Sayısal Analiz

1

Eğri uydurma, ara değer
ve
dış değer bulma yöntemleri

Ders İçeriği

- Kuadratik Enterpolasyon
- George-Newton Enterpolasyonu

Kuadratik Enterpolasyon :

Fonksiyonun farklı üç noktadaki değeri biliniyorsa, bu durumda $x \in [x_0, x_k]$ aralığındaki herhangi bir x noktasındaki değerinin hesaplanması bu üç noktadan geçen eğrinin ikinci dereceden bir yaklaşım polinomu yardımıyla yapılabilir. İkinci derecen bir polinom yardımıyla yapılan enterpolasyon yöntemine ise kuadratik enterpolasyon denir

Üç noktanın seçiminin (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) olduğu varsayıldığında polinomu

$P(x)=a+b(x-x_0)+c(x-x_0)(x-x_1)$ yazabiliriz.

Belli olan üç noktanın(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) polinomda yerine yazılarak a,b,c katsayılarının hesaplanması gerekecektir. Dolayısıyla hesaplanan katsayılar;

$$a = y_0, \qquad b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad c = \frac{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}$$

bulunur. Katsayılar polinomda yerine yazılarak düzenlendiğinde ifade ;

$$P(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1) \quad \text{bulunur.}$$

Kuadratik Enterpolasyon :

Örnek : ln1=0, ln3= 1,098612288 ln4=1,386294361 değerlerinden hareketle ln2.6 değerini

kuadratik enterpolasyon yardımıyla hesaplayalım.

$$a = y_0 = 0,$$

$$b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1{,}098 - 0}{3 - 1} = 0{,}549306144,$$

$$c = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) / (x_2 - x_0) = \left(\frac{1{,}386 - 1{,}098}{4 - 3} - \frac{1{,}098 - 1}{3 - 0}\right) / (4 - 0) \quad = 0{,}06370282775$$

$$P(x) = 0 + 0{,}549306144(x - x_0) + 0{,}06370282775(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P(2.6) = 0 + 0{,}549306144(x - x_0) + 0{,}06370282775(x - x_0)(x - x_1)$$

$P(2.6) = 1{,}006295485$ (Gerçek değer ln2.6 = 0,955511445)

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

$a_1 = f(x_1)$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$a_3 = \frac{f(x_3) - a_1 - a_2(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

ÖRNEK :

x	1	2	3	4
$F(x)$	1	8	27	64

$f(2{,}2) =$?

Tablo değerleri kullanılarak Gregory-Newton yöntemiyle ikinci dereceden bir polinom için, önce [1, 1] kullanılarak,

$a_1 = f(x_1) = 1$ ve [2, 8] kullanılarak denklemden,

$$a_2 = \frac{8-1}{2-1} = 7$$ ve son olarak [3, 27] değeri kullanılarak denklemden,

$$a_3 = \frac{27-1-7(3-1)}{(3-1)(3-2)} = 6$$ şeklinde katsayılar elde edilir.

Katsayılar yerine yazılarak,

$P(x) = 1 + 7(x-1) + 6(x-1)(x-2)$ olur.

Denklem düzenlendiğinde enterpolasyon polinomu,

$\boxed{P(x) = 6 - 11x + 6x^2}$ olarak elde edilmiştir.

$x = 2.2$ için $P(2.2) = 10.84$ değeri elde edilir.

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

Bir **f (x)** fonksiyonunun **x_1, x_2, K, x_{n+1}** gibi aralıkları eşit olan ayrık noktalarda bilinen **$f(x_1)$, $f(x_2)$, K , $f(x_{n+1})$** değerleri varsa ve bu **$f(x)$** fonksiyonunun, enterpolasyon fonksiyonu **P(x)**'i veren Gregory-Newton enterpolasyon yönteminde, **n.** dereceden bir enterpolasyon polinomu

$$P(x)=a_1+a_2(x-x_1)+a_3(x-x_1)(x-x_2)+a_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\ldots$$

$$+a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})+a_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$ şeklinde ifade edilmiştir.

Buradaki bilinmeyen katsayılardan **a_1** için, eşitlikte **x** ve **P(x)** yerine sırasıyla **x_1** ve **$f(x_1)$** değerleri yazılırsa, $a_1 = f(x_1)$ olarak elde edilir.

a_2 bilinmeyen katsayısının çözümü için, eşitlikte **x** ve **P(x)** yerine sırasıyla **x_2** ve **$f(x_2)$** değerleri yazılırsa,

$$a_2=\frac{f(x_2)-a_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$ şeklindedir.

Elde edilen **a_1** ve **a_2** değerleri ile x_3 ve **$f(x_3)$** kullanılarak **a_3** için denklemden,

$$f(x_3)=a_1+a_2(x_3-x_1)+a_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$ bulunur,

buradan **a_3** çekilerek; $$a_3=\frac{f(x_3)-a_1-a_2(x_3-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$ şeklinde elde edilir.

