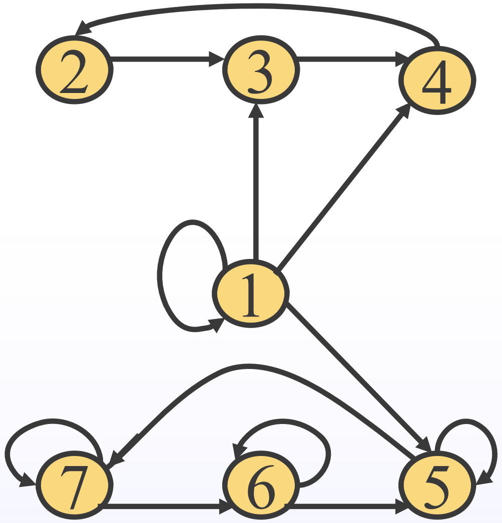
例4.3.3　设*Markov*链的状态空间$I=\{1,2,\cdots 7\}$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



试对状态空间进行分解。

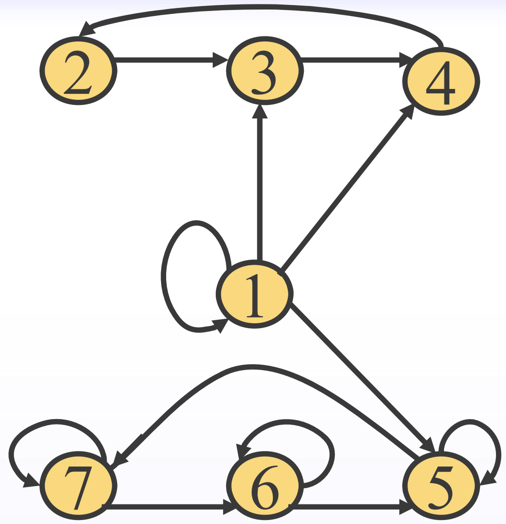
另解：考察状态1：$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)}$ 而：$f_{11}^{(1)}=0.4$　　$f_{11}^{(n)}=0\,(n\neq 1)$

则：$f_{11}=0.4<1$，则状态1　非常返

另：$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(n)}=0.4+0.4^2+\cdots+0.4^n+\cdots=\frac{2}{3}$，即$D=\{1\}$

状态2，$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}=f_{22}^{(3)}=1\,(2\to 3\to 4\to 2)$，则状态2常返。同理，状态5　常返

$I=D+C_1+C_2$，其中$C_1=\{2,3,4\}$且周期为3，$C_2=\{5,6,7\}$且周期为1　。



计算f_{55}

$$f_{55}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{55}^{(n)}，\text{其中}f_{55}^{(1)}=p_{55}^{(1)}=0.7，\ f_{55}^{(2)}=0$$

$$f_{55}^{(n)}=p_{57}^{(1)}p_{76}^{(1)}p_{65}^{(1)}\sum_{k=0}^{n-3}\left[p_{77}^{(1)}\right]^{k}\cdot\left[p_{66}^{(1)}\right]^{n-3-k}\ (n\geq 3)$$

$$f_{55}=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.3\times 0.4\times 0.5^{n-2}\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{0.6}{0.5}\right)^{k}$$

$$=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.12\times 0.5^{n-2}\frac{1.2^{n-1}-1}{0.2}$$

$$=0.7+\sum_{n=3}^{\infty}0.6\times\left(0.6^{n-2}-0.5^{n-2}\right)=1$$

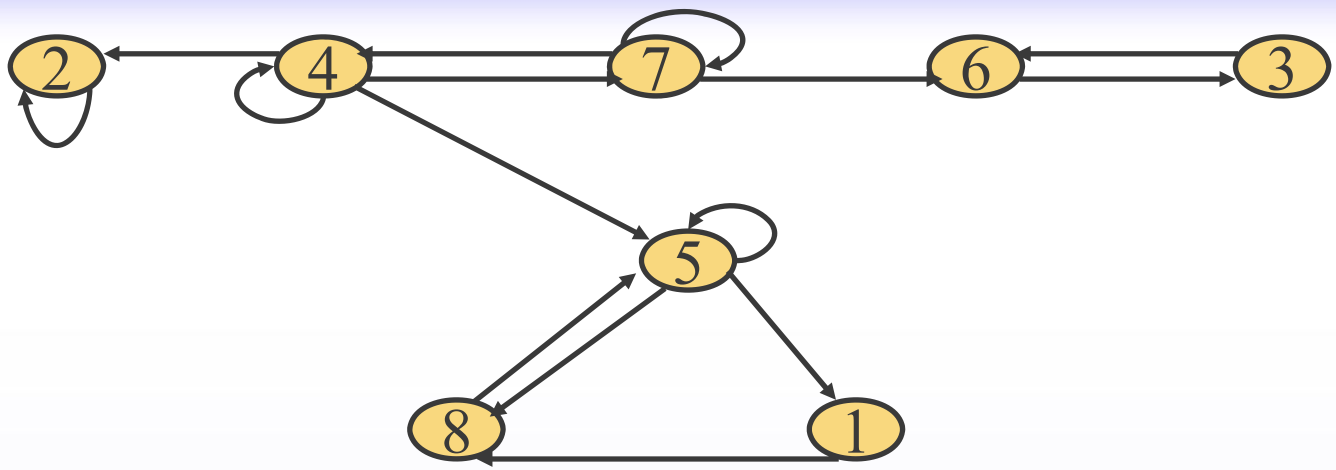
则:5常返。

例4.3.4 $I=\{1,2,\cdots 8\}$，转移概率矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中“*”表示该元素为正，试将I 进行分解。

解：1°画出状态转移图如下：



2° 根据状态转移图，显然有：$f_{22}=1$，所以2为吸收壁，则$C_1=\{2\}$；

由$1\to8\to5\to1$，知1,5,8三个状态互通，状态5 的周期是1 ，且：

$$f_{55}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{55}^{(n)}=f_{55}^{(1)}+f_{55}^{(2)}+f_{55}^{(3)}=p_{55}+p_{58}p_{85}+p_{51}p_{18}p_{85}=p_{55}+p_{58}+p_{51}=1$$

$$\mu_5=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{55}^{(n)}=1\times p_{55}+2\times p_{58}p_{85}+3\times p_{51}p_{18}p_{85}<\infty$$

