Tarih: 02/01/2020
Süre: 80 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

SAÜ Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü
Diferensiyel Denklemler – Yıl Sonu Sınavı

İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dileriz.

1. $xy'+y=x^2y^2$ Bernoulli denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} y^{-1} &= z \\ -y^{-2}y' &= z' \end{aligned}} \quad 5$$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = x$$

$$\boxed{z' - \frac{1}{x}z = -x \text{ (lineer)}} \quad 5$$

$$\lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x}z\right)' = -1} \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}z = -x + C \Rightarrow \boxed{z = -x^2 + Cx} \quad 5$$

$z = y^{-1}$ ile

$$\boxed{y^{-1} = cx - x^2} \quad 5$$

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

2. $x^2y''-3xy'+4y=6x^2\ln x+\dfrac{6}{x}$ Cauchy-Euler denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) $x=e^t$ $\quad y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ $\quad y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$ ile

denklem $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=6te^{2t}+6e^{-t}}$ 10 ye dönüşür

$r^2-4r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=2$ $\quad \boxed{y_h=(c_1+c_2t)e^{2t}}$ 5

$y_p=t^2(At+B)e^{2t}+ce^{-t}$ ile $\quad \boxed{y_p=t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 5

$\boxed{y_g=(c_1+c_2t)e^{2t}+t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 2 $t=\ln x$ ile

$\boxed{y_g=(c_1+c_2\ln x)x^2+x^2(\ln x)^3+\frac{2}{3x}}$ 3

3) $r^2-2r+1=0$ $\quad r_1=r_2=1$ $\quad \boxed{y_h=c_1e^x+c_2xe^x}$ 5

$\boxed{y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x}$ 3

$$\boxed{\begin{aligned}c_1'e^x+c_2'xe^x&=0\\ c_1'e^x+c_2'(e^x+xe^x)&=\frac{e^x}{x^2}\end{aligned}}$$ 5

$\boxed{c_2=-\frac{1}{x}}$ 5

$\boxed{c_1=-\ln x}$

$\boxed{y_p=-e^x-e^x\ln x}$ 2

$\boxed{y_g=c_1e^x+c_2xe^x-e^x-e^x\ln x}$ 5

4. $\begin{array}{l} y'' + y = x^2 + 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = -1 \end{array}$ probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$\left(L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)\right)$

$$L\{y'' + y\} = L\{x^2 + 2\}$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{-1} + Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)}}$$ 10

$$\frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2+1}$$ 5

$A = B = 0 \quad C = 2 \quad D = 1 \quad E = -1$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)}\right\}$$ 5

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x^2 + \cos x - \sin x}$$ 5

5. $y'' - xy' + 2y = 0$ denkleminin $x=0$ noktası civarında $\left(y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$ seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ adi nokta olup

$$\left.\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 5$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

denklemde yerlerine yazılırsa

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) - (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots) + \quad 5$$

$$+ (2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots) = 0$$

$$(2a_2 + 2a_0) + (6a_3 - a_1 + 2a_1)x + (12a_4 - 2a_2 + 2a_2)x^2 + \quad 5$$

$$+ (20a_5 \cancel{+} 3a_3 + 2a_3)x^3 + \cdots = 0$$

$$\left\{\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} a_1 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= -\frac{1}{120} a_1 \end{aligned}\right. \quad 5$$

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 \cancel{+} \frac{1}{6} a_1 x^3 - \frac{1}{120} a_1 x^5 + \cdots$$

$$\boxed{y = a_0(1 - x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)}$$

5