

SIRIUS

Ön Tasarım Raporu Ek'i

Burak TAŞ

Uçak Mühendisliği

Danışman: Araş. Gör. Esra DEMİR

TEKNOFEST DİKEY İNİŞLİ ROKET YARIŞMASI

2024

ÖZET

Roketin iniş esnasında kinematik ve dinamik hareketlerini 6 dereceli uçuş benzetimi ile uygun eksene aktarımı, model roketin kütle bütçesini incelenmesi ve genel kontrol amacıyla bu bölümde dikey inişli roket projesinin ön tasarım rapor ek kısmı incelendi. Amaç doğrultusunda içerik kısmında ilgili birimler incelenmiş ayrıca ön tasarım genel raporuna zamana göre hız, ivme ve irtifa grafikleri eklenmiştir.

Rapora güdüm sistemi akış diyagramını açıklayarak başlandı. Roketin güdüm ve kontrol sistemiyle dinamik sistemlerini içeren ve birbiriyle ilişkisini gösteren temel bir akış diyagramı verildi. Sonrasında 6 dereceli uçuş benzetimi kısmına geçilerek literatür araştırması sonucu tanım ve varsayımlar yapıldı. Euler ve Kuvaterniyon dönüşümleri karşılaştırılarak uygun olanı seçildi. İleriki adımda yapılacak dönüşümler için koordinat takımları belirlendi. Seçilen dönüşümden kinematik ve dinamik denklem setleri oluşturuldu. Bu kısımda öteleme ve dönme hareket sistemleriyle beraber kuvvet ve momentler incelendi. Bunları aerodinamik, yerçekimi ve eyleyici etkisi kaynaklı kuvvet ve momentler olarak 3 başlıkta ele alındı. Rapor başında yapılan varsayımlarla denklem setleri basite indirildi. Son kısımda ise atmosfer modeli, roket modeli, aerodinamik modeller ve eyleyici modelleri ile bunlar arasındaki etkileşimler belirlendi. Matlab/Simulink ortamında seçili denklem setleri bloklarla modellendi.

Son kısımda ise rapor içeriğinde destek sağlamak amaçlı kullanılan kaynakları göstermek üzere referanslar verilmiştir.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER.....	4
ŞEKİL LİSTESİ.....	5
1.1. 6 Serbestlik Dereceli Uçuş Benzetimi Raporu.....	6
1.1.1. Altı Serbestlik Dereceli Denklemleri.....	7
1.1.1.1. Tanımlar, Gerçekler ve Varsayımlar.....	7
1.1.1.2. Koordinat Takımlarının Belirlenmesi.....	7
1.1.1.3. Sensör Eksen Takımı Dönüşümlerinin Belirlenmesi.....	8
1.1.1.3.1. Euler ve Kuaterniyon Dönüşümlerinin Karşılaştırılarak Seçilmesi.....	8
1.1.2. Seçilen Dönüşümden Kinematik ve Dinamik Denklem Setlerinin Çıkartılması.....	11
1.1.2.1. Dönme Hareket Denklemlerinin Çıkartılması.....	11
1.1.2.2. Öteleme Hareket Denklemlerinin Çıkartılması.....	12
1.1.2. Kuvvetler ve momentler.....	13
1.1.2.3.1. Aerodinamik Etkilerden Kaynaklı Kuvvet ve Momentler.....	13
1.1.2.3.2. Yerçekimi Etkisi Kaynaklı Kuvvet ve Momentler.....	15
1.1.2.3.3. Eyleyici Etkisi Kaynaklı Kuvvet ve Momentler.....	15
1.1.2.3.3.1. Ana İtici Sistemi.....	16
1.1.2.3.3.2. Kontrol Tahrik Sistemi.....	16
1.1.3. Atmosfer Modeli, Roket Modeli, Aerodinamik Modeller ve Eyleyici Modelleri ile Bunlar Arasındaki Etkileşimler.....	17
2. Kaynakça.....	20
A. Ekler.....	21

SEMBOLLER

q_1, q_2, q_3, q_4	: Kuvaterniyon parametreleri
ϕ, θ, ψ	: Euler açıları (yalpalama, yunuslama ve sapma açıları)
P, Q, R	: Roketin açısal hız komponentleri
ω	: Roket açısal hızı
V	: Çizgisel hız
$ V $: Hızın normu (büyüklüğü)
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: Birim vektör bileşenleri
M_T	: Rokete etkiyen moment
\vec{H}	: Açısal momentum
I	: Eylemsizlik momentumu
τ	: Tork
\vec{T}	: Rokete etki eden toplam tork vektörü
L, M, N	: Açısal Moment Bileşenleri
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	: Atalet Moment bileşenleri
(X_e, Y_e, Z_e)	: Düz dünya koordinat takım eksenleri
$(X, Y, X)_b$: Gövdeye sabitlenmiş cisim koordinat takım eksenleri
$(u, v, w)_b$: Gövde koordinat eksene göre hız bileşenleri
F_L	: Taşıma Kuvveti
F_D	: Sürüklenme Kuvveti
F_Y	: Yanal Kuvvet
c_L, c_D, c_Y	: Aerodinamik Kuvvet Katsayıları
$(M, L, N)_{aero}$: Aerodinamik Momentler (Yunuslama, Yuvarlama, Sapma)
c_m, c_l, c_n	: Aerodinamik Moment Katsayıları
c^*	: Karakteristik hız
C_f	: İtme katsayısı
p_1	: Lüleye giriş basıncı
A_t	: Lülenin boğazdaki kesit alanı [m ²]
T	: Sıcaklık
p	: Basınç
ρ	: Yoğunluk
R	: Gaz sabiti
S	: Referans Alan
l	: Karakteristik Uzunluk
μ	: Viskozite



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. : Akış Diyagramı.....	7
Şekil 1.1.1.1. : <i>Düz dünya koordinat takımı</i>	10
Şekil 1.1.1.2. : <i>Cisim koordinat takımı</i>	10
Şekil 1.1.1.3. : <i>Roket referans sistemi</i>	11
Şekil 1.1.2.1. : <i>Roketin serbestlik dereceleri</i>	15
Şekil 1.1.2.2. : <i>Aerodinamik kuvvetlerin ve momentlerin gösterimi</i>	16
Şekil 1.1.2.3. : <i>Aerodinamik katsayılar ve referans eksenler</i>	16
Şekil 1.1.2.4. : <i>Yerçekimi etkisi kaynaklı kuvvetin gösterimi</i>	17
Şekil 1.1.2.5. : <i>Ana eyleyici kaynaklı kuvvetlerin gösterilmesi</i>	18
Şekil 1.1.2.6. : <i>Kontrol eyleyicileri kaynaklı kuvvetlerin gösterilmesi</i>	19
Şekil 1.1.3.1. : <i>Simulink'teki ISA Atmosfer bloğu</i>	19
Şekil 1.1.3.2. : <i>Dikey iniş yapan roketin adım aşaması</i>	20
Şekil A.1. : <i>Vücut eksenindeki kuvvetleri gösteren bloklar</i>	25
Şekil A.2. : <i>İtme kuvvetinin hesaplandığı bloklar</i>	25

1.1. 6 Serbestlik Dereceli Uçuş Benzetimi Raporu

Literatür Araştırması

Bu rapor aşamasında rijit cisim olarak tanımladığımız roketin 6 serbestlik dereceli uçuş benzetimi yapılmıştır. Rapora tanımlama ve ileriki aşamalarda kullanacağımız varsayımlar ile başlanmıştır. Hareket denklemleri yalnız başına hesaplama için yeterli olmayacağından uygun koordinat takımları belirlenmiştir. Dönüşümlerde kullanılmak üzere sebebi belirtilerek Euler dönüşümü seçilmiştir. Bu aşamada referans [6] kullanılmıştır. Rokete genel olarak üç temel kuvvet bileşeni etki eder. Bunlar aerodinamik kuvvetler, yer çekimi kuvveti ve itkidir. Bu kuvvetler sonucu öteleme ve dönme hareketleri yapacak cismin kararlılığını koruyabilmesi için denklem setlerine ihtiyaç duyulur. İhtiyaç doğrultusunda seçilen dönüşümden kinematik ve dinamik denklem setleri çıkartılmıştır [1] [2] [3] [5]. Zamana bağlı hız, ivme, irtifa grafiklerine genel ÖTR aşamasında 8 ve 9. sayfalarda yer verilmiştir. Çıkartılan denklem setleri Matlab/Simulink ortamında modellenmiştir. Modelleme için [7] ve [8] kaynaklarından yararlanılmıştır. Benzetim oluştururken kullanılan modeller [4] ve aralarındaki etkileşimler verilmiştir. Bu model blokların birbiri ile etkileşimlerinin modellenmesi ve kodlar sonraki aşamada rapora dahil edilecektir.