所以:1,5,8为非周期的正常返状态，即遍历态，且$C_2=\{1,5,8\}$；

再由3,6互通，且$f_{33}=p_{36}p_{63}=1$，则3,6是周期为2的正常返状态，$C_3=\{3,6\}$

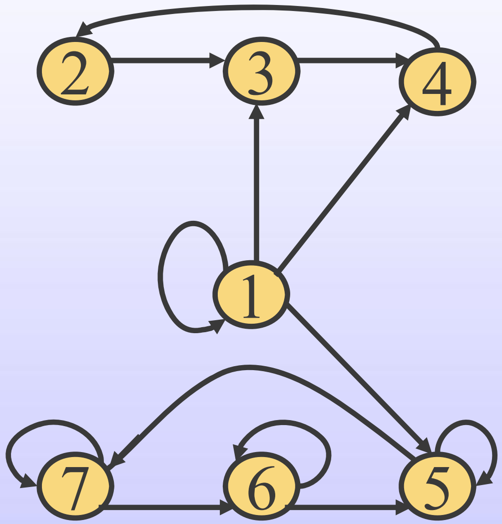
显然：$f_{44}<1$（4只要到达状态2或5，一旦离开永不返回），所以4,7为非常返状态，$D=\{4,7\}$，且周期为1，因此：$I=D+C=D+C_1+C_2+C_3$

定理4.3.3不可约*Markov*链的状态必为下列情况之一：正常返、零常返、非常返。

证明：*Markov*链不可约，即I 中状态均互通，由定理4.2.9得证。

前面例4.3.3*Markov*链的状态空间$I=\{1,2,\cdots 7\}$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



引理 若C是闭集，则$\left\{p_{ij}^{(k)}, \ i,j \in C, k \le n\right\}$仍然是随机矩阵，从而以$C$为状态空间也构成一个*Markov*链，称为原马氏链的子马氏链。

证明：即要证$\sum\limits_{k\in C} p_{ik}^{(k)} = 1, \ \forall i \in C, k \le n$。

C为闭集，则对$\forall i \in C, \ j \notin C$，有$i \mapsto j$,即对$\forall k, p_{ij}^{(k)}=0$。

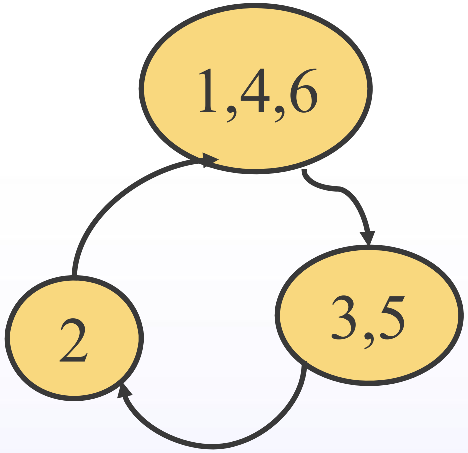
于是：$\sum\limits_{k\in I} p_{ik}^{(k)} = \sum\limits_{k\in C} p_{ik}^{(k)} + \sum\limits_{k\notin C} p_{ik}^{(k)} = 1$，即$\sum\limits_{k\in C} p_{ik}^{(k)} = 1$得证。

由此可见：I的一个闭子集C，可考虑C上的原马氏链的子马氏链，其状态空间为C，转移矩阵$G=\left(p_{ij}\right), \ i,j \in C$是原马氏链转移矩阵$P=\left(p_{ij}\right), \ i,j \in I$的子矩阵。

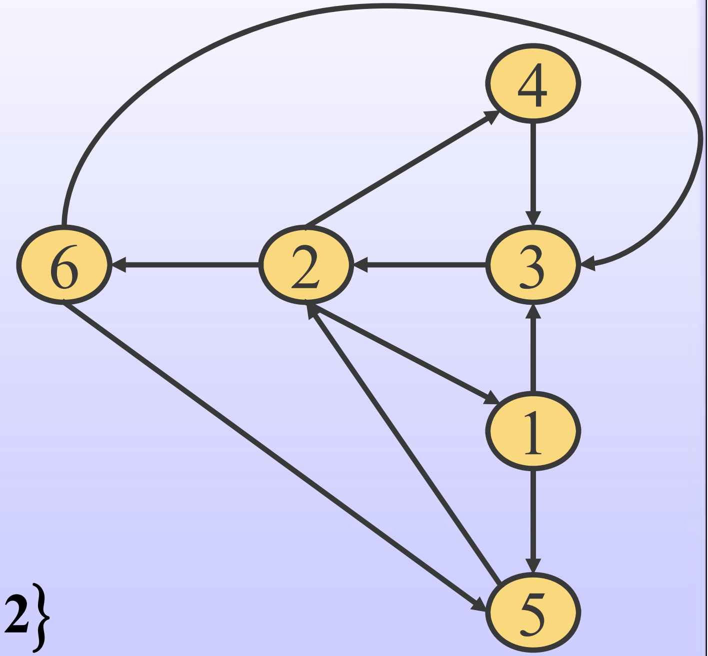
下面研究质点在不可约闭集C中的运动情况

例4.3.5设不可分$Markov$链的状态空间$C=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$



解：画出状态转移图如下：



由状态转移图知，各状态的周期$d=3$。

取$i=1$，令：

$$G_0=\{j, \exists 某个 n\ge 0, 有 p_{1j}^{(3n)}>0\}$$

$$G_1=\{j, \exists 某个 n\ge 0, 有 p_{1j}^{(3n+1)}>0\}$$

$$G_2=\{j, \exists 某个 n\ge 0, 有 p_{1j}^{(3n+2)}>0\}$$

则：$C=G_0\cup G_1\cup G_2=\{1,4,6\}\cup\{3,5\}\cup\{2\}$

定理4.3.4周期为d的不可约***Markov***链，其状态空间C可唯一地分解成d个互不相交的子集之和，即：$C=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r$，$G_r\cap G_s=\Phi$，$r\neq s$，且使得自G_r中任一状态出发，经一步转移必进入G_{r+1}中（其中$G_d=G_0$）。

