05/08/2019

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

1. $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $(2x+1)y''-(4x+4)y'+4y=0$ denklemi için önce $y=e^{ax}$ şeklinde bir özel çözüm araştırınız. Daha sonra ise bu özel çözüm yardımıyla genel çözümünü bulunuz.

3. $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 2, & x\geq 3\end{cases}$ olmak üzere $\begin{array}{l} y''+y=f(x) \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{array}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

SÜRE: 80 DAKİKADIR

BAŞARILAR DİLERİZ

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-...-y^{(n-1)}(0)$

1) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 1$ $\quad \boxed{y_h = c_1 + c_2 e^{x}}$ 10

$y_p = c_1(x).1 + c_2(x)e^{x}$

$c_1'.1 + c_2' e^{x} = 0$ $\qquad c_1' = -e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$c_1'.0 + c_2' e^{x} = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $\qquad c_2' = e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$\boxed{c_1 = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}}$ 5 $\qquad \boxed{c_2 = \frac{1}{2}\left[\arcsin e^{x} + e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\right]}$ 5

$y_p = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + \frac{1}{2}e^{x}\left[\arcsin e^{x} + e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}\right]$ 5

$y_g = y_h + y_p$

2) $(2x+1)y'' - (4x+4)y' + 4y = 0$ $\qquad y = e^{ax} \Rightarrow a = 2$

$\boxed{y_1 = e^{2x}}$ 5

$y = e^{2x}.u$ ile 5

$(2x+1)u'' + 4xu' = 0$ $\qquad u' = v \quad u'' = v'$ ile

$(2x+1)v' + 4xv = 0$ 5 $\Rightarrow$ $v = c_1(2x+1)e^{-2x}$ 5

$\boxed{u = c_1\int(2x+1)e^{-2x}\,dx + c_2}$

$\boxed{y = e^{2x}.u}$ 5

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0$ $\quad x = 0$ adi nokta

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$ 5

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots) + (a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + 4a_4 x^5 + \dots)$$ 10

$$-(4a_0 x + 4a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + \dots) = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + (12a_4 - 3a_1)x^2 + (20a_5 - 2a_2)x^3 + \dots = 0$$

$$a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{2}{3}a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{4}a_1 \qquad a_5 = \frac{1}{10}a_2 = 0 \dots$$ 5

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{2}{3}a_0 x^3 + \frac{1}{4}a_1 x^4 + \dots$$

$$= a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \dots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$$ 5

---

4) $y'' + y = f(x)$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}$

$$L[y'' + y] = L[f(x)]$$

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2}{s}e^{-3s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}}$$ 10

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}\right\} = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ f(x-3), & x \geq 3 \end{cases}$$ 5

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} \Rightarrow f(x) = 2 - 2\cos x$$ 5

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 2 - 2\cos(x-3), & x \geq 3 \end{cases}$$ 5

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+1} = 0$

$n \to n+2 \qquad n \to n-1 \qquad n \to n-1$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n = 0$

$2a_2 + 6a_3 x - 4a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-5)a_{n-1}\right]x^n = 0$

$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \qquad 6a_3 - 4a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3}a_0$

$a_{n+2} = -\frac{(n-5)}{(n+1)(n+2)}a_{n-1} \qquad n \geq 2$

$n=2 \quad a_4 = \frac{3}{12}a_1 = \frac{1}{4}a_1$

$n=3 \quad a_5 = \frac{2}{20}a_2 = \frac{1}{10}a_2 = 0$

$n=4 \quad a_6 = \frac{1}{30}a_3 = \frac{1}{45}a_0$

$n=5 \quad a_7 = 0$

$n=6 \quad a_8 = 0 \quad \dots$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$y = a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \dots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$