1.1.1. Altı (6) Serbestlik Dereceli Hareket Denklemleri

1.1.1.1. Tanımlar, Gerçekler ve Varsayımlar

Tasarımını yapacağımız roket, uçuş sırasında karşılaşacağı karmaşık aerodinamik kuvvetlere ve çevresel etkilere karşı direnç göstermesi, belirli bir yol üzerinde kontrol edilebilmesi ve güvenli inişini tamamlaması için rijit cisim şeklinde olacak. Rijit bir cismin üç boyutta analizi yapılacağından formülleri ve incelemeyi basite indirmek için (bağımsız değişken sayısını azaltmak) farklı eksen takımları tanımlanacak ve bu sayede roketin hareket sistemi altı serbestlik dereceli halde ele alınacaktır. Bu amaç doğrultusunda eksenlere uygun olarak dinamik ve kinematik hareket formülleri elde edilecek ve istenilen sistemde denklemler çıkarılacaktır. Sonuç olarak roketin üzerine etkiyen aerodinamik, yer çekimi ile birlikte roketin dinamik denklemleri de elde edilecektir. Roketin inişinde hız, ivme, menzil, irtifa gibi değişkenlerin incelenmesi ve analiz edilmesi amacıyla sistemin 6 serbestlik dereceli uçuş benzetiminden yararlanılacaktır.

Yukarıda belirtildiği üzere bazı denklemleri basite indirmek açısından varsayımlarda bulunacağız.

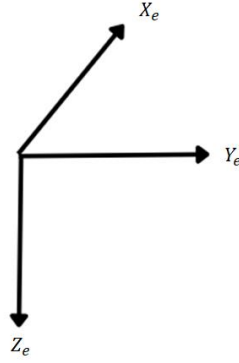
- Düz dünya varsayımı (Tasarlanan roket vinçle belirli bir irtifadan bırakılacağı için dünyanın geoit yapısı ihmal edilebilir.)
- Dünya merkezli sabit referans sistemi (Dünya'nın Güneş etrafında dönüşünün roketin bırakılma analizindeki etkisinin ihmal edilebilir düzeyde olduğundandır.)
- Roket referans sistemi (Merkezi roketin ağırlık merkezi olarak kabul edilir.)
- Rüzgar etkisi benzetime dahil edilmemiştir.
- Rijit cisim kabulü.
- Uluslararası standart atmosfer değerleri kullanılacaktır.

1.1.1.2. Koordinat Takımlarının Belirlenmesi

6 Serbestlik dereceli uçuş benzetiminde roket modellemesi yapılırken hareket denklemleri tek başına yeterli olmayacaktır. Denklemler çözülürken bilinmeyen sayısını denklem sayısı ile eşit tutmak gerekir. Bu denkliği sağlayabilmek için koordinat takımlarının belirlenmesi gerekir. Koordinat takımlarını yaptığımız varsayımlara göre düz dünya koordinat takımı ve cisim koordinat takımı olarak inceleyeceğiz.

1.1.1.2.1. Düz Dünya Koordinat Takımı

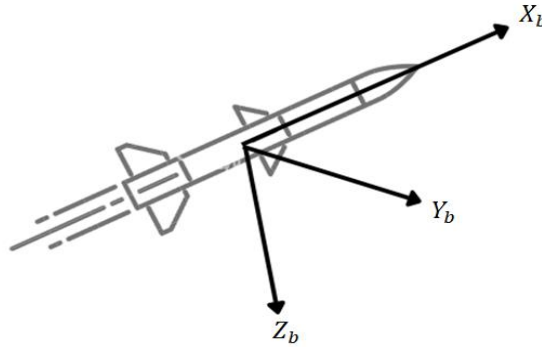
Koordinatlarını (X_e, Y_e, Z_e) olarak tanımladığımız düz dünya varsayımı referans sisteminde Z_e koordinatı dünyanın merkezine yöneliktir.



Şekil 1.1.1.1. : Düz dünya koordinat takımı

1.1.1.2.2. Cisim Koordinat Takımı

Koordinat takımının merkezi, cismin ağırlık merkezine (CG) sabitlenmiştir. Aynı zamanda cismin hareketiyle beraber hareket eden bir sistemdir. (X_b, Y_b, Z_b) koordinatlarından X_b roketin burun doğrultusunda bulunup diğer iki doğrultuya diktir.



Şekil 1.1.1.2. : Cisim koordinat takımı

Bu eksen takımı cismin hareketiyle birlikte yer değiştirdiği için asıl amaç roketin konumu ve durumu hakkında bilgi edinmektir. Bu anlık durumu analiz edebilmek için Euler ve Kuvaterniyon dönüşüm sistemleri kullanılır. İleriki adımlarda seçtiğimiz dönüşüm sistemi ile hesaplar anlatılacaktır.

1.1.1.3. Sensör Eksen Takımı Dönüşümlerinin Belirlenmesi

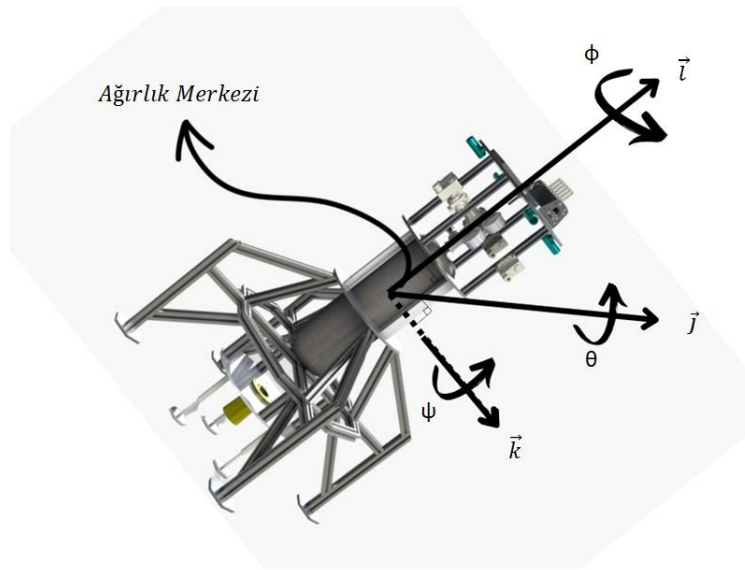
İniş esnasında cismin kararlılığını denetleme işini sensörler aracılığıyla yaparız. Sensörlerin alacağımız ölçüm verileri, seçilen dönüşüm sistemiyle cisim koordinat takımından yeryüzü koordinat takımına aktarılır. Bu sayede gelen yanıtla göre cisme uygun momentum verilerek kararlılık korunur. Sonraki adımda Euler ve Kuvaterniyon dönüşümü karşılaştırıp sistemimizi seçeceğiz.

1.1.1.3.1. Euler ve Kuvaterniyon Dönüşümlerinin Karşılaştırılarak Seçilmesi

1.1.1.3.2. Euler – Kuvaterniyon Farkı ve Tercih Edilen Sistem

Matematik ve fizikte üç boyutlu dönüşün farklı gösterimleri mevcut olup bu gösterimlerden kullanılan en yaygın ikisi Euler açı ve Kuvaterniyonla oluşturulanlardır.

Euler açıları, bir nesnenin orijinal pozisyonundan belirli bir dönme sırasında geçtiği dönme açılarını ifade eder. Kuvaterniyonlar Euler açılarına kıyasla daha karmaşık bir matematiksel yapıya sahiptir ancak "Gimbal Kilitlemesi" adı verilen tekillik durumunu Hamilton'un kuvaterniyon tanımıyla ortadan kaldırır.



Şekil 1.1.1.3. : Roket referans sistemi

Euler açıları bu tasarım için roketin x,y ve z eksenleri etrafındaki dönüşlerini belirtmek için kullanılır. Euler açıları üç dönüşüm matrisinden oluşur ve sırasıyla roll, pitch ve yaw (yalpalama, yunuslama ve sapma) olarak adlandırılır. Fakat euler açıları üç boyuttaki bir cismi bu boyuttaki bir vektörle ifade ettiği için problemler ortaya çıkar. Örneğin herhangi bir açı ± 90 dereceye ulaştığı durumda diğer iki açı aynı hareketi temsil edip tekilliğe yol açacaktır. Bu sorunlar üç boyuttaki yönelme dört boyutlu vektör ile ifade edilerek kuvaterniyonlarla ortadan kaldırılabilir. Ancak düşük irtifadan bırakılıp dikey iniş yapacak roket ± 90 derece dönme açısına yaklaşma durumu olmadığı için analizi basite indirgeme açısından euler açı dönüş yöntemi kullanılacaktır. Tekillik oluşumu durumunda ise kuvaterniyon dönüş yönteminden yararlanılabilir.

