第七章 平稳过程的谱分析

- **教学目的** 理解平稳过程相关函数的谱分解，并掌握相互求解的基本方法。
- **教学重点** 谱分解的基本思路

第一节 平稳过程的谱密度

首先简要回顾普通时间函数的频谱和能谱密度的概念。

设$x(t)$满足$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$,则$x(t)$的$Fourier$变换存在，即$x(t)$具有频谱：

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (7.1)$$

则：

$$\overline{F_x(\omega)}=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{i\omega t}dt=F_x(-\omega)$$

且$F(\omega)$的$Fourier$反变换为：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (7.2)$$

易知成立帕赛伐公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\omega t}dtd\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega)\overline{F_x(\omega)}d\omega$$

则：$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|F_x(\omega)\right|^2 d\omega \qquad (7.3)$$

若将$x(t)$看作加在1欧姆电阻上的电压时，左式就表示消耗在该电阻上的总能量，于是$|F_x(\omega)|^2$为能谱密度。

实际问题中，大多数时间函数的总能量都是无限的，因而不能满足傅立叶变换条件。为此考虑平均功率及功率密度。

作一截尾函数:

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & |t|\le T \\ 0, & \text{其 他} \end{cases}$$

因为$x_T(t)$有限，其傅立叶变换存在，于是有:

$$F_x(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (7.4)$$

$F_x(\omega,T)$的$Fourier$反变换为：

$$x_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_x(\omega,T)e^{i\omega t}d\omega$$

并且有$\int_{-\infty}^{\infty}x_T{}^2(t)dt=\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$。

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\,d\omega$$

左边代表$x(t)$消耗在1欧姆电阻上的平均功率，而右边的被积函数$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2$为功率密度。

对随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$可以作类似的分析。

设$X(t)$是均方连续的随机过程，作截尾随机过程:

$$X_T(t)=\begin{cases}X(t), & |t|\le T\\ 0, & 其他\end{cases}$$

因为$X_T(t)$均方可积，其傅立叶变换存在，于是有:

$$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}X_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt。$$

利用帕赛伐公式及反*Fourier*变换有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(t)|^2\,dt=\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_X(\omega,T)|^2\,d\omega。$$

由于$X(t)$为随机过程，上式积分后是随机变量，因此，需要在概率平均的意义下对时间取平均。于是有

$$\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\,dt\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E\left[\frac{1}{2T}|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]d\omega \qquad (7.5)$$

这就是随机过程$X(t)$的平均功率和功率密度关系的表达式。

定义7.1 设$\{X(t), t \in R\}$为均方连续随机过程，称：

$$\varphi^2 = \lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |X(t)|^2 \, dt\right] \qquad (7.6)$$

为$X(t)$的平均功率。称：

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[|F_X(\omega, T)|^2\right] \qquad (7.7)$$

为$X(t)$的功率谱密度，简称谱密度。

当$X(t)$是均方连续的平稳过程时，因为$E|X(t)|^2=R_X(0)$是与t无关的常数，利用均方积分的性质可将上式简化得：

$$\varphi^2=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\,dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\left[|X(t)|^2\right]dt=E|X(t)|^2=R_X(0) \qquad (7.8)$$

即平稳过程的平均功率等于该过程的均方值，或等于它的谱密度在频域上的积分，即：

$$\varphi^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega \qquad (7.9)$$

$S_X(\omega)$描述了各种频率成分所具有的能量大小。

例7.1 设随机过程$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，$a$、$\omega_0$为常数，在下列情况下求$X(t)$的平均功率

（1）Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，

（2）Θ是在$(0,\frac{\pi}{2})$上服从均匀分布的随机变量。

解：（1） $X(t)$是平稳过程，且相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

故其平均功率为

$$\varphi^2=R_X(0)=\frac{a^2}{2}$$

（2） $$E[X^2(t)] = E[a^2\cos^2(\omega_0 t + \Theta)] = E[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\omega_0 t + 2\Theta)]$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\cdot\frac{2}{\pi}d\theta = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi}\sin(2\omega_0 t)$$

故$X(t)$不是平稳过程，其平均功率为

$$\varphi^2 = \lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\,dt\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi}\sin(2\omega_0 t)]dt = \frac{a^2}{2}$$

对于平稳随机序列的谱分析，我们给出如下结果：

定义7.2 设$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳随机序列，若相关函数满足$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|R_X(n)|<\infty$,则称

$$S_X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_X(n)e^{-in\omega},-\pi\le\omega\le\pi$$

为$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$的谱密度。

此时

$$R_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_X(\omega)e^{in\omega}d\omega, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

