三、状态分类的判别法

为了下面的需要我们引入实数列的母函数的概念。

设$\{a_n, n \geq 0\}$为一实数列，称幂级数$A(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$为数列$\{a_n\}$的母函数，当存在$s_0>0$，使得$|s|<s_0$时$A(s)$收敛。

若$A(s)$，$B(s)$分别是$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的母函数，则数列：

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n=0,1,\cdots$$

的母函数$C(s)=A(s)B(s)$，称$\{c_n\}$是$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的卷积。

简单证明:$\{c_n\}$为什么是$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的卷积?

设$C(s)$为$\{c_n\}$的母函数，$C(s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n$，则:

$$A(s)B(s)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j s^{i+j}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right] s^n \left(\text{设} i+j=n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = C(s)\left(\text{其中} c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)$$

因此：$C(s)=A(s)B(s)$

定理4.2.5 状态i常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$;

若i非常返，则$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{ii}}$

证明: 由$p_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}$，$n \geq 1$，两边乘以$s^n$，并对$n \geq 1$求和，得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \text{-}1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}\right) s^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}\right) s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}\right) s^n \quad \left(f_{ii}^{(0)} = 0\right)$$

设$P(s)$和$F(s)$分别为$\left\{p_{ii}^{(n)}\right\}$和$\left\{f_{ii}^{(n)}\right\}$的母函数，则:

$$P(s) - 1 = P(s)F(s)$$

当$0 \leq s < 1$时，$F(s) < F(1) = f_{jj} \leq 1$，所以：$P(s) = \dfrac{1}{1-F(s)}$

证明(续)：设$P(s)$和$F(s)$分别为$\left\{p_{ii}^{(n)}\right\}$和$\left\{f_{ii}^{(n)}\right\}$的母函数，则：

$$P(s)-1=P(s)F(s)$$

一方面：当$0\le s<1$时，有：

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}s^n<F(1)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)}=f_{ii}\le 1,\ \text{即}F(s)<1$$

所以：$P(s)=\dfrac{1}{1-F(s)}$

另一方面当$0\le s<1$时，对任意的正整数N，有：

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}s^n\le P(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}s^n\le\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=P(1)$$

所以先令$s\uparrow 1$，再令$N\to\infty$，可得：$\lim\limits_{s\uparrow 1}P(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$

同理可证：$\lim\limits_{s\uparrow 1} F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}\left(其中F(s)<1\right)$

则对：$P(s)=\dfrac{1}{1-F(s)}$两边同时令$s\uparrow 1$，有：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{1-f_{ii}}$

i常返 $\Leftrightarrow f_{ii}=1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$（系统返回$i$的次数为无穷多次）

i非常返 $\Leftrightarrow f_{ii}<1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}<\infty$（系统返回$i$的次数为有限多次）

为了进一步理解以上特性，定义随机变量：$Y(n)=\begin{cases}1 & \xi_n = j \\ 0 & \xi_n \neq j\end{cases}$

随机变量$Y=\sum_{n=0}^{\infty} Y(n)$表示系统到达$j$ 的次数。

则，Y的条件期望：

$$E[Y \mid \xi_0 = j] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} Y(n) \mid \xi_0 = j\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} E[Y(n) \mid \xi_0 = j] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \times P\{\xi_n = j \mid \xi_0 = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

j常返$\Leftrightarrow f_{jj}=1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$（系统返回$j$ 的平均次数为无穷多次）

j非常返$\Leftrightarrow f_{jj}<1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$（系统返回$j$ 的平均次数为有限多次）

推论： 若j非常返，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$

由常返性的定义，有$f_{jj}=1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty$，则系统从状态$j$出发经过有限步转移系统迟早会返回状态 j，而当该过程无限地继续下去，必有：

$$j \to \cdots \to j \to \cdots \to j \to \cdots \to j \cdots,$$

系统访问 j 的次数将无限增加。

若状态 j 非常返，有$f_{jj}<1 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty$，则系统访问 j 至多有限多次。

