15/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

1. $y'+e^{x}-3y+e^{-x}y^{2}=0$ Riccati denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^{x}$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

2. $p^{2}x=2yp-3$ denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

3. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $x^{2}y''+xy'+4y=2x\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

5. $y''+2xy'+xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

---

6. $f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 3, & x\geq 2\end{cases}$ olmak üzere $\begin{matrix}y''+4y=f(x)\\ y(0)=0,\, y'(0)=0\end{matrix}$ probleminin çözümünü

Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^{n}Y(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y' + e^x - 3y + e^{-x} y^2 = 0$ $\quad y_1 = e^x$

$y = e^x + \frac{1}{u}$ $\quad y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$ 5 ile denklem

$u' + u = e^{-x}$ 5 (lineer) denklemine dönüşür.

$\lambda = e^x$ olup $(e^x u) = 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-x}(x+c)}$ 5 5

$$\boxed{y = e^x + \frac{e^x}{x+c}}$$ 5 Genel Çözüm

---

2) $p^2 x = 2yp - 3$ $\quad y = x\frac{p}{2} + \frac{3}{2p}$ (Lagrange) $(p \neq 0)$

x'e göre türev alalım.

$p = \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{3}{p^2}\right)$ 5 $\quad p = 0$ için aykırı çözüm yok 5

$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = -\frac{3}{p^3}$ (lineer) 5

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} + cp \\ y = \frac{x}{2}p + \frac{3}{2p} \end{cases}$$ Genel çözümün parametrik gösterimi 10

3) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2$ 5

$\boxed{y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}}$ 5 $\quad y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$

$$\left.\begin{array}{l} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^x + c_2'(2e^{2x}) = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_1' = -\dfrac{e^x}{e^x+1}, \quad c_2' = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

5 8

$\Rightarrow \boxed{c_1 = -\ln(1+e^x)}$ $\quad \boxed{c_2 = -\ln(1+e^{-x})}$ 5

$\boxed{y_p = -\ln(1+e^x)\, e^x - \ln(1+e^{-x})\, e^{2x}}$ 5

$\boxed{y_g = y_h + y_p}$

---

4) $x^2 y'' + x y' + 4y = 2x \ln x$ Cauchy-Euler denklem

$x = e^t$ ile denk. e dönüşür. $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2te^t$ 5

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \mp 2i$ $\quad \boxed{y_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}$ 5

$y_p = (At + B)e^t$ 5 olup $A = \dfrac{2}{5}$ $\quad B = -\dfrac{4}{25}$ olarak bulunur.

$\boxed{y_p = \left(\dfrac{2}{5}t - \dfrac{4}{25}\right)e^t}$ 5

$\boxed{y_g = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) + \dfrac{2}{5} x \ln x - \dfrac{4}{25} x}$ 5

5) $y''+2xy'+xy=0$ $x=0$ adi nokta

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$

$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots$ 5

$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots$

$(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots)+(2a_1x+4a_2x^2+6a_3x^3+\cdots)+$
$+(a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots)=0$

$2a_2+(6a_3+2a_1+a_0)x+(12a_4+4a_2+a_1)x^2+(20a_5+6a_3+a_2)x^3+\cdots=0$ 5

$a_2=0$

$6a_3+2a_1+a_0=0 \Rightarrow \boxed{a_3=-\frac{1}{6}a_0-\frac{1}{3}a_1}$

$12a_4+4a_2+a_1=0 \Rightarrow \boxed{a_4=-\frac{1}{12}a_1}$ 5

$20a_5+6a_3+a_2=0 \Rightarrow \boxed{a_5=\frac{1}{20}a_0+\frac{1}{10}a_1}$

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 5

$=a_0+a_1x+\left(-\frac{1}{6}a_0-\frac{1}{3}a_1\right)x^3-\frac{1}{12}a_1x^4+\left(\frac{1}{20}a_0+\frac{1}{10}a_1\right)x^5+\cdots$

$y=a_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{20}x^5+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots\right)$

5

3

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad y'' + 4y = f(x)$

$y(0) = y'(0) = 0$

$$L\{y'' + 4y\} = L\{f(x)\}$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s}$$

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s}}$$ 10

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s}\right\} = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ f(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+4)}\right\}$$

$$\frac{3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$A = \frac{3}{4}$ $\quad B = -\frac{3}{4}$ $\quad C = 0$ 5

$$f(x) = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+4}\right\} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2x$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2x-4), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5