证明： 任意取定一状态i，对$r=0,1,2,\cdots d-1$，定义集合：

$$G_r=\left\{j,\exists\text{某个}n\geq 0,\text{有}p_{ij}^{(nd+r)}>0\right\}\qquad \because C\text{不可约，则：}C=\bigcup_{r=0}^{d-1}G_r$$

若$\exists j\in G_r\cap G_s$，则必存在某个n 和m，使得$p_{ij}^{(nd+r)}>0$ ，$p_{ij}^{(md+s)}>0$

又$\because C$不可约$\therefore i\leftrightarrow j$，故必存在$h$ ，使得$p_{ji}^{(h)}>0$ ，于是有：

$$p_{ii}^{(nd+r+h)}\geq p_{ij}^{(nd+r)}p_{ji}^{(h)}>0\qquad G_0\to G_1\to G_2\to\cdots\to G_{d-1}$$

$$p_{ii}^{(md+s+h)}\geq p_{ij}^{(md+s)}p_{ji}^{(h)}>0$$

$\therefore d\,|\,r+h$，且$d\,|\,s+h$，从而$d\,\big|\big[(r+h)-(s+h)\big]$，即：$d\,|\,r-s$

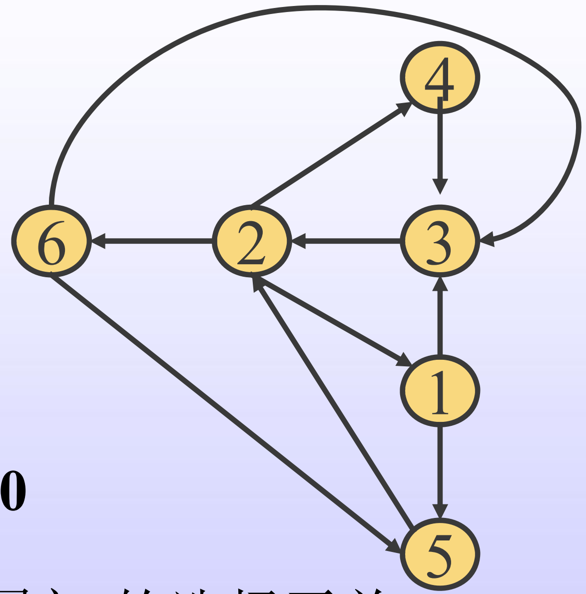
但$0\leq r,s\leq d-1$，故必须有：$r-s=0$ ，即$G_r\cap G_s=\Phi(r\neq s)$

下证对任意的$j\in G_r$，有：$\sum\limits_{k\in G_{r+1}} p_{jk}=1$，即自$G_r$中任一状态出发，经一步转移必进入$G_{r+1}$中，即：$G_0\to\cdots G_r\to G_{r+1}\to\cdots\to G_{d-1}$

事实上,$1=\sum\limits_{k\in C}p_{jk}=\sum\limits_{k\in G_{r+1}}p_{jk}+\sum\limits_{k\notin G_{r+1}}p_{jk}=\sum\limits_{k\in G_{r+1}}p_{jk}$

下面分析$\sum\limits_{k\notin G_{r+1}}p_{jk}=0$成立的原因：

$\because G_r=\left\{j,\exists\text{某个}n\ge 0,\text{有}p_{ij}^{(nd+r)}>0\right\}$



而$j\in G_r\ \therefore\ p_{ij}^{(nd+r)}>0$

当$k\notin G_{r+1}$时，有：$p_{ik}^{(nd+r+1)}=0$

$\therefore 0=p_{ik}^{(nd+r+1)}\ge p_{ij}^{(nd+r)}p_{jk}$，只可能有：$p_{jk}=0$

最后证明分解的唯一性，只需证明$\{G_r\}$与最初i的选择无关。

右上图：从1出发$\{1,4,6\}$属于同一G_0 ，从2 出发$\{1,4,6\}$属于同一G_1'

最后证明分解的唯一性，只需证明$\{G_r\}$与最初i的选择无关。即对固定的i，状态j和k同属于G_r，则对另外选定的i'，状态j和k仍属于同一$G_{r'}$。

假设对i，C被分解为$G_0, G_1, \cdots G_{d-1}$，对i'，C被分解为$G_0', G_1', \cdots G_{d-1}'$

又假设$j, k \in G_r$，$i' \in G_s$，则有：

$$G_s = \left\{ i', \exists 某个 n_2 \geq 0, 有 p_{ii'}^{(n_2 d+s)} > 0 \right\}$$

$$G_r = \left\{ j, \exists 某个 n_1 \geq 0, 有 p_{ij}^{(n_1 d+r)} > 0 \right\}$$

(1)若$r \geq s$，自i'出发，只能在$r\text{-}s, r\text{-}s+d, r\text{-}s+2d, \cdots$等步上到达状态$j, k$。故$j, k$均属于$G_{r-s}'$

(2)若$r < s$，自i'出发，只能在$d-(s-r) = r\text{-}s+d, 2d-(s-r) = r\text{-}s+2d \cdots$等步上到达状态$j, k$，故$j, k$也同属于$G_{r-s+d}'$

定理4.3.5　设$\{X_n, n\geq 0\}$是周期为d的不可约$Markov$链，则在定理4.3.4的结论下有：

(1)如只在时刻$0, d, 2d, \cdots$上考虑$\{X_n\}$，即得一新马氏链，其转移矩阵为：$P^{(d)}=\left(p_{ij}^{(d)}\right)$，对此新链，每一$G_r$中是不可约闭集，且$G_r$中的状态是非周期的；

