第二章 随机过程的概念和基本类型

- 理解随机过程的基本概念，知道样本函数、状态空间的定义；
- 了解随机过程一维分布函数、分布密度的定义，知道推广到n维的情形；
- 掌握随机过程的数字特征：均值函数、方差函数、相关函数、协方差函数、互相关函数、互协方差函数。熟练掌握均值函数和相关函数的求法；
- 了解二阶矩过程、正交增量过程、马尔可夫过程、独立增量过程、平稳增量过程、正态随机过程、泊松过程、维纳过程、平稳过程的定义及性质

第一节 随机过程的定义

例2.1 生物群体的增长问题。在描述群体的发展或演变过程中，以X_t表示在时刻t群体的个数，则对每一个t， X_t是一个随机变量。假设我们从t=0开始每隔24小时对群体的个数观测一次，则$\{X_t, t=0，1，2，\ldots\}$是一个随机过程（是一个以时间t为变量的函数）。

例2.2 某电话交换台在时间段$[0，t]$内接到的呼叫次数是与t有关的随机变量$X(t)$。对于固定的t，$X(t)$是取非负整数值的随机变量。故$\{X(t), t\in[0,+\infty]\}$是随机过程。

第一节 随机过程的定义

- 随机过程的基本概念

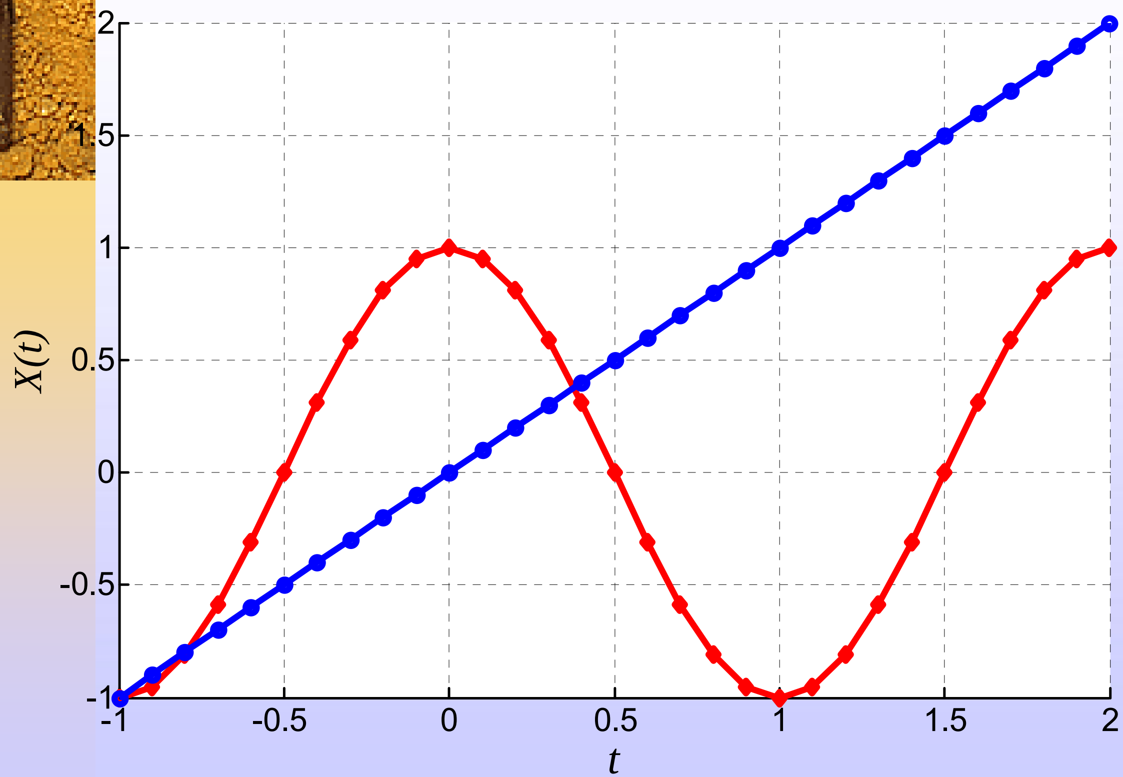
定义2.1.设$(\Omega,\mathscr{F}, P)$为一概率空间，T是给定的参数集，如果对任一$t\in T$，有一定义在$(\Omega, \mathscr{F},P)$上的随机变量$X(t, e)$与之对应，则称$\{X(t, e), t\in T\}$为$(\Omega, \mathscr{F},P)$上的随机过程，简记为$\{X(t), t\in T\}$。