定理4.2.6　设$A \overset{\Delta}{=} \{$系统无限多次访问 $j\}$，

$$A_m \overset{\Delta}{=} \{\text{系统至少}m\text{次访问}j\},$$

并记：$g_{ij} = P\{A|\xi_0 = i\}$，$g_{ij}(m) = P\{A_m|\xi_0 = i\}$，则：

$$g_{jj} = \begin{cases} 1 & f_{jj} = 1 \ (\text{系统从状态}j\text{出发，无穷多次返回}j\text{的概率为}1) \\ 0 & f_{jj} < 1 \ (\text{系统从状态}j\text{出发，无穷多次返回}j\text{的概率为}0) \end{cases}$$

证明：由A和A_m的定义知：$A_m \supset A_{m+1}, m = 1, 2, \cdots$，且：

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m，\quad \text{即：} \lim_{m\to\infty} A_m = A$$

因而：$g_{ij} = P\{A|\xi_0 = i\} = P\left\{\lim_{m\to\infty} A_m |\xi_0 = i\right\}$

$$= \lim_{m\to\infty} P\{A_m|\xi_0 = i\} = \lim_{m\to\infty} g_{ij}(m)$$

先计算$g_{ij}(m+1)$

$$g_{ij}(m+1)=P\left\{A_{m+1}\middle|\xi_0=i\right\}$$

$$=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\text{至少}\exists 0<n<n_1\cdots<n_m,\text{使得}\xi_\nu\neq j,1\leq\nu<n,\xi_n=j,\xi_{n_l}=j,l=1,\cdots,m)\middle|\xi_0=i\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\xi_\nu\neq j,1\leq\nu<n,\xi_n=j\middle|\xi_0=i\right\}\cdot P\left\{\text{至少有}m\text{个}n_l>n,\xi_{n_l}=j,l=1,\cdots,m\middle|\xi_n=j\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}\cdot P\left\{\text{系统至少}m\text{次到达}j\middle|\xi_0=j\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}g_{jj}(m)=g_{jj}(m)\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}=f_{ij}g_{jj}(m)$$

于是$g_{jj}(m+1)=f_{jj}g_{jj}(m)=f_{jj}f_{jj}g_{jj}(m-1)$

$$=\cdots=f_{jj}^{m}g_{jj}(1)=f_{jj}^{m+1}$$

则：$g_{jj}=\lim\limits_{m\to\infty}g_{jj}(m)=\lim\limits_{m\to\infty}f_{jj}^{m}=\begin{cases}1 & f_{jj}=1\\ 0 & f_{jj}<1\end{cases}$

推论：

$$g_{ij}=\begin{cases} f_{ij} & j\text{常返} \\ 0 & j\text{非常返} \end{cases}$$

如果j是常返的，则系统从i出发无穷多次返回j的概率为**1**；如果j是非常返的，则系统从i出发无穷多次返回j的概率为**0**。

定理4.2.7设i是周期为d的常返态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = d \big/ \mu_i$。

证明略。

推论：设i常返，则

（1）i零常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;

（2）i是遍历态 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 \big/ \mu_i$。

证明：(1) 若i零常返，则由定理4.2.7知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = d \big/ \mu_i = 0$

而当$n\neq 0(\mathrm{mod}\ d)$， $p_{ii}^{(n)} = 0$ 。必要性得证

反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，而$i$是正常返，则由定理4.2.7 知：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = d \big/ \mu_i > 0，矛盾。$$

(2) $\Leftarrow$ 设若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1/\mu_i > 0$，于是$i$是正常返且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 1/\mu_i$，则由定理**4.2.7** 知$d=1$，于是$i$ 是遍历态。反之显然。

推论： 若j是零常返或非常返态，则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

证明： 由$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \le \sum_{l=1}^{n'} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=n'+1}^{n} f_{ij}^{(l)}$

对固定的n'，当$n\to\infty$，j 非常返由定理4.2.5 的推论，零常返由上一页的推论(1)，均有：$p_{jj}^{(n)} \to 0$ ，所以上式第一项趋于零。

再由$\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} = f_{ij} \le 1$，则截尾项 $\sum_{l=n'+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \to 0\left(n'\to\infty\right)$

则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

综上讨论，归纳如下：

(1) 状态j常返 $\Leftrightarrow f_{jj}=1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=\mathbf{1} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty$，

状态j正常返 $\Leftrightarrow f_{jj}=1, \mu_j<\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty, \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}>0$