(2)若原马氏链$\{X_n\}$常返，则$\{X_{nd}\}$也常返。

证明:(1)由定理4.3.4得知G_r对$\{X_{nd}\}$也是闭集。

另外，对$\forall j,k\in G_r$，因$\{X_n\}$不可约，则存在N，使得$p_{jk}^{(N)}>0$。

由定理4.3.4知N只可能是nd形，即：对$\{X_{nd}\}$，有：$j\rightarrow k$

同理有：$k\rightarrow j$，所以有：$j\leftrightarrow k$，即G_r不可分。

再由引理4.2.1知，存在正整数M，使对一切$n\geq M$，有$p_{jj}^{(nd)}>0$

所以，对$\{X_{nd}\}$，状态j周期为1，即非周期。

定理4.3.5 设$\{X_n, n\geq 0\}$是周期为d的不可约Markov链，则在定理4.3.4的结论下有：

(1)如只在时刻$0, d, 2d, \cdots$上考虑$\{X_n\}$，即得已新马氏链，其转移矩阵为：$P^{(d)}=\left(p_{ij}^{(d)}\right)$，对此新链，每一$G_r$中是不可约闭集，且$G_r$中的状态是非周期的；

(2)若原马氏链$\{X_n\}$常返，则$\{X_{nd}\}$也常返。

证明(续):(2)设马氏链$\{X_n\}$常返，则$\forall j \in G_r$，由周期的定义知：

当$n \neq 0 \bmod (d)$时，$p_{jj}^{(n)}=0$，因此$f_{jj}^{(n)}=0$，则：

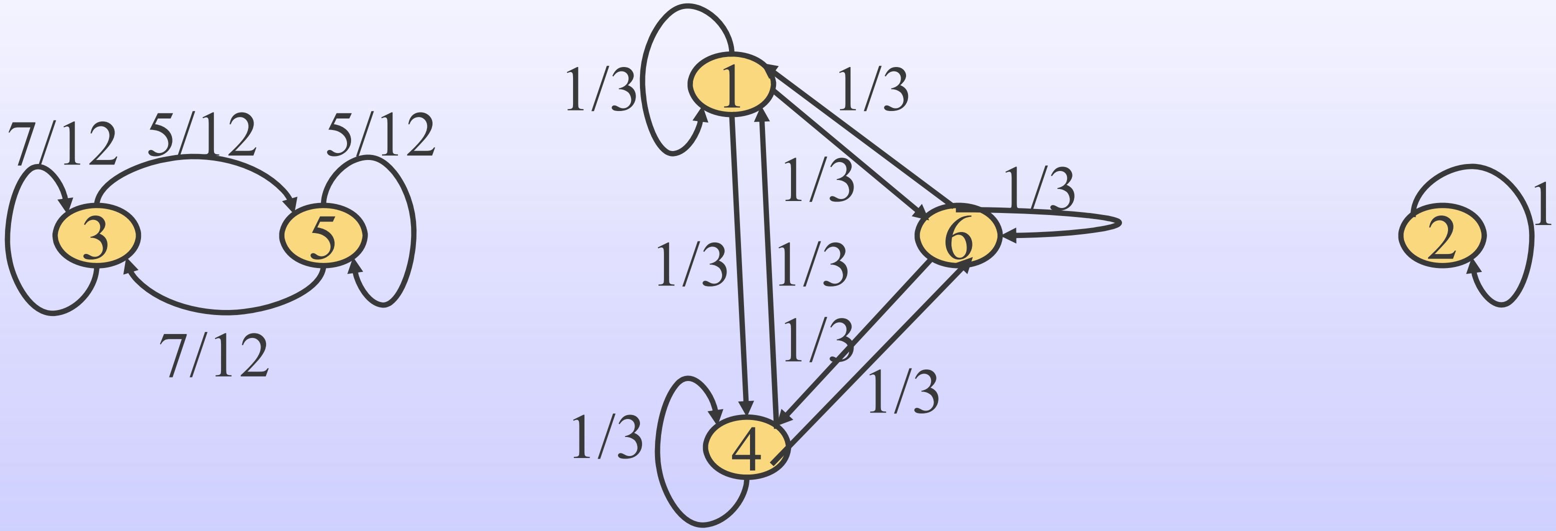
$$1=\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)}，\text{则对}\{X_{nd}\}\text{而言},\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)}=f_{jj}=1。$$

质点在不可约闭集C中的运动情况研究完毕！

例4.3.6设$\{X_n\}$为上例中的马氏链，已知$d=3$，则$\{X_{3n},\ n\geq 0\}$的

转移矩阵为：
$$P^{(3)}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

解：画出子链的状态转移图如下：



$G_0=\{1,4,6\}$，$G_1=\{3,5\}$，$G_2=\{2\}$各形成不可约闭集，且周期为1。

第四节　$p_{ij}^{(n)}$的渐近性质与平稳分布

对$p_{ij}^{(n)}$的极限性质，讨论两个问题：其一，$p_{ij}^{(n)}$是否存在？其二，如果存在，其极限是否与i有关？

一、$p_{ij}^{(n)}$的渐近性质

定理**4.4.1**若j是零常返或非常返态，则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

前面已证明过，略。

推论1　对于有限状态的***Markov***链，必有：

(1)不可能全是非常返状态（已证），也不可能含有零常返态。

(2)D不是闭集，因而有限不可约***Markov***链只有常返态且为正常返态。

证明:(1)假设I含有零常返状态i，则$C=\{j: i\to j\}$是不可约闭集

简单证明：C的不可约性。$\forall j,k\in C$，有：$i\to j, i\to k$

由i是常返态，由定理4.2.8知：$j\to i, k\to i$，则$j\leftrightarrow k$，即C不可约。

再证C是闭集，即$\forall j\in C$，$k\notin C$，有$j\mapsto k$。

反证，若$j\to k$　　$\because i\to j$，必有$i\to k$

则：$k\in C$与假设$k\notin C$矛盾，因此C是闭集。

$\because C$是不可约闭集$\therefore \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=1$，且$C$是中所有状态全是零常返。

则由定理4.4.1，对$\forall j\in C$，有$:\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$

但C是有限集，当$n\to\infty$时有$:1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$,矛盾。

