Sayısal Analiz

Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

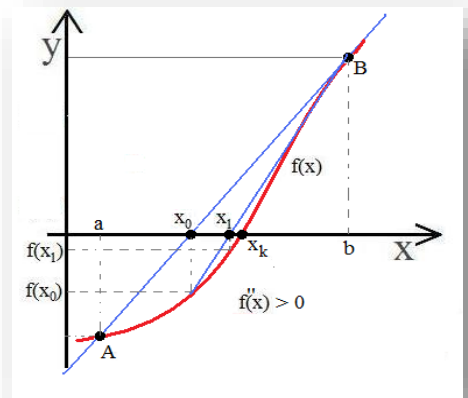
Ders İçeriği

- Regula Falsi Yöntemi
- Secant Yöntemi
- Örnekler

Regula Falsi Yöntemi

$f(x)=0$ denkleminin $[a_0, b_0]$ aralığında bir kökü bulunsun ve f bu aralıkta sürekli olsun ($f(a_0)\cdot f(b_0)<0$). Bu yöntemde $(a_0, f(a_0))$ ve $(b_0, f(b_0))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının x-eksenini kestiği x_0 değeri yaklaşık kök olarak alınır veya kök $[a_0, x_0]$, $[x_0, b_0]$ aralıklarından birine sıkıştırılıp aynı düşünce bir kez daha uygulanır.

$(a_0, f(a_0))$ ve $(b_0, f(b_0))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının eğimi;



$$\mathbf{m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Olduğuna göre **A** noktasından geçen doğrunun denklemi ;

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Olur. Başlangıç olarak y=0 alındığında doğru parçasının OX eksenini kestiği nokta

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)$$

olduğundan ifade düzenlendiğinde

$$\boxed{x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Örnek: $f(x)=x^2-64$ denklemin $[0,10]$ aralığındaki denklemin kökünü Regula Falsi yöntemi ile yaklaşık olarak bulunuz.

$$x_0=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$\left.\begin{matrix} f(0)<0 \\ f(10)>0 \end{matrix}\right\rangle [a_0,b_0]=[0,10] \qquad x_0=\frac{0\cdot 36-10\cdot(-64)}{36-(-64)}=\frac{640}{100}=6.4$$

$$f(0)=-64<0\ ,\quad f(10)=36>0\ ,\ f(6.4)=-23.04<0$$

$f(6.4)<10 \quad a_0=6.4 \quad b_0=10$ olduğundan

yeni kök $[x_0, b_0]$ = [6.4, 10] aralığındadır.

$$x_0=\frac{6.4\cdot 36+10\cdot 23.04}{36+23.04}=\frac{230.4+230.4}{59.04}=\frac{460.8}{59.4}=7.8048$$

ÖRNEK:

$y = x^3 - 5x - 7$ denkleminin kökünü (2,3) aralığında EPS= 0.001 alarak bulunuz.

İkinci iterasyon değerini bulunuz ?

ÖRNEK:

$y = x^3 - 5x - 7$ denkleminin kökünü (2,3) aralığında EPS= 0.001 alarak bulunuz.

$$c_1 = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} = 2.642857$$

$|f(c_1)| = |-1.656| \leq 10^{-3}$ şartı sağlanmadı o halde c_1 kök değil,

$f(a)f(c_1) > 0 \quad a = c_1$ alarak (c_1, b) aralığında işleme devam edilir.

$$c_2 = \frac{bf(c_1) - c_1 f(b)}{f(c_1) - f(b)} = 2.735635$$

$|f(c_2)| = |-0.99| \leq 10^{-3}$ şartı sağlanmadı o halde c_2 kök değil,

$f(c_1)f(c_2) > 0 \quad c_1 = c_2$ alarak (c_2, b) aralığında işleme devam edilir.

Regula Falsi Yöntemi

$$c_3 = \frac{bf(c_2) - c_2 f(b)}{f(c_2) - f(b)} = 2.746072$$

$|f(c_3)| = |-0.0237| \leq 10^{-3}$ şartı sağlanmadı o halde c_3 kök değil,

$f(c_3)f(c_2) > 0 \;\; c_2 = c_3$ alarak (c_3, b) aralığında işleme devam edilir.

$$c_4 = \frac{bf(c_3) - c_3 f(b)}{f(c_3) - f(b)} = 2.747202$$

$|f(c_4)| = |0.033| \leq 10^{-3}$ şartı sağlanmadı o halde c_4 kök değil,

$f(c_3)f(c_4) < 0 \;\; b = c_4$ alarak (c_3, c_4) aralığında işleme devam edilir.