第二节 谱密度的性质

对于平稳过程，第六章从时域角度对相关函数$R_X(\tau)$进行了讨论，上一节则从频域角度对谱密度进行了讨论。

相关函数$R_X(\tau)$和功率谱密度$S_X(\omega)$均为平稳过程$X(t)$的特征，它们存在何种关系？

设$\{X(t),t\in R\}$是均方连续平稳过程，$R_X(\tau)$为其相关函数，$S_X(\omega)$为其功率谱密度。

$S_X(\omega)$具有如下性质：

(1) 若$\int_{-\infty}^{\infty}|R_X(\tau)|d\tau<\infty$,则$S_X(\omega)$是$R_X(\tau)$的傅立叶变换，即：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (7.12)$$

证明：由(7.4)式，$F_X(\omega,T)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-T}^{T}x(t)e^{-i\omega t}dt$

和(7.7)式，$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]$

将(7.4)式代入(7.7)式，得：

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[|F_X(\omega,T)|^2\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[\left|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right] \qquad (7.13)$$

而：$\frac{1}{2T}E\left[|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt|^2\right]$

$$=\frac{1}{2T}E\left[\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt\overline{\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt}\right]$$

$$=\frac{1}{2T}E\left[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(s)}e^{-i\omega(t-s)}dtds\right]$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left[X(t)\overline{X(s)}\right]e^{-i\omega(t-s)}dtds$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t-s)e^{-i\omega(t-s)}dtds$$

仿照第六章定理6.10的结论，可得：

$$\frac{1}{2T}E\left[|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt|^2\right]=\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

有：$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

令：$R_X(\tau,T)=\begin{cases}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau) & |\tau|\le 2T\\ 0 & |\tau|>2T\end{cases}$

显然：$\lim\limits_{T\to\infty}R_X(\tau,T)=R_X(\tau)$

则：$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau,T)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}R_X(\tau,T)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

对(7.12)式傅氏反变换，得：

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad (7.14)$$

当$\{X(t),t\in R\}$是实平稳过程时，$R_X(\tau)$为偶函数，则：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\left[\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau\right]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau=2\int_{0}^{\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

同理：$R_X(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\left[\cos\omega\tau+i\sin\omega\tau\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

(2)$S_X(\omega)$是ω的实的、非负偶函数。

证明：由(7.13)式，有：

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[\left|\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right]$$

其中，$\int_{-T}^{T}X(t)e^{-i\omega t}dt$是实的、非负偶函数，取极限后仍然是实的、非负偶函数。

(3) $S_X(\omega)$是ω的有理函数时，其形式必为：

$$S_X(\omega)=\frac{a_{2n}\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_0}$$

其中$a_{2n-i},b_{2m-j}(i=0,2,\cdots,2n,j=2,4,\cdots,2m)$为常数，且$a_{2n}>0$，$m>n$，且分母无实根。

证明：根据(2)及平均功率有限可证明，略。

有理谱密度是常见的一种谱密度。

既然平稳过程的相关函数和功率谱密度互为一对傅氏变换，下面举例说明如何相互求解。

例7.2 已知平稳过程的相关函数为：$R(\tau)=\alpha e^{-\beta|\tau|}$，$\alpha,\beta>0$，求谱密度函数。

解：$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-i\omega\tau}\alpha e^{\beta\tau}d\tau+\int_{0}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}\alpha e^{-\beta\tau}d\tau\right]$$

$$=\alpha\left[\frac{e^{(\beta-i\omega)\tau}}{\beta-i\omega}\bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(\beta+i\omega)\tau}}{-(\beta+i\omega)}\bigg|_{0}^{\infty}\right]$$

$$=\frac{2\alpha\beta}{\left(\beta^2+\omega^2\right)}$$

留数定理

设函数$f\left(z\right)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots z_n$外处处解析，C是D内包围各奇点的一条简单正向闭曲线，则：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

其中，$\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$为$f\left(z\right)$在$z_n$处的留数。

当z_0为一阶极点，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$

当z_0为k阶极点，$\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{k-1}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]}{dz^{k-1}}$

形如$\int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega)e^{ia\omega}d\omega(a>0)$的积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega)e^{ia\omega}d\omega(a>0)=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

例7.3 已知谱密度为$S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$，求平稳过程$X(t)$的相关函数。

解： $R_X(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega\tau}\frac{\omega^2+4}{\left(\omega^2+9\right)\cdot\left(\omega^2+1\right)}d\omega$$

$$=i\left[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{iz|\tau|}\left(z^2+4\right)}{\left(z^2+9\right)\cdot\left(z^2+1\right)}+\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{e^{iz|\tau|}\left(z^2+4\right)}{\left(z^2+9\right)\cdot\left(z^2+1\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{48}(9e^{-|\tau|}+5e^{-3|\tau|})$$

例7.4 设$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是具有零均值的平稳随机序列，且

$$R_X(n)=\begin{cases}\sigma^2, n=0\\ 0, \quad n\neq 0\end{cases}$$

求其功率谱密度。

解：因为$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |R_X(n)| = \sigma^2 < \infty$

则其功率谱密度为：

$$S_X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n)e^{-in\omega}=\sigma^2, -\pi\le\omega\le\pi$$

例7.5 设平稳随机序列的谱密度为：

$$S_X(\omega)=\frac{\sigma^2}{|1-\varphi e^{-i\omega}|^2},|\varphi|<1$$

求$R_X(\tau)$。

解：$$R_X(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_X(\omega)e^{in\omega}d\omega$$

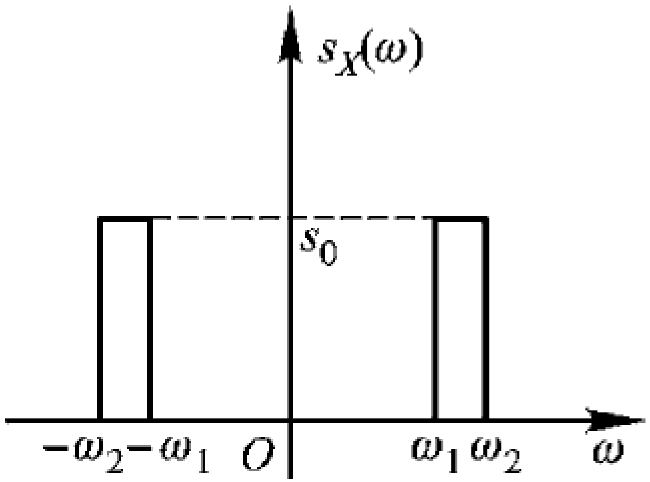
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sigma^2}{|1-\varphi e^{-j\omega}|^2}e^{in\omega}d\omega$$

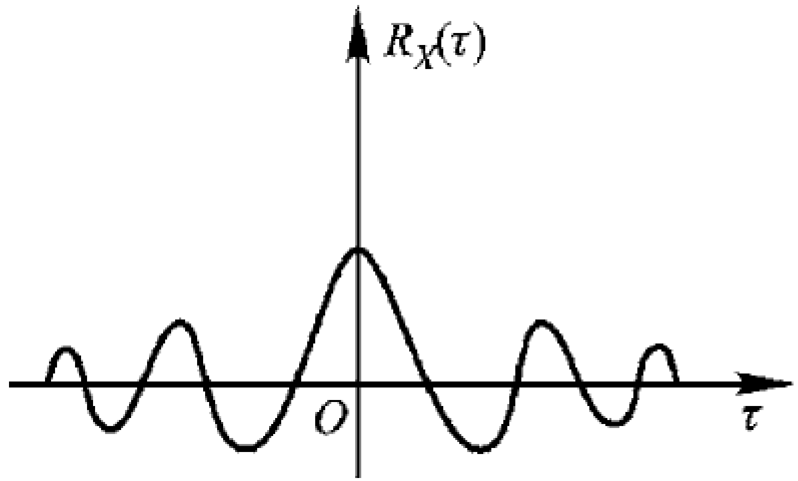
$$=\frac{\sigma^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(n\omega)}{1-2\varphi\cos\omega+\varphi^2}d\omega=\frac{\sigma^2\varphi^n}{1-\varphi^2}$$

其中，$n=0,1,\cdots$

7.3 窄带过程及白噪声过程的功率谱密度

当一个随机过程的谱密度限制在很窄的一段频率范围内，则称该过程为窄带随机过程。即其谱密度限制在$\omega \le |\omega_2 - \omega_1|$，如下图所示。





例7.6 已知上图所示的窄带平稳过程的谱密度$S_X(\omega)$，求该过程的均方值和相关函数。

解：$X(t)$的均方值：$E\left[X^2(t)\right]=R_X(0)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}s_0 d\omega=\frac{1}{\pi}s_0(\omega_2-\omega_1)$$

$X(t)$的相关函数：

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}s_0\cos\omega\tau d\omega$$

$$=\frac{s_0}{\pi\omega}\left[\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau\right]$$

$$=\frac{2s_0}{\pi\omega}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\tau\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right)$$

定义7.3 设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为实值平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在所有频率范围内为非零的常数，即$S_X(\omega)=N_0(-\infty<\omega<+\infty)$，则称$X(t)$为白噪声过程。

白噪声过程的相关函数在通常意义下的傅氏反变换不存在，所以，为了对白噪声过程进行频谱分析，引进 δ 函数。

具有如下性质的函数称为 δ 函数：

$$\text{(1)}\ \delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0,\\ \infty, x=0;\end{cases}\qquad (2)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1.$$

δ函数具有如下的重要性质：

对任何连续函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

或 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-T) f(x) dx = f(T)$$

于是 δ 函数的傅氏变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega\tau} \Big|_{\tau=0} = 1$$

因此： $$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

即：$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau)$，即：$\delta(\tau) \leftrightarrow 1$

