$在其中；

（5）也不是A的划分，因为其所有元素的并集不等于A。

由商集和划分的定义我们知道：

非空集合A上的关系R所产生的所有等价类的集合，即商集A/R，是A的一个划分。

如：例4.25所产生的等价类$Z=[1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R$

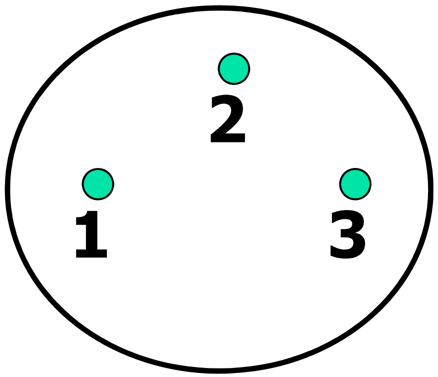
对应于：商集$Z/R=\{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

非空集合A上给定一个划分π，定义A上的二元关系R，$xRy \Leftrightarrow x$和y属于同一个划分块，则R称为由划分π所产生的等价关系。

综上所述，A上的等价关系R与A上的一个划分1-1对应。

事实上，例**4.24**告诉我们如何利用已知的等价关系确定划分；下面介绍如何根据已知的划分确定等价关系？

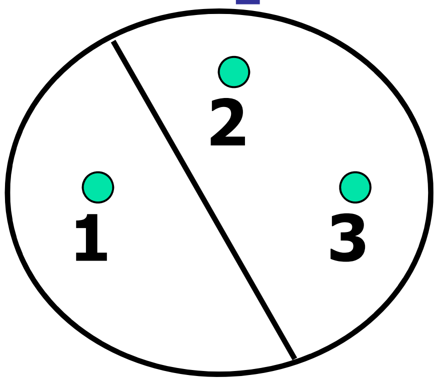
例**4.28** 考虑**A={1,2,3}**，求**A**上的所有等价关系（见**P97**例**4.15**）



π_1

$\pi_1=\{\{1,2,3\}\}$

$R_1=\{<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,3>,<3,1>,<3,2>\}\cup I_A = E_A$

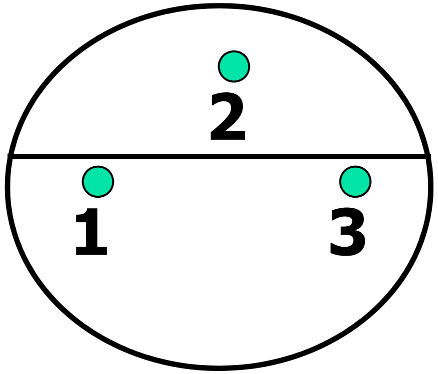


π_2

$\pi_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$

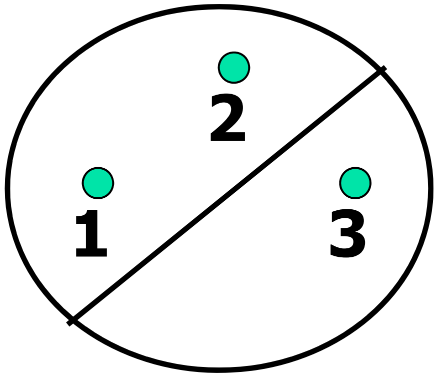
4.5 等价关系和偏序关系



π_3

$\pi_3 = \{\{2\}, \{1,3\}\}$

$R_3 = \{<1,3>,<3,1>\} \cup I_A$

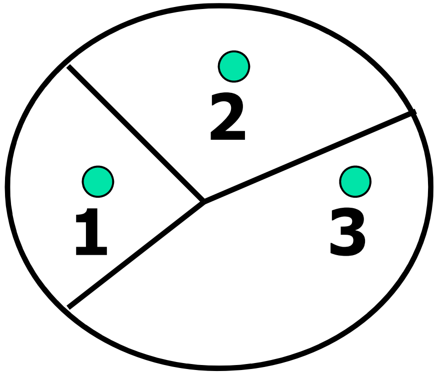


π_4

$\pi_4 = \{\{3\}, \{1,2\}\}$

$R_4 = \{<1,2>,<2,1>\} \cup I_A$

4.5 等价关系和偏序关系



π_5

$\pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$R_5 = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>\} = I_A$