状态j零常返 $\Leftrightarrow f_{jj}=1, \mu_j=\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}=\infty, \lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$

(2) 状态j非常返 $\Leftrightarrow f_{jj}<1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)}<\mathbf{1} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$$

重要结论：有限状态的*Markov*链至少有一个常返态。

反证法1：设$I=\{1,2,\cdots,N\}$，$\forall i\in I,\forall n\geq 1$，有：$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)}=1$

如果状态空间I的每一个状态全部为非常返态, 则：

上式左右两边同时取$n\to\infty$，有：

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)}=\sum_{j=1}^{N}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0,\text{矛盾。}$$

反证法2：设$I=\{1,2,\cdots,N\}$，所有状态全部为非常返，不妨假设系统访问状态$1,2,\cdots N$最多分别为$k_1,k_2,\cdots k_N$次，则当n足够大，$n=k_1+k_2+\cdots+k_N+1$，则再无任何一个状态被系统访问，矛盾。

下面说明互通与状态分类的关系：

定理4.2.8若i常返，且$i \to j$，则$j \to i$。

证明：由$i \to j$知,$\exists n$，使$p_{ij}^{(n)} > 0$,

由i常返知：$f_{ii} = 1$，$f_{ii} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} f_{ki}$,且$\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} = 1$,

对比以下两个恒等式：

$$\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} f_{ki} = 1$$

$$\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} = 1$$

必有：若某个k使$p_{ik}^{(n)} > 0$,其对应的$f_{ki} \Rightarrow f_{ki} = 1$

因此，由$i \to j$，存在的那个n使$p_{ij}^{(n)} > 0$，其对应的f_{ji}

必有$f_{ji} = 1$，则：$j \to i$

定理4.2.9若$i \leftrightarrow j$，则状态i, j有下列情况：

（1）同为常返或同为非常返；若为常返，则同为正常返或同为零常返；

（2）i, j有相同的周期。

证明：（1）由$i \leftrightarrow j$，则$\exists s \geq 1, r \geq 1$使得：

$p_{ij}^{(s)} = \alpha > 0$，$p_{ji}^{(r)} = \beta > 0$

由$C-K$方程，则：

$$p_{ii}^{(r+n+s)} = \sum_{m,k \in I} p_{im}^{(s)} p_{mk}^{(n)} p_{ki}^{(r)} \geq p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(r)} = \alpha\beta\, p_{jj}^{(n)}$$

类似地，有：$p_{jj}^{(r+n+s)} \geq \alpha\beta\, p_{ii}^{(n)}$

则：$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$相互控制，同时收敛或同时发散。

则由定理4.2.5，有i, j同为常返或同为非常返；

$\because \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$相互控制，同时为零或同时为正，由定理4.2.7的推论

得证：i, j同为正常返或同为零常返。

定理4.2.9若$i \leftrightarrow j$，则状态i, j有下列情况：

（1）同为常返或同为非常返；若为常返，则同为正常返或同为零常返；

（2）i, j有相同的周期。

证明（续）（2）仍令：$p_{ij}^{(s)} = \alpha > 0$，$p_{ji}^{(r)} = \beta > 0$

不妨设i 的周期为d，j 的周期为t ，即：

$$d = G.C.D\{n : n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

$$t = G.C.D\{n : n \geq 1,\ p_{jj}^{(n)} > 0\}$$

由前面的结论，有：$p_{ii}^{(r+n+s)} \geq \alpha\beta\, p_{jj}^{(n)}$，知：

对$\forall p_{jj}^{(n)} > 0$的n，必有$p_{ii}^{(r+n+s)} > 0$，从而$d \mid (r+n+s)$；

但$p_{ii}^{(r+s)} \geq p_{ij}^{(s)} p_{ji}^{(r)} = \alpha\beta > 0$，所以$d \mid (r+s)$