推论1 对于有限状态的***Markov***链，必有：

(1)不可能全是非常返状态（已证），也不可能含有零常返态。

(2)*D*不是闭集，因而有限不可约***Markov***链只有常返态且为正常返态。

证明(续)：（2）若D是闭集，对$i\in D$，有$\sum\limits_{j\in D} p_{ij}^{(n)}=1$,

j是非常返的，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0\left(\forall i\in I\right)$

而状态空间I有限，则D有限:$1=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in D} p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{j\in D}\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$矛盾。

所以D不是闭集。

于是根据(1)，有限不可约***Markov***链作为一个闭集C不可能全是非常返状态，也不可能全是零常返状态，因此只能全是正常返态。

推论2若*Markov*链有一个零常返态，则必有无限多个零常返状态。

证明：若i为零常返状态，则$C=\{j:i\to j\}$是不可约闭集，C中所有状态全是零常返的，根据推论1，则C不可能是有限集，即有无限多个零常返集。

前面讨论的是非常返状态和零常返状态$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$的渐近性质，但当$j$是正常返状态，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$不一定存在，即使存在也可能与$i$有关。

下面讨论$p_{ij}^{(nd)}\,(d\ge 1)$及$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$的极限，记：

$$f_{ij}(r)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)},0\le r\le d-1$$

表示系统从i出发，在时刻$n=r \bmod (d)$首次到达状态j的概率

显然：$\sum\limits_{r=0}^{d-1} f_{ij}(r)=\sum\limits_{r=0}^{d-1}\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{r=0}^{d-1} f_{ij}^{(md+r)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)}=f_{ij}$

定理4.4.2 若j正常返, 周期为d，则$\forall i \in I$及$0 \le r \le d-1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

证明 因为$p_{jj}^{(n)} = 0$，$n \ne 0 \bmod (d)$，则：

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{\upsilon=0}^{nd+r} f_{ij}^{(\upsilon)} p_{jj}^{(nd+r-\upsilon)} = \sum_{m=0}^{n} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d}$$

则对$1 \le N < n$，有：

$$\sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} \le p_{ij}^{(nd+r)} \le \sum_{m=0}^{N} f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} + \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先固定N，令$n \to \infty$，再令$N \to \infty$，由定理4.2.7，即：

$$f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j} \le \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} \le f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

则：$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r)\frac{d}{\mu_j}$$

推论 设不可约、正常返、周期d的马氏链，其状态空间为C，则

对$\forall i,j\in C$，有：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)}=\begin{cases} d/\mu_j & 若i与j属于同一子集G_s \\ 0 & 其它 \end{cases}$ (4.38)

其中$C=\bigcup\limits_{s=0}^{d-1}G_s$由定理4.3.4给出。

特别地若d=1，$\forall i,j$有：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$ (4.39)

证明：在定理4.4.2中取$r=0$，得：

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)}=f_{ij}(0)\frac{d}{\mu_j}，其中：f_{ij}(0)=\sum_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md)}$$

若i与j不属于同一子集G_s，由定理4.3.4有：$p_{ij}^{(nd)}=0$，则：$f_{ij}^{(nd)}=0$，即：

$f_{ij}(0)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md)}=0$；若$i$与$j$属于$G_s$且$n\neq 0(\bmod(d))$，有$p_{ij}^{(n)}=0$，则：

$f_{ij}^{(n)}=0$，故：$f_{ij}(0)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(md)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(m)}=f_{ij}=1$，则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)}=\dfrac{d}{\mu_j}$得证

由：$f_{ij}(r)=\sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, 0\le r\le d-1$，概率$f_{ij}(r)$似乎与$j$有关，

实际上$f_{ij}(r)$只依赖于j所在的子集G_s。

对$\forall j,k\in G_s$，均有：$f_{ij}(r)=f_{ik}(r)$。

$\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}$表示自$j$出发，在$n$步之内返回$j$的平均次数，因此

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}$表示每单位时间内再返回$j$的平均次数，而$\frac{1}{\mu_j}$也表示

自j出发每单位时间内再返回j的平均次数，则：$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(k)}\approx\frac{1}{\mu_j}$

若质点自i出发，则需讨论自i出发能否到达j的情况，即要考虑f_{ij}的大小。

定理4.4.3　对$\forall i, j$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0 & 若j非常返或零常返\\ f_{ij}/\mu_j & 若j正常返\end{cases}$$

证明　若j为非常返或零常返，根据前面的结果有：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$，

所以，有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=0$

j为正常返，周期为d，应用下列事实：假设d个数列$\{a_{nd+s}\}$，$s=0,1,2,\ldots d-1$，若对每一个s，存在$\lim\limits_{n\to\infty}a_{nd+s}=b_s$，则必有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1}b_s \qquad (4.40)$$

在上式中令：$a_{nd+s}=p_{ij}^{(nd+s)}$，由定理4.4.2，有：

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd+s)}=f_{ij}(s)\frac{d}{\mu_j}$$

则：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{d}\sum\limits_{s=0}^{d-1}f_{ij}(s)\frac{d}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}\sum\limits_{s=0}^{d-1}f_{ij}(s)=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$

推论　不可约马氏链、常返，则对$\forall i,j$，有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}$

证明：若$\forall j$为零常返，$\mu_j=\infty$，由定理4.4.3成立；

若$\forall j$为正常返，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$，马氏链不可约$f_{ij}=1$

所以：，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}$，证毕。

由以上定理知，当j正常返时，尽管$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$不一定存在，但其平均值的极限存在，特别是当马氏链不可约时，其极限与i无关，在马氏链理论中μ_j是一个重要的量，定理4.4.2和定理4.4.3均给出了μ_j的计算公式，下面再通过平稳分布来讨论μ_j的计算方法。

二、平稳分布

定义4.4.1 称概率分布$\left\{\pi_j, j\in I\right\}$为*Markov*链的平稳分布，若它满足：

$$\begin{cases} \pi_j = \sum\limits_{i\in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum\limits_{j\in I} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \cdots) = (\pi_0, \pi_1, \cdots)\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ \sum\limits_{j\in I} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