4.5.3 偏序关系

在一个集合中，我们常常要考虑元素之间的次序关系，其中非常重要的一类关系称为偏序关系。

定义4.23 设A是非空集合，若A上的关系R，满足自反性，反对称性和传递性，则称R是A上的偏序关系，记为≤ 。

序偶$<A, \leq>$称为偏序集，$<x,y>\in R \Leftrightarrow x\leq y$

偏序关系的关系图特征：每一结点都有自回路；任意两个结点之间最多只能有单向边；依次检查每个结点x，把从x出发的长度不超过n的所有路径的终点找到，x到这样的终点一定有边。

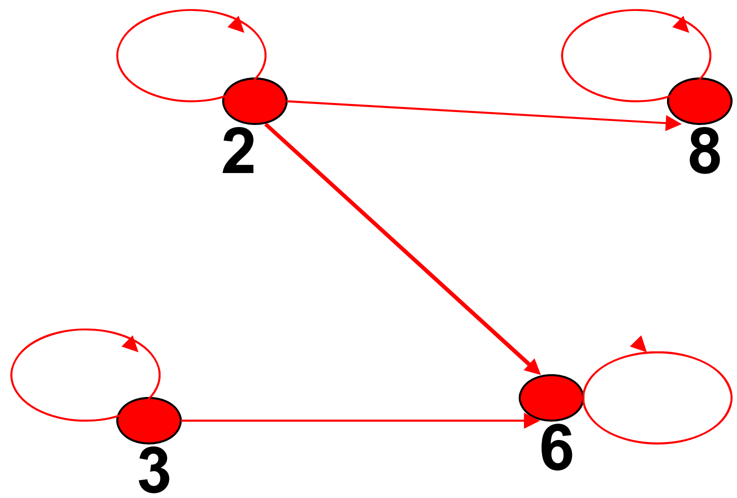
关系矩阵的特征：主对角线上元素全为**1**，若r_{ij}=**1**，$i \neq j$，则必有r_{ji}=**0**；传递性的矩阵表现太复杂，但补充了快速检测方法：若关系R是传递的⇔只要A^2的第i行j列元素非零⇒ A的第i行j列元素非零

例4.29 考虑给定集合A={2,3,6,8}，令≤={<x,y>|x整除y}，验证≤是偏序关系。

解：

≤={<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<2,6>,<2,8>,<3,6>}

$$M_{\leq}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



偏序关系：自反性、反对称性、传递性

为了更清楚地描述集合中元素的层次关系，这里先介绍“盖住”的概念：

定义4.24 在偏序集$<A, \leq>$中，若$x,y\in A$，$x\leq y$，$x\neq y$且没有其它元素z满足$x\leq z$，$z\leq y$，则称元素y盖住元素x，记为：

$$CovA=\{<x, y> \mid x, y\in A\text{且}y\text{盖住}x\}$$

例4.30 考虑例4.29，求$CovA$

解：由于：

$\leq=\{<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<2,6>,<2,8>,<3,6>\}$

则：$CovA=\{<2,6>,<2,8>,<3,6>\}$

其实：盖住也是一种关系。

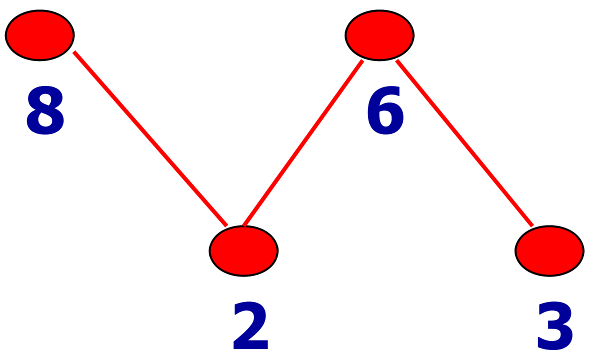
给定偏序集**<A, ≤>**，它的盖住关系是唯一的，所以可用盖住的关系画出偏序集合图，称为哈斯图(***Hasse diagram***)。其作图规则如下：

