补充第二章作业：

- 2.1-2.7
- 2.12-2.16

第三章 泊松过程

- 掌握泊松过程的基本概念
- 掌握泊松过程的数字特征
- 掌握泊松过程时间间隔和等待时间的分布
- 掌握泊松过程到达时间的条件分布
- 了解非齐次泊松过程和复合泊松过程

第一节 泊松过程的定义

- **例3.1** 电话交换台在时间段[0，t]内接到的呼叫次数是与t有关的随机变量$X(t)$。对于固定的t，$X(t)$是取非负整数的随机变量。

♦ 定义3.1.称随机过程 $\{N(t), t\geq 0\}$为计数过程，若$N(t)$表示到时刻t为止已发生的“事件A”的总数，且$N(t)$满足下列条件：

（1） $N(t)\geq 0$；

（2） $N(t)$取整数值；

（3）若$s<t$，则 $N(s)\leq N(t)$；

（4）当$s<t$时， $N(t) - N(s)$等于区间$(s,t]$中“事件A”发生的次数。

泊松过程是计数过程的最重要类型之一：

定义3.2 称计数过程$\{X(t),\ t\geq 0\}$为具有参数$\lambda(>0)$的泊松过程，若它满足下列条件：

(1) $X(0)=0$;

(2)$X(t)$是独立增量过程；

(3)在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数为λt的泊松分布，即对任意$s, t\geq 0$，有

$$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n=0,1,\cdots$$

从条件(3)知泊松过程是平稳增量过程且$E[X(t)]=\lambda t$。

由于

$$\lambda=\frac{E[X(t)]}{t}$$

表示单位时间内事件A发生的平均次数，故称λ为此过程的速率或强度。

例3.2 设$X(t)$表示$[0,t]$时间段内进入某商场的顾客数

那么$\{X(t), t \geq 0\}$是计数过程。且：

（1）$\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$

$X(t_2) - X(t_1)$：$(t_1, t_2]$内进入该商场的顾客数

$X(t_4) - X(t_3)$：$(t_3, t_4]$内进入该商场的顾客数

$X(t_2) - X(t_1)$，$X(t_4) - X(t_3)$相互独立；

（2）$\forall 0 \leq t_1 < t_2, X(t_2) - X(t_1)$的分布仅由$t_2 - t_1$决定；

因此$\{X(t),\ t \geq 0\}$是独立平稳增量过程。

定义3.3 称计数过程$\{X(t), t\geq 0\}$为具有参数$\lambda>0$的泊松过程，若它满足下列条件：

(1) $X(0)=0$;

(2) $X(t)$是独立、平稳增量过程；

(3) $X(t)$满足下列条件：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+o(h),$$
$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

定义中的条件(3)说明，在充分小的时间间隔内，最多有一个事件发生，而不能有两个或两个以上事件同时发生。

可以证明两个定义是等价的。

定理3.1 定义**3.2**与**3.3**的两种定义是等价的。

证明 首先证明定义**3.2** $\Rightarrow$ 定义**3.3**

由**3.2**，有：$P\{X(t+s)-X(s)=n\}=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,\cdots$

且它是平稳增量过程，有：

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=P\{X(h)-X(0)=1\}$$

$$=e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)}{1!}=\lambda h\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}=\lambda h\left[1-\lambda h+o(h)\right]=\lambda h+o(h)$$

且：$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=P\{X(h)-X(0)\geq 2\}$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(-\lambda h)^n}{n!}=o(h)$$ 所以定义3.2 $\Rightarrow$ 定义3.3

下面证明定义**3.3** $\Rightarrow$ 定义**3.2**

令$P_n(t)=P\{X(t)=n\}=P\{X(t)-X(0)=n\}$

根据定义3.2中的(2)和(3)，有：

$$P_0(t+h)=P\{X(t+h)=0\}=P\{X(t+h)-X(0)=0\}$$

$$=P\{X(t)-X(0)=0,X(t+h)-X(t)=0\}$$

$$=P\{X(t)-X(0)=0\}\cdot P\{X(t+h)-X(t)=0\}$$

$$=P_0(t)\cdot\left[1-\lambda h+o(h)\right]$$

所以，$\dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\dfrac{o(h)}{h}$

令$h\to 0$取极限得：$P_0^{'}(t)=-\lambda P_0(t)$或$\dfrac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)}$=-$\lambda$

则：$lnP_0(t)$=-$\lambda t+C$或$P_0(t)=ke^{-\lambda t}$

由$P_0(0)=P\{X(0)=0\}=1$，代入上式得：$P_0(t)=e^{-\lambda t}$

类似地，对于$n\geq 1$，有：

$$令P_n(t+h)=P\{X(t+h)=n\}=P\{X(t+h)-X(0)=n\}$$

$$\begin{aligned}&=P\{X(t)-X(0)=n\}\cdot P\{X(t+h)-X(t)=0\}+\\&\quad P\{X(t)-X(0)=n-1\}\cdot P\{X(t+h)-X(t)=1\}+\\&\quad \sum_{j=2}^{n}P\{X(t)-X(0)=n-j\}\cdot P\{X(t+h)-X(t)=j\}\end{aligned}$$

根据定义3.3中的(2)和(3)，有：

$$\begin{aligned}P_n(t+h)&=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+o(h)\\&=(1-\lambda h)P_n(t)+\lambda hP_{n-1}(t)+o(h)\end{aligned}$$

所以，$\dfrac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\dfrac{o(h)}{h}$

令$h \to 0$取极限得：$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$

所以：$e^{\lambda t}\left[P_n'(t) + \lambda P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$

则：$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$

当$n=1$时，得$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P_1(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda$

则：$P_1(t) = (\lambda t + c) e^{-\lambda t}$

由于$P_1(0)=0$，代入上式得：$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

以下用数学归纳法证明：$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$，略

由条件(2)的平稳增量性，有：

$$P\{X(t+s) - X(s) = n\} = P\{X(t) - X(0) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

第二节 泊松过程的基本性质

一、数字特征

根据泊松过程的定义，有：

$$E\left[X(t)-X(s)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\left\{X(t)-X(s)=k\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda(t-s)}\frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{k}}{k!}=e^{-\lambda(t-s)}\lambda\left(t-s\right)\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\frac{\left[\lambda\left(t-s\right)\right]^{k-1}}{\left(k-1\right)!}$$

$$=\lambda\left(t-s\right)$$

同理可得：$D\left[X(t)-X(s)\right]=\lambda\left(t-s\right)$

所以:(1) $m_X(t)=E[X(t)]=E[X(t)\text{-}X(0)]=\lambda t$

(2) $\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=D[X(t)\text{-}X(0)]=\lambda t$

$$(3)\quad R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[X(s)[X(t)-X(s)+X(s)]]$$

$$=E[X(s)-X(0)][X(t)-X(s)+X(s)]$$

$$=E[X(s)-X(0)]E[X(t)-X(s)]+E[X(s)]^2$$

$$=\lambda s\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2=\lambda s(\lambda t+1)\qquad (s<t)$$

当$s\geq t$时，$R_X(s,t)=\lambda t(\lambda s+1)$

$$(4)\quad B_X(s,t)=\lambda\min(s,t).$$

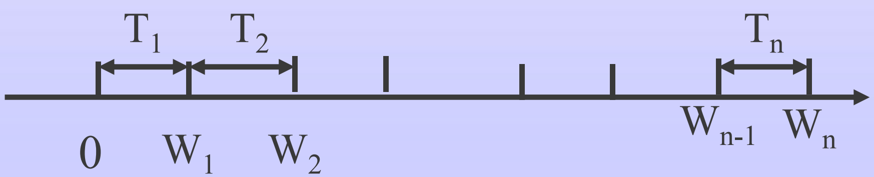
$$(5)\quad g_X(u)=E[e^{iuX(t)}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iku}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda te^{iu}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda te^{iu}}=e^{\lambda t\left(e^{iu}-1\right)}$$

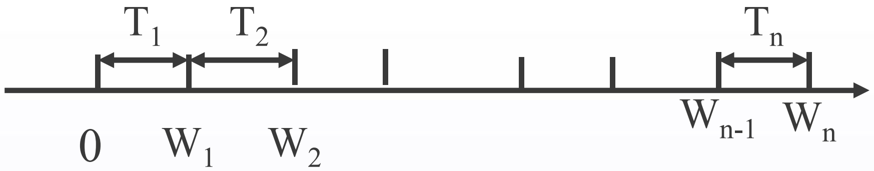
二、时间间隔与等待时间的分布

如果我们用泊松过程来描述系统接受服务的顾客数，则顾客到来接受服务的时间间隔、顾客排队的等待时间等分布问题都需要进行研究。下面我们对泊松过程与时间特征有关的分布进行讨论。

设$\{X(t),t\geq 0\}$是泊松过程，令$X(t)$表示t时刻事件A发生（顾客出现）的次数，$W_1,W_2,\ldots$表示第一次、第二次，…事件A发生的时间，$T_n(n\ \geq 1)$表示从第$(n$-$1)$次事件A发生到第n次发生的时间间隔。通常称W_n为第n次事件A出现的时刻或第n次事件A的等待时间，T_n为第n个时间间隔，均为随机变量。



定理3.2 设$\{X(t), t\geq 0\}$是具有参数λ的泊松分布，$\{T_n, n\geq 1\}$是对应的时间间隔序列，则随机变量$T_n(n\geq 1)$是独立同分布的均值为$1/\lambda$的指数分布。



证明：首先注意到事件$\{T_1>t\}$发生当且仅当泊松过程在区间$[0, t]$内没有事件发生，因而

$$P(T_1>t)=P(X(t)=0)=e^{-\lambda t}$$

即：$F_{T_1}(t)=P(T_1\leq t)=1-P(T_1>t)=1-e^{-\lambda t}$

则其概率密度为：

$$f_{T_1}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

所以T_1服从均值为$1/\lambda$的指数分布。

利用泊松过程的独立、平稳增量性质，有:

$P(T_2>t|T_1=s)=P($在$(s,s+t]$内没有事件发生$|T_1=s)$

$=P($在$(s,s+t]$内没有事件发生$)=P(X(t+s)-X(s)=0)=e^{-\lambda t}$

即：$F_{T_2}(t)=P(T_2\le t)=1-P(T_2>t)=1-e^{-\lambda t}$

所以T_2服从均值为$1/\lambda$的指数分布。

对于任意$n>0$和$t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\ge 0$,有

$$\begin{aligned}
&P(T_n>t\,|\,T_1=s_1,\cdots,T_{n-1}=s_{n-1})\\
&=P(X(t+s_1+\cdots+s_{n-1})-X(s_1+\cdots+s_{n-1})=0)\\
&=P(X(t)-X(0)=0)=e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

即：$F_{T_n}(t)=P(T_n\le t)=1-e^{-\lambda t}$

所以对任一$T_n(n\ge 1)$，其分布是均值为$1/\lambda$的指数分布。

另一个感兴趣的是等待时间W_n的分布，即第n次事件A到达的时间分布，因

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \quad (n \geq 1)$$

由定理3.2知，W_n是n个相互独立的指数分布随机变量的和，故用特征函数方法，可以得到如下结论：

定理3.3 设$\{W_n，n\geq 1\}$是与泊松过程$\{X(t),t\geq 0\}$对应的一个等待时间序列，则W_n服从参数为n与λ的Γ分布，其概率密度为：

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

上式又称**爱尔兰分布**，它是n个相互独立且服从指数分布的随机变量之和的概率密度。

证明：由于第n个事件在时刻t或t之前发生当且仅当时间t已发生的事件数目至少是n，即

$$X(t) \geq n \Leftrightarrow W_n \leq t$$

因此，$P(W_n \leq t) = P(X(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$

对上式求导，得

$$f_{W_n}(t) = -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n-1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

例3.3 已知仪器在[0，t]内发生振动的次数$X(t)$是具有参数λ的泊松过程。若仪器振动$k(k\geq 1)$次就会出现故障，求仪器在t_0正常工作的概率。

解： 依题意知发生故障的时刻T就是发生第k次振动的时刻W_k，由定理3.2知T的概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

故仪器在t_0时刻正常工作的概率为

$$P(T>t_0)=\int_{t_0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}dt=e^{-\lambda t_0}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(\lambda t_0)^n}{n!}$$

三、到达时间的条件分布

假设在[0，t]内事件**A**已经发生一次，我们要确定这一事件到达时间W_1的分布。因为泊松过程有平稳独立增量性，故有理由认为[0，t]内长度相等的区间包含这个事件的概率应该相同。换言之，**这个事件的到达时间应在[0，t]上服从均匀分布**。事实上，对$s<t$有

$$P(W_1 \le s \mid X(t)=1) = \frac{P(W_1 \le s, X(t)=1)}{P(X(t)=1)}$$

$$= \frac{P(X(s)=1, X(t)-X(s)=0)}{P(X(t)=1)}$$

$$= \frac{P(X(s)=1)P(X(t)-X(s)=0)}{P(X(t)=1)}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

即分布函数为

$$F_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}0, & s<0,\\ s/t, & 0\le s<t,\\ 1, & s\ge t.\end{cases}$$

分布密度为

$$f_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}1/t, & 0\le s<t\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以上结论可以推广到更一般的情形：

定理3.4 设$\{X(t),t\ge 0\}$是泊松过程，已知在$[0,t]$内事件**A**发生n次，则这n次到达时间$W_1,W_2,\ldots,W_n$与相应于n个$[0,t]$上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布.

定义：给定(Ω,Σ,P)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其上的随机向量，$\forall\omega\in\Omega$，将试验结果 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 按从小到大顺序重新进行排列，记为 $X_{(1)}(\omega)\le X_{(2)}(\omega)\le\cdots\le X_{(n)}(\omega)$，称$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量。

介绍结论：

n个独立同分布连续型随机变量$X_1,\cdots,X_n$的顺序统计量的概率密度函数$(p.d.f.)$为：

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases} n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i), a<x_1<x_2\cdots<x_n<b \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

其中$f(x_i)$为X_i的概率密度函数。

证 明： 令 $0 \le t_1 < \ldots < t_{n+1} = t$， 且取 h_i 充分小使得 $t_i + h_i < t_{i+1} (i=1,2,\ldots,n)$，则在给定 $X(t)=n$ 的条件下，我们有

$$P(t_1 \le W_1 \le t_1 + h_1, \cdots, t_n \le W_n \le t_n + h_n \mid X(t) = n)$$

$$= \frac{P([t_i, t_i + h_i] \text{中有一事件，} i = 1, \cdots, n, [0, t] \text{的别处无事件})}{P(X(t) = n)}$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t - h_1 - \cdots - h_n)}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n$$

因此，$\dfrac{P(t_i \le W_i \le t_i + h_i, i = 1, \cdots, n \mid X(t) = n)}{h_1 h_2 \cdots h_n} = \dfrac{n!}{t^n}$

令 $h_i \to 0$，有

$$f(t_1, \cdots, t_n \mid X(t) = n) = \begin{cases} n!/t^n, & 0 < t_1 < \cdots < t_n < t \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例3.4 设在[0,t]内事件**A**已经发生n次，且$0<s<t$，对于$0<k<n$，求$P(X(s)=k|X(t)=n)$。

解： 利用条件概率及泊松分布得

$$P(X(s)=k\,|\,X(t)=n)$$

$$=\frac{P(X(s)=k,X(t)=n)}{P(X(t)=n)}=\frac{P(X(s)=k,X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

这是一个参数为n和$\dfrac{s}{t}$的二项分布。

例3.5 设在$[0,t]$内事件A已经发生n次，求第$k\,(k<n)$次事件A发生的时间W_k的条件概率密度函数。

解：当$h(>0)$充分小时且$s<t$,

$$P\{s<W_k\le s+h\mid X(t)=n\}=\frac{P\{s<W_k\le s+h,X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=P\{s<W_k\le s+h,X(t)-X(s+h)=n-k\}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

$$=P\{s<W_k\le s+h\}P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

将上式两边除以h，令$h\to 0$并取极限，有：

$$f_{W_k|X(t)}(s\,|\,n)=\lim_{h\to 0}\frac{P\{s<W_k\le s+h\,|\,X(t)=n\}}{h}$$

$$=f_{W_k}(s)P\{X(t)-X(s)=n-k\}(\lambda t)^{-n}e^{\lambda t}n!$$

$$=\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\left[\lambda(t-s)\right]^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{s^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

其中W_k的概率密度$f_{W_k}(s)$由定理3.3给出。

由上式结果知：条件概率密度$f_{W_k|X(t)}(s\,|\,n)$是一个$Beta$分布。

例3.6 设$\{X_1(t)，t\geq 0\}$和$\{X_2(t)，t\geq 0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和λ_2。记$W_k^{(1)}$为过程$X_1(t)$的第k次事件到达时间，$W_1^{(2)}$为过程$X_2(t)$的第1次事件到达时间，求$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)})$，即第一个泊松过程的第k次事件发生比第二个泊松过程的第一次事件发生早的概率。

解： 设$W_k^{(1)}$的取值为x，$W_1^{(2)}$的取值为y，由(3.7)式得

$$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

则：$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)}) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

其中D为由$y=x$与y轴所围区域(如图3.2)，$f(x,y)$为$W_k^{(1)}$与$W_1^{(2)}$的联合概率密度。

由于$X_1(t)$和$X_2(t)$相互独立，故

$$f(x,y) = f_{W_k^{(1)}}(x)\, f_{W_1^{(2)}}(y)$$

于是

$$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)}) = \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

教材中的例3.7略，请自学

第三节 非齐次泊松过程

定义3.4 称计数过程$\{X(t), t\geq 0\}$为具有跳跃强度函数$\lambda(t)$的非齐次泊松过程，若它满足下列条件：

（1） $X(0)=0$；

（2） $X(t)$是独立增量过程；

（3） $$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda(t)h+o(h),$$
$$P\{X(t+h)-X(t)\geq 2\}=o(h)$$

于是，非齐次泊松过程的均值函数为：

$$m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$$

定理3.5 设$\{X(t), t\geq 0\}$是具有均值函数 $m_X(t)=\int_0^t \lambda(u)du$ 的非齐次泊松过程，则有

$$P(X(t+s)-X(t)=n)=\frac{[m_X(t+s)-m_X(t)]^n}{n!}e^{-[m_X(t+s)-m_X(t)]} \quad (n\geq 0)$$

$$P(X(t)=n)=\frac{[m_X(t)]^n}{n!}e^{-m_X(t)} \quad (n\geq 0)$$

证明，与定理3.1的证明类似。

证明：沿着定理**3.1**的证明路线，稍加修改即可证明：

对固定的t，定义：$P_n(s)=P\{X(t+s)-X(t)=n\}$

根据定义3.4，有：$P_0(s+h)=P\{X(t+s+h)-X(t)=0\}$

$=P\{在(t,t+s]中没事件，且在(t+s,t+s+h]中也没事件\}$

$=P\{在(t,t+s]中没事件\}\cdot P\{在(t+s,t+s+h]中也没事件\}$

$=P_0(s)\cdot\left[1-\lambda(t+s)h+o(h)\right]$

所以，$\dfrac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_0(s)+\dfrac{o(h)}{h}$

令$h\to 0$取极限得：$P_0'(s)=-\lambda(t+s)P_0(s)$或$\dfrac{P_0'(s)}{P_0(s)}=-\lambda(t+s)$

则：$\ln P_0(s)=-\int_0^t \lambda(t+u)du$或$P_0(s)=e^{-\left[m_X(t+s)-m_X(t)\right]}$

类似地，对于$n \geq 1$，有：

$$P_n(s+h)=P\{X(t+s+h)-X(t)=n\}$$

$$=P\{X(t+s)-X(t)=n\}\cdot P\left\{X(t+s+h)-X(t+s)=0\right\}+$$

$$P\{X(t+s)-X(t)=n-1\}\cdot P\{X(t+s+h)-X(t+s)=1\}\cdot+$$

$$\sum_{j=2}^{n} P\{X(t+s)-X(t)=n-j\}\cdot P\{X(t+s+h)-X(t+s)=j\}$$

根据定义3.4中的(2)和(3)，有：

$$P_n(s+h)=P_n(s)\left[1-\lambda(t+s)h+o(h)\right]+$$

$$P_{n-1}(s)\left[\lambda(t+s)h+o(h)\right]+o(h)$$

所以：

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)+\frac{o(h)}{h}$$

令$h \to 0$取极限得：$P_n^{'}(s) = -\lambda(t+s)P_n(s) + \lambda(t+s)P_{n-1}(s)$

所以：$P_1^{'}(s) = -\lambda(t+s)P_1(s) + \lambda(t+s)P_0(s)$

$$= -\lambda(t+s)P_1(s) + \lambda(t+s)e^{-[m_X(t+s)-m_X(t)]}$$

上式是关于$P_1(s)$的一阶线性微分方程，利用初始条件：$P_1(0)=0$，可解得：

$$P_1(s) = [m_X(t+s) - m_X(t)]e^{-[m_X(t+s)-m_X(t)]}$$

再利用数学归纳法证明：

$$P_n(s) = \frac{[m_X(t+s) - m_X(t)]^n}{n!}e^{-[m_X(t+s)-m_X(t)]}$$。

例3.8 设$\{X(t), t\geq 0\}$是具有跳跃强度$\lambda(t)=0.5(1+\cos\omega t)$的非齐次泊松过程($\omega\neq 0$)。求$EX(t)$和$DX(t)$。

解：由定理3.5知

$$m_X(t)=\int_0^t \lambda(s)ds=\int_0^t 0.5(1+\cos\omega s)ds=0.5(t+\sin\omega t/\omega)$$

$$DX(t)=m_X(t)$$

例3.9 设某路公交车从早晨5时到晚上9时有车发出。乘客流量如下：5时按平均乘客为200人/时计算；5时至8时乘客平均到达率按线性增加，8时到达率为1400人/时；8时至18时保持平均到达率不变；18时到21时从到达率1400人/时按线性下降，到21时为200人/时。假定乘客数在不相重叠时间间隔内是相互独立的。求12时至14时有2000人来站乘车的概率，并求出两小时内来站乘车人数的数学期望。

解：按题意得乘客到达率为(将时间平移为0时至16时)：

$$\lambda(t)=\begin{cases}200+400t & 0\le t\le 3,\\ 1400 & 3<t\le 13,\\ 1400-400(t-13) & 13<t\le 16\end{cases}$$

由题意知乘客数X的变化可用非齐次泊松过程描述。

因为：$m_X(9)-m_X(7)=\int_7^9 1400ds=2800$

由定理3.5知在12时至14时间有2000名乘客到达的概率为：

$$P(X(9)-X(7)=2000)=\frac{e^{-2800}2800^{2000}}{2000!}$$

两小时内来站乘车人数的数学期望为：

$$m_X(9)-m_X(7)=\int_7^9 1400ds=2800$$

第四节 复合泊松过程

定义3.5 设$\{N(t),\ t\ge0\}$ 是强度为λ的泊松过程，$\{Y_k,\ k=1,2,\ldots\}$是一列独立同分布随机变量，且与$\{N(t),\ t\ge0\}$独立，令

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k,\ t\ge0$$

则称$\{X(t),\ t\ge0\}$为复合泊松过程。

例3.8 设$N(t)$是在时间段$(0,\ t]$内来到某商店的顾客人数，$\{N(t),\ t\ge0\}$ 是泊松过程。若Y_k是第k个顾客在商店所花的钱数，则$\{Y_k,\ k=1,2,\ldots\}$是一列独立同分布随机变量序列，且与$\{N(t),\ t\ge0\}$ 独立。记$X(t)$为该商店在内的营业额，则$X(t)$是一个复合泊松过程。

定理3.6 设 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t\geq 0$ 是复合泊松过程，则

(1) $\{X(t),\ t\geq 0\}$是独立增量过程；

(2) $X(t)$的特征函数$g_{X(t)}(u)=\exp\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}$ ，其中$g_Y(u)$是随机变量Y_1的特征函数；λ是事件的到达率；

(3) 若$EY_1^2<\infty$ ，则$EX(t)=\lambda tEY_1, DX(t)=\lambda tEY_1^2$。

证明:(1)令$0\leq t_0<t_1<\cdots t_m$，则:

$$X(t_k)-X(t_{k-1})=\sum_{i=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} Y_i,\quad k=1,2,\cdots m$$

由条件，不难验证$X(t)$具有独立增量性。

证明:$(2) \because g_{X(t)}(u) = E\left[e^{iuX(t)}\right]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iuX(t)} \middle| N(t)=n\right] P\{N(t)=n\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k} \middle| N(t)=n\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{iu\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k}\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[g_Y(u)\right]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} e^{\left[\lambda t g_Y(u)\right]} = e^{\{\lambda t[g_Y(u)-1]\}}$$

证明:(3)由条件数学期望的性质，有：

$$E\left[X(t)\right]=E\left\{E\left[X(t)\middle|N(t)\right]\right\}$$

则：$E\left[X(t)\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\middle|N(t)=n\right]$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}Y_k\right]=nE(Y_1)$$

则：$E\left[X(t)\right]=E\left\{E\left[X(t)\middle|N(t)\right]\right\}$

$$=E\left[N(t)E(Y_1)\right]=E\left[N(t)\right]E(Y_1)=\lambda tE(Y_1)$$

类似地，$D\left[X(t)\middle|N(t)\right]=N(t)D(Y_1)$

则：$D\left[X(t)\right]=\lambda tE\left(Y_1^2\right)$

上述结果也可以利用特征函数与矩的关系得到。

第三章作业：

- 3.1-3.3
- 3.5-3.10