Dr. Yüksel YURTAY

Sayısal Analiz

Matris ve Matris kavramı

Sayısal Analiz

3. Hafta

2. Sayfa

Dersimizin İçeriği

- Akış diyagramı örnek çalışma
- Matrisler
- Matris işlemleri
- Örnek akış diyagramı
- Matlab’ta şartlı deyimler
- Matlab’ta döngüsel işlemler

Akış diyagramı geliştirme …1

Klavyeden girilen 10 adet sayıdan

1. Pozitif olanların toplamını
2. Negatif olanların toplamını
3. Pozitif ve negatif sayıların toplamını

bulan akış diyagramını çiziniz.

Akış diyagramı geliştirme …2

Klavyeden girilen 10 adet sayıdan

1. Pozitif olanların toplamı, sayısı
2. Negatif olanların toplamı sayısı
3. Toplam sayıyı
4. Girilen sıfırların toplam sayısını

bulan akış diyagramını çiziniz.

Akış diyagramı geliştirme …3

Klavyeden girilen 10 adet sayıdan

1. En büyüğünü, Baştan sırasını
2. En küçüğünü, Sondan sırasını
3. Girilen sıfırların sayısını

bulan akış diyagramını çiziniz.

TANIM: *m* tane satır ve *n* tane sütun oluşturacak biçimde dizilmiş *mn* tane sayının oluşturduğu tabloya bir ***m*** × ***n*** **matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1×3 satır matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

2×1 sütun matrisi $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

İki matris toplamı : $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

İŞLEMLER :

A, B ve *C* , büyük lükleri aynı olan matrisler olmak üzere

A+(B+C)=(A+B)+C (Birleşme)
ve
A+B=B+A (Değişme) özellikleri vardır.

Skalerle çarpılması $s\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sa & sb \\ sc & sd \end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\cdot 3 + (4)\cdot 1 + 3\cdot(-2) = 4$$

Matris Çarpımı

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ & & \dots & & \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı aynı

Matrislerinin çarpımını elde etmek için

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ & & \dots & & \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & & \dots & \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ & & \dots & & \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$, $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$ işlemini yapmak yeterlidir.

Matris çarpımının birleşme özelliği vardır:

A, B ve *C* çarpımı gerçekleşecek büyüklükte matrisler ise **A (B C) = (A B) C** dir.

Matris çarpımının değişme özelliği yoktur: **AB ≠ BA** olan matrisler vardır.

Matris çarpımının toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır:

A, B ve C matrisleri için, **A (B + C) = (A B) + (A C)** , **(A + B) C = (A C) + (B C)** eşitlikleri geçerlidir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(A^T)^T=A$, $(sA)^T= s\,A^T$, $(A+B)^T= A^T+B^T$, $(AB)^T= B^T A^T$
özelliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

Transpozesi kendine eşit olan kare matrise **simetrik matris** denir. **($A=A^T$)**

Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise **kare matris** adı verilir

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrisin $\boldsymbol{a_{11}}$ **,** $\boldsymbol{a_{22}}$ **, . . . ,** $\boldsymbol{a_{nn}}$ girdilerine matrisin **köşegeni** denir.

Köşegen elemanlarından başka diğer elemanları sıfır olan kare matrise **köşegen matris** denir.

Birim matris bir köşegen matrisdir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kare bir matrisin köşegeninin üstündeki elemanlar sıfırsa matrise **alt üçgensel ma**tris, köşegeninin altındaki elemanlar sıfırsa matrise **üst üçgensel matris** denir.

Alt Üçgensel Matris $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$ Üst Üçgensel Matris $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ & \dots & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

Köşegen girdilerinin her biri 1, geri kalan tüm girdileri 0 olan matrise **birim matris** adı verilir. Her m× n A matrisi için **A I_n = A = I_m A** dir.

