

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
METALURJİ VE MALZEME MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. Diferensiyel denklemlerin çözüm tanımından hareketle $y = (x^3 + c)e^{-3x}$ fonksiyonunun $y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.
2. $(2x + 3y)dx + (y - x)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.
3. $y' = p$ olmak üzere $y = xp + (1 + p^2)$ denkleminin çözümlerini bulunuz.
4. $y''' + 9y'' + 9y' = x^2e^{-3x}$ denklemini veriliyor. Bu denkleme ilişkin homojen kısma ait y_h çözümünü elde ediniz. Daha sonra ise y_p özel çözümünün belirsiz katsayılar metodu ile nasıl seçilmesi gerektiğini nedenleri ile belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.)

SÜRE: 70 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

Metaburji

1) $y = (x^3 + c)e^{-3x}$ fonksiyonunu ve

$$y' = 3x^2 e^{-3x} - 3e^{-3x}(x^3 + c) \quad \text{türevini verken}$$

denklemden yene yazalım.

$$3x^2 e^{-3x} - 3e^{-3x}(x^3 + c) + 3(x^3 + c)e^{-3x} = 3x^2 e^{-3x} \quad \text{oldu dan}$$

$y = (x^3 + c)e^{-3x}$ fonksiyonu $y' + 3y = 3x^2 e^{-3x}$ denkleminin
çözümüdür.

2) $(2x + 3y) dx + (y - x) dy = 0$ Homojen $y = vx$
 $dy = v dx + x dv$

$$(v^2 + 2v + 2) dx + x(v - 1) dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v - 1}{v^2 + 2v + 2} dv = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln(v^2 + 2v + 2) - 2 \arctan(v + 1) = C_1$$

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{ile}$$

$$\ln x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 2\right) - 2 \arctan\left(\frac{y}{x} + 1\right) = 0$$

$$3) \quad y = xp + (1+p^2) \quad (\text{Clairaut})$$

x 'e göre türev alalım.

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} (x + 2p) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + 1 + c^2} \quad \begin{array}{l} \text{Genel} \\ \text{Çözüm} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2p = 0 \\ y = xp + 1 + p^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = -\frac{x}{2} \\ y = x(-\frac{x}{2}) + 1 + (-\frac{x}{2})^2 \end{array}$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + 1 + \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$\boxed{y = 1 - \frac{x^2}{4}} \quad \begin{array}{l} \text{Aykırı} \\ \text{Çözüm} \end{array}$$

$$4) \quad y''' + 9y'' + 9y' = x^2 e^{-3x}$$

$$y''' + 9y'' + 9y' = 0 \quad r^3 + 9r^2 + 9r = 0$$

$$r(r^2 + 9r + 9) = 0 \quad r_1 = 0 \quad r_2 = r_3 = -3$$

$$\{1, e^{-3x}, x e^{-3x}\}$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x}$$

$$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C) e^{-3x}$$

↓

$$r_2 = r_3 = -3$$