- 状态空间：固定$t\in T$，把随机过程所取的值称为在时刻t的状态，并将所有可能的状态构成的集合称为状态空间，用I(或E)来表示。定义中的T是时间、长度、重量等物理量的集合，以后我们不妨将它看作时间区间。

- 样本函数：$X(t,e)$是一个二元函数，当$e\in\Omega$取定时，它是自变量为t，且定义域为T的函数，称为该随机过程的样本函数。

例2.3 抛掷一枚硬币的试验，样本空间是$\Omega=\{H, T\}$,出现H和T的概率均为0.5， 定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现}H,\\ t, & \text{当出现}T,\end{cases}\quad t\in R$$



当t固定时，$X(t)$是一个随机变量，

当样本点固定时，得到两个样本函数$\{\cos\pi t,\ t\}$。状态空间为R.

例2. 4 随机相位正弦过程

$X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$ $t\in \mathrm{R}$, Θ服从$(0,2\pi)$上的均匀分布，$A(>0)$和ω 是常数。则它的状态空间是$[-A, A]$；对任意θ_i， $x(t)=A\sin(\omega t+\theta_i)$是样本函数。

注意：

设$X(t)$是一个随机过程，

(1) 当$T=\{1\}$,则$X(t)$退化为一个随机变量。

(2) 当$T=\{1,2,\cdots,N\}$时，$X(t)$退化为随机向量$(X_1,\cdots,X_N)$。

(3) 当$T=\{1,2,\cdots\}$时，$X(t)$为可列随机变量序列。

(4) 当T为不可数集合时，$X(t)$为不可数随机变量序列。

二、随机过程的分类

根据参数集T和状态空间I是否连续分为四类：

离散型随机序列 参数集T，状态空间I均离散

例：一维随机游动的研究。设有一质点在x轴上做随机游动，即在$t=0$时质点处于x轴的原点0，在$t=1,2,3,\cdots$时质点在x轴上左移或右移一个单位距离，假设右移一个单位的概率是p，左移一个单位概率是q，显然：$q=1-p$。设X_n为时刻n时质点偏离原点的距离单位。

二、随机过程的分类

离散型随机过程　参数集T连续，状态空间I离散

例：单位时间内事件A发生的次数服从参数为λ的泊松分布。

二、随机过程的分类

连续型随机序列　　参数集T离散，状态空间I连续

例：如果每隔单位时间对晶体管噪声进行抽样，所得到的是在$t=\cdots,-2,-1,0,1,2\cdots$时的随机序列，而这个序列的状态是连续的。

二、随机过程的分类

连续型随机过程 参数集T，状态空间I均连续

例：正弦波过程$\{\xi(t), -\infty < t < +\infty\}$, $\xi(t) = V\cos\omega t$

其中ω为常数，V为在$(0,1)$上服从均匀分布的随机变量。

第二节 随机过程的分布和数字特征

一、分布

对于一维和多维随机变量，利用它们的分布函数可以完全刻画它们的统计特性，对于随机过程，同样借助于分布函数来研究其统计规律。

设$\{X(t,e),\ t\in T\}$为一随机过程，取定$t\in T$和$x\in R$，定义

$$F(t;x)=P\{X(t)\le x\}$$

为随机过程$X(t)$的一维分布函数，称$\{F(t;x),\ t\in T\}$为随机过程$X(t)$的一维分布函数族。

- 定义2.2 设$\{X(t), t\in T\}$为一随机过程，对任意正整数$n\geq 1$及任意$t_i\in T$，$x_i\in R(i=1,2,...,n)$，称分布函数

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\left\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\right\}$$

的全体

$$F=\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n):t_i\in T,x_i\in R,i=1,2,\cdots,n,n\geq 1\}$$