I_n , n× n birim matris

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A (A^{-1}) = (A^{-1}) A = I_n , A^{-1} A matrisinin tersi denir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinin olup olmadığını araştıralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A = (aij) nxn kare matrisinde;
bir aij ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) elemanının bulunduğu i. satır ile j. sütunun çıkarılmasıyla elde edilen (n-1). mertebeden alt kare matrisin determinantına, A matrisinin aij elemanının **minörü denir .**

aij elemanının minörü **Mij** ile gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisinde,

$a_{11} = 1$ elemanının minörü $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 1 - ((-2) \,.\, 1) = 4,$

$a_{32} = -2$ elemanının minörü $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, 1 - 0 \,.\, 2 = 1$ dir

A = (aij) nxn matrisinde, bir aij elemanının minörü olan Mij nin $(-1)^{i+j}$ ile çarpılmasıyla elde edilen sayıya, aij öğesinin **kofaktörü (eş çarpanı) denir.**

aij nin kofaktörü **Aij** ile gösterilir.

verilen A matrisinde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisinde,}$$

a11 = 1 elemanının kofaktörü $A11 = (-1)^{1+1} . M11 = 1 . 4 = 5$,

a32 = -2 elemanının kofaktörü $A32 = (-1)^{3+2} . M32 = (-1) . 1 = -1$ dir.

A matrisinin determinantının **i.inci satıra göre açılımı**

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=a_{i1}A_{i1}+a_{12}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} \qquad \text{denir.}$$

Benzer şekilde, A matrisinin determinantı bir sütunun kofaktörlerine göre de hesaplanabilir.

$1 \leq j \leq n$ olmak üzere, **j.inci sütuna göre açılım**

$$\det(A)=\sum_{i}^{n} a_{ij}A_{ij}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

formülüyle verilir.

A matrisinin determinantı, bu matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) elemanların kofaktörleriyle çarpılıp, toplanmasıyla bulunur.

Bu yöntemi ard arda uygulayarak n. mertebeden bir kare matrisin determinantını 2. mertebeden kare matrislerin determinantlarına indirgeyebilmekteyiz.

Uygulama :

Bir matrisinin determinantını kofaktörler yardımıyla hesaplayalım.
A gibi bir matrisin determinantını hesaplamak için herhangi bir satır veya sütunu belirleyebiliriz.

örnekte 2. sütun belirlenmiş olsun;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2}\ M_{22} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \end{aligned}\right\} \quad \det(A) = 1 \,.\, 7 + 0 \,.\, (-7) + 5 \,.\, (-7) = -28$$

bulunur.

Kofaktör matrisin transpozesine de **ek (adjoint)matris** denir. AdjA=(kofaktör A)^T dir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *iken* kofaktör $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ idi. Buna göre Adj $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ dir

Ters matrisin elde edilmesinde ek matrisden yararlanılabilir. Şöyleki:

$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$ ile bulunabilir. Örneğin

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *iken* $A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ dir.

Determinantının değeri sıfıra eşit olan kare matrise **Singüler Matris** denir

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad |A| = \left|\begin{bmatrix} 6 & 21 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right| = 6.7 - 21.2 = 0$$ olduğundan singülerdir.

Köşegen veya köşegene göre simetrik olacak şekilde belli sıraları sıfırdan farklı olan matrise **Band Matris** denir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpozesi tersine eşit olan kare matrise de ortogonal matris denir.

Bir A matrisi ortogonal özelliğe sahip ise $A^T=A^{-1}$ şartı sağlanıyor demektir.

Matrisler

$A^T = A^{-1}$ => **Ortogonal matris**

A kare matris ve det A = 0 => **Singüler matris**

Band matris =>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}$$

Uygulama

$$a_{ij}\left\{\begin{array}{ll} \text{Üst} & i\leq j \\ \text{alt} & i\geq j \\ \text{köşegen} & i=j \end{array}\right\} \quad k=\left\{\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.$$