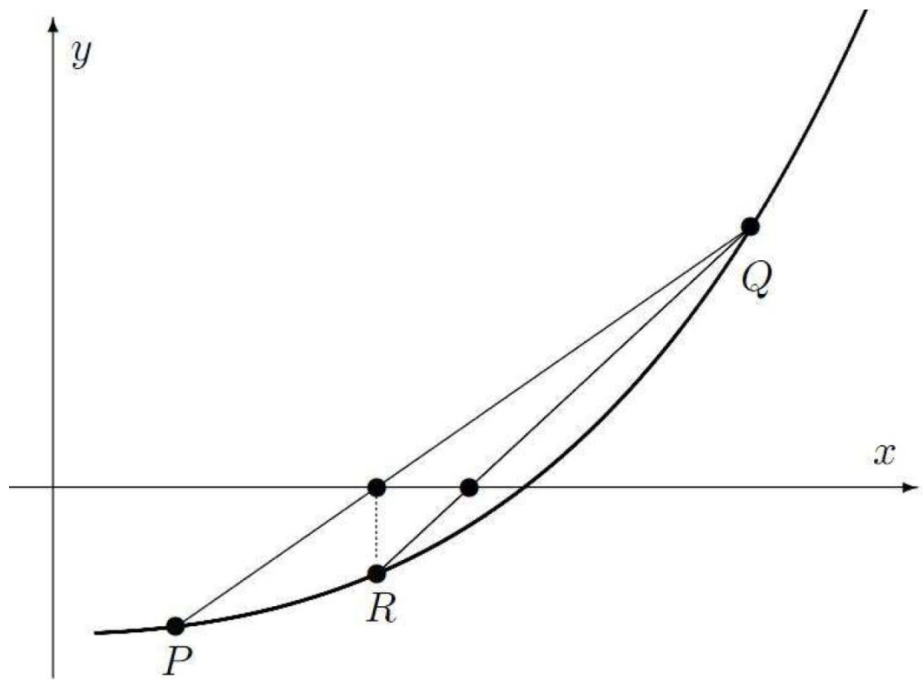
$$\boxed{c_5 = \frac{c_4 f(c_3) - c_3 f(c_4)}{f(c_3) - f(c_4)} = 2.747332}$$

$|f(c_5)| = |-0.000347| \leq 10^{-3}$ şartı sağlandı o halde c_5 kök.

Kirişler (Secant) Metodu

Bu metotta Newton Metodu'na karşılık, α köküne yakınlık $y=f(x)$ in grafiğine doğrular tarafından yaklaşma ile gerçekleşir.

Bu yüzden farz edelim ki x_0 ve x_1 α kökünün iki başlangıç değeri olsun. $(x_0, f(x_0))$ ve $(x_1, f(x_1))$ noktalarıyla belirlenen secant doğruları ile $y=f(x)$ grafiğine yaklaşılır. x_2 'yi $f(x)$ 'in kökü olarak gösterelim. x_2 ile α köküne daha iyi yaklaşabiliriz.



Secant doğrularında eğim formülünü kullanarak;

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}$$

x_2 'yi çözerek

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$$

elde ederiz. x_1 ve x_2 'yi kullanıp, bu yöntemi tekrarlayarak x_3 'ü elde ederiz. Bu şekild devam edersek genel formül;

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})},\ \ n\geq 1$$

elde edilir.

Buna secant (kirişler) metodu denir. Newton metoduna karşılık yakınsaklığı garant etmez, ama yakınsak olduğu zaman, genellikle hızı yarılama yönteminden daha iyidir.

Sayısal Analiz

7. Hafta

ÖRNEK Secant yöntemini kullanarak $f(x) = e^{-x} - x$ fonksiyonunun köklerini bulun. $x_{-1} = 0$ ve $x_0 = 1.0$ ilk tahminleriyle başlayın.

Çözüm.

Gerçek kök 0.56714329...

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

Birinci iterasyon:

$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1.00000$

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0.63212$

$$x_1 = 1 - \frac{-0.63212(0-1)}{1-(-0.63212)} = 0.61270 \qquad \varepsilon_t = \%8.0$$

İkinci iterasyon:

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0.63212$ (her iki tahmin de kökün aynı tarafındadır.)