为随机过程$X(t)$的有限维分布函数族。

分布密度：

$$\boldsymbol{f(t;x)=\frac{\partial F(t;x)}{\partial x}}$$

$$f(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

- 随机过程的有限维分布函数族具有下列性质：

（1）对称性

设$i_1, i_2, \cdots, i_n$是$1,2,\cdots,n$的任一排列，则：

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$$

（2）相容性（低维分布函数是高维分布函数的极限分布）

对$n>m$，有：

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m) = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_m) \le x_m\}$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_m) \le x_m, X(t_{m+1}) \le \infty, \cdots, X(t_n) \le \infty\}$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_m) \le x_m, \lim_{x_{m+1} \to +\infty} X(t_{m+1}) \le x_{m+1}, \cdots, \lim_{x_n \to +\infty} X(t_n) \le x_n\}$$

$$= \lim_{x_{m+1},\cdots,x_n \to +\infty} P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_m) \le x_m, X(t_{m+1}) \le x_{m+1}, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

$$= \lim_{x_{m+1},\cdots,x_n \to +\infty} F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$$

- **定理2.1（Kolmogorov存在定理）**设已给参数集T及满足对称性和相容性条件的分布函数族F，则必存在概率空间$(\Omega,\mathcal{F}, P)$及定义在其上的随机过程$\{X(t),t\in T\}$,它的有限维分布函数族是F.

该定理给出了随机过程存在性的理论依据。也说明一个随机过程完全由其有限维分布函数族来决定。由于随机变量的分布函数和特征函数的一一对应关系，随机过程的概率特征也可以通过随机过程的有限维特征函数族来完整表示。

$$\Phi = g_{t_1,\cdots,t_n}(\theta_1,\cdots,\theta_n) = E\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k X(t_k)\right\}\right)$$

二、随机过程的数字特征

定义2.3 设随机过程$\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数为$F(t;x)$，如果对任意$t \in T, EX(t)$存在，则称

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(t;x)$$

为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的**均值函数**。

称$D_X(t) = E[X(t) - m_X(t)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_X(t)]^2 dF(t;x)$

为$X(t)$的**方差函数**。

若对任意$t \in T, E[X(t)]^2$存在，则称$X(t)$为**二阶矩过程**。

$$E\left[\xi^2(t)\right] < +\infty \Leftrightarrow \mu_\xi(t) < +\infty, D\left[\xi(t)\right] < +\infty$$

$$\Rightarrow \because \left|E\left[\xi(t)\eta(t)\right]\right| \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} \cdot \left\{E\left[\left|\eta(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2}$$

$$\text{令}\ \eta(t) = 1,\ \text{所以}: \left|E\left[\xi(t)\right]\right| \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} < +\infty$$

关于柯西－许瓦兹不等式的证明：

$$\left|E\left[\xi(t)\eta(t)\right]\right| \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} \cdot \left\{E\left[\left|\eta(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2}$$

证法1：初等数学法

$$\text{构造} f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i x + b_i\right)^2 = \left(a_1 x + b_1\right)^2 + \cdots \left(a_n x + b_n\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

由$\forall x$，恒有：$f(x) \ge 0$，则：

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$$

即：$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$得证。

关于柯西–许瓦兹不等式的证明：

$$\left|E\left[\xi(t)\eta(t)\right]\right| \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} \cdot \left\{E\left[\left|\eta(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2}$$

证法2：比较法证明：$\left[\int_a^b \xi(t)\eta(t)dx\right]^2 \le \int_a^b \xi^2(t)dt \cdot \int_a^b \eta^2(t)dt$

$$\int_a^b \xi^2(t)dt \cdot \int_a^b \eta^2(t)dt - \left[\int_a^b \xi(t)\eta(t)dt\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \xi^2(t)dt \cdot \int_a^b \eta^2(s)ds + \frac{1}{2}\int_a^b \xi^2(s)ds \cdot \int_a^b \eta^2(t)dt -$$

$$\int_a^b \xi(t)\eta(t)dt \cdot \int_a^b \xi(s)\eta(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b ds \int_a^b \left[\xi^2(t)\eta^2(s) + \xi^2(s)\eta^2(t) - 2\xi(t)\eta(t)\cdot\xi(s)\eta(s)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b ds \int_a^b \left[\xi(t)\eta(s) - \xi(s)\eta(t)\right]^2 dt \ge 0,$$ 即得证。

$$\therefore \mu_\xi(t) = \left|E\left[\xi(t)\right]\right| \le E\left[\left|\xi(t)\right|\right] \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} < +\infty$$

$$D\left[\xi(t)\right] = E\left[\xi^2(t)\right] - \mu_\xi^{\ 2}(t) < +\infty$$

称$B_X(s,t)=E[(X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t))], s,t\in T$为$X(t)$的协方差函数。

称$D[X(t)]=E[X(t)-m_X(t)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-m_X(t)]^2 dF(t;x)$为$X(t)$的方差函数。