由定义知：若初始分布$\left\{p_j, j\in I\right\}$为平稳分布，则绝对分布$\left\{p_j(n), j\in I\right\}$也为平稳分布。

事实上，由$\left\{p_j, j\in I\right\}$为平稳分布，则：

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{i\in I} p_i p_{ij} \\ \sum\limits_{j\in I} p_j = 1, p_j \geq 0 \end{cases}$$

则：$p_j(1) = P\left\{\xi_1 = j\right\} = \sum\limits_{i\in I} p_i p_{ij} = p_j$

$$p_j(2) = P\left\{\xi_2 = j\right\} = \sum_{i\in I} p_i(1)\, p_{ij} = \sum_{i\in I} p_i p_{ij} = p_j$$

根据归纳法，有：$p_j(n) = P\left\{\xi_n = j\right\} = \sum\limits_{i\in I} p_i(n-1)\, p_{ij} = \sum\limits_{i\in I} p_i p_{ij} = p_j$

另外注意到：对平稳分布$\left\{\pi_j, j\in I\right\}$，有：$\pi_j = \sum\limits_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$，事实上：

$$\pi_j = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in I} \pi_k p_{ki}\right) p_{ij} = \sum_{k\in I} \pi_k \left(\sum_{i\in I} p_{ki} p_{ij}\right) = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj}^{(2)}$$

$$= \cdots = \sum_{i\in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$$

定理4.4.4　不可约非周期**Markov**链是正常返 $\Leftrightarrow$ 存在平稳分布，

且此平稳分布为极限分布 $\left\{\dfrac{1}{\mu_j}, j\in I\right\}$。

证明: $\Leftarrow$ 设 $\{\pi_j, j\in I\}$ 是平稳分布，则： $\pi_j=\sum\limits_{i\in I}\pi_i p_{ij}^{(n)}$

而: $\sum\limits_{j\in I}\pi_j=1$，而极限分布存在为: $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$

则：

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in I}\pi_i\left(\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}\right)$$

$$=\sum_{i\in I}\pi_i\left(\frac{1}{\mu_j}\right)=\frac{1}{\mu_j}$$

因: $\sum\limits_{j\in I}\pi_j=1$，所以至少存在一个 $\pi_k>0$，即 $\dfrac{1}{\mu_k}>0$，则：

k 为正常返，故不可约马氏链所有状态全部是正常返。

下页证明必要性 $\Rightarrow$

若马氏链是不可约非周期正常返的，则：$\forall j \in I, \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j} > 0$

由$C-K$方程：$p_{ij}^{(n+m)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{ik}{}^{(m)} p_{kj}{}^{(n)} \geq \sum\limits_{k=0}^{N} p_{ik}{}^{(m)} p_{kj}{}^{(n)}$，$\forall j \in I$

令$n \to \infty$，则：$\dfrac{1}{\mu_j} \geq \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{\mu_k} p_{kj}{}^{(n)}$

再令$N \to \infty$，有：$\dfrac{1}{\mu_j} \geq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_k} p_{kj}{}^{(n)} = \sum\limits_{k\in I} \dfrac{1}{\mu_k} p_{kj}{}^{(n)}, \forall j$

下面证明上面的式子等号必须成立：

反证：若$\exists j$使得$\dfrac{1}{\mu_j} > \sum\limits_{k\in I} \dfrac{1}{\mu_k} p_{kj}{}^{(n)}$

则：$\sum\limits_{j\in I} \dfrac{1}{\mu_j} > \sum\limits_{j\in I} \sum\limits_{k\in I} \dfrac{1}{\mu_k} p_{kj}{}^{(n)} = \sum\limits_{k\in I} \dfrac{1}{\mu_k} \sum\limits_{j\in I} p_{kj}{}^{(n)} = \sum\limits_{k\in I} \dfrac{1}{\mu_k}$

则$:\sum_{j\in I}\frac{1}{\mu_j}>\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}$矛盾，则$:\frac{1}{\mu_j}=\sum_{k\in I}\frac{1}{\mu_k}p_{kj}^{(n)}$

另$:1=\sum_{j\in I}p_{ij}^{(n)}\to\sum_{j\in I}\frac{1}{\mu_j}(n\to\infty)$，则$\sum_{j\in I}\frac{1}{\mu_j}=1$

则$\left\{\frac{1}{\mu_j},j\in I\right\}$为平稳分布，且平稳分布就是极限分布

推论1 有限状态的不可约非周期***Markov***链必存在平稳分布。

推论2 若不可约非周期***Markov***链的所有状态是非常返或零常返，则不存在平稳分布。

证明：若所有状态为非常返，或零常返，且存在平稳分布。

设$\{p_j,j\in I\}$是平稳分布，则：$p_j=\sum_{i\in I}p_ip_{ij}^{(n)}$

由所有状态为非常返，或零常返知$:\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。

于是$p_j=0$。但这不可能。

推论3 若$\left\{\pi_j, j\in I\right\}$是不可约非周期马氏链的平稳分布，则：

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \qquad (4.45)$$

证明：由$p_j(n)=\sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)}$及$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$，有：

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in I} p_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in I} p_i \frac{1}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}$$

由定理4.4.2知：$\frac{1}{\mu_j}=\pi_j$，证毕。

定义4.4.2 $\forall i, j\in I$，有：$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$存在，则称马氏链具有遍历性，这种马氏链又被叫做遍历链。

例4.4.1一非周期不可约正常返Markov链，$I=\{0,1\}$，其转移概率矩阵为$P=\begin{bmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{bmatrix}$，$(p,q>0)$,求平稳分布。