所以，必有：$d \mid n$，即d 是所有满足$p_{jj}^{(n)} > 0$ 的n的公约数

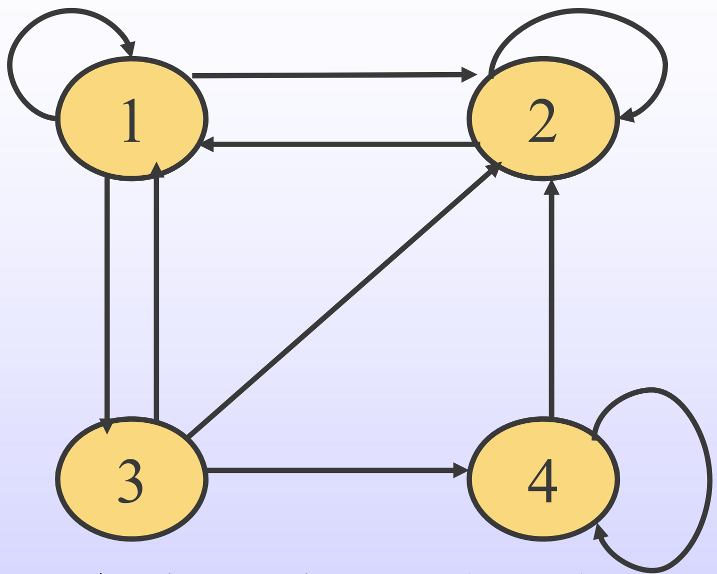
则：$d \leq t$，

同理可证：$t \leq d$，所以：$d = t$

例4.2.6设马氏链的状态空间$I=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

试判别状态的常返性。



解：步骤1°画出状态转移图

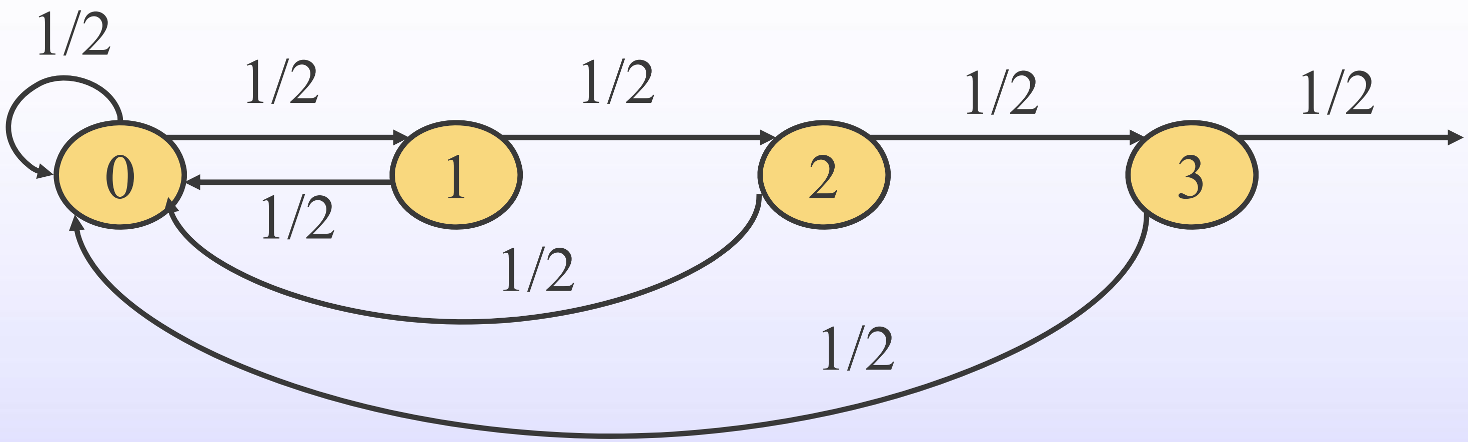
步骤2°由状态转移图，知：

各状态互通$2\to 1\to 3\to 4\to 2$

步骤3°由有限*Markov*链至少有一个常返态，则由定理4.2.9知所有状态均为常返。

例4.2.7设*Markov*链$\{\xi_n, n\in T\}$的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为：$p_{00}=1/2$，$p_{ii+1}=1/2$，$p_{i0}=1/2$，$i\in I$，考查状态的常返性及遍历性。

解：步骤1° 画出状态转移图



步骤2°考查状态0，由状态转移图知$f_{00}^{(1)}=p_{00}^{(1)}=1/2$

$$f_{00}^{(2)}(0\to 1\to 0)=1/2\cdot 1/2=1/4$$

$$f_{00}^{(3)}(0\to 1\to 2\to 0)=1/2\cdot 1/2\cdot 1/2=1/8$$

一般地，有：$f_{00}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (0\to 1\to 2\to\cdots\to n-1\to 0)$