1.1.1.3.3. Euler ve Kuvaterniyon Denklem Sistemi

Kuvaterniyonda dört parametreden biri dönme miktarını belirtirken üçü dönüşün eksenini (biri reel, üçü imajinar) belirtir, bu parametrelere euler açıları yardımıyla ulaşılabilir. (1-4)

$$q_1 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (1)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (2)$$

$$q_3 = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (3)$$

$$q_4 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (4)$$

Bu aşamanın devamında rijit cismin kinematiğine geçilebilir. Kuvaterniyon cinsinden açısal hızın diferansiyel ifadesi denklemde (5) gösterilmiştir.

$$[\dot{Q}] = \frac{1}{2} \omega [Q] \quad (5)$$

Bu denklem formatını matris şeklinde ifade edebiliriz. Böylece P,Q ve R açısal hız bileşenleri ile hareket eden bir vektörün dönüşümü elde edilir. (6)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & R & -Q & P \\ -R & 0 & P & Q \\ Q & -P & 0 & R \\ -P & -Q & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dönüşü euler açılarıyla ifade etmek kuvaterniyonlara göre daha anlaşılır olacaktır. Euler açılarının kuvaterniyonlar cinsinden ifadesi denklemlerdeki gibi verilebilir. (7-9)

$$\phi = \arctan \frac{2q_2q_3 + 2q_4q_1}{-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (7)$$

$$\theta = \arcsin (2q_4q_2 - 2q_2q_3) \quad (8)$$

$$\psi = \arctan \frac{2q_1q_2 + 2q_3q_4}{+q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2} \quad (9)$$

Bu denklemlerde tekillikler yalnızca açılar $\pm 90^\circ$ 'de ve yakın değerlerde doğruluktan sapma meydana gelebilir. Bu sebeple civarındaki değerlere de dikkat etmek gerekir.

Roketin toplam açısal hızı yalpalama, yunuslama ve yuvarlanma açılarının türevleri şeklinde ifade edilebilir.(10)

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Bulunan ifadeler integre edilerek euler açılarına geçiş yapılır. (11)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (11)$$

Bu ifadede de görüldüğü gibi paydadaki θ açısı paydayı 0 yapabilme sebebi ile teklik noktaları Euler açılarındaki problem oluşturacaktır. Bu problemin olduğu durumda kuvaterniyonlar kullanılır.

Dolayısıyla denklem setlerinin çıkarılmasında Euler dönüşüm tercih edilecektir.

1.1.2. Seçilen Dönüşümden Kinematik ve Dinamik Denklem Setlerinin Çıkartılması

1.1.2.1. Dönme Hareket Denklemlerinin Çıkartılması

Newton'un ikinci yasasının dönme hareketine göre $\tau = I\alpha$ bağıntısı $F = ma$ ile benzerlik göstermektedir bu nedenle hesaplanan kuvvetler yeryüzü koordinat sistemine uyarlanarak Newton'un ikinci yasası olan bir cismin ivmesinin o cisme uygulanan kuvvetle doğru orantılıdır ilkesiyle denklemleri oluşturacağız. Bağıntıya göre cismin üzerine F kuvveti uygulandığında cisim a ivmesi ile hareket ederken buna m kütlesi karşı koyar. Benzer şekilde eylemsizlik momenti de dönme hareketi yapan bir cismin dönme hareketindeki değişimlere karşı gösterilen dirençtir.

Dönme denklemlerinin temelini Euler'in ikinci Kanunu (12) oluşturur. Euler'in İkinci Kanunu, bir cismin üzerine etki eden toplam dönme momentinin, cismin açısal momentumundaki değişim oranına eşit olduğunu belirtir.

$$M_T = \dot{\vec{H}} \quad (12)$$

Açısal momentum, herhangi bir cismin dönüş hareketine devam etme isteğinin bir göstergesidir ve bu nicelik cismin kütlesine, şekline ve hızına bağlıdır. Bir vektör birimi olmakla beraber cismin belirli eksenler üzerinde sahip olduğu dönüş eylemsizliği ile dönüş hızını belirtir. Açısal momentum, eylemsizlik momenti matrisi ve roketin açısal hız vektörü cinsinden ifade edilebilmektedir. (13) Bu sayede roketin istenen açısal hıza ulaşması için ne kadar tork uygulanması gerektiği bilgisine ulaşırız.

$$\vec{H} = \vec{I}\vec{\omega} \quad (13)$$

Eylemsizlik momenti 3x3 matris formunda yazabiliriz. (14)

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Eğer rijit cisim 2 düzleme göre de simetri bulundurursa o zaman yalnızca 3 komponent kalır ve matris formu formülde verildiği gibi basitleştirilebilir ve eylemsizlik momentinin son haline ulaşılır. (15) Roket referans sistemi yerine rüzgar referans sistemi kullanılsaydı bu sadeleştirme yapılamazdı bu sebeple kabullerde rüzgar etkisi benzetime dahil edilmemiştir.

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

Denklem 2.1a'yı incelediğimiz zaman 16'daki denklemi elde ederiz.

$$\vec{T} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} l & j & k \\ p & q & r \\ pI_x & qI_y & rI_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

Son olarak Tork parametreleri L, M ve N aşağıdaki matrisle elde edilir.(17)

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \\ \dot{q}I_y + pr(I_z - I_x) \\ \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Burada p, yuvarlanma oranı (w_x); q, yunuslama oranı (w_y) ve r, sapma oranı (w_z) olarak verilmiştir.

1.1.2.2. Öteleme Hareket Denklemlerinin Çıkartılması

Hız ve ivme denklemlerini bu başlık altında inceleyeceğiz. Hız ve açısal hız vektörleri (18-19) bileşenleri ile birlikte hızın büyüklüğü (20) aşağıdaki denklemlerde verilmiştir. Hızın büyüklüğü olan $|V|$ hızın normu olarak da adlandırılabilir.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (18)$$

$$\vec{\omega} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} \quad (19)$$

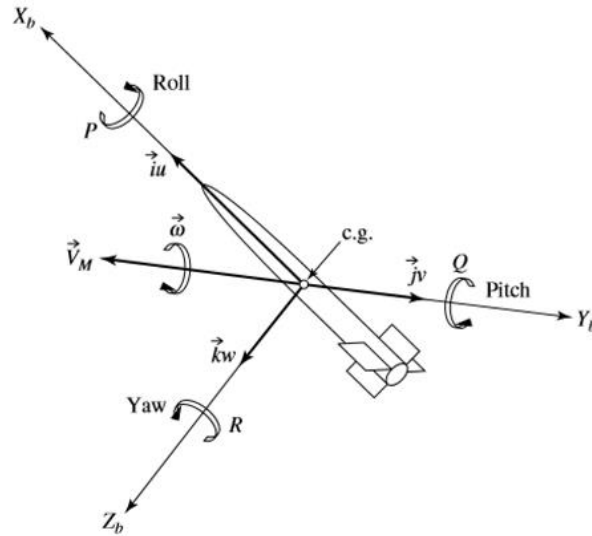
$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (20)$$

u: X_b yönündeki hız vektörü

v: Y_b yönündeki hız vektörü

w: Z_b yönündeki hız vektörü

(X_b, Y_b, Z_b) gövdeye sabitlenmiş koordinat sistemi olup roketin serbestlik dereceleri şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 1.1.2.1. : Roketin serbestlik dereceleri

İvme, bir cismin hızındaki değişimi ifade eden bir vektördür. Hız ve ivme birbirleriyle bağlantılıdır. Matematiksel olarak bir cismin ivmesi, hızının zamana göre türevidir. İvmeye ulaşmak için hız vektörünün türevini alacağız. (21)

$$\dot{\vec{V}} = (\dot{u}\vec{i} + \dot{v}\vec{j} + \dot{w}\vec{k}) + \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (21)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = (qw - rw)\vec{i} + (pw - ru)\vec{j} + (pv - qu)\vec{k}$$

Öteleme denklemlerinin temeli Newton'un ikinci yasası olan $\vec{F} = m\vec{a}$ denkleminde dayanmaktadır.

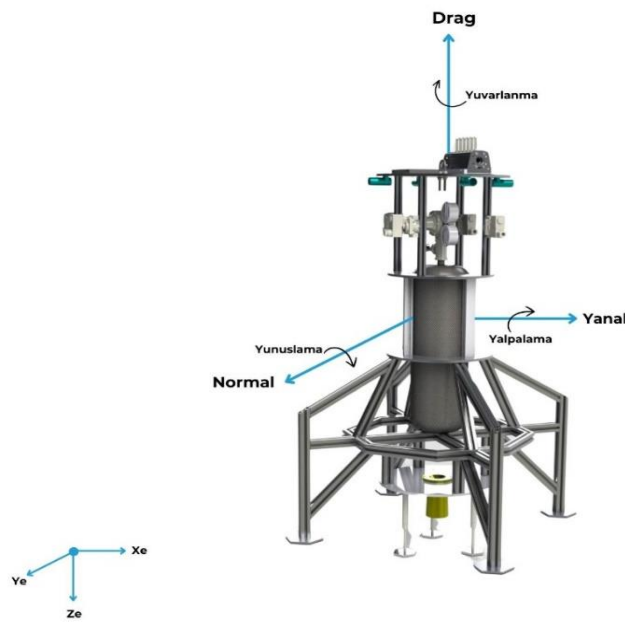
İvmenin türevini ($\dot{\vec{V}}$) denkleme yerleştirdiğimiz durumda ötelemeden kaynaklı kuvveti elde ederiz.

$$\vec{F}_{\text{öteleme}} = \begin{bmatrix} m(\dot{u} + qw - rw) \\ m(\dot{v} + pw - ru) \\ m(\dot{w} + pv - qu) \end{bmatrix} \quad (22)$$

1.1.2.3. Kuvvetler ve Momentler

Rokete etki eden kuvvet ve momentleri aerodinamik, yerçekimi ve itki olarak sınıflandırabiliriz. İtke ve aerodinamik kuvvetler hesaplanabilir fakat test ve analizlerle daha kesin sonuçlar elde edilecektir. Yerçekimi kuvveti ise roketin dünya üzerinde bulunduğu enlem ve yüksekliğe bağlı olarak hesaplanmaktadır. Raporunu hazırladığımız proje düşük irtifada yapılacağından toplam yerçekimi ivmesi düşük irtifalarda hemen hemen yere dik olacak şekildedir. Bu sebeple yerçekimi kuvvetini sabit olarak değerlendireceğiz.