解：根据已知条件有：$p_{00}=1-p$，$p_{01}=p$，$p_{10}=q$，

$$p_{11}=1-q$$

利用$C-K$方程，有：$p_{00}^{(n)}=\sum_{i=0}^{1}p_{0i}^{(n-1)}p_{i0}$

$$=p_{00}^{(n-1)}p_{00}+p_{01}^{(n-1)}p_{10}$$

$$=p_{00}^{(n-1)}(1-p)+\left[1-p_{00}^{(n-1)}\right]q$$

$$=q+(1-p-q)\,p_{00}^{(n-1)}=q+dp_{00}^{(n-1)}\text{，其中}d=1-p-q$$

由$p_{00}^{(1)}=1-p$，则：$p_{00}^{(2)}=q+dp_{00}^{(1)}=q+(1-p)d$

且：$p_{00}^{(3)}=q+dp_{00}^{(2)}=q+qd+(1-p)d^2\cdots$

一般地，有：$p_{00}^{(n)}=q\dfrac{1-d^{n-1}}{1-d}+(1-p)d^{n-1}$

$$=\frac{1}{1-d}\left(q+pd^n\right)$$

$$=\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}(1-p-q)^n$$

同理，有：$P^{(n)}=\dfrac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}+\dfrac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$

而$\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$

则$\pi_0 = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \dfrac{q}{p+q} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{10}^{(n)}$

$$\pi_1 = \lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = \frac{p}{p+q} = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}$$

则平稳分布为$\left\{\dfrac{q}{p+q}, \dfrac{p}{p+q}\right\}$。

本例是利用极限分布求平稳分布的典型例子，但一般地求$P^{(n)}$比较困难，因此这种方法具有一定的局限性。

例4.4.2设*Markov*链的转移概率矩阵为$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix}$，求平稳分布及各状态的平均返回时间。

解：由P的结构我们知道，该*Markov*链的所有状态均互通，即不可分显然，该有限状态的*Markov*链为非周期的不可分的正常返链，则存在平稳分布。

由：$\begin{cases}\pi_j=\sum\limits_{i\in I}\pi_i p_{ij}\\ \sum\limits_{j\in I}\pi_j=1\end{cases}$，即$\begin{cases}(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix}\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$

解得：$\pi_1=0.1765$，$\pi_2=0.2353$，$\pi_3=0.5882$

由定理4.4.2，得：$\mu_1=\dfrac{1}{\pi_1}=5.67$，$\mu_2=\dfrac{1}{\pi_2}=4.25$，$\mu_3=\dfrac{1}{\pi_3}=1.7$

事实上，可以先不判断是否存在平稳分布，而是根据平稳分布的定义求解线性方程组。若方程组存在非负解，则存在平稳分布。

例4.4.3设Markov链具有状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率矩阵为：

$$p_{ij}=\begin{cases} p_i & j=i+1 \\ r_i & j=i, i\geq 0 \\ q_i & j=i-1, i\geq 1 \end{cases}$$

其中$p_i, q_i\geq 0$且$p_i+r_i+q_i=1$

这样的Markov链称为生灭链，它是不可约的。若记：$a_0=1$，

$a_j=\dfrac{p_0p_1\cdots p_{j-1}}{q_1q_2\cdots q_j}(j\geq 1)$，试证：Markov链存在平稳分布$\Leftrightarrow \sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j<\infty$

证明：$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2\cdots)=(\pi_0,\pi_1,\pi_2\cdots)\begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

则：$$\begin{cases} \pi_0=r_0\pi_0+q_1\pi_1 \\ \pi_j=p_{j-1}\pi_{j-1}+r_j\pi_j+q_{j+1}\pi_{j+1}\ (j\geq 1) \\ p_j+r_j+q_j=1 \end{cases}$$

则：$q_1\pi_1 = \pi_0 - r_0\pi_0 = p_0\pi_0$

$$q_{j+1}\pi_{j+1} - p_j\pi_j = q_j\pi_j - p_{j-1}\pi_{j-1}\left(j \ge 1\right)$$

得：$\pi_1 = \dfrac{p_0}{q_1}\pi_0,\quad \pi_2 = \dfrac{p_1}{q_2}\pi_1, \cdots$

$$\pi_j = \frac{p_{j-1}}{q_j}\pi_{j-1} = \frac{p_{j-1}}{q_j}\frac{p_{j-2}}{q_{j-1}}\pi_{j-2} = \cdots = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j}\pi_0\left(j \ge 1\right)$$

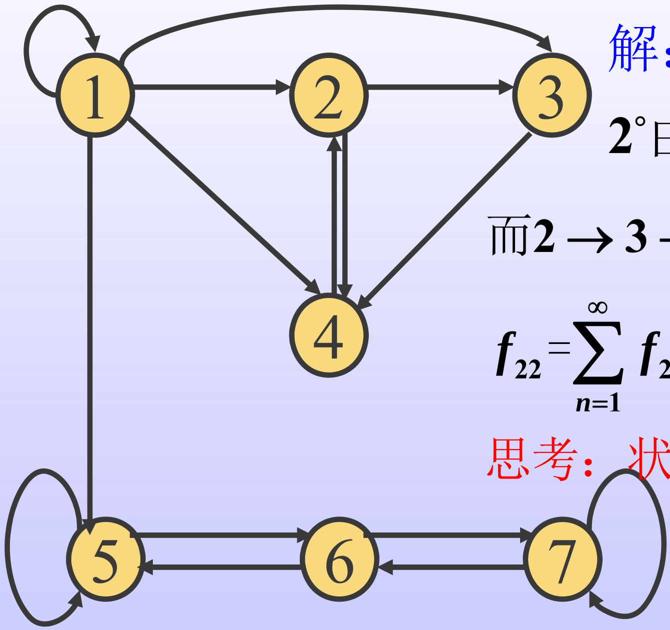
而：$\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j = 1 \Leftrightarrow \pi_0 + a_1\pi_0 + \cdots + a_j\pi_0 + \cdots = 1$

即生灭链存在平稳分布 $\Leftrightarrow \pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$

例4.4.4 $P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

求每一个不可约闭集的平稳分布；

求 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n)}$



解：1° 画出状态转移图

2° 由图当 $i\neq 1$，有 $i\mapsto 1$，则1为非常返态 $D=\{1\}$

而 $2\to 3\to 4\to 2$，则 $C_1=\{2,3,4\}$ 为不可约闭集，且：

$f_{22}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}=f_{22}^{(2)}+f_{22}^{(3)}=p_{24}p_{42}+p_{23}p_{34}p_{42}=1$，不可约常返