则：$f_{00}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$

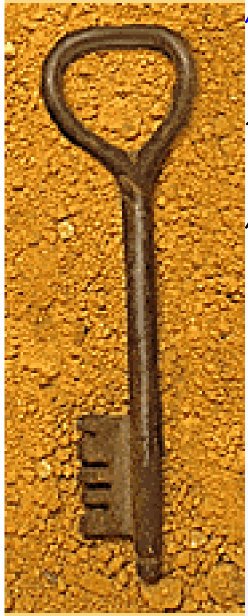
$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n<\infty$$

可见状态**0**为正常返。

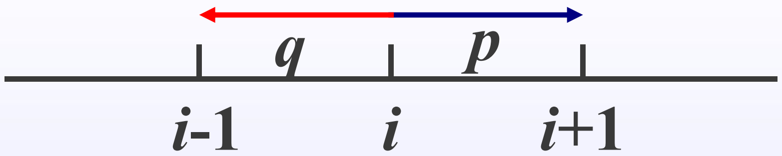
又由于$p_{00}^{(1)}=\frac{1}{2}>0$，所以它是非周期的，因此状态**0**为遍历态。

对任意状态$i\,(i=1,2,\cdots)$，由于$i\leftrightarrow 0$，则i 也是遍历态。

例4.2.8质点在正、负整数点无限制地随机游动，设质点分别以p的概率右移一个单位，以q的概率左移一个单位，且$p+q=1$，试判别状态的常返性。



解：画出状态转移图如下：



由前面的例子，有：无限制随机游动各状态均互通，故所有状态或全为常返态，或全为非常返态。

现考察状态0.

$$p_{00}^{(1)}=p_{00}^{(3)}=\cdots=p_{00}^{(2n+1)}=0$$

$$p_{00}^{(2n)}=C_{2n}^{n}p^{n}q^{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}p^{n}q^{n}\ (n=0,1,2,\cdots)$$

而：$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \quad (2n)! \approx (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}$

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} p^n q^n = \frac{2^{2n} (pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

易知：$pq = p(1-p) \leq 1/4$ ，当$p = q = 1/2$时等式成立

则：$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(2m)} = \infty$，则状态0常返

当$p > q$（或$p < q$）时，有：$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty$，则状态0非常返

（从原点出发以正的概率趋于$+\infty$或$-\infty$，而永不返回）

第三节　状态空间的分解

一、状态空间的分解

定义4.3.1　设C是I的子集，若对$\forall i \in C, j \notin C$,有：$i \mapsto j$，则$C$为闭集。若$I$中状态均互通 ，则称Markov链不可约。

实际上，C是闭集 $\Leftrightarrow$ 对$\forall i \in C, j \notin C$,有$p_{ij} = 0$。

证明:"$\Rightarrow$"由闭集C的定义有：$\forall i \in C, j \notin C$，$\forall$正整数$n$，有：$p_{ij}^{(n)} = 0$

于是$p_{ij} = 0$。

"$\Leftarrow$" 由$C-K$方程，$p_{ij}^{(2)} = \sum_{r \in I} p_{ir} p_{rj} = \sum_{r \in C} p_{ir} p_{rj} + \sum_{r \notin C} p_{ir} p_{rj} = 0$

利用归纳法可证：$p_{ij}^{(n)} = 0$

显然：一个吸收态i构成的闭集$\{i\}$是最小的。

状态空间I可分为常返态和非常返态两部分，分别记为C和D。闭集是自C的内部不能到达C的外部，意味着质点一旦进入闭集C，它将永远留在C中运动。

定理4.3.1　*Markov*链的所有常返态构成一个闭集。

证明：设$C=\{\text{某一}Markov\text{链的所有常返态}\}$

$D=\{\text{某一}Markov\text{链的所有非常返态}\}$

反证：若C不是闭集，则$\exists i\in C, j\in D=\overline{C}$,使$i\to j$。

必有：$j\to i$，于是j也为常返态.

