

Tarih: 01/09/2022
Saat: 10:30-11:40

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR

1) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{1+x}$ denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad r_{1,2} = -1 \quad y_h = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$$

$$y_p = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$$

$$C_1' e^{-x} + C_1' x e^{-x} = 0$$

$$- C_1' e^{-x} + C_2' (e^{-x} - x e^{-x}) = 3e^{-x}\sqrt{1+x}$$

$$C_2' = 3\sqrt{1+x} \Rightarrow C_2 = 2(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$C_1' = -3x\sqrt{1+x} \Rightarrow C_1 = 2(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}$$

$$y_p = e^{-x} \left(2(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + 2x(1+x)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$y_g = y_h + y_p$$

2) $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 6(x^2+1)^2$ denkleminin genel çözümünü basamağın indirilmesi metodu yardımıyla elde ediniz.

Denklemden $xy' - y$ kalıbı var $y_1 = x$ özel çözüm

$y = ux$ ile denklem

$$u'' + \frac{2}{x(x^2+1)} u' = \frac{6(x^2+1)}{x}$$

denklemine indirgebilir. $u' = v$ ile

$$v' + \frac{2}{x(x^2+1)} v = \frac{6(x^2+1)}{x} \quad \text{linear}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{2}{x(x^2+1)} dx}$$

$$v = 3(x^2+1) + \frac{C_1(x^2+1)}{x^2}$$

$$u = \int \left(3(x^2+1) + \frac{C_1(x^2+1)}{x^2} \right) dx + C_2$$

$$u = x^3 + 3x + C_1 x - \frac{C_1}{x} + C_2$$

$y = ux$ ile

$$y = x^4 + 3x^2 + C_1(x^2-1) + C_2 x$$

elde edilir.

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0$ denkleminin genel çözümünü $x = 0$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz.

$x=0$ adi nokta olup

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{ile}$$

$$2a_2 + 6a_3 x - 4a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-5)a_{n-1} \} x^n = 0$$

elde edilir.

$$2a_2 = 0$$

$$6a_3 - 4a_0 = 0 \quad a_3 = \frac{2}{3} a_0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n-5)}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4} a_1$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{45} a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$n=5 \Rightarrow a_7 = 0$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{2}{3} x^3 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{4} \right) \dots$$

VEYA $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$ ile

$$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + (12a_4 - 3a_1)x^2 + (20a_5 - 2a_2)x^3 + \dots = 0$$

$$a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{2}{3} a_0 \quad a_4 = \frac{1}{4} a_1 \quad a_5 = 0$$

$$y = a_0 \left(1 + \frac{2}{3} x^3 + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{4} \right)$$

4) $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$
 $y(0) = 4, y'(0) = 2$

Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

$$L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$$

$$L\{y'' + 2y' + y\} = L\{3xe^{-x}\} \quad \text{ile}$$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) - 4s - 10 = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{4s+10}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\left\{\frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 4e^{-x} + 6xe^{-x} + \frac{1}{2}x^3e^{-x}}$$