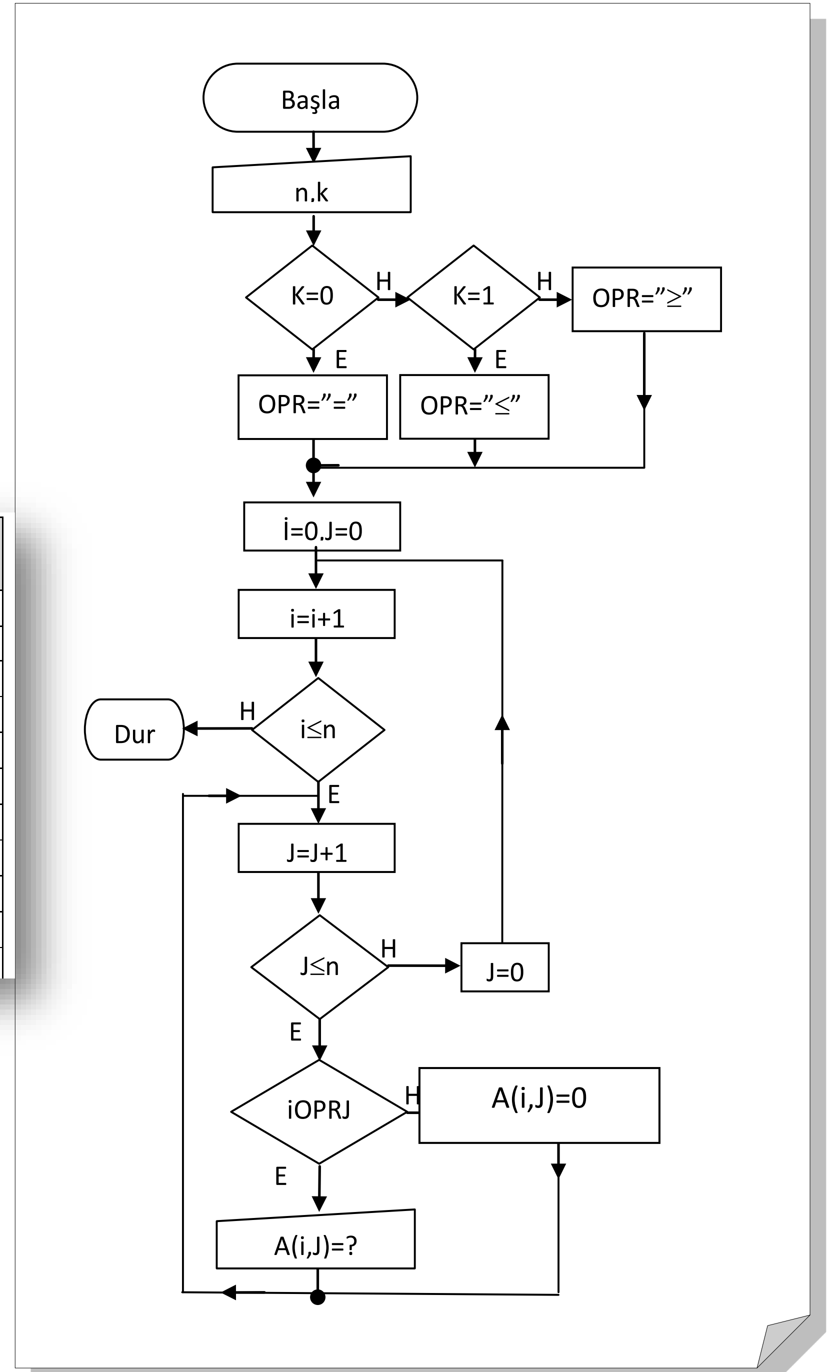
Klavyeden girilen 0,1,-1 değerlerine karşılık üst , alt veya Köşegen matris oluşturan programın akış diyagramını çiziniz.

Uygulama

$$a_{ij}\begin{cases}\text{Üst} & i\leq j\\ \text{alt} & i\geq j\\ \text{köşegen} & i=j\end{cases}\qquad k=\begin{cases}1\\ -1\\ 0\end{cases}$$

OPR	n	k	i	J	A(i,J)
=	3	0	0	0	
			1	1	3
			2	2	0
			3	3	0
			4	4	0
				0	5
				1	0
				2	
				3	
				4	
				0	

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ \square & \square & \square\end{bmatrix}$$



Haftalık Ödev : ***$n \times n$ boyutlarındaki A matrisinin diyagonal olarak ikiye bölen programın akış diyagramını çiziniz.***

A=B+C

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & & & \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ & & \dots & \end{bmatrix}$$

Uygulamalar

Matrisler üzerine çalışma soruları :

1) n boyutlu birim matrisin akış diyagramını çiziniz ?
2) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin transpozunu ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
3) Klavyeden girilen nxn boyutlu iki matrisin toplamını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
4) Klavyeden girilen nxn boyutlu iki matrisin çarpımını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
5) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin klavyeden girilen herhangi bir değerle çarparak sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
6) Klavyeden girilen mxn boyutlu bir matrisin klavyeden girilen herhangi bir değere bölerek sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
7) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisin determinantını alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
8) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisin tersini alıp sonuç matrisi ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
9) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi alt üçgensel matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
10) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi üst üçgensel matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?
11) Klavyeden girilen nxn boyutlu bir matrisi alt üçgensel ,üst üçgensel veya köşegen matris olarak ekrana yazan programın akış diyagramını çiziniz ?

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar