第五章 连续时间的马尔可夫链

1.连续时间马尔可夫链的定义

2.向前和向后方程及平稳分布

3.生灭过程

第一节 连续时间的马尔可夫链

考虑取非负整数值的连续时间随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$。

定义5.1 设随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$,状态空间$I=\{i_n, n\geq 0\}$,若对任意$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}$及$i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}\in I$,有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\ldots,X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\mid X(t_n)=i_n\} \qquad (5.1)$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为**连续时间马尔可夫链**。

由定义知，连续时间马尔可夫链是具有马尔可夫性的随机过程。

记(5.1)式条件概率的一般形式为：

$$P(X(s+t)=j \mid X(s)=i)=p_{ij}(s,t) \qquad (5.2)$$

它表示系统在s时刻处于状态i的条件下，经过时间t后转移到状态j的转移概率。如果上式只与t有关而与s无关，称它为**齐次转移概率函数**，此时，连续时间的马尔可夫链简称为**齐次马尔可夫过程**，下面只考虑这种情况。

对于齐次马尔可夫过程，(5.2)简记为$p_{ij}(t)$,其转移概率矩阵简记为$P(t)=(p_{ij}(t)),(i,j \in I,t\geq 0)$。$P(t)$依然是随机矩阵。

定理5.1 对一切s、$t(\geq 0)$成立

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in I} p_{ik}(t)\,p_{kj}(s)$$

这是离散时间马尔可夫链的C-K方程的推广。

$$\boldsymbol{p_{ij}(s+t)=P\{X(s+t)=j\mid X(0)=i\}}$$

$$=P\{X(s+t)=j,\bigcup_{k\in I} X(t)=k\mid X(0)=i\}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{k\in I} P\{X(s+t)=j,X(t)=k\mid X(0)=i\}}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{k\in I}\frac{P\{X(0)=i,X(t)=k\}}{P\{X(0)=i\}}\cdot\frac{P\{X(0)=i,X(t)=k,X(s+t)=j\}}{P\{X(0)=i,X(t)=k\}}}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{k\in I} P\{X(t)=k\mid X(0)=i\}P\{X(s+t)=j\mid X(t)=k\}}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{k\in I} p_{ik}(t)\,p_{kj}(s)}$$

此外，假定$p_{ij}(t)$满足正则性条件(连续性条件）：对任意i，$j\in I$,有

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \qquad （5.3）$$

正则性条件说明，过程刚进入某个状态不可能立即又跳跃到另一个状态。

特别地：$p_{ij}(0)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

定义5.2 绝对概率分布$p_j(t)=P\{X(t)=j\} \quad j\in I$

初始概率分布$p_j=p_j(0)=P\{X(0)=j\} \quad j\in I$

定理5.2 齐次马氏过程的绝对概率和有限维概率分布具有如下性质：

$$(1)\ p_j(t) \geq 0$$

$$(2)\ \sum_{j \in I} p_j(t) = 1$$

$$(3)\ p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$$

$$(4)\ p_j(t+\tau) = \sum_{i \in I} p_i(t) p_{ij}(\tau)$$

$$(5)\ P\{X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ii_1}(t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1})$$

例5.1证明泊松过程为时间连续、状态离散的齐次马氏过程。

证明：先证明其具有马氏性.

由第二章第三节：泊松过程具有独立增量性，且知：

对$\forall 0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$，有：

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_n) = i_n\} \\
&= P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n \mid X(t_1) - X(0) = i_1, \\
&\qquad\qquad X(t_2) - X(t_1) = i_2 - i_1, \\
&\qquad\qquad \cdots, \\
&\qquad\qquad X(t_n) - X(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}\} \\
&= P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n\}
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n\} \\
&= P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n \mid X(t_n) - X(0) = i_n\} \\
&= P\{X(t_{n+1}) - X(t_n) = i_{n+1} - i_n\}
\end{aligned}
$$

则：马氏性得证。

下面再证齐次性。

当$j \ge i$，$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$

$$= P\{X(s+t)-X(s)=j-i\}$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

当$j < i$，$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}=0$

则：$p_{ij}(t)=\begin{cases}0 & j<i\\ e^{-\lambda t}\cdot\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j\ge i\end{cases}$

显然，$p_{ij}(t)$只与t有关，则泊松过程是齐次的纯不连续的马氏过程。

第二节 科尔莫戈罗夫微分方程

下面讨论满足连续性条件的$p_{ij}(t)$的性质。

齐次马尔可夫链，如果已知其一步转移概率矩阵P，则任意的n步转移概率矩阵由一步转移概率矩阵的n次方即可求得。但是，对于连续时间的齐次马尔可夫链，转移概率$p_{ij}(t)$的求解一般比较复杂。

下面我们讨论$p_{ij}(t)$的可微性及其所满足的科尔莫戈罗夫微分方程。

引理5.1 设齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$的$p_{ij}(t)$满足正则性条件，则对固定的$i,j\in I$，$p_{ij}(t)$是t的一致连续函数。

证明：设$h>0$，由定理5.1，有：

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)$$

$$=p_{ii}(h)p_{ij}(t)-p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

$$=-\left[1-p_{ii}(h)\right]p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

则：$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\geq-\left[1-p_{ii}(h)\right]p_{ij}(t)\geq-\left[1-p_{ii}(h)\right]$

且：$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h)$

因此：$\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\leq 1-p_{ii}(h)$

对$h<0$，同样有：

$$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in I}p_{ik}(-h)p_{kj}(t+h)-p_{ij}(t+h)$$

$$=p_{ii}(-h)p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t+h)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(-h)p_{kj}(t+h)$$

$$=-\left[1-p_{ii}(-h)\right]p_{ij}(t+h)+\sum_{k\neq i}p_{ik}(-h)p_{kj}(t+h)$$

则：$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\geq-\left[1-p_{ii}(-h)\right]p_{ij}(t+h)$

$$\geq-\left[1-p_{ii}(h)\right]$$

且：$p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(-h)p_{kj}(t+h)$

$$\leq\sum_{k\neq i}p_{ik}(-h)=1-p_{ii}(-h)$$

因此：$\left|p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\right|\leq1-p_{ii}(-h)$

综上所述，一般地有：$\left|p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)\right|\leq 1-p_{ii}(|h|)$

则由正则性条件，有：

$$\lim_{h\to 0}\left[\left|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right|\right]=0 \text{一致成立。}$$

即$p_{ij}(t)$关于t是一致连续的，证毕。

定理5.3 设$p_{ij}(t)$满足正则性条件，则有

$$(1)\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=\upsilon_i=q_{ii}\le+\infty$$

$$(2)\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=q_{ij}<+\infty(i\ne j)$$

称q_{ij}为齐次连续时间马尔可夫链从状态i到状态j的无穷小**转移速率**或**跳跃强度**。

定理中极限的概率意义为：**在长为Δt的时间区间内，过程从状态i转移到另一其他状态的转移概率$1-p_{ii}(\Delta t)$，等于$q_{ii}\Delta t$加上一个比Δt高阶的无穷小量；而从状态i转移到状态j的概率$p_{ij}(\Delta t)$,等于$q_{ij}\Delta t$加上一个比Δt高阶的无穷小量。**

推论 对有限齐次马尔可夫链，有 $q_{ii}=\sum_{j\neq i} q_{ij}<\infty$

我们称满足上式的马尔可夫链是**保守的**。以后我们总假定所讨论的马尔可夫链是保守的。

证明：由定理5.1，有：$\sum_{j\in I} p_{ij}(\Delta t)=1$

即：$1\text{-}p_{ii}(\Delta t)=\sum_{j\neq i} p_{ij}(\Delta t)$

由于上述求和是对有限集进行，故有：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1\text{-}p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=\sum_{j\neq i} q_{ij}$$

即：$q_{ii}=\sum_{j\neq i} q_{ij}$ (5.4)，证毕。

对于状态空间无穷的齐次马尔科夫过程，一般地有：

$$q_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

若连续时间齐次马尔科夫链具有：$I=\{0,1,2,\cdots n\}$，则其转移速率构成矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0n} \\ q_{10} & -q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & \cdots & -q_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

由(5.4)式知：Q矩阵的每一行元素之和为0，对角线元素为负或零，其余元素$q_{ij} \geq 0(i \neq j)$。

利用Q矩阵可推出任意时间间隔t的转移概率所满足的方程组，从而求出转移概率。

由$C-K$方程有：$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in I}p_{ik}(h)p_{kj}(t)$

或等价地：$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)$

两边同除以h，并令$h\to 0$，由定理5.3，有：

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)p_{kj}(t)}{h}-q_{ii}p_{ij}(t) \quad (5.6)$$

如果上式求极限和求和可交换，可推出下列定理的结果。

$$p_{ij}'(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t)$$

定理5.4(Kolmogrov向后方程) 假设$q_{ii}=\sum_{k\neq i} q_{ik}$，则对一切$i,j$及$t\geq 0$，有：

$$p_{ij}'(t)=\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t) \qquad (5.7)$$

改写为矩阵形式，有：$P'(t)=QP(t)$

定理5.4中$p_{ij}(t)$满足的微分方程组以Kolmogrov向后方程著称，称为向后方程，是指在计算时刻$t+h$的状态的概率分布时要取退后到时刻h的状态为条件，即我们从$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in I} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$开始计算。

对时刻t的状态取条件，可以导出另一组方程，称为*Kolmogrov*向前方程。

由$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in I} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$可得出如下结论。

定理5.5（*Kolmogrov*向前方程） 在适当的正则条件下，

$$p_{ij}'(t)=\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_{jj} \qquad (5.9)$$

改写为矩阵形式，有：$P'(t)=P(t)Q$

利用方程组(5.7)或(5.9)及初始条件：

$$\begin{cases} p_{ii}(0)=1, \\ p_{ij}(0)=0,(i\neq j) \end{cases}$$

可以解得$p_{ij}(t)$。

*Kolmogrov*向后方程和向前方程虽然形式上不同，但可以证明所求出的解$p_{ij}(t)$完全相同。

实际应用中，当固定最后状态j，研究$p_{ij}(t)$时采用向后方程较方便；当固定最后状态i，研究$p_{ij}(t)$时采用向前方程较方便。

向后方程和向前方程的矩阵形式：

$$P'(t)=QP(t) \quad (5.10)$$
$$P'(t)=P(t)Q \quad (5.11)$$

，其中Q矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

矩阵$P'(t)$的元素为矩阵$P(t)$的元素的导数，而：

$$P(t)=\begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

这样，连续时间的马尔科夫链转移概率的求解问题便归结为矩阵微分方程的求解问题，其转移概率由其转移速率矩阵Q决定。

向后方程和向前方程的矩阵形式：

$$\begin{aligned} P'(t) &= QP(t) \quad (5.10) \\ P'(t) &= P(t)Q \quad (5.11) \end{aligned}，其中Q矩阵为：Q = \begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

矩阵$P'(t)$的元素为矩阵$P(t)$的元素的导数，而：

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \cdots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

特别地，若Q是一个有限维矩阵，则(5.10)，和(5.11)的解为：

$$P(t)=e^{Qt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Qt)^j}{j!}$$

定理5.6 齐次马尔可夫过程在t时刻处于状态$j \in I$的绝对概率$p_j(t)$满足下列方程：

$$p_j'(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{k \neq j} p_k(t)q_{kj} \qquad (5.12)$$

(5.12)也可改写为矩阵形式如下：

$$\left(p_0'(t), p_1'(t), \cdots\right) = \left(p_0(t), p_1(t), \cdots\right)Q \qquad (5.13)$$

$$= \left(p_0(t), p_1(t), \cdots\right)\begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中$\left(p_0(t), p_1(t), \cdots\right)$为$t$时刻的绝对概率向量(组成的行矩阵)。

定理5.6 齐次马尔可夫过程在t时刻处于状态$j \in I$的绝对概率$p_j(t)$满足下列方程：

$$p_j'(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{k \neq j} p_k(t)q_{kj} \qquad (5.12)$$

证明：由定理5.2(3)，有：$p_j(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t)$

左右两边同时关于t求导，则：$p_j'(t) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}'(t)$

另一方面，利用向前方程(5.9)，有：

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj} - p_{ij}(t)q_{jj} \qquad (5.9)$$

上式两边乘以p_i，并对i求和得：

$$\sum_{i \in I} p_i p_{ij}'(t) = \sum_{i \in I}\left(-p_i p_{ij}(t)q_{jj}\right) + \sum_{i \in I}\sum_{k \neq j} p_i p_{ik}(t)q_{kj}$$

再将定理5.2(3)和求导式分别代入，并交换第二项求和顺序：

$$p_j'(t) = -p_j(t)q_{jj} + \sum_{k \neq j} p_k(t)q_{kj}，$$ 证毕。

定义5.3 设$p_{ij}(t)$为连续时间马尔可夫链的转移概率，若存在时刻t_1和t_2，使得

$$p_{ij}(t_1) > 0, p_{ji}(t_2) > 0$$

则称状态i与j是互通的。若所有状态是互通的，则称此马尔可夫链是不可约的。

关于状态的常返性与非常返性等概念与离散马尔可夫链类似，略。

定理5.7 设连续时间的马尔可夫链是不可约的，则有下列性质：

(1)若它是正常返的，则极限$\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$存在且等于$\pi_j>0$，$j\in I$，其中$\pi_j$是方程组

$$\begin{cases}\pi_j q_{jj}=\sum\limits_{k\neq j}\pi_k q_{kj} \Leftrightarrow \left(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\right)Q=0 \\ \sum\limits_{j\in I}\pi_j=1\end{cases} \qquad (5.13)$$

的唯一非负解。此时称$\left\{\pi_j, j\in I\right\}$是该过程的平稳分布，并且有:$\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)=\pi_j$

(2)若它是零常返的或非常返的，则：

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=0=\lim_{t\to\infty} p_j(t) \qquad (i,j\in I)$$

例5.2两个状态的齐次马氏过程。考虑计算机中某个触发器，它有两种可能状态:0或1。假定触发器状态变化构成一个齐次马氏过程，其状态转移概率为：

$$p_{01}(h)=\lambda h+o(h)$$

$$p_{10}(h)=\mu h+o(h) \qquad (\lambda,\mu>0)$$

由定理5.3，有：

$$q_{00}=\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{00}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{01}(h)}{h}=\lambda=q_{01}$$

$$q_{11}=\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{11}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{10}(h)}{h}=\mu=q_{10}$$

则：$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{bmatrix}$

由柯尔莫哥洛夫前进方程，得：

$$P'(t) = P(t)Q$$

即：$\begin{bmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$

则：$p'_{00}(t) = \mu p_{01}(t) - \lambda p_{00}(t)$，$p'_{01}(t) = \lambda p_{00}(t) - \mu p_{01}(t)$，

$p'_{10}(t) = \mu p_{11}(t) - \lambda p_{10}(t)$，$p'_{11}(t) = \lambda p_{10}(t) - \mu p_{11}(t)$

在初始条件$p_{00}(0) = p_{11}(0) = 1$，$p_{10}(0) = p_{01}(0) = 0$下，

利用$p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$，$p_{11}(t) = 1 - p_{10}(t)$得到：

$$p'_{00}(t) = \mu p_{01}(t) - \lambda p_{00}(t) = \mu[1 - p_{00}(t)] - \lambda p_{00}(t)$$

$$= -(\lambda + \mu)\ p_{00}(t) + \mu$$

$$e^{(\lambda+\mu)t} p'_{00}(t) + e^{(\lambda+\mu)t}(\lambda + \mu) p_{00}(t) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t)] = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$e^{(\lambda+\mu)t} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{(\lambda+\mu)t} + c$$

$$p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

而$p_{00}(t)|_{t=0}=1$，则$c=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

$$p_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$=\mu_0+\lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t}$$

其中：$\mu_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu},\lambda_0=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

同理，有：

$$p_{01}(t)=\lambda_0[1-e^{-(\lambda+\mu)t}],$$

$$p_{11}(t)=\lambda_0+\mu_0 e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$p_{10}(t)=\mu_0[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

则转移概率的极限为：

$$\lim_{t\to\infty} p_{00}(t) = \mu_0 = \lim_{t\to\infty} p_{10}(t) \qquad \lim_{t\to\infty} p_{11}(t) = \lambda_0 = \lim_{t\to\infty} p_{01}(t)$$

则：当$t \to \infty$时，$p_{ij}(t)$的极限存在且与i无关。

根据定理5.7平稳分布为：$\pi_0 = \mu_0 \quad \pi_1 = \lambda_0$

若取初始分布为平稳分布，即：

$$P\{X(0)=0\} = p_0 = \mu_0,\ P\{X(0)=1\} = p_1 = \lambda_0$$

则绝对分布也是平稳分布。

事实上，$p_0(t) = p_0 p_{00}(t) + p_1 p_{10}(t)$

$$= \mu_0[\lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t} + \mu_0] + \lambda_0\mu_0[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}] = \mu_0$$