$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$

$$x_2 = 0.61270 - \frac{-0.0708(1-0.61270)}{-0.63212-(-0.07081)} = 0.56384 \qquad \varepsilon_t = \%0.58$$

Üçüncü iterasyon:

$x_1 = 0.61270 \qquad f(x_1) = -0.07081$

$x_2 = 0.56384 \qquad f(x_2) = 0.00518$

$$x_3 = 0.56384 - \frac{0.00518(0.61270 - 0.56384)}{-0.07081-(-0.00518)} = 0.56717 \qquad \varepsilon_t = \%0.0048$$

Sayısal Analiz

7. Hafta

Örnek : $\sin x = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ denkleminin $(1.5\ ,\ 2.5)$ aralığındaki kökünü $\varepsilon = 0{,}0005$ hata oranı ile bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = \sin x - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ ve $f''(x) = -\sin x - \frac{1}{2}$ olduğuna göre;

$f(1{,}5)\, f(2{,}5) < 0$ ve

Böylece iterasyonun başlangıç değeri $x_0 = 1.5$ olarak seçilirse;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$ iterasyon

formülü kullanılarak, işlemler ε dan küçük oluncaya kadar devam ettirilirse;

i	x_i	$f(x_i)$
0	1,5	−0,435
1	1,811	−0,151
2	1,904	−0,038
3	1,927	$-8{,}75 \cdot 10^{-3}$
4	1,932	$-1{,}968 \cdot 10^{-3}$
5	1,933	$-4{,}406 \cdot 10^{-4}$

Böylece, $x = 1{,}933$ olarak bulunur.

Matlab Uygulama

Çalışma sorularını N.Raphson / R.Falsi / Secant yöntemlerini kullanarak seçtiğiniz 3 tanesini çözümleyiniz.

1) $x^3-2x-5=0$ denkleminin $x_0=2$ civarındaki kökünü N-R yöntemi ile bulunuz.

2) $f(x)=x^3-0,6x^2-13,2x-20.8$ fonks. bir kökünü N-R göre 0,01 den küçük hata ile bulunuz.

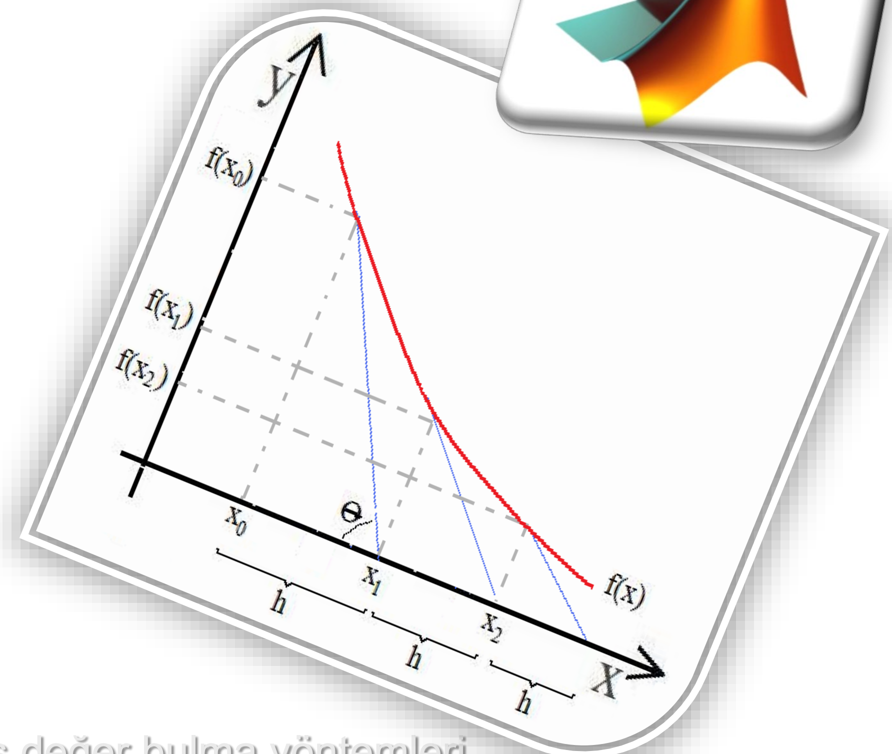
3) $x^3-3x-4=0$ denkleminin $[2,1 \, , \, 2,2]$ aralığındaki bir kökünü N-R yöntemi ile bulunuz. (iter. sayısı = 2)

4) $f(x)=x^6+5x^4-9x+1$ fonk. $[0,1]$ aralığında bir extramuma sahip olduğu biliniyor. Bu noktanın koordinatlarını $\varepsilon=0,01$ veya daha az hata ile bulunuz.

5) $x^3-5x^2-17x+20=0$ denklemini N-R. yöntemi ile kökünü bul. (iter. sayısı = 3)

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar



Sonraki Hafta :

Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri…