第四章 *Markov*链

- 内容

  *Markov*链的概念及转移概率（包括一步和n步转移概率）的概念；n步转移概率与一步转移概率的关系；Markov链的状态分类；状态空间的分解；平稳分布。

- 重点

  *Markov*链的定义、一步转移概率及状态分类

- 难点

  状态分类

前面讨论的随机过程是按照其数字特征来进行分类的，在本章我们将对Markov过程按其状态空间I和参数集T进行分类。

1、I和T均离散，即为本章将要讨论的Markov链；

2、 I离散、但T连续，即为纯不连续的Markov过程（间断型Markov 过程；

3、 I和T均连续，即为连续型Markov过程

不妨假设

$$I=\{x_0,x_1,\cdots\},\text{以后令}I=\{i\},\quad T=\{0,1,2,\cdots\}$$

第一节 Markov链的概念及转移概率

一、 Markov链的定义

定义4.1.1 若随机过程$\{\xi_n, n \in T\}$，对$\forall$正整数$n \in T$和$i_0, i_1, \cdots i_{n+1} \in I$，有：

$$P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\} = P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n\} \quad (4.1.1)$$

则称$\{\xi_n\}$为**Markov链**，上式所表达的性质称为*Markov*性（无后效性）。

解释：若把时刻n看成“现在”，把时刻$0, 1, \cdots n-1$看成“过去”，把时刻$n+1$看成“将来”，那么*Markov*性(无后效性)说：在已知系统“现在”所处状态的情况下，系统将来的状态与“过去”所经历的状态无关。

定理 随机过程$\{\xi_n, n\in T\}$为*Markov*链的充要条件是对任意的正整数m,k及任意的非负整数$n_1<n_2<\cdots<n_r<m$，以及任意的$i_1,i_2,\cdots i_r,i,j\in I$有：

$$P\left\{\xi_{m+k}=j \middle| \xi_{n_1}=i_1,\cdots\xi_{n_r}=i_r,\xi_m=i\right\}=P\left\{\xi_{m+k}=j \middle| \xi_m=i\right\}$$

定义4.1.2 称条件概率$p_{ij}(n)=P\left\{\xi_{n+1}=j \middle| \xi_n=i\right\}$为*Markov*链$\{\xi_n, n\in T\}$的一步转移概率，其中$i,j\in I$。

一般地，$p_{ij}(n)$不仅与i,j有关，而且也与n有关，若$p_{ij}(n)$不依赖于n，则*Markov*链具有平稳的转移概率，即转移概率具有平稳性。

定义4.1.3 若*Markov*链具有平稳的转移概率，即$p_{ij}(n)$与n无关，则称马氏链是齐次的，记$p_{ij}(n)$为p_{ij}.

本章只讨论齐次的*Markov*链。

定义4.1.4 $I=\{1,2,\cdots\}$, 称

$$P=\left(p_{ij}\right)=\begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & \dots & p_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

为系统的一步转移概率矩阵（随机矩阵），它具有如下性质：

(1) $p_{ij}\geq 0\left(i,j\in I\right)$

(2) $\sum_{j\in I} p_{ij}=1\left(i\in I\right)$ (从状态i出发转移到系统各个状态的概率之和为1)

简单证明(2): $\sum_{j\in I} p_{ij}=\sum_{j\in I} P\left\{\xi_{n+1}=j\,\middle|\,\xi_n=i\right\}=P\left\{\Omega\,\middle|\,\xi_n=i\right\}=1$

例4.1.1　质点在1、2、3、4 四个整数点上随机游动，当质点在2、3 时分别以1 / 3的概率向左、向右、或停留在原地；当质点在1时以概率1返回原地；质点在4 时以概率1返回到3，若以X_n表示质点在时刻n所处的位置，求其转移概率矩阵。

解：由题意知，状态空间为$\{1,2,3,4\}$，且：

$$p_{11}=1 \quad p_{12}=p_{13}=p_{14}=0$$

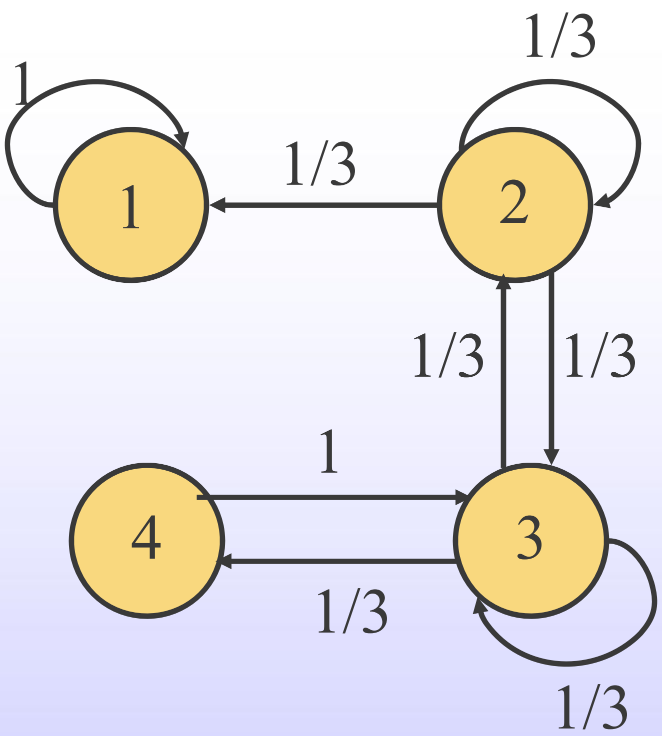
$$p_{21}=p_{22}=p_{23}=1/3 \quad p_{24}=0$$

$$p_{32}=p_{33}=p_{34}=1/3 \quad p_{31}=0$$

$$p_{43}=1 \quad p_{41}=p_{42}=p_{44}=0$$

则：$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

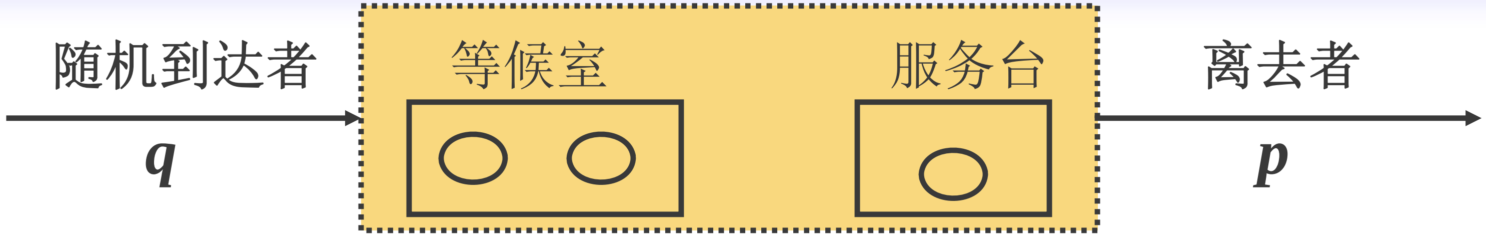
试画出状态转移图如下：



由状态转移图，我们知道：**1、4**是质点游动不可越过的壁，因此**1**为吸收壁，即质点到达该点后就被完全吸住，不再转移；**4**为反射壁，即质点一旦到达该状态，必然被反射回去。

例4.1.2（排队模型）设服务系统由一个服务员和只容纳两个人的等候室组成，服务规则是：先到先服务，后来者需在等候室依次排队，假定一个顾客到达系统时发现系统内已有三个顾客，则该顾客即离去。设时间间隔Δt 内将有一个顾客进入系统的概率为q，原来被服务的顾客离开系统（即服务完毕）的概率为p；又设当Δt充分小时，在Δt 的时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的；再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的。现用马氏链来描述该系统，设$\xi_n = \xi(n\Delta t)$表示时刻$n\Delta t$ 时系统内的顾客数。计算其一步转移概率矩阵。

分析：$I = \{0,1,2,3\}$



解： 根据题意，$p_{00}=P\left\{\xi_{n+1}=0\middle|\xi_n=0\right\}$—系统内原本没有顾客，经过$\Delta t$的时间间隔后仍然没有顾客的概率，即无人进入该系统，因此$p_{00}=1-q$； 同理：$p_{01}=q$

$p_{02}=p_{03}=0$ — Δt的时间间隔内不可能有 多于一个的顾客离开。

$p_{10}=P\left\{\xi_{n+1}=0\middle|\xi_n=1\right\}$: 系统原有一个顾客，经过$\Delta t$的时间间隔后没有顾客的概率，即$\Delta t$的时间间隔内原有顾客因服务完毕而离开，且没有任何人进入该系统，因此$p_{10}=p(1-q)$

$p_{11}=P\left\{\xi_{n+1}=1\middle|\xi_n=1\right\}$— 系统原有一个顾客，经过$\Delta t$的时间间隔后仍为一个顾客的概率，这里有两种情况：或者原有顾客因服务完毕而离开，且有一个新的顾客进入该系统；或者原有顾客没有离开，同时无新的顾客进入系统。所以$p_{11}=pq+(1-p)(1-q)$

$p_{12} = P\{\xi_{n+1} = 2 | \xi_n = 1\}$— 系统原有一个顾客，经过$\Delta t$的时间间隔后系统有两个顾客的概率，即$\Delta t$的时间间隔内原有顾客未服务完毕离开，且有一人进入该系统的概率，显然：$p_{12} = q(1-p)$

$p_{13} = P\{\xi_{n+1} = 3 | \xi_n = 1\}$— —因$\Delta t$的时间间隔内不可能有 多于一个顾客离开，$p_{13} = 0$

类似地有：$p_{20} = 0$— Δt的时间间隔内不可能有多于一个的顾客进入。

而$p_{21} = p_{10} = p(1-q)$，$p_{22} = p_{11} = pq + (1-p)(1-q)$，$p_{23} = p_{12} = p(1-q)$

同理：$p_{30} = p_{31} = 0$，$p_{32} = p_{21} = p(1-q)$，$p_{33} = 1 - p_{32} = pq + (1-p)$

则：

$$P = \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{bmatrix}$$

二、马尔可夫链的n步转移概率

定义4.1.5 称条件概率$p_{ij}^{(n)} = P\left\{\xi_{m+n} = j \middle| \xi_m = i\right\}\left(i, j \in I, n \geq 1\right)$为$Markov$链$\left\{\xi_n, n \in T\right\}$的**n步转移概率**，并称$P^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$为$Markov$链$\left\{\xi_n\right\}$的$n$步转移概率矩阵，其中：

（1）$p_{ij}^{(n)} \geq 0$;（2）$\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$

即$P^{(n)}$为随机矩阵，当$n = 1$，$P^{(1)} = P$，补充定义：$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

定理4.1.1 设$\left\{\xi_n, n \in T\right\}$为$Markov$链，则对$\forall n \geq 0, 1 \leq l < n, i, j \in I$，$p_{ij}^{(n)}$有如下性质：

（1）$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}$（$Chapman-Kolmogorov$方程，简称**$C-K$方程**）

（2）$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1 \in I} \cdots \sum_{k_{n-1} \in I} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j}$　（3）$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)}$　（4）$P^{(n)} = P^n$

证明： （1）利用全概率公式和*Markov*性，有：

$$p_{ij}^{(n)} = P\left\{\xi_{m+n} = j \middle| \xi_m = i\right\} = \frac{P\left\{\xi_m = i, \xi_{m+n} = j\right\}}{P\left\{\xi_m = i\right\}}$$

$$= \frac{P\left\{\xi_m = i, \bigcup_{k \in I} \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\right\}}{P\left\{\xi_m = i\right\}} = \frac{\sum_{k \in I} P\left\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\right\}}{P\left\{\xi_m = i\right\}}$$

$$= \sum_{k \in I} \frac{P\left\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\right\}}{P\left\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k\right\}} \cdot \frac{P\left\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k\right\}}{P\left\{\xi_m = i\right\}}$$

$$= \sum_{k \in I} P\left\{\xi_{m+n} = j \middle| \xi_m = i, \xi_{m+l} = k\right\} \cdot P\left\{\xi_{m+l} = k \middle| \xi_m = i\right\}$$

$$= \sum_{k \in I} P\left\{\xi_{m+n} = j \middle| \xi_{m+l} = k\right\} \cdot P\left\{\xi_{m+l} = k \middle| \xi_m = i\right\} (Markov\text{性})$$

$$= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}$$

（2）利用(1)，令$l=1$，$k=k_1$，得：

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in I}p_{ik_1}^{(1)}p_{k_1j}^{(n-1)}=\sum_{k_1\in I}p_{ik_1}\sum_{k_2\in I}p_{k_1k_2}^{(1)}p_{k_2j}^{(n-2)}$$

$$=\cdots=\sum_{k_1\in I}\cdots\sum_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$$

（3）利用(1)，令$l=1$，得：$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(1)}p_{kj}^{(n-1)}$

上式改写为矩阵的表示形式，有：$P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}$

（4）由(3)可利用归纳法加以证明。

注意：

1. $C-K$方程最重要；
2. n步转移概率完全由一步转移概率确定；
3. 由(4)齐次*Markov*链的n步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的n次幂，可见一步转移概率矩阵尤为重要。

三、Markov链的有限维分布

定义4.1.6　设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，分别称$p_i = P\{\xi_0 = i\}$和$p_j(n) = P\{\xi_n = j\}(i, j\in I)$为Markov链的初始概率和绝对概率。

记：初始概率向量$P^T(0) = (p_1, p_2\cdots)$

n时刻的绝对概率向量$P^T(n) = (p_1(n), p_2(n)\cdots)$，$n>0$

定理4.1.2 设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，则对$\forall n\geq 1, j\in I$，$p_j(n)$有如下性质：

（1）$p_j(n)=\sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)}$　　（2）$p_j(n)=\sum_{i\in I} p_i(n-1)\,p_{ij}$

（3）$P^T(n)=P^T(0)\cdot P^{(n)}$　　（4）$P^T(n)=P^T(n-1)\cdot P$

证明:(3)和(4)分别是(1)和(2)的矩阵形式，因此只须证明(1)和(2)

（1）$$p_j(n)=P\{\xi_n=j\}=P\left\{\bigcup_{i\in I}\xi_0=i,\xi_n=j\right\}=\sum_{i\in I}P\{\xi_0=i,\xi_n=j\}$$

$$=\sum_{i\in I}P\{\xi_0=i\}P\{\xi_n=j|\xi_0=i\}=\sum_{i\in I}p_i p_{ij}^{(n)}$$

（2）$$p_j(n)=P\{\xi_n=j\}=P\left\{\bigcup_{i\in I}\xi_{n-1}=i,\xi_n=j\right\}=\sum_{i\in I}P\{\xi_{n-1}=i,\xi_n=j\}$$

$$=\sum_{i\in I}P\{\xi_{n-1}=i\}P\{\xi_n=j|\xi_{n-1}=i\}=\sum_{i\in I}p_i(n-1)\,p_{ij}$$

定理4.1.3 设$\{\xi_n, n\in T\}$为***Markov***链，则对$\forall i_1,\cdots i_n\in I$和$n\ge 1$，有：

$$P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=\sum_{i\in I} p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$$

证明：

$$P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=P\left\{\bigcup_{i\in I}\xi_0=i,\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\right\}$$

$$=\sum_{i\in I}P\{\xi_0=i,\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}\text{（概率的可加性）}$$

$$=\sum_{i\in I}P\{\xi_0=i\}P\{\xi_1=i_1|\xi_0=i\}\cdots P\{\xi_n=i_n|\xi_0=i\cdots\xi_{n-1}=i_{n-1}\}\text{（乘法公式）}$$

$$=\sum_{i\in I}P\{\xi_0=i\}P\{\xi_1=i_1|\xi_0=i\}\cdots P\{\xi_n=i_n|\xi_{n-1}=i_{n-1}\}\text{（}\textbf{\textit{Markov}}\text{性）}$$

$$=\sum_{i\in I}p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$$

结论：***Markov***链的有限维分布完全由其初始分布和转移概率确定，即***Markov***链的统计特性完全由其初始分布和转移概率确定。

推论 在定理4.1.3的条件下，有：

(1) $P\{\xi_0=i,\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=p_i p_{ii_1} p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

(2) $P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n|\xi_0=i\}=p_{ii_1} p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

证明： $P\{\xi_0=i,\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}$

$=P\{\xi_0=i\}\bullet P\{\xi_1=i_1|\xi_0=i\}\cdots P\{\xi_n=i_n|\xi_0=i\cdots\xi_{n-1}=i_{n-1}\}$

$=p_i p_{ii_1} p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

例4.1.4（天气预报问题）设昨日、今日都下雨，明日有雨的概率为0.7；昨日无雨，今日有雨，明日有雨的概率为0.5；昨日有雨，今日无雨，明日有雨的概率为0.4；昨日、今日均无雨，明日有雨的概率为0.2。若星期一、星期二均下雨，求星期四下雨的概率。

解： 设昨日有雨、今日有雨为状态0(RR)，

昨日无雨、今日有雨为状态1(NR)，

昨日有雨、今日无雨为状态2(RN)，

昨日无雨、今日无雨为状态3(NN)，

于是天气预报模型可看做一个四状态的*Markov*链。

根据已知条件其转移概率为：

$$p_{00} = P\left\{R_{今}R_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = P\{连续三天有雨\}$$

$$= P\left\{R_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = 0.7$$

$$p_{01} = P\left\{N_{今}R_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = 0（不可能事件）$$

$$p_{02} = P\left\{R_{今}N_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = P\left\{N_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$p_{03} = P\left\{N_{今}N_{明}\middle|R_{昨}R_{今}\right\} = 0（不可能事件）$$

其中R代表有雨，N代表无雨。

类似地得到所有状态的一步转移概率矩阵，即：

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = PP = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(2)} & p_{01}^{(2)} & p_{02}^{(2)} & p_{03}^{(2)} \\ p_{10}^{(2)} & p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & p_{13}^{(2)} \\ p_{20}^{(2)} & p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & p_{23}^{(2)} \\ p_{30}^{(2)} & p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} & p_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

由于星期四下雨，星期三可能下雨也可能不下雨，即过程所处状态为0或1，而星期一、星期二连续下雨，初始状态为0，则星期四下雨的概率为：$p = p_{00}^{(2)} + p_{01}^{(2)} = 0.49 + 0.12 = 0.61$

第二节　*Markov*链的状态分类

一、状态的互通

设*Markov*链$\{\xi_n, n \geq 0\}$具有可数的状态空间$I = \{0,1,2,\cdots\}$，转移概率矩阵为$P = (p_{ij})$，初始分布为$\{p_i, i \in I\}$。

定义4.2.1　若$\exists n \geq 1$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，则称状态i可达j，记为$i \to j$；

反之，$\forall n$，均有：$p_{ij}^{(n)} = 0$，则称状态i不可达j，记为$i \mapsto j$；

若$i \to j$且$j \to i$，则称状态i, j互通，记为$i \leftrightarrow j$。

通常将状态空间中互通的状态构成的集合称为类，互通的状态为同类。

例4.2.1 设*Markov*链具有转移概率矩阵 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则：

$$P^{(n)}=P^{n}=\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则$p_{12}^{(n)}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}>0$，则$1\to 2$；但$p_{21}^{(n)}=0$，则$2\mapsto 1$

由此例我们知道：尽管$i\to j$，但确实有$j\mapsto i$.

例4.2.2（无限制随机游动）$I=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$p_{ij}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \end{cases}$

$$\left(p+q=1, i, j\in I\right)$$

解：由于 $\begin{matrix} p_{ii+1}=p\neq 0 & i\to i+1 \\ p_{i+1i}=q\neq 0 & i+1\to i \end{matrix}\left(i=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$

则无限制随机游动的任意两个状态互通。

定理4.2.1（传递性）若$i \to k$且$k \to j$，则$i \to j$。

证明：由$i \to k$，则$\exists l \ge 1$，使得$p_{ik}^{(l)} > 0$

由$k \to j$，则$\exists n \ge 1$，使得$p_{kj}^{(n)} > 0$

由$C-K$方程，$p_{ij}^{(n+l)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(l)} p_{rj}^{(n)} \ge p_{ik}^{(l)} p_{rj}^{(n)} > 0$

则：$i \to j$。

推论：若$i \to k_1, k_1 \to k_2, \cdots, k_n \to j$，则$i \to j$

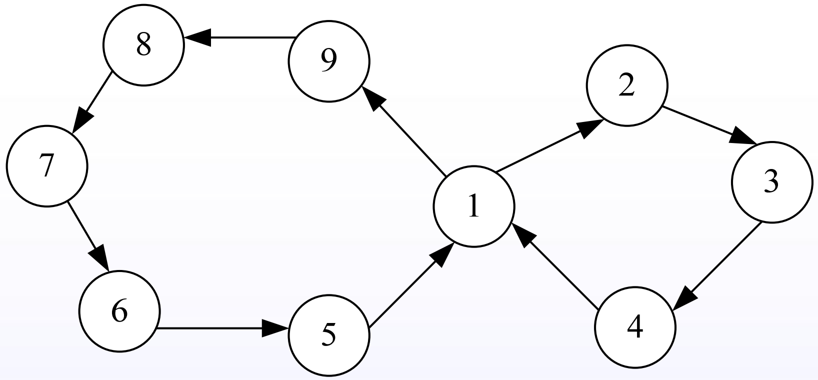
定理4.2.2 （1）对称性：若$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$

（2）传递性：若$i \leftrightarrow k$且$k \leftrightarrow j$，则$i \leftrightarrow j$

注：显然，对有限制随机游动，若带有吸收壁，则吸收壁与其它状态都不互通，即除吸收壁外，其它状态互通；对无限制随机游动，则任何状态都互通。

二、状态的分类

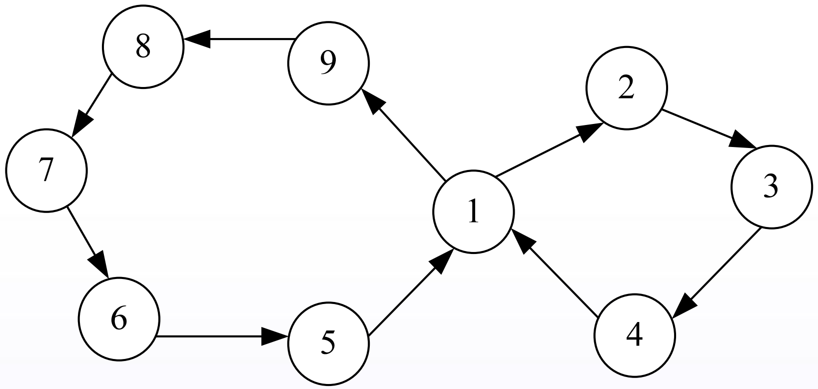
例4.2.3 设*Markov*链的状态空间为$I=\{1,\cdots,9\}$,状态转移图如右图所示，求1状态的周期。



$$d(1)=G.C.D\{n:p_{11}^{(n)}>0\}=G.C.D\{4,6,8,10,12,14,16,\cdots\}=2$$

定义4.2.2 若$p_{ii}^{(n)}>0$ 的所有正整数$n\geq 1$ 存在最大公约数d ，则称状态i是周期为d 的,记为$d(i)=d$ ；若$d(i)=1$ ，则称状态i 是非周期的。

记：$d(i)=G.C.D\{n:p_{ii}^{(n)}>0\}$



注:

(1)如果$d(i)=d$，则当$n \neq 0 \bmod (d)$时，$p_{ii}^{(n)}=0$，但不一定对所有的n，有$p_{ii}^{(nd)}>0$，如上例，$d=2$，但$p_{11}^{(2)}=0$。

(2)如果$\left\{n: p_{ii}^{(n)}>0\right\}$不空，就一定包含无穷多个$n$，属于这个集合。

引理4.2.1　如果$d(i)=d$,则存在正整数M，使对一切$n\ge M$，有 $p_{ii}^{(nd)}>0$。

证明：设$\left\{n:\ n\ge 1,p_{ii}^{(n)}>0\right\}=\{n_1,n_2,\cdots\}$，令：

$$t_k=G.C.D\{n_1,n_2,\cdots n_k\}，则：t_1\ge t_2\ge\cdots\ge d\ge 1,$$

则必有正整数N，使得：$t_N=t_{N+1}=\cdots=d$，因此，

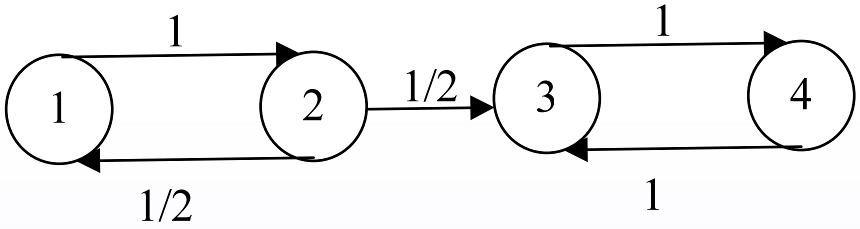
$d=G.C.D\{n_1,n_2,\cdots n_N\}$，则存在正整数$M$，对一切$n\ge M$，

有：$nd=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k n_k$，其中$\alpha_k$为正整数，因此：

当$n\ge M$时，$p_{ii}^{(nd)}=p_{ii}^{(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k n_k)}\ge p_{ii}^{(\alpha_1 n_1)}p_{ii}^{(\alpha_2 n_2)}\cdots p_{ii}^{(\alpha_N n_N)}$

$$\ge\prod_{k=1}^{N}\left[p_{ii}^{(n_k)}\right]^{\alpha_k}>0$$

其中，$p_{ii}^{(\alpha_1 n_1)}\ge p_{ii}^{(n_1)}p_{ii}^{(n_1)}\cdots p_{ii}^{(n_1)}\left(\alpha_1项联乘\right)$



例4.2.4 设$I=\{1,2,3,4\}$，转移概率如图，显然状态2和状态3有相同的周期$d=2$，但是从状态3出发经过两步必然返回到3，而状态2则不然。

为区别这两种状态，下面讨论常返性概念。

定义4.2.3　对*Markov*链任意两个状态$i, j \in I$，定义：

（1）称T_{ij}是系统从状态i 出发，首次到达状态j 的时间：

$$T_{ij} = n \Leftrightarrow \{\xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \cdots, \xi_{n-1} \neq j, \xi_n = j\}$$

（2）称$f_{ij}^{(n)} = P\left\{T_{ij} = n \middle| \xi_0 = i\right\} \geq 0$是系统从状态$i$ 出发，经n步首次到达状态j 的（条件）概率，即：

$$f_{ij}^{(n)} = P\left\{\xi_n = j, \xi_s \neq j, s = 1, \cdots n-1 \middle| \xi_0 = i\right\}$$

（3）称$f_{ij} = P\left\{T_{ij} < \infty \middle| \xi_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{T_{ij} = n \middle| \xi_0 = i\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$是系统从状态$i$出发，经有限步终于到达状态$j$的概率。

显然:$0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$，$\forall n \geq 1$，且补充：$f_{ij}^{(0)} = 0, \forall i, j$

特别地，当$i = j$，T_{ii}是指从状态i 出发，首次返回状态i 的时间；f_{ii}是指系统从状态i 出发，经有限步终于返 回状态i 的概率。

定理4.2.3 $\forall i, j \in I$ 及 $n \geq 1$，有

$$p_{ij}^{(n)} = P\left\{\xi_n = j \middle| \xi_0 = i\right\} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \qquad (4.16)$$

证明：$p_{ij}^{(n)} = P\left\{\xi_n = j \middle| \xi_0 = i\right\}\left(T_{ij} \leq n\right) = P\left\{\bigcup_{l \leq n} T_{ij} = l, \xi_n = j \middle| \xi_0 = i\right\}$

$$= \sum_{l \leq n} P\left\{T_{ij} = l, \xi_n = j \middle| \xi_0 = i\right\} = \sum_{l \leq n} P\left\{T_{ij} = l \middle| \xi_0 = i\right\} \cdot P\left\{\xi_n = j \middle| \xi_0 = i, T_{ij} = l\right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} P\left\{T_{ij} = l \middle| \xi_0 = i\right\} \cdot P\left\{\xi_n = j \middle| \xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \cdots \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j\right\}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

上式体现的是$p_{ij}^{(n)}$与$f_{ij}^{(n)}$的关系如下：

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}，\text{所以：} f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

例4.2.5设*Markov*链$I=\{1,2,3\}$，$P=\begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$，求$f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

解法1：利用递推公式：$f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$

$\therefore\ f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}$

$\therefore\ f_{11}^{(1)} = p_{11} = 0 \quad f_{12}^{(1)} = p_{12} = p_1 \quad f_{13}^{(1)} = p_{13} = q_1$

$$P^{(2)} = P^2 = P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 q_2 + p_3 q_1 & q_1 q_3 & p_1 p_2 \\ p_2 p_3 & p_1 q_2 + p_2 q_3 & q_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 p_3 & p_3 q_1 + p_2 q_3 \end{bmatrix}$$

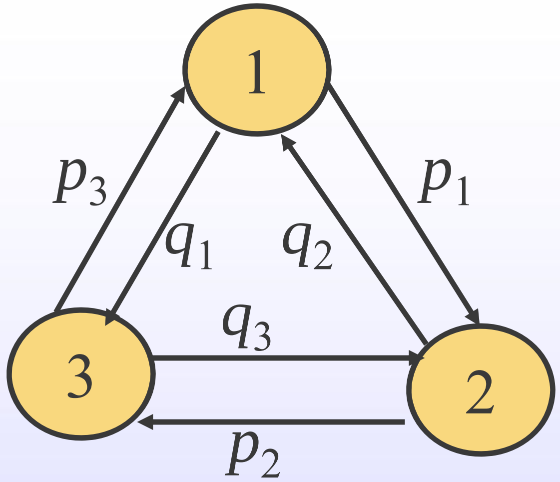
而: $f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)}$ $\quad \therefore f_{11}^{(2)} = p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(1)} = p_1 q_2 + p_3 q_1$

$f_{12}^{(2)} = p_{12}^{(2)} - f_{12}^{(1)} p_{22}^{(1)} = q_1 q_3$ $\quad f_{13}^{(2)} = p_{13}^{(2)} - f_{13}^{(1)} p_{33}^{(1)} = p_1 p_2$

同理可求: 当$n \geq 3$, $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

例4.2.5设Markov链$I=\{1,2,3\}$，$P=\begin{bmatrix}0 & p_1 & q_1\\ q_2 & 0 & p_2\\ p_3 & q_3 & 0\end{bmatrix}$，求$f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

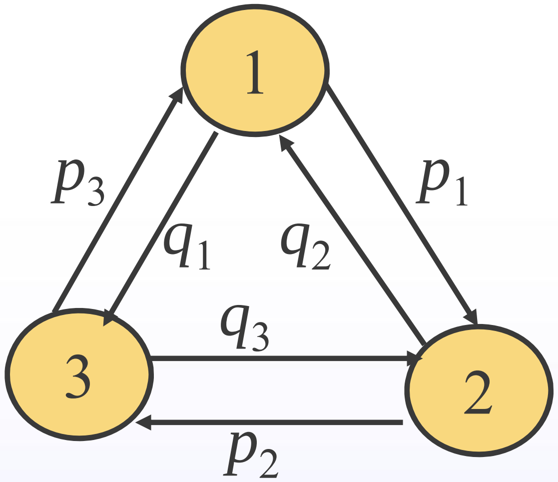
解法2：根据题意，画出状态转移图如下：



由状态转移图，有：

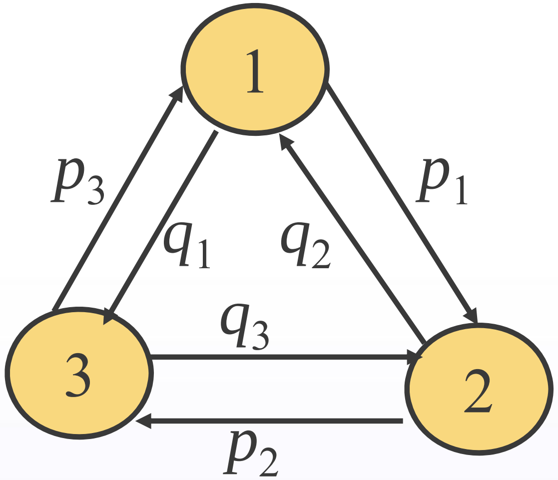
若n为偶数，则：$1\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}2$，即：

$$f_{12}^{(n)}=\begin{cases}(q_1p_3)^{m-1}q_1q_3\left(1\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}2\right) & n=2m, m\ge 1\\ (q_1p_3)^{m}p_1 \quad \left(1\xrightarrow{m}3\xrightarrow{m}1\xrightarrow{1}2\right) & n=2m+1, m\ge 0\end{cases}$$



同理，有：

$$f_{13}^{(n)}=\begin{cases}(p_1q_2)^{m-1}\,p_1p_2\left(1\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{1}3\right) & n=2m,m\geq 1\\ (p_1q_2)^{m}\,q_1\left(1\xrightarrow{m}2\xrightarrow{m}1\xrightarrow{1}3\right) & n=2m+1,m\geq 0\end{cases}$$



$$f_{11}^{(n)}=\begin{cases} p_1\left(p_2q_3\right)^{m-1}q_2+q_1\left(p_2q_3\right)^{m-1}p_3\begin{pmatrix} 1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{1}1\text{或} \\ 1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{1}1,n=2m,m\geq 1 \end{pmatrix} \\ p_1\left(p_2q_3\right)^{m-1}p_2p_3+q_1\left(p_1q_3\right)^{m-1}q_3q_2 \\ \begin{pmatrix} 1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}1\text{或} \\ 1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{1}2\xrightarrow{1}1,n=2m+1,m\geq 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