思考：状态2的周期为？

同理：$C_2=\{5,6,7\}$ 也为不可约常返闭集。

对$C_1=\{2,3,4\}$，有：$P_1=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

得：$\begin{cases}(\pi_2,\pi_3,\pi_4)=(\pi_2,\pi_3,\pi_4)\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}$

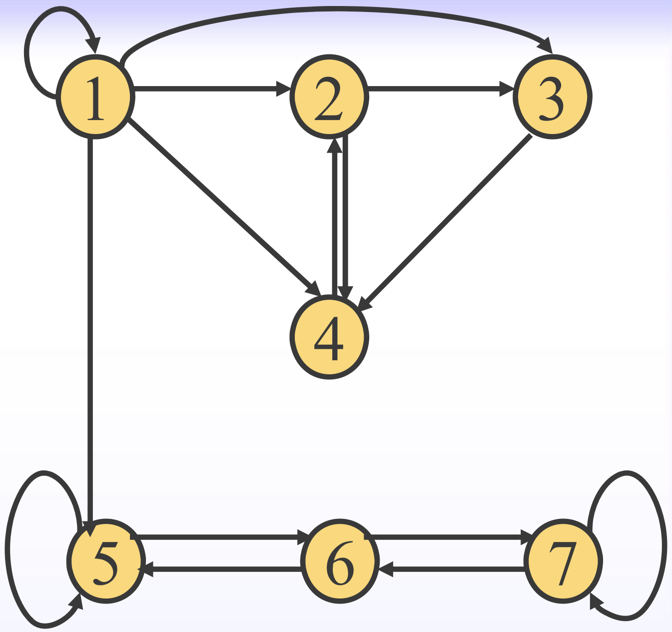
则：$\pi_2={}^2\!/_5$，$\pi_3={}^1\!/_5$，$\pi_4={}^2\!/_5$

得平稳分布$\left\{0,{}^2\!/_5,{}^1\!/_5,{}^2\!/_5,0,0,0\right\}$

同理，对$C_2=\{5,6,7\}$，有：$P_2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$

得平稳分布$\left\{0,0,0,0,{}^1\!/_3,{}^1\!/_3,{}^1\!/_3\right\}$

$$P=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



则：$p_{13}^{(n)}=\sum_{k=1}^{7} p_{1k}\, p_{k3}^{(n-1)}$

$$=0.1\,p_{13}^{(n-1)}+0.1\,p_{23}^{(n-1)}+0.2\,p_{33}^{(n-1)}+0.2\,p_{43}^{(n-1)}+0.4\,p_{53}^{(n-1)}$$

$$=0.1\,p_{13}^{(n-1)}+0.1\,p_{23}^{(n-1)}+0.2\,p_{33}^{(n-1)}+0.2\,p_{43}^{(n-1)}$$

而状态3常返，则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty} p_{33}^{(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty} p_{43}^{(n-1)}=\pi_3=0.2$

故：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n)}=0.1\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n-1)}+0.1$，而：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n-1)}$

则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{13}^{(n)}=1/9$

例4.4.5 独立地重复抛掷一枚硬币，每次抛掷出现正面的概率为p。对于$n \geq 2$，令$X_n = 0,1,2,3$分别对应于第$n-1$次和第n次抛掷的结果为(正，正),(正，反),(反，正),(反，反)。

①试问该过程是否为马尔可夫链；

②计算它的一步转移概率矩阵；

③讨论其状态分类、周期、平稳分布；

④求$P\left\{X_2 = 3, X_3 = 2, X_5 = 0\right\}$

解: $(1)\ \forall n \in Z$，$I = \left\{0,1,2,3\right\}$

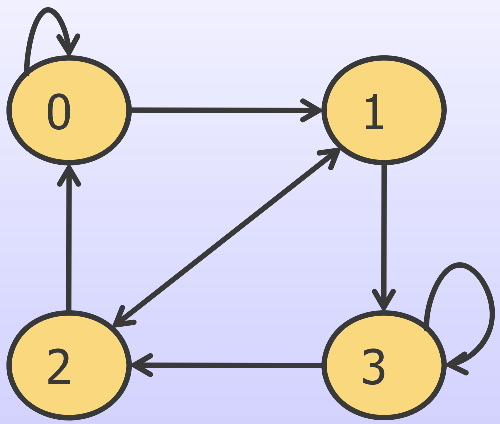
对$\forall i_1, i_2, \cdots i_n, i_{n+1} \in I$，且$P\left\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \cdots X_n = i_n\right\} > 0$，有：

$$P\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \middle| X_1 = i_1, X_2 = i_2, \cdots X_n = i_n\right\} = P\left\{X_{n+1} = i_{n+1} \middle| X_n = i_n\right\}$$

且与n无关，则该过程为齐次马氏链。

$$(2)\ P=\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

(3)



- 所有状态均互通。
- 且因状态空间有限，所以所有状态全均为正常返态。
- 周期为1

下面求平稳分布：

$$\begin{cases}(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)=(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

则： $\pi_0 = p^2, \pi_1 = \pi_2 = pq, \pi_3 = q^2$,其中$q = 1-p$

$(4)\ P\{X_2 = 3, X_3 = 2, X_5 = 0\}$

$= P\{X_2 = 3\} \cdot P\{X_3 = 2 | X_2 = 3\} \cdot P\{X_5 = 0 | X_3 = 2\}$

$= q^2 \cdot p_{32} \cdot p_{20}^{(2)} = pq^2 \cdot p^2 = p^3 q^2$

其中： $P\{X_2 = 3\} = q^2$

$p_{20}^{(2)} = p_{20} \cdot p_{00} + p_{21} \cdot p_{10} + p_{22} \cdot p_{20} + p_{23} \cdot p_{30} = p^2$

书后习题：

4.1,4.2,4.4,4.7(1),4.9,4.10(1),4.12,4.15(1),(3),4.17