同理：$p_1(t) = p_0 p_{01}(t) + p_1 p_{11}(t)$

$$= \lambda_0\mu_0[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}] + \lambda_0[\lambda_0 + \mu_0 e^{-(\lambda+\mu)t}] = \lambda_0$$

例5.3 机器维修问题考在例5.2中状态0表示机器正常工作，状态1代表机器故障，转移概率与5.2相同，即$I=\{0,1\}$，且假定：$p_{01}(t)=\lambda t+o(t)$，$p_{10}(t)=\mu t+o(t)$，试求在$t=0$时正常工作的机器，即$p_0(0)=1$，在$t=5$时仍未正常工作的概率，即$p_0(5)$=？

解：由例5.2，得该过程的Q矩阵为：$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$

由题意，已知t=0时刻正常工作，欲求t=5时刻仍正常工作的概率，即计算$p_{00}(t)$即可。

由例5.2，有：$p_{00}(t)=\mu_0+\lambda_0 e^{-(\lambda+\mu)t}$，其中：$\mu_0=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，

$\lambda_0=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$，则：$p_{00}(5)=\mu_0+\lambda_0 e^{-5(\lambda+\mu)}$

$\therefore p_0(5)=p_0p_{00}(5)+p_1p_{10}(5)=\mu_0+\lambda_0 e^{-5(\lambda+\mu)}$（其中$p_0$=1，$p_1$=0）

第三节 生灭过程

连续时间马氏链的一类重要情形是生灭过程，它的特征是在很短的时间内，系统的状态只能从状态i转移到状态$i-1$或$i+1$或保持不变。确切的定义如下：

定义5.5设齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$的状态空间为$I=\{0,1,2,\ldots\}$，转移概率为$p_{ij}(t)$，如果

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(h)=\lambda_i h+o(h) & (\lambda_i>0) \\ p_{i,i-1}(h)=\mu_i h+o(h) & (\mu_i>0,\mu_0=0) \\ p_{ii}(h)=1-(\lambda_i+\mu_i)h+o(h) & \\ p_{ij}(h)=o(h) & |i-j|\geq 2 \end{cases}$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为生灭过程，λ_i为出生率，μ_i为死亡率。

若$\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = i\mu$，则称$\{X_t, \ t \ge 0\}$为线性生灭过程。

若$\mu_i \equiv 0$，则称$\{X_t, \ t \ge 0\}$为纯生过程；若$\lambda_i \equiv 0$，则称$\{X_t, \ t \ge 0\}$为纯灭过程。

对生灭过程，由定理5.3得：

$$q_{ii} = -\frac{d}{dh}[p_{ii}(h)]|_{h=0} = \lambda_i + \mu_i \qquad i \ge 0$$

$$q_{ij} = \frac{d}{dh} p_{ij}(h)|_{h=0} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1 \qquad i \ge 0 \\ \mu_i & j = i-1 \qquad i \ge 1 \end{cases}$$

$$q_{ij} = 0 \qquad |i-j| \ge 2$$

故柯尔莫哥洛夫前进方程为：

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t)$$

上述方程组的求解较为困难，下面我们讨论其平稳分布。

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)Q=0\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1\end{cases}$$ ，即：

$$0=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

则：$\lambda_0\pi_0=\mu_1\pi_1$ ，$(\lambda_1+\mu_1)\pi_1=\lambda_0\pi_0+\mu_2\pi_2=\mu_1\pi_1+\mu_2\pi_2,\cdots$

$$(\lambda_j+\mu_j)\pi_j=\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1}$$

$$\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0,\pi_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0,\cdots\pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0\cdots$$

由：$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1$

得：$\pi_0+\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0+\cdots+\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0+\cdots=1$

由： $\pi_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \cdots + \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0 + \cdots = 1$

即： $\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$

$$\pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\cdot\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \quad j \geq 1 \qquad (5.14)$$