即$j\in C$，与$j\in D=\overline{C}$矛盾。

定理4.3.2 $\boldsymbol{Markov}$链的状态空间$\boldsymbol{I}$可以分解为下列不相交子集的和：$\boldsymbol{I=D+C=D+C_1+C_2+\cdots}$使得：

$\boldsymbol{(1)}$每一个$\boldsymbol{C_n}$是常返态组成的不可约闭集；

$\boldsymbol{(2)}$ $\boldsymbol{C_n}$中的状态同类：或全为正常返，或全为零常返，它们有相同的周期，且$\boldsymbol{f_{jk}=1}$，$\boldsymbol{j,k\in C_n}$；

$\boldsymbol{(3)}$ $\boldsymbol{D}$为所有非常返态组成的集合，由$\boldsymbol{C_n}$中的状态不能到达$\boldsymbol{D}$中的状态。

证明：$I=\begin{cases} D(\text{非常返态}) \\ C\ (\text{常返态}) \end{cases}$

根据互通关系，将常返闭集C划分为不同的类。

若$i_1\in C$，所有与i_1互通的状态组成一类，记为闭集C_1:

若$C_1=C$，则C不可分，$I=D+C$;

若$C_1\neq C$，$\exists i_2\in C-C_1$，所有与i_2互通的状态组成一类，记为闭集C_2;

若C_1+C_2=C,则：$I=D+C_1+C_2$;

若$C_1+C_2\neq C$，则$\exists i_3\in C-C_1$-C_2，所有与i_3互通的状态组成一类，记为闭集C_3;

如此继续下去，总可以将C分解为$C_1,C_2,\cdots$的闭集之和，则：$I=D+C=D+C_1+C_2+\cdots$

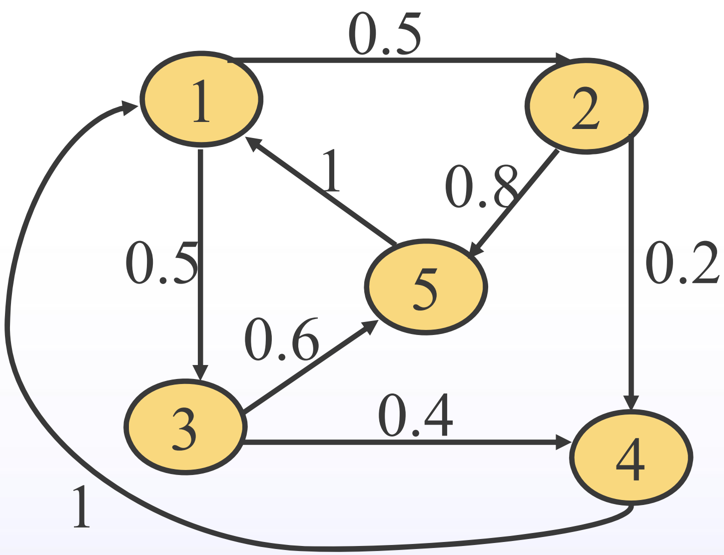
上述定理中的D不一定是闭集。

若I是有限集，D不可能是闭集。此时，若质点最初是从某一非常返态出发，最终必然离开D进入某一常返态C_i，以后也一直在C_i中运动。

若I是无穷集，D有可能是闭集。如：无限制的随机游动问题$p\neq q$的情况，此时$I=D$，C为空集，所有的状态全部为非常返态，质点以正的概率趋于正无穷或负无穷远点，永不返回；只要C不空，即至少有一个常返状态，则质点最初是从某一非常返态出发，最终必然离开D进入某一常返态C_i，以后也一直在C_i中运动。

例4.3.1 设*Markov*链的状态空间$I=\{1,2,3,4,5\}$，转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8\\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



讨论该*Markov*链状态分类及周期。

解：1°先画出状态转移图如右上

2°由状态转移图，有:$1\to2\to4\to1\quad 1\to3\to4\to1$

$1\to3\to5\to1$，即任意两个状态均互通，则*Markov*链不可约。

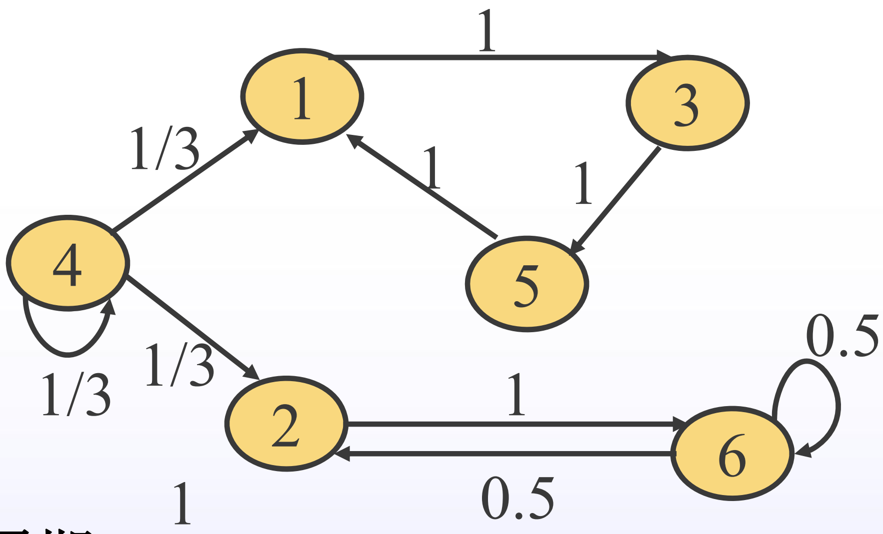
考查状态1，$f_{11}^{(3)}=p_{12}p_{25}p_{51}+p_{12}p_{24}p_{41}+p_{13}p_{35}p_{51}+p_{13}p_{34}p_{41}=1$，$f_{11}^{(n)}=0$

$(n\neq3)$，则$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}^{(n)}=f_{11}^{(3)}=1$，且$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=3$，则状态1为正常返。

又I所有状态互通，则所有状态全为正常返。

例4.3.2设*Markov*链的状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



讨论该*Markov*链状态分类及周期。

解： 1°先画出状态转移图如右上

2°由状态转移图,$1\to 3\to 5\to 1,\ \mu_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nf_{11}^{(n)}=3f_{11}^{(3)}=3$

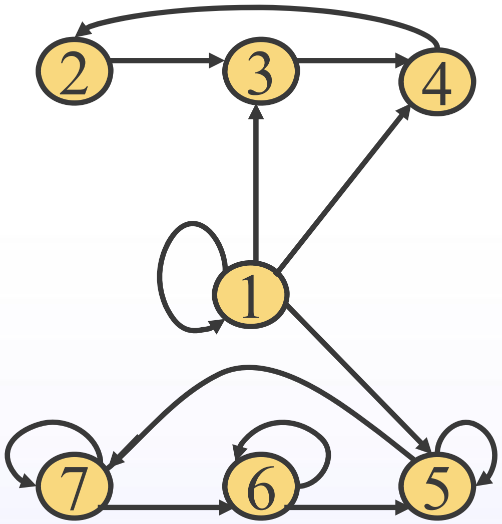
则状态1,3,5均为周期为3的正常返态。

又$2\to 6\to 2,\ \mu_6=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nf_{66}^{(n)}=f_{66}^{(1)}+2f_{66}^{(2)}=\frac{3}{2}$，则状态2,6为遍历态

$f_{44}=f_{44}^{(1)}=\frac{1}{3}$，则状态4非常返

例4.3.3　设$Markov$链的状态空间$I=\{1,2,\cdots 7\}$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



试对状态空间进行分解。

另解：考察状态1：$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)}$而：$f_{11}^{(1)}=0.4 \qquad f_{11}^{(n)}=0\left(n\neq 1\right)$

则：$f_{11}=0.4<1$，则状态1非常返

另：$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(n)}=0.4+0.4^2+\cdots+0.4^n+\cdots=\frac{2}{3}$，即$D=\{1\}$

状态2，$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}=f_{22}^{(3)}=1\left(2\to 3\to 4\to 2\right)$，则状态2常返。同理，状态5 常返。

$I=D+C_1+C_2$，其中$C_1=\{2,3,4\}$且周期为3，$C_2=\{5,6,7\}$且周期为1 。

计算f_{55}

$$f_{55}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{55}^{(n)}，其中 f_{55}^{(1)}=p_{55}^{(1)}=0.7，f_{55}^{(2)}=0$$

$$f_{55}^{(n)}=p_{57}^{(1)}p_{76}^{(1)}p_{65}^{(1)}\sum_{k=0}^{n-3}\left[p_{77}^{(1)}\right]^{k}\cdot\left[p_{66}^{(1)}\right]^{n-3-k}\ (n\ge 3)$$

$$f_{55}=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.3\times 0.4\times 0.5^{n-2}\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{0.6}{0.5}\right)^{k}$$

$$=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.12\times 0.5^{n-2}\frac{1.2^{n-1}-1}{0.2}$$

$$=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.6\times\left(0.6^{n-2}-0.5^{n-2}\right)=1$$

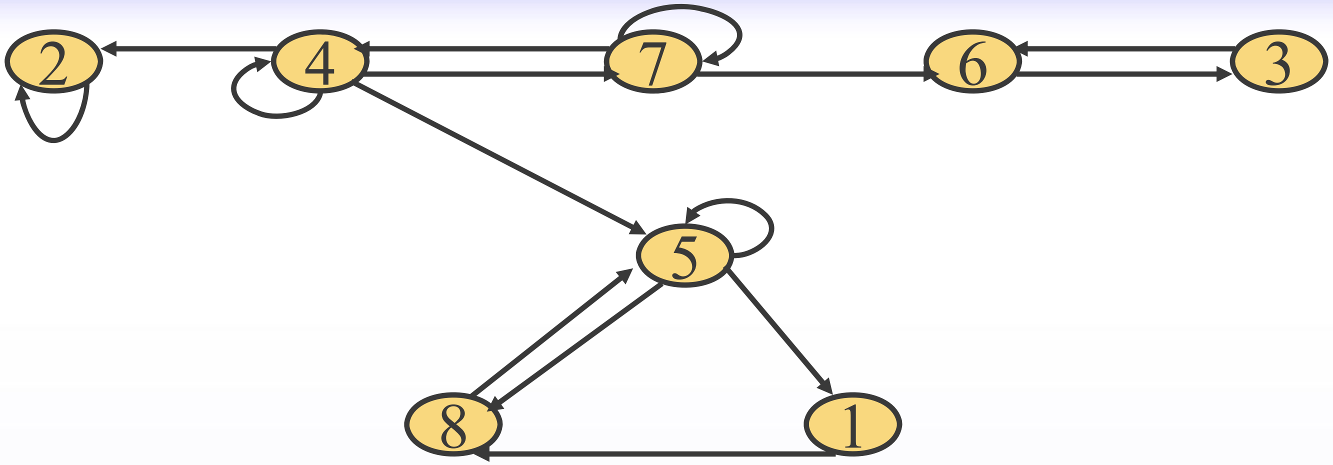
则:5常返。

例4.3.4 $I=\{1,2,\cdots 8\}$，转移概率矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\
* & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\
0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

其中“*”表示该元素为正，试将I 进行分解。

解：1°画出状态转移图如下：



2°根据状态转移图，显然有：$f_{22}=1$，所以2为吸收壁，则$C_1=\{2\}$；

由$1\to8\to5\to1$，知1,5,8三个状态互通，状态5的周期是1，且：

$$f_{55}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{55}^{(n)}=f_{55}^{(1)}+f_{55}^{(2)}+f_{55}^{(3)}=p_{55}+p_{58}p_{85}+p_{51}p_{18}p_{85}=p_{55}+p_{58}+p_{51}=1$$

$$\mu_5=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{55}^{(n)}=1\times p_{55}+2\times p_{58}p_{85}+3\times p_{51}p_{18}p_{85}<\infty$$

所以:1,5,8为非周期的正常返状态，即遍历态，且$C_2=\{1,5,8\}$；

再由3,6互通，且$f_{33}=p_{36}p_{63}=1$，则3,6是周期为2的正常返状态，$C_3=\{3,6\}$

显然：$f_{44}<1$(4只要到达状态2或5，一旦离开永不返回)，所以4,7为非常返状态，$D=\{4,7\}$，且周期为1，因此：$I=D+C=D+C_1+C_2+C_3$