1.1.2.3.1. Aerodinamik Etkilerden Kaynaklı Kuvvet ve Momentler



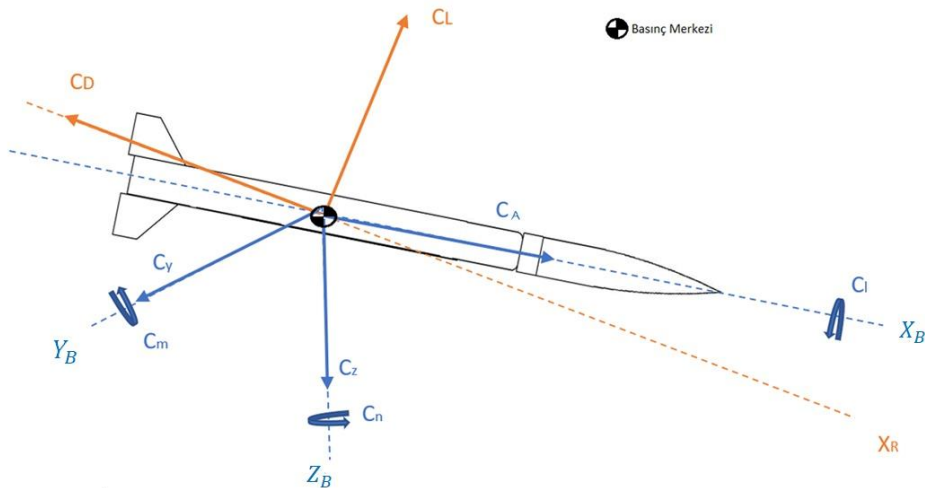
Şekil 1.1.2.2. : Aerodinamik kuvvetlerin ve momentlerin gösterimi

Roketin dikey iniş esnasında aerodinamik karakteristiği oldukça önemlidir. Roketin iniş hareketi boyunca havadaki taneciklerle roket yüzeyi arasında etkileşim meydana gelir. Bu etkileşim sonucunda aerodinamik kuvvetler ve momentler ortaya çıkar. Aerodinamik kuvvetleri taşıma, sürüklenme ve yanal kuvvetler olarak ayırmak mümkündür. Bu kuvvetler aracın basınç merkezinden uygulanır. Aerodinamik kuvvetlerin denklemleri (23-25) verilmiştir.

$$\text{Taşıma Kuvveti} : F_L = qSc_L \quad (23)$$

$$\text{Sürüklenme Kuvveti} : F_D = qSc_D \quad (24)$$

$$\text{Yanal Kuvvet} : F_Y = qSc_Y \quad (25)$$



Şekil 1.1.2.3. : Aerodinamik katsayılar ve referans eksenler

Taşıma kuvveti, roketi etkileyen bileşke aerodinamik kuvvetin serbest akıma dik doğrultuda olan bileşenidir. Sürüklenme kuvveti hareket doğrultusunda, harekete zıt yöndeki kuvvet bileşeni olup roketin hareketine havanın gösterdiği direnç kuvvetidir. Yanal kuvvet, taşıma ve sürüklenme kuvvetine dik doğrultuda olan kuvvet bileşenidir.

Yukarıda verilen denklemlerde bulunan c_L, c_D, c_Y parametreleri sırasıyla taşıma, sürüklenme ve yanal kuvvetlerin katsayılarını ifade eder. Dinamik basınç olan $q = \frac{1}{2}\rho V^2$ açılımının kısaltımı olarak kullanılır. Kuvvet denklemlerinde bulunan S , referans alandır. V hızı, ρ ise yoğunluğu simgeler.

Momentler yunuslama, yuvarlanma ve sapma olarak üçe ayrılır. Momentler aracın cisim eksenine göre ifade edilirse; yunuslama momenti Y eksenini etrafında taşıma ve sürüklenme kuvvetleri etkisi ile, yuvarlanma X eksenini etrafında yapıların taşımadaki değişim oluşturması ile, sapma ise Z eksenini etrafında gerçekleşir. Moment denklemleri (26-28) verilmiştir.

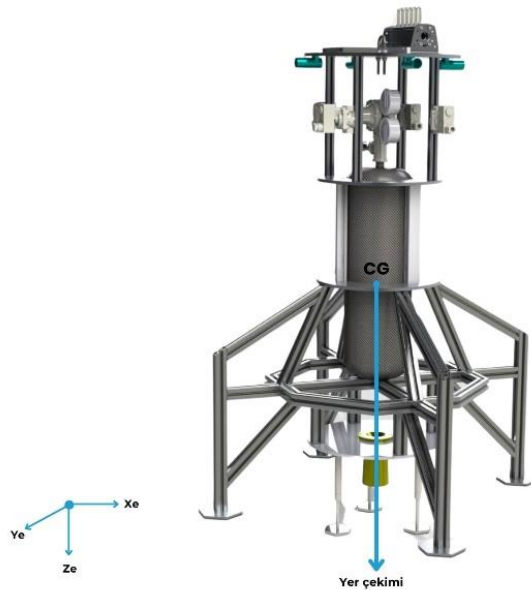
$$\text{Yunuslama Momenti : } M_{aero} = C_m q S l \quad (26)$$

$$\text{Yuvarlanma Momenti : } L_{aero} = C_l q S l \quad (27)$$

$$\text{Sapma Momenti : } N_{aero} = C_n q S l \quad (28)$$

Roketin x eksenini etrafında dönme hareketini sağlayacak bir etki bulunmadığı için C_l değeri sıfırdır. Bu denklemlerde l karakteristik uzunluktur. c_m, c_l, c_n moment katsayılarını ifade eder. S referans alanı ifade edip seçimi önem arz eder. S ile maksimum kesit alanını hedefleriz.

1.1.2.3.2. Yerçekimi Etkisi Kaynaklı Kuvvet ve Momentler



Şekil 1.1.2.4. : Yerçekimi etkisi kaynaklı kuvvetin gösterimi

Başlık 1.1.1.1’de birinci kabul olan düz dünya kabulü yerçekimi etkisi kaynaklı kuvvet ve momentleri uluslararası standart atmosfer (ISA) değerleri ile sabit olarak değerlendirilip 9.801 m/s^2 alınacaktır. Yerçekimi, bir nesnenin kütle merkezi etrafında etki eden bir kuvvet olarak tanımlanır. Her yerde eşit olarak etki ettiğini varsaydığımız bu parametre herhangi bir moment oluşturmayacaktır.

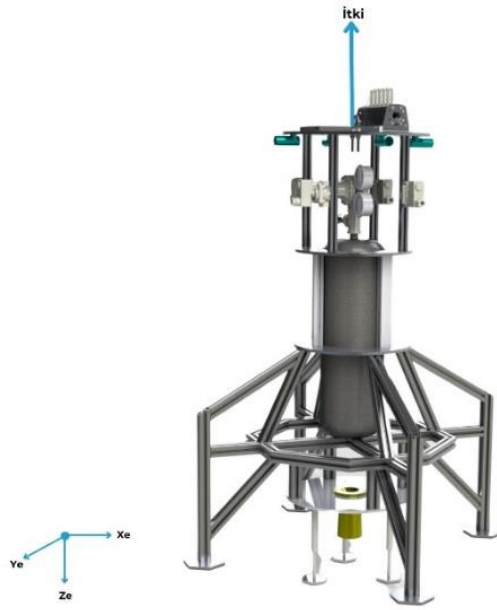
1.1.2.3.3. Eyleyici Etkisi Kaynaklı Kuvvet ve Momentler

1.1.2.3.3.1. Ana İtki Sistemi

Roketin eyleyicileri için itki kuvveti aşağıda verilen denklem sistemiyle hesaplanabilir.

$$T = m \times c^* \times C_f = p_1 \times D_t \times C_f \quad (29)$$

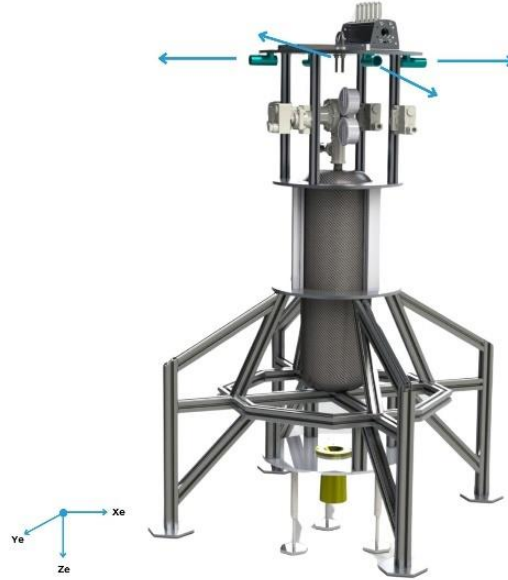
Bu denklemde T itkiyi, c^* karakteristik hız, C_f itki katsayısı p_1 lüleye giriş basıncını D_t lülenin boğazdaki kesit alanını ifade eder.



Şekil 1.1.2.5. : Ana eyleyici kaynaklı kuvvetlerin gösterilmesi

1.1.2.3.3.2. Kontrol Tahrik Sistemi

Bu sistem cismin dönme hareketini belirlemek ve yönelimini kontrol etmek amacıyla kurulmuştur. Roketin dikey iniş esnasında kaybedebileceği stabiliteyi koruması için kontrol tahrik sistemi gereklidir. Bu sistem sayesinde dengeli bir iniş mümkün olacaktır. Denklem 2.2j'de çıkartılan denklem setini inceleyecek olursak ϕ , θ , ψ Euler açıları (yalpalama, yunuslama ve sapma açıları) ile roketin açısal hız komponentleri olan P,Q,R'ye geçişini belirleyip roketin hareketini ve yönelimini analiz edebiliriz. Roketin burun tarafındaki kısma yerleştireceğimiz 4 adet kontrol eyleyicileri sayesinde oluşacak ters momentumunu dengelemeyi hedefleyeceğiz.

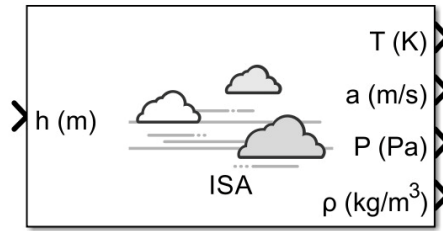


Şekil 1.1.2.6. : Kontrol eyleyicileri kaynaklı kuvvetlerin gösterilmesi

1.1.3. Atmosfer Modeli, Roket Modeli, Aerodinamik Modeller ve Eyleyici Modelleri ile Bunlar Arasındaki Etkileşimler

1.1.3.1. Atmosfer Modeli

Uluslararası standart atmosfer modeli (ISA), atmosferin ortalama koşullarını ve değişimlerini tanımlayan bir standart modeldir. Başlık 1.1.1.1’de bulunduğumuz son varsayımda belirtildiği üzere uluslararası standart atmosfer değerleri kullanılacaktır. ISA bazı değerlerin belirli parametreler ile değiştiğini söyler. Bunlar sıcaklık, basınç, yoğunluk ve viskozitedir. Bu değerler denklemlerde de incelediğimiz üzere (30-33) troposfer katmanı ($0 < h < 11\text{km}$) için irtifa arttıkça azalır.



Şekil 1.1.3.1. : Simulink’teki ISA Atmosfer bloğu

$$T_u = T_0 - \lambda h \quad \lambda = 6.5 \times 10^{-3} \quad (30)$$

$$p_u = p_0 (T_u/T_0)^{\frac{g}{\lambda R}} \quad \frac{g}{\lambda R} = 5.259 \quad (31)$$

$$\rho_u = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{44308}\right)^{4.259} \quad \rho_\infty = \frac{\rho_0}{RT_\infty} \quad (32)$$

$$\mu_u = \mu_0 (T_u/T_0)^{0.75} \quad (33)$$

Denklemlerde u alt indisi uçuş anındaki parametreyi, 0 alt indisi başlangıç veya referans olan parametreyi belirtir. Uluslararası standart atmosfer deniz şartlarında sıcaklık 15°C , atmosfer basıncı $1013,25 \text{ mb}$, yoğunluk $1 \rho/\rho_0$; kinematik viskozite $1,461 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sn}$, ses hızı $340,3 \text{ m/sn}$ 'dir.

1.1.3.2. Roket Modeli

Tasarlanacak roket modeli, kinematik ve dinamik denklem setleri özelinde aerodinamik hareket, dönüş ve dayanıklılık ilkelerine dayanacaktır. Altı serbestlik dereceli uçuş modellemesi yapılan roketin konum, hız, ivme değerleri uçuş süresince hesaplanacak olup bu noktada MATLAB/Simulink ortamında geliştirilen benzetim modelinden yararlanılacaktır. Hareket denklemleri çözümünde roketin ağırlığı, roketin ağırlık merkez konumundan (CG) ve atalet momentumundan yararlanılacaktır.

1.1.3.3. Aerodinamik Model

Aerodinamik modelleme kısmında aerodinamik kuvvet ve momentlerle roketin tasarım süreçlerini iyileştirmek, uçuş verimliliği kazandırmak, aerodinamik direnci azaltmak ve uçuş performansını optimize etmek gibi çeşitli hedeflere ulaşmak için kullanılacaktır.

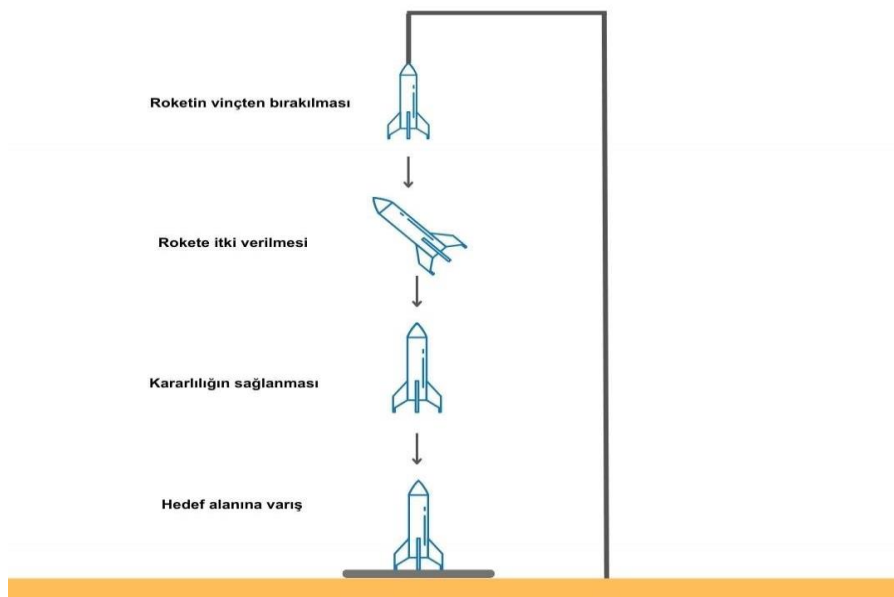
1.1.3.4. Eyleyici Model

Roketin belirli kısımlarına yerleştirdiğimiz lüleler aracılığıyla basınç tüpünden gelen soğuk hava gazını dikey iniş esnasında kontrol edebilme ve görevi tamamlama aşamasında önemli rol oynayacak olan bu modele pnömatis biriminden alınacak itki hesaplamaları dahil edilecektir.

1.1.3.5. Modeller Arası Etkileşimler

Dikey iniş için tasarlanan roketin görevini kontrollü ve başarılı bir şekilde tamamlayabilmesi için modeller arası etkileşimin uygun olması gerekmektedir. Bu sebeple **roket modelinin** ağırlık merkezi ve atalet momentumu göz önünde bulundurularak matematiksel modeller oluşturulup kullanılacak denklem setleri belirlenmiştir.