（1）用小圆圈代表元素；

（2）若$x \le y$且$x \ne y$，则将代表y的小圆圈画在代表x的小圆圈之上。

（3）若$<x, y> \in Cov$**A**，则在x与y之间用直线连接。

上例中：Cov**A={<2,6>,<2,8>,<3,6>}**



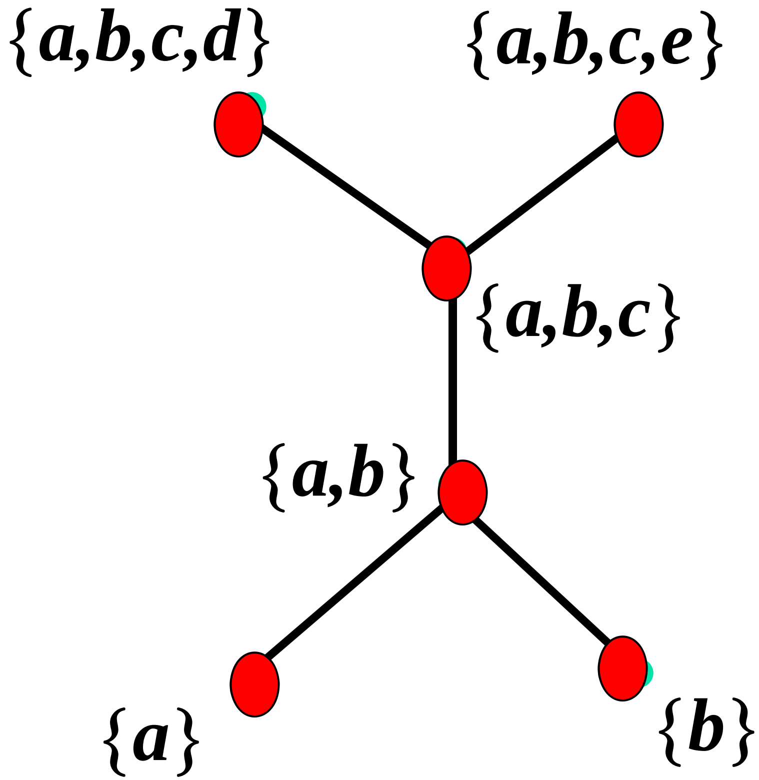
哈斯图是简化的关系图

例4.31 设集合A=$\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}\}$，则：$<A, \subseteq>$ 是一个偏序集。

$\{a\} \subseteq \{a\}$， $\{b\} \subseteq \{b\}$， …

$\{a\} \subseteq \{a,b\} \subseteq \{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d\}$

$\{b\} \subseteq \{a,b\} \subseteq \{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,e\}$