利用定理4.2.3，有如下结论：

定理4.2.4 $f_{ij}>0 \Leftrightarrow i \to j$。

证明："$\Leftarrow$"因$i \to j$,则$\exists n \geq 1$，使得$p_{ij}^{(n)}>0$。

由$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$得：$\exists k$，$f_{ij}^{(k)}>0$，于是$f_{ij}>0$。

"$\Rightarrow$"因$f_{ij}>0$，则$\exists k \geq 1$，使得$f_{ij}^{(k)}>0$

由$p_{ij}^{(k)}=\sum_{l=1}^{k} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(k-l)} \geq f_{ij}^{(k)}>0$，于是$i \to j$。

推论：$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij}>0$且$f_{ji}>0$。

引理4.2.2 $G.C.D\{n:n\geq 1, \ p_{ii}^{(n)}>0\}=G.C.D\{n:n\geq 1, \ f_{ii}^{(n)}>0\}$。

证明 令：$d=G.C.D\{n:n\geq 1, \ p_{ii}^{(n)}>0\}$，$t=G.C.D\{n:n\geq 1, \ f_{ii}^{(n)}>0\}$

由(4.16)式：$p_{ii}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}$，有：$p_{ii}^{(n)}\geq f_{ii}^{(n)}$，则:$1\leq d\leq t$。

若$t=1$，则必有：d=1=t。

若$t>1$，以下证：$d\geq t$，只需证t 也是$\{n:n\geq 1, \ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 的公约数即可。

即：若$\{n:n\geq 1, \ p_{ii}^{(n)}>0\}\Rightarrow t|n$。等价于：若$t$ 不能整除$n\Rightarrow p_{ii}^{(n)}=0$。

(1)当$n<t$，对$k\leq n<t$，必有：$f_{ii}^{(k)}$=0，则$p_{ii}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}=0$

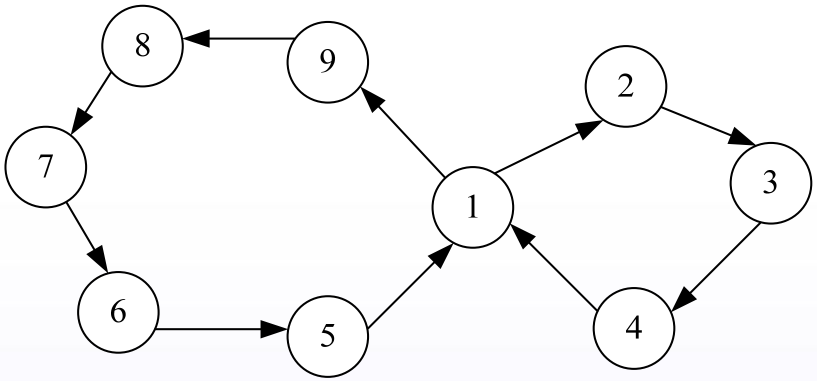
(2)当$n=mt+r\,(r\neq 0)$，不妨令当$m=0,1,2,\cdots N-1$ 时，有：$p_{ii}^{(n)}=0$ ，

则：当$n=Nt+r$，$f_{ii}^{(n)}=0$，且：

$$p_{ii}^{(Nt+r)}=\sum_{k=1}^{Nt+r} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(Nt+r-k)} = f_{ii}^{(t)} p_{ii}^{((N-1)t+r)} + f_{ii}^{(2t)} p_{ii}^{((N-2)t+r)} + \cdots f_{ii}^{(Nt)} p_{ii}^{(r)} = 0$$

由数学归纳法得证：若$\{n:n\geq 1, \ p_{ii}^{(n)}>0\}\Rightarrow t|n$，即：$d\geq t$。

综上所述，有：$d=t$。



$$d(1) = G.C.D\{n : p_{11}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{4,6,8,10,12,14,16,\cdots\} = 2$$

$$= G.C.D\{n : f_{11}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{4,6\} = 2$$

利用引理4.2.4，大大地简化了计算！

当f_{ij}=1时，$\{f_{ij}^{(n)}, n=1,2,\ldots\}$ 构成一个概率分布。而$T_{ij}=n$ 为随机变量，其概率为$f_{ij}^{(n)}$，于是我们考虑从状态i 出发最后到达状态j的平均时间：

$$\mu_{ij}=E\left(T_{ij}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$$

当$i=j$，称$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$为状态$i$的平均返回时间。

定义4.2.4　若$f_{ii}=1$，则称状态i常返（迟早必然会返回状态i）

若$f_{ii}<1$，则称状态i非常返

定义4.2.5　对常返状态i，若$\mu_i<\infty$，则为正常返；

若$\mu_i=\infty$，则为零常返。

定义4.2.6　非周期的正常返态，称为遍历态。