Atmosfer modelinin girdisi roketin irtifası olup oluşturacağımız denklemleri irtifaya bağlı sıcaklık, basınç ve yoğunluk parametreleriyle besler. Fakat düşük irtifada (9m) gerçekleşecek olan proje sayılan parametrelerin küçük değişimlerinden etkilenmeyeceği varsayımlarda ISA koşulları ile kabulü ile belirtilmiştir



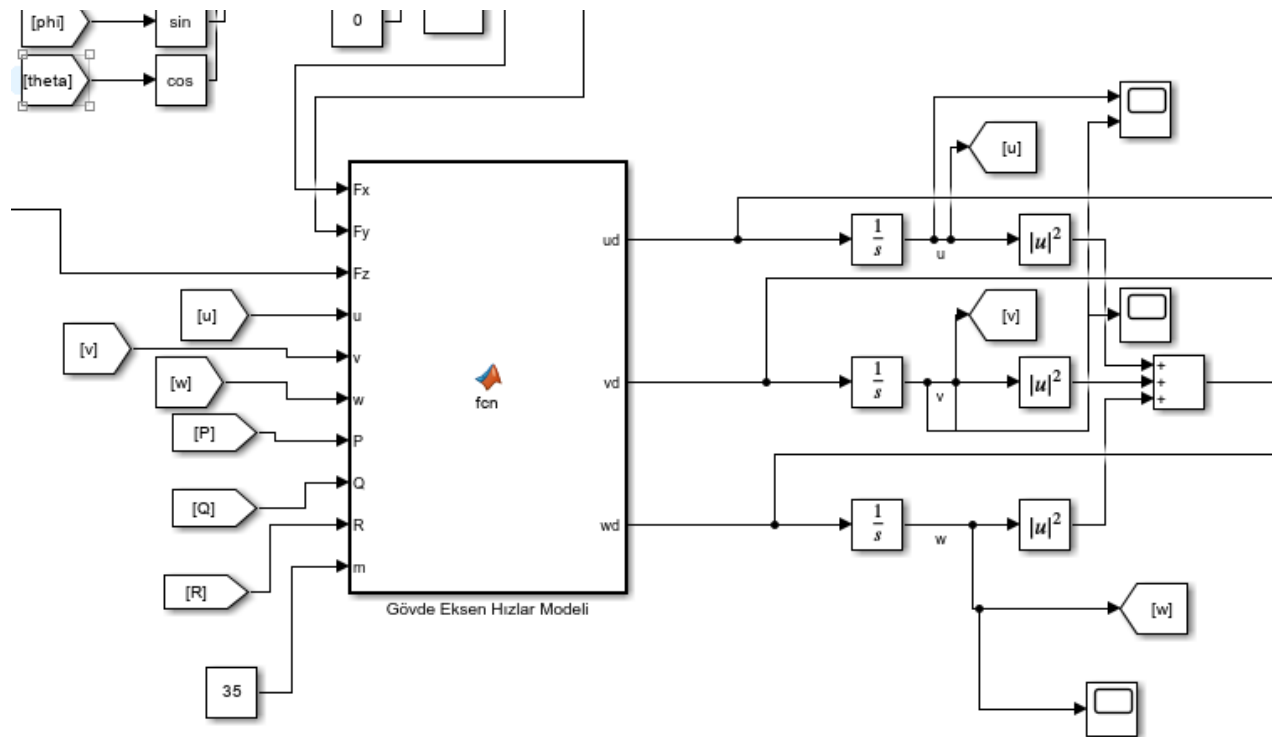
Şekil 1.1.3.2. : Dikey iniş yapan roketin adım aşaması

Yerçekimi modelinden beslenerek serbest düşüşünü tamamlayan roket **eyleyici modelin** beslediği itki kuvveti verilir. Bu sayede roketin yavaşlaması ve hedef alanına varışı sağlanır. İtki kuvveti bu avantajının yanında kararlılığı bozacak etken de olabilir. Yeniden kararlılığı **aerodinamik model** aracılığıyla sağlarız. Euler açılarıdaki \pm bozulmaları aerodinamik kuvvet ve momentler sayesinde kontrol lülelerinden verilen itkiyle düzeltilir. (şekil 3.5) Böylece 6 serbestlik dereceli benzetimle kontrollü ve başarılı inişi tamamlamak mümkün olacaktır.

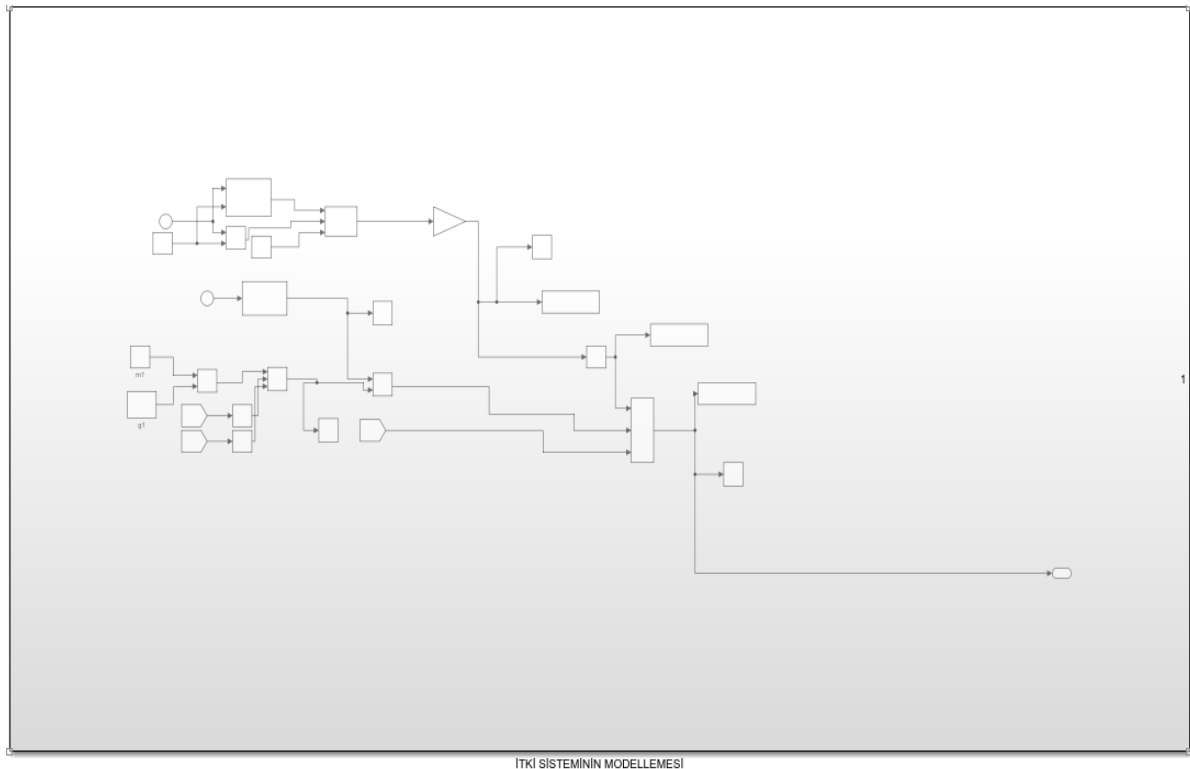
2. Kaynakça

- [1]https://drive.google.com/file/d/1v8FeX77rORkR_LmqVFmnrHFBinVVXoNV/view?usp=drive_link
- [2]https://drive.google.com/file/d/17oHasDRN_cXwCcIAjtX2NN9wUa7bC4N6/view?usp=drive_link
- [3]https://drive.google.com/file/d/19j-DVvq13mdWBXm-ZzPn5w34t2U-JBf0/view?usp=drive_link
- [4]https://drive.google.com/file/d/1iVqHfzQg58CEEWnI8Qa3v7GSJHIO4ICM/view?usp=drive_link
- [5]https://drive.google.com/file/d/1Li7V7NVKgiRinxLSY00xGiV1tRjaQbCy/view?usp=drive_link
- [6]<https://resources.inertiallabs.com/en-us/knowledge-base/euler-and-quaternion-angles-differences-and-why-it-matters>
- [7]https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Basics_Simulink
- [8]<https://www.mathworks.com/help/simulink/getting-started-with-simulink.html>