称$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$为$X(t)$的相关函数。

对离散型随机过程：$m_X(t)=E[X(t)]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i(t)$

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E[X(t)-m_X(t)]^2=\sum_{i=1}^{n}[x_i-m_X(t)]^2 p_i(t)$$

其中：$p_i(t)=P\{X(t)=x_i\},i=1,\cdots,n$

对连续型随机过程：

$$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(t;x)dx$$

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E[X(t)-m_X(t)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-m_X(t)]^2 f(t;x)dx$$

且：$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t);$

$$B_X(t,t)=D_X(t)=R_X(t,t)-m_X{}^2(t)$$

由此可以看出，均值函数和相关函数是最基本的数字特征，协方差函数和方差函数可以由它们确定。在随机过程中，仅研究均值函数和相关函数的理论称为相关理论。

均值函数和方差函数刻画了随机过程在不同时刻的统计特性，均值函数表示在各个不同时刻随机过程取值的摆动中心。方差函数表示在各个不同时刻随机过程的取值关于均值的平均偏离程度。但它们不能描述在不同时刻随机过程之间的相互关系，因而必须借助于相关函数和协方差函数。

例2.5 设$g(t)$为周期为L的矩形波，随机变量Y服从两点分布。令$X(t)=Yg(t), t\in T=(0,\infty)$，求$X(t)$的数字特征。

解：

Y	-1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[Yg(t)]$$

$$=g(t)E[Y]=g(t)[-1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}]=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[g(s)Y\cdot Yg(t)]=g(s)g(t)E[Y^2]$$

$$=g(s)g(t)[(-1)^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}]=g(s)g(t)$$

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)$$

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=B_X(t,t)=g^2(t)$$

例2.6 已知随机相位正弦波$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中$a>0$，$\omega$为常数，$\Theta$为在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量。求随机过程$\{X(t),t\in(0,\infty)\}$的$m_X(t)$和$R_X(s,t)$。

解：由Θ在$(0,2\pi)$上服从均匀分布有：

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi},\theta\in(0,2\pi)\\ 0,\quad \text{其他}\end{cases}$$

则：

$$m_X(t)=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=a\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[a\cos(\omega s+\Theta)\cdot a\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cdot\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s)$$

例2.7 设盒子中有2个红球,3个白球，每次从盒子中取出一球后放回，定义随机过程：

$$X(n)=\begin{cases}2n, & \text{第}n\text{次取出的是红球}\\ n, & \text{第}n\text{次取出的是白球}\end{cases}，\quad n=1,2,\cdots,\text{求：}$$

$(1)\ X(n)$的一维分布函数族$\{F(n,x),n\geq 1\}$；

$(2)\ X(n)$的二维联合分布函数$F(1,2;x_1,x_2)$。

解:$(1)\ F(n,x)=P\{X(n)\leq x\}=\begin{cases}0, & x<n\\ 3/5, & n\leq x<2n\\ 1, & x\geq 2n\end{cases}$

例2.7 设盒子中有2个红球,3个白球，每次从盒子中取出一球后放回，定义随机过程：

$$X(n)=\begin{cases}2n, & \text{第}n\text{此取出的是红球}\\ n, & \text{第}n\text{此取出的是白球}\end{cases},\quad n=1,2,\cdots,\text{求：}$$

(1) $X(n)$的一维分布函数族$\{F(n,x),n\geq 1\}$；

(2) $X(n)$的二维联合分布函数$F(1,2;x_1,x_2)$。

(2) 放回抽球，不同时刻取球的结果彼此相互独立，则：

$$F(1,2;x_1,x_2)=P\{X(1)\leq x_1,X(2)\leq x_2\}$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<1\text{或}x_2<2\\ \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}, & 1\leq x_1<2\text{且}2\leq x_1<4\\ 3/5 & 1\leq x_1<2\text{且}x_2\geq 4\text{或}x_1\geq 2\text{且}2\leq x_1<4\\ 1 & x_1\geq 2\text{且}x_2\geq 4\end{cases}$$

例2.8 设随机过程$X(t)$定义为：若随机点在区间$(0,t]$内出现偶数次，则$X(t)=1$；若出现奇数次，则$X(t)=-1$。又设$(t_0,t_0+t]$内随机点出现k次与t_0无关，且有：

$$p_k(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\quad(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$$