因此平稳分布存在的充要条件是：$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} < \infty$

例5.4 $M/M/S$排队系统，假设顾客按照参数为λ的泊松过程来到一个有s个服务员的服务站，即顾客相继到达的时间间隔是均值为$1/\lambda$的独立指数随机变量，每一个顾客一来到，如果有服务员空闲，则直接进行服务，否则此顾客要加入排队行列（即他在队列中等待）。当一个服务员结束对一个顾客的服务时，顾客离开服务系统，队列中的下一个顾客（如果有顾客等待）进入服务，假定相继的服务时间是独立的指数随机变量，均值为$1/\mu$，如果我们以$X(t)$记时刻t系统中的人数，则$\{X(t),\ t\ge 0\}$是生灭过程。

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu\ , & 1\le n\le s \\ s\mu\ , & n>s \end{cases}\ ,\quad \lambda_n=\lambda,\quad n\ge 0$$

$M/M/s$排队系统中M表示马尔可夫过程，s表示s个服务员。特别地在$M/M/1$排队系统中，$\lambda_n=\lambda$，$\mu_n=\mu$，于是若$\lambda/\mu<1$,由(5.14)式得：

$$\pi_n=\frac{(\lambda/\mu)^n}{1+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^n}=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right),\ n\ge 0,$$

要平稳分布(即极限分布)存在，直观的条件是λ必须小于μ，即顾客按速率λ到来且以速率μ受到服务；因而当$\lambda > \mu$时顾客到来的速率高于顾客受到服务的速率，排队的长度趋于无穷；$\lambda = \mu$的情况类似于对称的随机游动，它是零常返的，因此没有极限概率。

例5.5、5.6略，请自学。

例5.5 机器维修问题。设有m台机床，s个维修工人$(s \le m)$，机床或者处于工作状态，或者损坏等待修理。机床损坏后，空闲的维修人员立即进行修理。若维修工人都在忙碌，则机床按先坏先修排队等待修理。

假定在长为h的时间内，每台机床从工作状态转到损坏的概率为$\lambda h + o(h)$，每台修理的机床转到工作状态的概率为$\mu h + o(h)$，用$X(t)$表示时刻t损坏的机床台数，则$\{X(t), t \ge 0\}$是状态空间$I = \{0,1,2,\ldots,m\}$的时间连续、状态离散的马氏过程。设时刻t有i台机床损坏，则在$(t，\ t+h)$内又有一台机床损坏的概率，在不计高阶无穷小时，它应等于原来正在工作的$m-i$台机床中在$(t，\ t+h)$内恰有一台机床损坏的概率，讨论其平稳分布。

$$p_{i,i+1}(h)=(m-i)\lambda h+o(h) \quad (i=0,1,\cdots,m-1)$$

类似有：
$$\begin{cases} p_{i,i-1}(h)=i\mu h+o(h) & (1\le i\le s) \\ p_{i,i-1}(h)=s\mu h+o(h) & (s<i\le m) \\ p_{ij}(h)=o(h) & |i-j|\ge 2 \end{cases}$$

显然，这是一个生灭过程，其中：

$$\lambda_i=(m-i)\lambda \quad (i=0,1,\cdots,m)$$

$$\mu_i=\begin{cases} i\mu & 1\le i\le s \\ s\mu & s<i\le m \end{cases}$$

由前面讨论知平稳分布为：

$$\pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\pi_0=\frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)\lambda^j}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot j\cdot\mu^j}\pi_0$$

$$=C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\pi_0 \quad (j\le s)$$

$s < j \le m$ 时

$$\pi_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \pi_0 = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot s \cdot s \cdot \cdots \cdot s} \cdot \frac{\lambda^j}{\mu^j} \cdot \pi_0$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)(s+1)(s+2)\cdots j}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot s \cdot (s+1)(s+2)\cdots j \cdot s \cdot \cdots \cdot s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0$$

$$= C_m^j \frac{(s+1)(s+2)\cdots j}{s \cdot s \cdot \cdots \cdot s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \pi_0$$

由：$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots = 1$

得：$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{s} C_m^j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=s+1}^{m} C_m^j \frac{(s+1)(s+2)\cdots j}{s^{j-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \right]^{-1}$$

已知m, λ, μ后，可由上述平稳分布计算出在安排s个维修工人时，平均不工作的机床台数为$\sum_{j=1}^{m} j\pi_j$，因而可以适当安排维修工人的人数s。

作业： 5.1-5.5