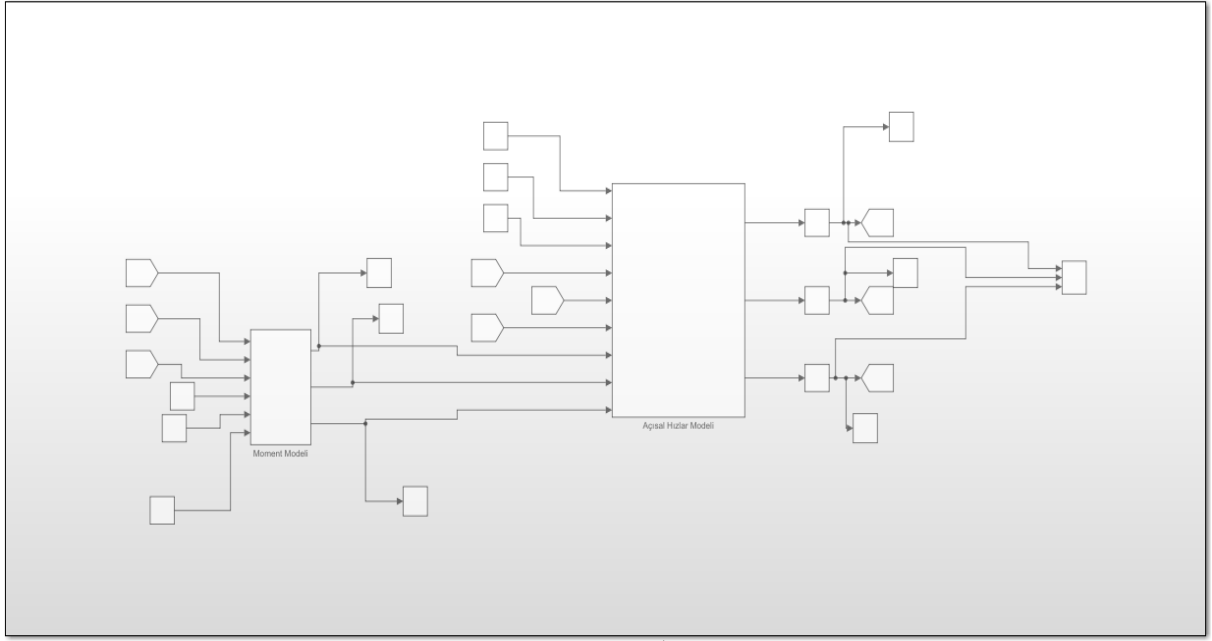
A. Ekler



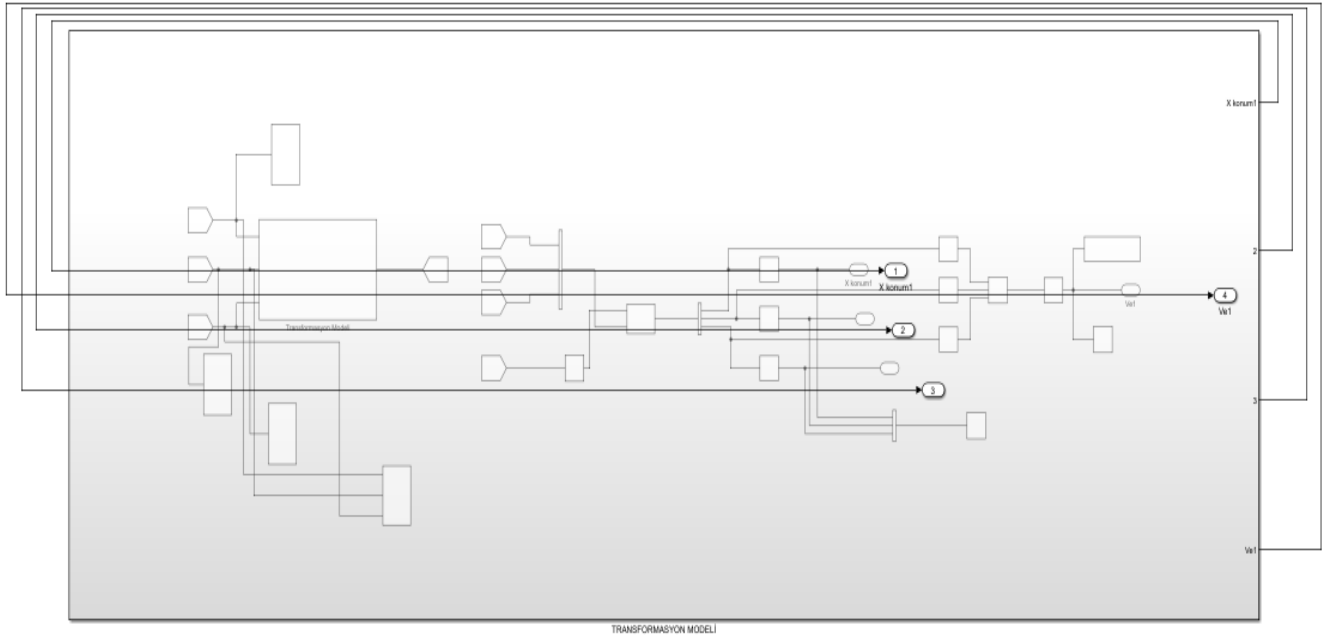
Şekil A.1. : Vücut eksenindeki kuvvetleri gösteren bloklar



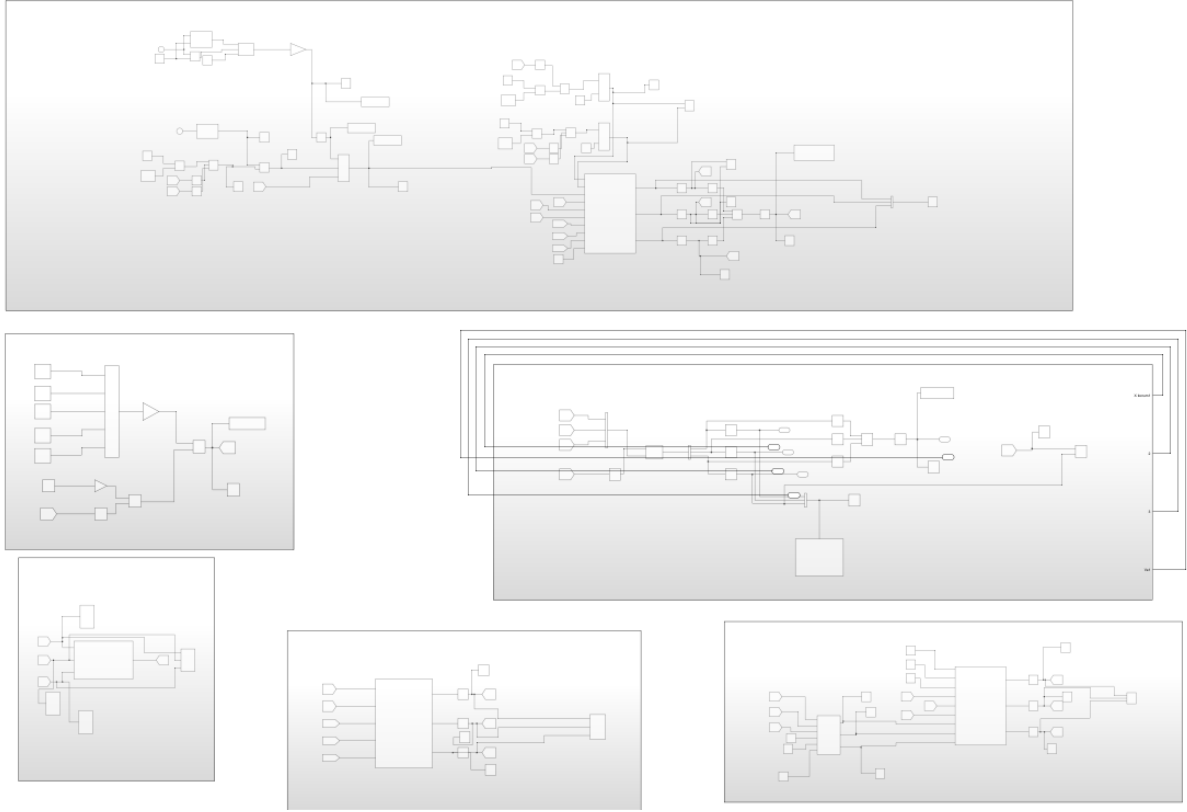
Şekil A.2. : İtki kuvvetinin hesaplandığı bloklar.



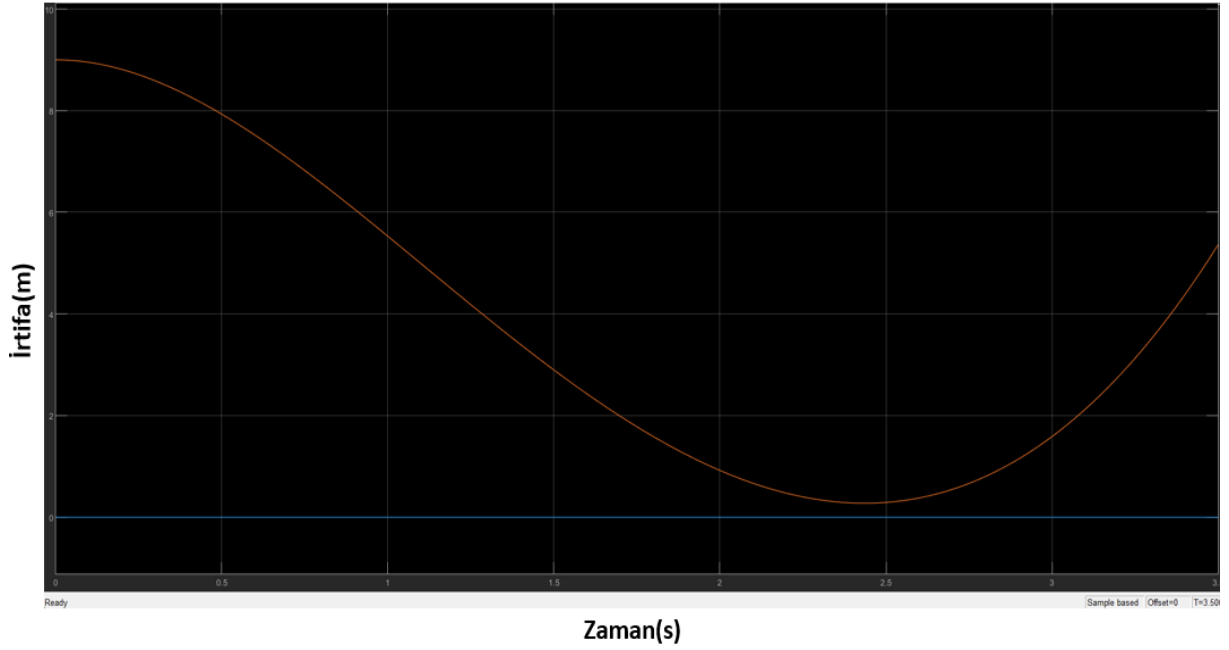
Sekil A.3. : Açısal hızların hesaplandığı bloklar.