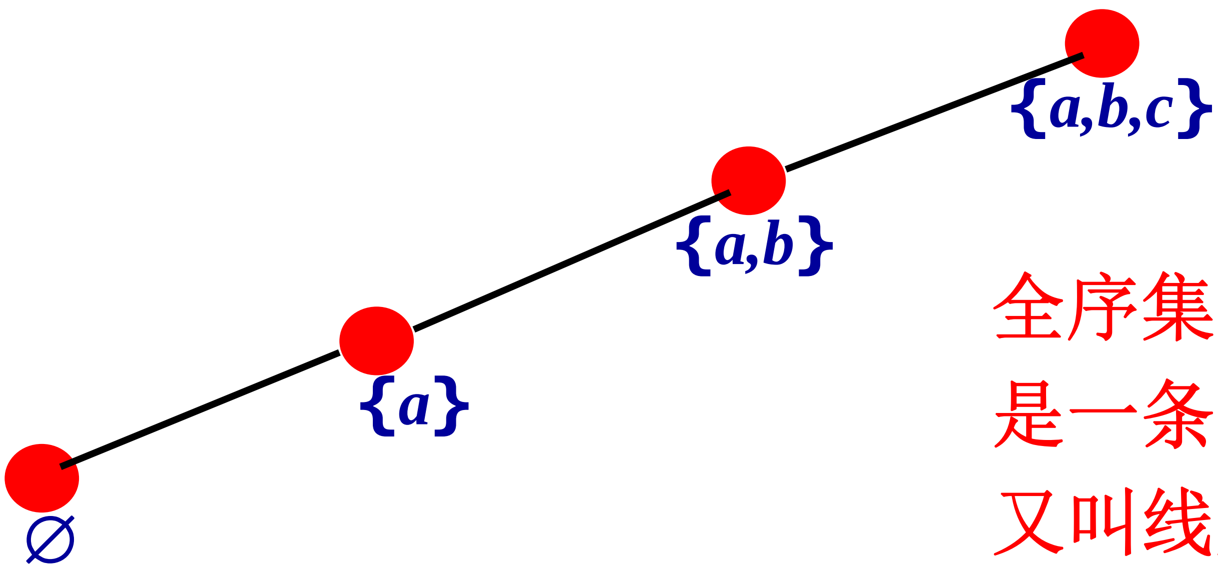
哈斯图

定义4.25 在偏序集<A, ≤>中，若A中任意两个集合都是有关系的，则称<A, ≤> 为全序集合或线序集合。

如：自然数集合N上定义“小于等于”关系“≤”为偏序关系，同时它又是全序关系；集合的包含关系“⊆”也是全序关系。

例4.32 给定$A=\{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$上的包含关系$\subseteq$，证明$(A,\subseteq)$是一个全序集合。

证明：因为$\varnothing\subseteq\{a\}\subseteq\{a,b\}\subseteq\{a,b,c\}$，则A中任意两个元素都有包含关系，哈斯图如下：



全序集合的哈斯图是一条直线，因此又叫线序集。

定义4.26 设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$

（1）若$\exists y \in B$，使得$\forall x(x \in B \to y \le x)$成立，则称$y$是B的最小元。

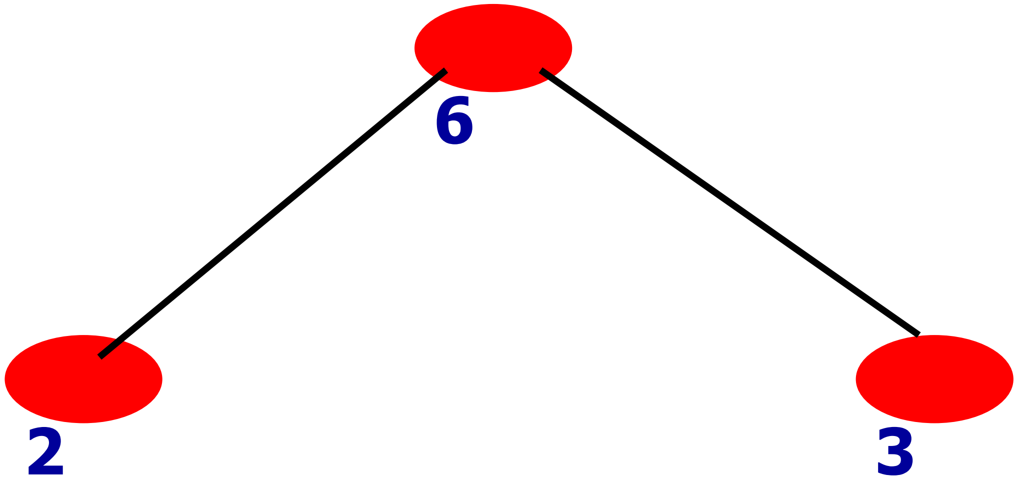
（2）若$\exists y \in B$，使得$\forall x(x \in B \to x \le y)$成立，则称$y$是B的最大元。

（3）若$\exists y \in B$，使得$\neg \exists x(x \in B \land x < y)$成立，则称$y$是B的极小元。

（4）若$\exists y \in B$，使得$\neg \exists x(x \in B \land y < x)$成立，则称$y$是B的极大元。

注意：最大元和最小元未必存在。若存在，一定是唯一的。

极大元和极小元一定存在，且一般情况下不唯一。

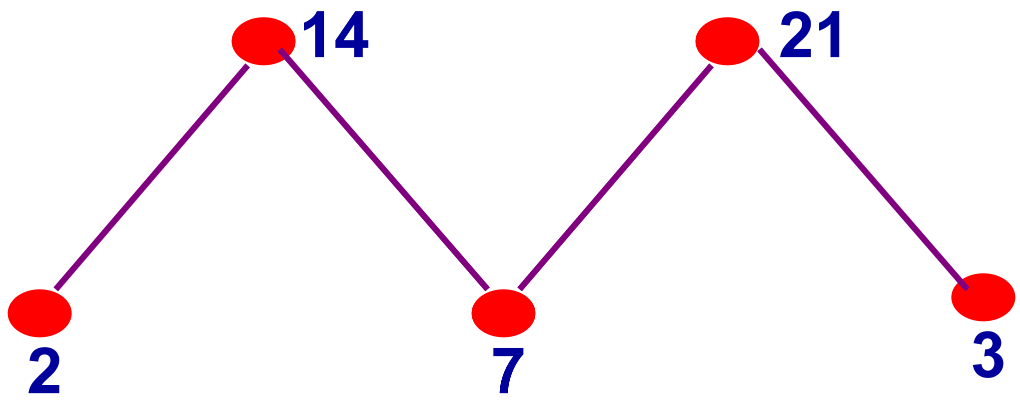


若上图为某一偏序集合的哈斯图，则根据以上定义显然有：**2**和**3**都是**B={2,3,6}**的极小元，但它们不是**B**的最小元；**6**是最大元，也是极大元。

4.5 等价关系和偏序关系

例4.33 设**A={2,3,5,7,14,15,21}**，其偏序关系**R={<2,14>,<3,15>, <3,21>, <5,15>, <7,14>, <7,21>, <2,2>, <3,3>, <5,5>, <7,7>, < 14,14>,<15,15>,<21,21>}**，求**B={2,7,3,21,14}**的极大元和极小元。

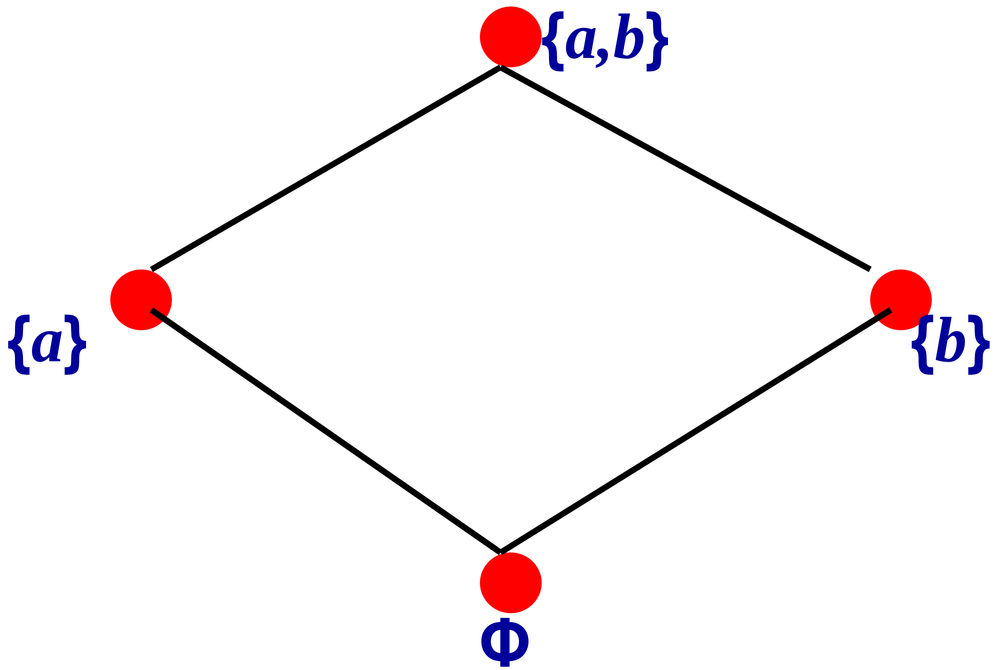
解： **<A,R>**的哈斯图如下：



解：**CovB={<2,14>,<7,14>,<7,21>,<3,21>}**，

则：**B**的极小元集合为**{2,7,3}**，极大元集合为**{14,21}**。

例4.34 考虑偏序集$<P(\{a,b\}),\subseteq>$，其哈斯图如下：



（1）若$B=\{\{a\},\varnothing\}$，则$\{a\}$是B的最大元，$\varnothing$是B的最小元。	（2）若B={{a},{b}}，则B没有最大元和最小元，因为{a}和{b}是不可比较的。

定义4.27 设<A, ≤>为偏序集，在A的一个子集中，若每两个元素都是有关系的，则称这个子集为链；在A的一个子集B中，若每两个元素都是无关的，则称这个子集为反链。

如：A表示一个单位所有员工的集合，≤表示领导关系，<A, ≤>为一偏序集，其中部分具有领导关系的员工组成一个链，部分没有领导关系的员工组成反链。

我们约定：若A的子集只有单个元素，那么它既是链又是反链。

定义4.28 设$<A, \le>$为偏序集，$B \subseteq A$

（1）若$\exists y \in A$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow x \le y)$成立，则称$y$是B的上界。