求均值函数和相关函数。

解 $P(X(t)=1)=P($随机点在区间$(0,t]$内出现偶数次$)$

$$=p_0(t)+p_2(t)+p_4(t)+\cdots$$

$$=e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^0}{0!}+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^4}{4!}+\cdots\right]$$

$$=e^{-\lambda t}\frac{e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2}=e^{-\lambda t}ch\left(\lambda t\right)$$

$$P\{X(t)=-1\}=p_1(t)+p_3(t)+p_5(t)+\cdots$$

$$=e^{-\lambda t}\left[\lambda+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\frac{(\lambda t)^5}{5!}+\cdots\right]=e^{-\lambda t}sh(\lambda t)$$

于是：$m_X(t)=E[X(t)]=1\cdot e^{-\lambda t}ch(\lambda t)-1\cdot e^{-\lambda t}sh(\lambda t)$

$=e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}=e^{-2\lambda t}$

下求$X(t)$的自相关函数。

$$P\{X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2\}$$

$$=P\{X(t_1)=x_1\}\cdot P\{X(t_2)=x_2\,|\,X(t_1)=x_1\}$$

其中$x_1=\pm1$，$x_2=\pm1$

令$t_2>t_1$，$\tau=t_2-t_1$

$$P\{X(t_2)=1\,|\,X(t_1)=1\}=P\{X(\tau)=1\,|\,X(0)=1\}=e^{-\lambda\tau}ch(\lambda\tau)$$

$$P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\}=e^{-\lambda t_1}ch(\lambda t_1)e^{-\lambda\tau}ch(\lambda\tau)$$

$$P\{X(t_1)=-1, X(t_2)=-1\}=e^{-\lambda t_1}sh(\lambda t_1)e^{-\lambda\tau}ch(\lambda\tau)$$

$$P\{X(t_1)=1, X(t_2)=-1\}=e^{-\lambda t_1}ch(\lambda t_1)e^{-\lambda\tau}sh(\lambda\tau)$$

$$P\{X(t_1)=-1, X(t_2)=1\}=e^{-\lambda t_1}sh(\lambda t_1)e^{-\lambda\tau}sh(\lambda\tau)$$

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E[X(t_1)X(t_2)]\\&=1\cdot e^{-\lambda t_1}\cdot e^{-\lambda\tau}\cdot ch(\lambda\tau)[ch(\lambda t_1)+sh(\lambda t_1)]\\&\quad+(-1)\cdot e^{-\lambda t_1}\cdot e^{-\lambda\tau}\cdot sh(\lambda\tau)[ch(\lambda t_1)+sh(\lambda t_1)]\\&=e^{-\lambda(t_1+\tau)}\cdot e^{-\lambda(\tau-t_1)}=e^{-2\lambda\tau}\end{aligned}$$

当 $t_2\le t_1$, $R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda(t_1-t_2)}$

于是，对任意t_1，t_2，有 $R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda|\tau|}$

在实际问题中，除考虑一个随机过程在不同时刻的性质外，还须考虑两个不同的随机过程之间的关系。例如，通信系统中信号过程与干扰过程之间的关系，此时，我们必须引入互协方差函数和互相关函数来描述它们之间的关系。

定义2.4 设$\{X(t),t\in T\}$,$\{Y(t),t\in T\}$为两个二阶矩随机过程，则称

$$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]$$

$$B_{XY}(s,t)=E[X(s)-m_X(s)][Y(t)-m_Y(t)]$$

为$\{X(t),t\in T\}$与$\{Y(t),t\in T\}$的互相关函数和互协方差函数。

且$B_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t)$

特别地，若对任意的$s,t\in T$，有：

$$B_{XY}(s,t)=0,\text{则称}\{X(t),t\in T\},\{Y(t),t\in T\}\text{互不相关；}$$

$$R_{XY}(s,t)=0,\text{则称}\{X(t),t\in T\},\{Y(t),t\in T\}\text{正交。}$$

例2.9 设$X(t)$为信号过程，$Y(t)$为噪声过程，令$W(t)=X(t)$ $+Y(t)$. 则$W(t)$的均值函数为

$$m_W(t)=E[X(t)+Y(t)]=m_X(t)+m_Y(t)$$

其相关函数为

$$\begin{aligned}R_W(s,t)&=E[X(s)+Y(s)][X(t)+Y(t)]\\&=R_X(s,t)+R_{XY}(s,t)+R_{YX}(s,t)+R_Y(s,t)\end{aligned}$$