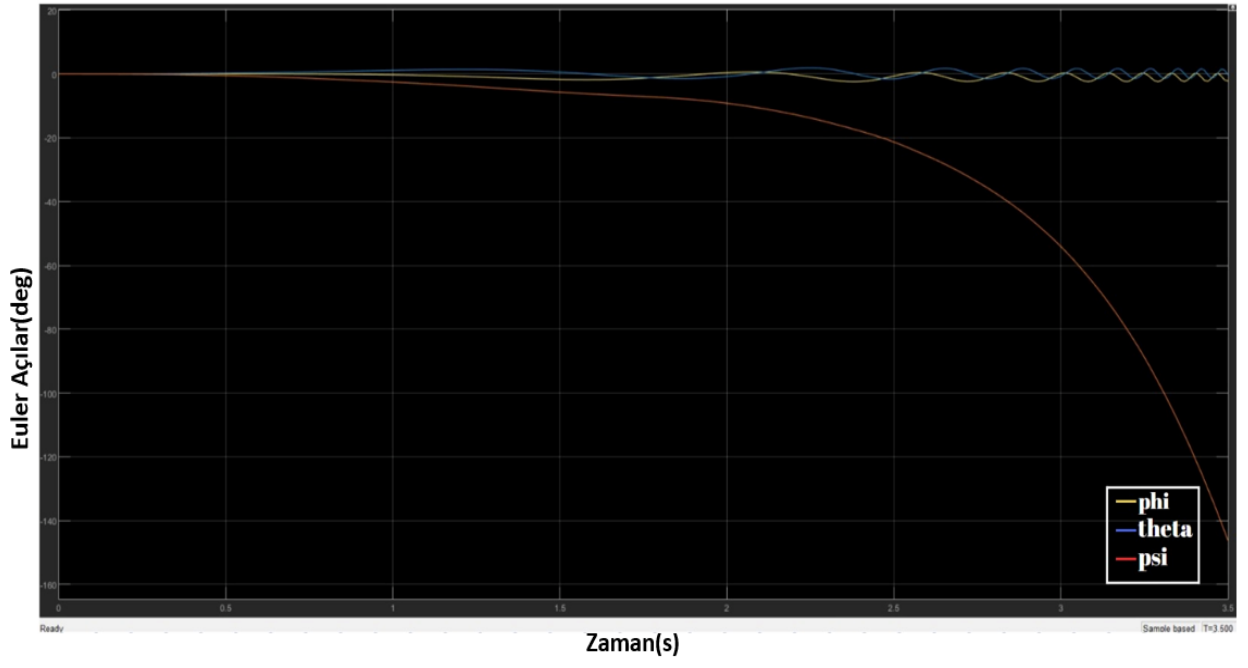
Sekil A.4. : Transformasyon modeli oluşturan bloklar.



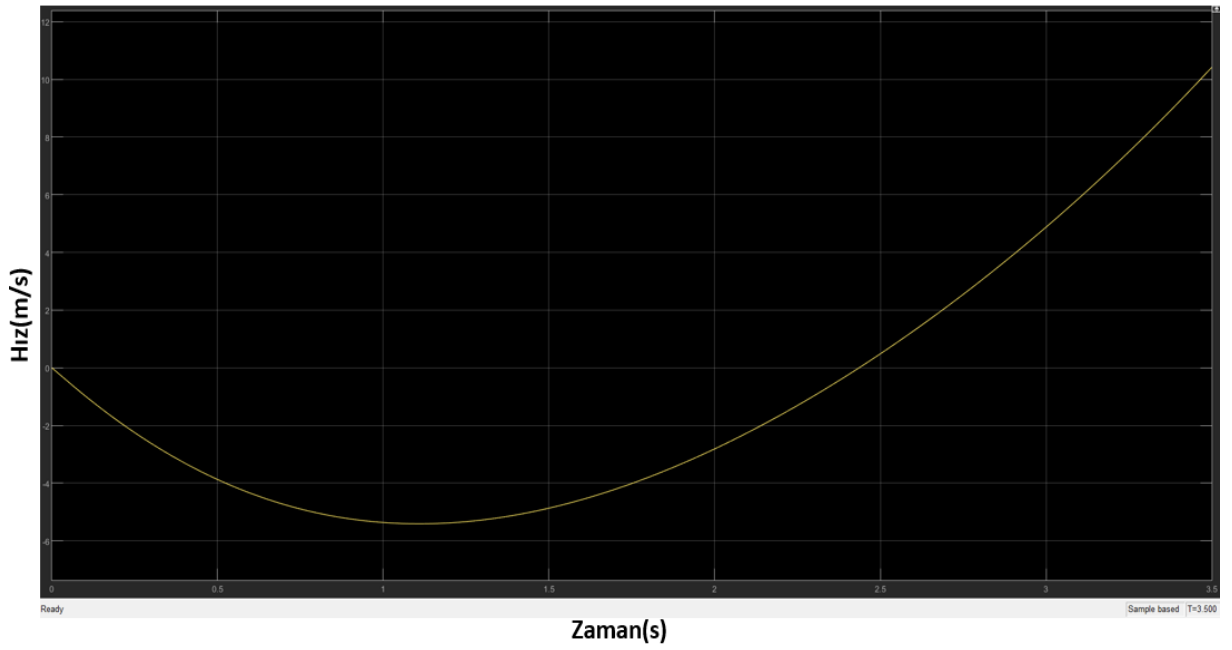
Sekil A.5. : 6DOF modelleme ve modeller arası etkileşim.



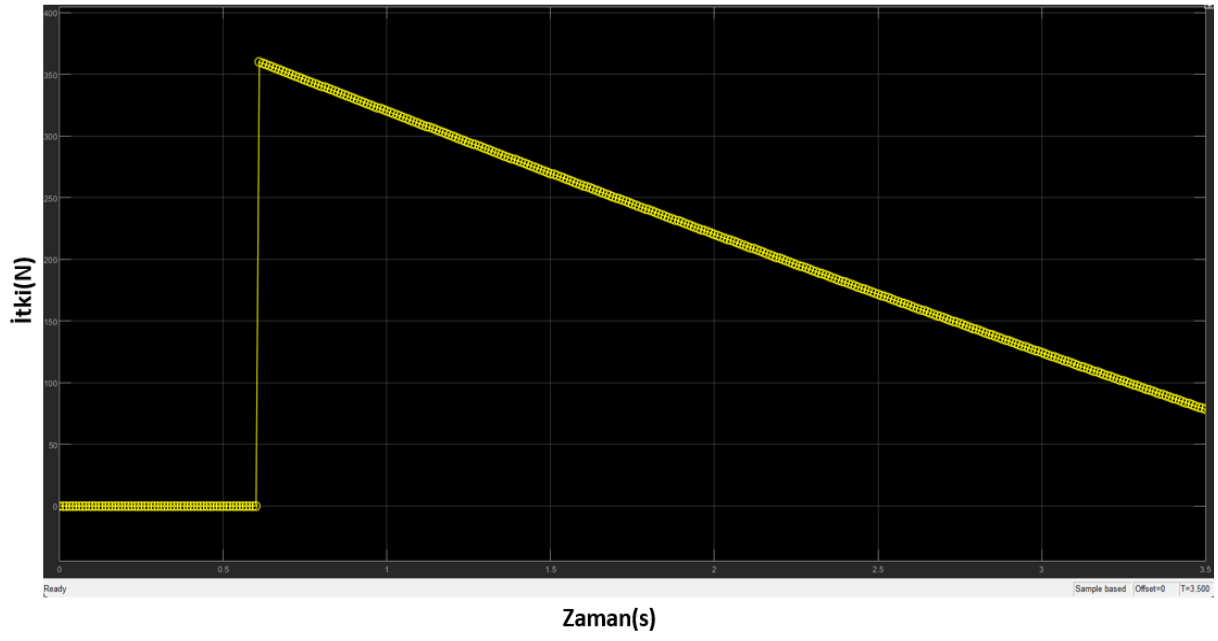
Sekil A.6. : Modellemede elde edilen İrtifa - Zaman grafiği.



Sekil A.7. : Modellemede elde edilen Euler Açılar - Zaman grafiği.



Sekil A.8. : Modellemede elde edilen Hız - Zaman grafiği.



Sekil A.9. : Modellemede elde edilen İtki - Zaman grafiği.