（2）若$\exists y \in A$，使得$\forall x (x \in B \rightarrow y \le x)$成立，则称$y$是B的下界。

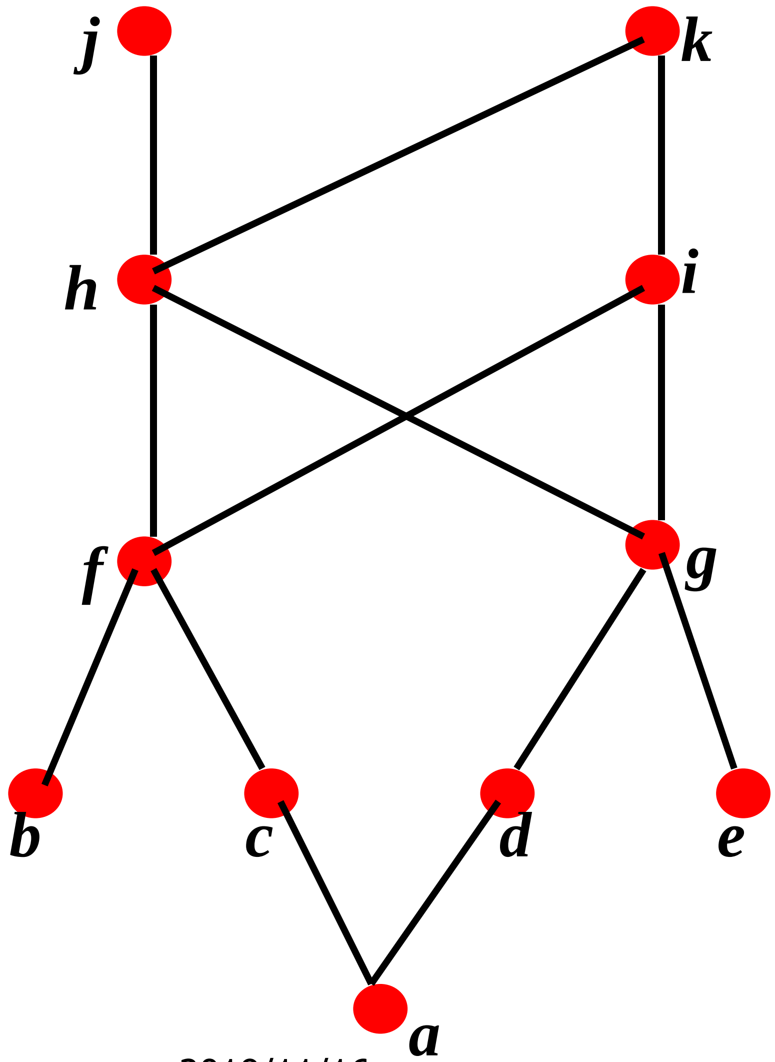
（3）最小的上界为上确界。

（4）最大的下界为下确界。

注意：上界和下界未必存在。

上确界和下确界未必存在。若存在，则一定唯一。

例**4.35** 见如下哈斯图：



h,*i*是集合**B**={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*,*g*}的上界；

j,*k*也是集合**B**={*a*,*b*,*c*,*d*,*e*,*f*,*g*}的上界。

同时*f*,*g*是集合**B'**={*h*,*i*,*j*,*k*}的下界；当然，*a*,*b*,*c*,*d*,*e*也是**B'**={*h*,*i*,*j*,*k*}的下界；但*b*,*c*,*d*,*e*都不是{*h*,*i*,*f*,*g*}的下界。

*a*是{*j*,*h*,*i*,*f*,*g*}的下确界，但没有上确界。

4.6 函数的定义和性质

4.7 函数的复合和反函数

4.8 题例分析

函数的基本概念

定义：设F为二元关系，若对任意的$x \in domF$，都存在唯一的$y \in ranF$，使得xFy成立，则称F为映射；若$ranF$为数域，则F为函数。

定义：设函数f：A →B

（1）若$ranF$=B，则称f是满射的。

（2）若对于任何的 x_1，$x_2 \in \mathrm{A}$，$x_1 \neq x_2$，都有$f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$

则称f是单射的。

（3）若f 既是满射的，又是单射的，则称f 是双射的（或1-1对应）。

习题

设映射f，$g \in \mathrm{R}^2$，且有

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -x^2+1 & x<0 \end{cases} \qquad g(x)=-2x+1$$

（1）求$f\circ g$

（2）判断f，g，$f\circ g$是否为单射、双射和满射。

练习题

设 $A=\{0,1,2,3\}$,在 $A\times A$ 定义二元关系**R**如下：

$$\forall\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in A\times A,\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\Leftrightarrow x+y=u+v$$

求证：R是$A\times A$ 上的等价关系。

作业

4.8

4.9

4.16

4.18

4.19

4.22

4.24

个人体会

等价关系：数据流通过*Internet*网络传送，*Internet*网实际上是具有等价关系的网络。

偏序关系：电视信号通过广播电视网络传送，广播电视网实际上是具有偏序关系的网络。

本章小结

- ✓了解有序对、二元关系、集合**A**到**B**的关系、集合**A**上的关系（空关系、全域关系、小于等于关系、整除关系、包含关系等）的定义，掌握笛卡尔积的运算和性质，熟练掌握关系表达式、关系矩阵、关系图的表示法。
- ✓掌握关系的定义域、值域、逆、复合、幂的计算方法，会证明含有上述关系运算的简单的集合恒等式。
- ✓熟练掌握判断关系五种性质的方法，并能对关系的自反、反自反、对称、反对称、传递性给出简单的证明。
- ✓理解三种闭包（自反、对称、传递闭包）的概念并能熟练地求出给定集合上关系的闭包。
- ✓深刻理解等价关系、等价类、商集、划分、偏序关系、偏序集、哈斯图、偏序集中的特定元素等概念，并能熟练地求出等价关系的等价类、商集、偏序关系的哈斯图及特定元素。
- ✓理解映射、函数、单射、满射、双射的概念。