同理：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)\cdot e^{i\omega\tau}d\omega=1$$

则 $:\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i\omega\tau}d\omega=2\pi\delta(\omega)$，即 $:1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

例7.7 已知白噪声过程的谱密度为$S_X(\omega)=N_0(-\infty<\omega<+\infty)$，求它的相关函数。

解：由δ函数的性质知

$$R_X(\tau)=N_0\delta(\tau)$$

例7.8 已知相关函数$R_X(\tau)=a\cos(\omega_0\tau)$,其中$a,\omega_0$为常数，求谱密度为$S_X(\omega)$。

解： $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}R(\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\cos(\omega_0\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}]e^{-i\omega\tau}d\tau$

由$\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}d\tau$，即$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}d\tau=2\pi\delta(\omega)$

所以：$s_X(\omega)=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

白噪声过程是一种理想化的数学模型，实际上并不存在。但是，在实际中所遇到的各种随机干扰，只要它的谱密度在比信号频带宽很多的频率范围内存在，且分布近似均匀，通常把这种干扰当做白噪声处理。

以上讨论白噪声功率谱结构时，并未涉及它的概率分布，因此，它可以具有不同的分布，如正态分布，瑞利分布等。

7.4 联合平稳过程的互谱密度

定义7.4 若$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$为平稳过程，且它们是联合平稳的，若它们的互相关函数$R_{XY}(\tau)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R_{XY}(\tau)|d\tau<+\infty$$

则称$R_{XY}(\tau)$的傅氏变换

$$s_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (7.21)$$

是$X(t)$和$Y(t)$的互功率谱密度，简称互谱密度。

于是有 $$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_{XY}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \qquad (7.22)$$

互谱密度一般是复值的，没有谱密度$s_X(\omega)$所具有的实、非负偶函数性质。

7.5 平稳过程通过线性系统的分析

平稳过程的一个重要应用是线性系统对随机输入的响应。

一、线性时不变系统

设系统的输入$x(t)$时，系统的作用为L，其输出为$y(t)$，则它们的关系为$y(t)=L\left[x(t)\right]$　　　　(7.24)

其中L在数学上代表算子，如加法、乘法、微分、积分等。

定义7.5 称满足下列条件的算子为线性算子。若

$$y_1(t)=L[x_1(t)],\ y_2(t)=L[x_2(t)]$$

则对任意常数α，β有

$$L[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha L[x_1(t)]+\beta L[x_2(t)]=y_1(t)+y_2(t)$$

对于一个系统，若算子L是线性的，则该系统为线性系统。

定义7.6 若系统L有$y(t)=L\left[x(t)\right]$, 并对任一时间平移t都有：$y(t+\tau)=L\left[x(t+\tau)\right]$

则称该系统为**时不变系统**。

例7.12 微分算子$L=\dfrac{d}{dt}$是线性时不变的。

解： 设：$y(t)=L\left[x(t)\right]=\dfrac{d}{dt}x(t)$，由导数运算性质知，微分算子满足线性条件，且：

$$L\left[x(t+\tau)\right]=\frac{d}{dt}x(t+\tau)$$

$$=\frac{d}{d(t+\tau)}x(t+\tau)=y(t+\tau)$$

例7.13 积分算子$L=\int_{-\infty}^{t}(\ )du$是线性时不变的。

解： 略，参见$P128$。

由定义知，一个系统的线性性质，表现在该系统满足叠加原理；系统的时不变性质，表现为输出对输入的关系不随时间推移而变化。

二、 频率响应与脉冲响应

定理7.1 设L为线性时不变系统，若输入一谐波信号$x(t)=e^{i\omega t}$，则输出为：

$$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]=H(\omega)e^{i\omega t} \qquad (7.25)$$

其中$H(\omega)=L\left[e^{i\omega t}\right]\Big|_{t=0}$。

证明：令$y(t)=L\left[e^{i\omega t}\right]$，由系统的线性时不变时，

则对固定的τ和任意的t，有：

$$y(t+\tau)=L\left[e^{i\omega(t+\tau)}\right]=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]$$

令$t=0$，得$y(\tau)=e^{i\omega\tau}L\left[e^{i\omega t}\right]\Big|_{t=0}=H(\omega)e^{i\omega\tau}$

该定理表明，对线性时不变系统输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化。$H(\omega)$表示了这个变化，称它为系统的**频率响应函数**。

练习：7.2

补充：已知平稳过程$X(t)$的谱密度为：

$$(1)\quad s(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$$

$$(2)\quad s(\omega)=\begin{cases} a, & |\omega|\le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求其相关函数。

答:$(1)R(\tau)=\dfrac{16e^{-|\tau|}-5e^{-2|\tau|}}{12}$

$(2)\dfrac{a\sin b\tau}{\pi\tau}$