第三节 复随机过程

定义2.3.1 设$\{X(t),t\in T\}$,$\{Y(t),t\in T\}$是两个取实数值的随机过程，若对$\forall t\in T$，有$Z(t)=X(t)+iY(t)$, 其中$i=\sqrt{-1}$，则称$\{Z(t),t\in T\}$是复随机过程。

对上述复随机过程，定义其均值函数、方差函数、相关函数和协方差函数如下：

$$m_Z(t)=E\left[Z(t)\right]=m_X(t)+im_Y(t);$$

$$\sigma_Z^2(t)=D\left[Z(t)\right]=E\left[\left|Z(t)-m_Z(t)\right|^2\right]$$

$$=E\left[\left(Z(t)-m_Z(t)\right)\overline{\left(Z(t)-m_Z(t)\right)}\right]$$

$$R_Z(s,t)=E\left[Z(s)\overline{Z(t)}\right]$$

$$B_Z(s,t)=E\left[\left(Z(s)-m_Z(s)\right)\overline{\left(Z(t)-m_Z(t)\right)}\right]$$

定理2.2 复随机过程$\{Z(t),t\in T\}$的协方差函数具有如下性质：

(1) 对称性：$B_Z(t_1,t_2)=\overline{B_Z(t_2,t_1)}$;

(2) 非负定性：对任意$t_i\in T$及复数$a_i,i=1,2,\cdots n,n\ge 1$，有：

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_Z(t_i,t_j)a_i\overline{a_j}\ge 0$$

证明:(1) $B_Z(s,t)=E\left[\left(Z(s)-m_Z(s)\right)\overline{\left(Z(t)-m_Z(t)\right)}\right]$

$$=\overline{E\left[\left(Z(t)-m_Z(t)\right)\overline{\left(Z(s)-m_Z(s)\right)}\right]}=\overline{B_Z(t,s)}$$

(2) $\sum_{i,j=1}^{n} B_Z(t_i,t_j)a_i\overline{a_j}=\sum_{i,j=1}^{n} E\left[\left(Z(t_i)-m_Z(t_i)\right)\overline{\left(Z(t_j)-m_Z(t_j)\right)}\right]a_i\overline{a_j}$

$$=E\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(Z(t_i)-m_Z(t_i)\right)\overline{\left(Z(t_j)-m_Z(t_j)\right)}\right]a_i\overline{a_j}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Z(t_i)-m_Z(t_i)\right)a_i\right]\overline{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(Z(t_j)-m_Z(t_j)\right)a_j\right]}\right\}$$

$$=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}\left(Z(t_i)-m_Z(t_i)\right)a_i\right|^2\right]\ge 0$$

例2.10 设复随机过程$Z_t=\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t}$，$t\geq 0$，其中$X_1,\cdots,X_n$ 是相互独立的，且服从$N(0,\sigma_k^2)$ 的随机变量，$\omega_1,\cdots,\omega_n$是常数，求Z_t 的均值函数和相关函数。

解： $$m_Z(t)=E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k t}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[E(X_k)e^{i\omega_k t}\right]=0;$$

$$R_Z(s,t)=E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k e^{i\omega_k s}\overline{\sum_{l=1}^{n}X_l e^{i\omega_l t}}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}X_k e^{i\omega_k s}X_l e^{-i\omega_l t}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left[E\left(X_k X_l\right)e^{i\omega_k s}e^{-i\omega_l t}\right]=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 e^{i\omega_k(s-t)}$$

第四节 几种重要的随机过程

随机过程可以根据参数空间、状态空间是否离散进行分类，也可以根据随机过程的概率结构进行分类。

一、正交增量过程

定义2.6 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是零均值的二阶矩过程，若对任意的 $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4 \in T$，有

$$E\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]=0$$

则称$X(t)$为正交增量过程。

对于零均值正交增量过程，假设 $T=[a,b]$，且$X(a)=0$，下面求$X(t)$的协方差函数。

取$t_1=a$，$a<t_2=t_3=s$，$s<t_4=t$

则 $E\{[X(s)-X(a)][\overline{X(t)-X(s)}]\}=E\{X(s)[\overline{X(t)-X(s)}]\}=0$

$$\text{于是}B_X(s,t)=R_X(s,t)=E\left[X(s)\overline{X(t)}\right]$$

$$=E\{X(s)\left[\overline{X(t)-X(s)+X(s)}\right]\}$$

$$=E\left[\left|X(s)\right|^2\right]=\sigma_X^2(s)$$

同理，当$s\geq t$时有：$B_X(s,t)=\sigma_X^2(t)$

从而：$B_X(s,t)=R_X(s,t)=\sigma_X{}^2(min(s,t))$

二、独立增量过程

定义2.7 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$，随机变量$X(t_2)-X(t_1)$，$X(t_3)-X(t_2)$，$\cdots$，$X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的，则称$\{X(t),t\in T\}$是独立增量过程，又称可加过程。

独立增量过程在不相重叠的时间区间上随机过程增量是相互独立的，而正交增量过程在不相重叠的时间区间上的随机过程增量是正交的。正交增量过程不一定是独立增量过程。而独立增量过程为零均值二阶矩过程时却一定是正交增量过程。

三、平稳增量过程

定义2.8 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的$s<t$，随机变量$X(t)-X(s)$的分布仅依赖于$t-s$，则称$\{X(t),t\in T\}$是平稳增量过程。

例2.10 考虑一种设备（比如说电子元件）一直使用到坏为止，然后换上同类型的设备。设$N(t)$表示在时间段$[0,t]$内更换设备的件数，则$\{N(t),t\geq 0\}$是随机过程。对于任意$0\leq t_1<\ldots<t_n$，$N(t_1)$，$N(t_2)-N(t_1)$，…，$N(t_n)-N(t_{n-1})$分别表示在时间段$[0,t_1]$，$(t_1, t_2]$，…，$(t_{n-1}, t_n]$更换设备的件数，可以认为它们是相互独立的随机变量。所以$\{N(t), t\geq 0\}$是独立增量过程。另外，对于任意的$s<t$，$N(t)-N(s)$的分布仅依赖于$t-s$，故$\{N(t), t\geq 0\}$是平稳独立增量过程。

四、马尔可夫过程

定义2.9 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和$t_1<t_2<\cdots<t_n\in T$，$P\left\{X\left(t_1\right)=x_1,\cdots,X\left(t_{n-1}\right)=x_{n-1}\right\}>0$，且其条件分布满足：

$$P\left\{X\left(t_n\right)\le x_n \middle| X\left(t_1\right)=x_1,\cdots,X\left(t_{n-1}\right)=x_{n-1}\right\}$$
$$=P\left\{X\left(t_n\right)\le x_n \middle| X\left(t_{n-1}\right)=x_{n-1}\right\}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$是马尔可夫过程。

五、正态过程和布朗过程

定义2.10 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意的正整数n和t_1，$t_2,\cdots$，$t_n\in T$，$\left(X\left(t_1\right),\cdots,X\left(t_n\right)\right)$是$n$维正态随机变量，则称$\{X(t),t\in T\}$是正态过程或高斯过程。

定义2.11 设$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是随机过程，如果

(1) $W(0)=0$;

(2) 它是独立平稳增量过程;

(3) 对$\forall s,t$，增量$W(t)\text{-}W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|),\sigma>0.$

则称$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是维纳过程,也称布朗运动。

定理2.3 设$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，则

(1）对任意$t\in(-\infty,\infty),W(t)\sim N(0,\sigma^2|t|)$;

(2)对任意$-\infty<a<s,t<\infty$,

$$E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)]=\sigma^2\min(s-a,t-a),$$

特别，$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

定理2.3 设 $\{W(t), -\infty < t < \infty\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，则

（1）对任意 $t \in (-\infty, \infty), W(t) \sim N(0, \sigma^2 |t|)$;

(2)对任意 $-\infty < a < s, t < \infty$,

$$E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)] = \sigma^2 \min(s-a, t-a),$$

特别，$R_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

证明:(1)显然。下证（2），不妨设 $s \le t$.

$$E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)]$$

$$= E[W(s)-W(a)][W(t)-W(s)+W(s)-W(a)]$$

$$= E[W(s)-W(a)][W(t)-W(s)] + E[W(s)-W(a)]^2$$

$$= E[W(s)-W(a)]^2 = \sigma^2 (s-a)$$

同理可证当 $s > t$ 时，$E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)] = \sigma^2 (t-a)$

所以 $E[W(s)-W(a)][W(t)-W(a)] = \sigma^2 \min(s-a, t-a)$

例2.11设正态随机过程$X(t)=Y+Zt$，$t>0$，其中Y，Z是相互独立的$N(0,1)$随机变量，求$\{X(t)，t>0\}$的一、二维概率密度族。

解：因为Y与Z是相互独立的正态随机变量，则其线性组合$X(t)$仍是正态随机变量，要计算其一、二维概率密度，只须计算其数字特征$m_X(t)$，$D_X(t)$和自相关系数$r_X(s,t)$即可。

$$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E[Y+Zt]=E(Y)+tE(Z)=0$$

$$D_X(t)=D\left[X(t)\right]=D[Y+Zt]=D(Y)+t^2D(Z)=1+t^2$$

$$B_X(s,t)=E\left[X(s)X(t)\right]-m_X(s)m_X(t)=E\left[(Y+Zs)(Y+Zt)\right]=1+st$$

$$r_X(s,t)=\frac{B_X(s,t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}}=\frac{1+st}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}}$$

则随机过程$\{X(t)，t>0\}$的一维概率密度为：

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1+t^2\right)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+t^2\right)}\right\}，\quad t>0$$

由上页，有：

$$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E[Y+Zt]=E(Y)+tE(Z)=0$$

$$D_X(t)=D\left[X(t)\right]=D[Y+Zt]=D(Y)+t^2D(Z)=1+t^2$$

$$B_X(s,t)=E\left[X(s)X(t)\right]-m_X(s)m_X(t)=E\left[(Y+Zs)(Y+Zt)\right]=1+st$$

则协方差矩阵$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+s^2 & 1+st \\ 1+st & 1+t^2 \end{pmatrix}, X=(x_1,x_2)$

因此，随机过程$\left\{X(t)，\ t>0\right\}$的二维概率密度为：

$$f(s,t;x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi(\det B)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}XB^{-1}X^T\right\},s,t>0$$

六、平稳过程

定义2.12 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果对任意常数τ，正整数n，$t_i,t_i+\tau\in T$，$i=1,\cdots,n$，它的分布函数满足：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}\left(x_1,\cdots x_n\right)=F_{t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau}\left(x_1,\cdots,x_n\right)$$

则称$\{X(t),t\in T\}$是严平稳过程，也称狭义平稳过程。

定义2.13 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果：

(1)$\{X(t),t\in T\}$是二阶矩过程；

（2）对任意$t\in T$，$m_X\left(t\right)=E\left[X(t)\right]=Const.$

（3）对任意$s,t\in T$，$R_X\left(s,t\right)=E\left[X(s)X(t)\right]=R_X\left(s-t\right)$

则称$\{X(t),t\in T\}$为广义平稳过程，简称平稳过程。

练习1：设随机过程$X(t)=Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)$，$t>0$，其中，$Y$、$Z$是相互独立的随机变量，且$EY=EZ=0$，$DY=DZ=\sigma^2$，$\theta$为常数。求$\{X(t),t>0\}$的均值函数和协方差函数。

解：

$$EX(t)=E[Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$$
$$=\cos(\theta t)EY+\sin(\theta t)EZ=0;$$
$$B_X(s,t)=R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$
$$=E[Y\cos(\theta s)+Z\sin(\theta s)][Y\cos(\theta t)+Z\sin(\theta t)]$$
$$=\cos(\theta s)\cos(\theta t)EY^2+\sin(\theta s)\sin(\theta t)EZ^2$$
$$+\sin(\theta s)\cos(\theta t)EZY+\cos(\theta s)\sin(\theta t)EZY$$
$$=\sigma^2\cos[(t-s)\theta]$$

练习2 设随机过程$X(t)=Vt+b, t\in(0,\infty)$，$b$为常数，$V\sim N(0,1)$，求$X(t)$的一维概率密度、均值和相关函数。

练习3 设随机变量Y具有概率密度$f(y)$，令$X(t)=e^{-Yt}(t>0, Y>0)$，求随机过程$X(t)$的一维概率密度、均值和相关函数。

练习4 若从$t=0$开始每隔0.5秒抛掷一枚硬币作实验，定义随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & t\text{时刻抛得正面},\\ 2t, & t\text{时刻抛得反面},\end{cases}$$

求：(1)$X(t)$的一维分布函数$F(0.5;x)$.

(2)求$X(t)$的均值函数$\mu_X(t)$和方差函数。

练习5: 设随机过程$X(t)$的均值函数和协方差函数分别为$m_X(t)C_X(t_1,t_2)$，ϕ（t）为普通函数，令$Y(t)$ ＝$X(t)+\phi(t)$,求$Y(t)$的均值和协方差函数。