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

Benzer şekilde devam edilerek ;

$$\mathbf{f(x_n) = a_1 + a_2(x_3 - x_1) + \cdots + a_n(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

$$\mathbf{a_n = \frac{f(x_n) - a_1 - a_2(x_3 - x_1) + \cdots}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}}$$ şeklindedir.

Eşit aralıklı noktalarda fonksiyon değerlerinin belli olması durumunda formüller biraz daha basitleşecektir. $x_0,\ x_1 = x_0 + h$ gibi iki noktanın verilmesi durumunda

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{(1!)h}$$ veya $P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$ yazılabilir.

$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$ gibi n+1 nokta verilmesi durumunda ifade;

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{(1!)h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{(2!)h^2} + \ldots$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})\frac{\Delta^k f(x_0)}{(k!)h^k} + H_k$$

veya

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})}$$ olur.

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

ÖRNEK:

x	0	1	2
y	1	2	4

x=0.5 için P(x)=?

İleri fark tablosu,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	1	1	1
1	2	2	
2	4		

şeklinde elde edilir. Tablo değerleri formüle uygulandığında,

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} x(x-1)$$

$$\boxed{P(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x(x-1) \quad = \quad \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 1}$$

$$P(0.5) = 1.37$$

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

ÖRNEK:

x	2	4	6	8	10
y	10	50	122	226	362

Yukarıdaki tabloyu kullanarak enterpolasyon polinomunu ve x=3 noktasındaki değerini bulunuz.

İleri fark tablosu,

h = 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	10	40	32	0
4	50	72	32	0
6	122	104	32	
8	226	136		
10	362			

şeklinde elde edilir.

Tablo değerleri formüle uygulandığında,

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P(x) = 10 + \frac{40}{2}(x-2) + \frac{32}{2!\,2^2}(x-2)(x-4)$$

$$P(x) = 4x^2 - 4x + 2 \dashrightarrow P(3) = 26$$

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

ÖRNEK:

x	-1	0	3	8	15	24
y	2	1	10	65	226	577

Yukarıdaki tabloyu kullanarak enterpolasyon polinomunu bulunuz.

Değişkenin adım aralığı sabit olmadığı için x , z 'nin fonksiyonu olarak tanımlanır. x= $f(z)$

İleri fark tablosu,

z	x	Δx	$\Delta^2 x$
0	-1	1	2
1	0	3	2
2	3	5	2
3	8	7	2
4	15	9	
5	24		

şeklinde elde edilir.

Tablo değerleri formüle uygulandığında, *değişken x* ve fonksiyon *y* için formül,

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} x(x-1)$$ olacaktı,

değişken z ve fonksiyon x için aynı ifade

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

$$f(z) = x_0 + \Delta x_0 z + \frac{\Delta^2 x_0}{2!} z(z-1)$$ şeklinde ifade edilir.

Tablo değerleri yerine yazıldığında,

$$x = f(z) = -1 + z + z(z-1) = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \sqrt{x+1}}$$

değişken dönüşüm ifadesi elde edilir.

z değişkeni ve y fonksiyonu için ileri fark tablosu,

z	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	2	-1	10	36	24
1	1	9	46	60	24
2	10	55	106	84	
3	65	161	190		
4	226	351			
5	577				

İleri Farklar Enterpolasyon formülü sadece ***sabit adım aralıklı*** değişkenli problemlere uygulanabilir. Adım aralığının sabit olmadığı durumlarda, değişken dönüşümü yapılarak adım aralığı sabit hale getirildikten sonra yöntem uygulanabilir.

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

Formül z değişkeni ve y fonksiyonu için düzenlendiğinde,

$$P(z) = y_0 + \Delta y_0 z + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} z(z-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} z(z-1)(z-2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} z(z-1)(z-2)(z-3)$$

$$\boxed{P(z) = 2 - z + \frac{10}{2!} z(z-1) + \frac{36}{3!} z(z-1)(z-2) + \frac{24}{4!} z(z-1)(z-2)(z-3)}$$

parantez çarpımları yapılarak,

$P(z) = z^4 - 2z^2 + 2$ ara enterpolasyon fonksiyonu elde edilir.

Değişken dönüşüm ifadesi yerine yazıldığında x değişkenine bağlı enterpolasyon polinomu,

$$P(x) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2$$

$\boxed{P(x) = x^2 + 1}$ olarak elde edilir.

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

Uygulama 1:

Bir deney sonucunda elektrik devresinin zamana göre güc değişimi tabloda verilmiştir, Gücü zamana bağlayan polinomu bulunuz.(t=5 İçin güç =?)

t_i	$P(t_i)$
0	0
2	24
4	80
6	168
8	288

Gregory-Newton Enterpolasyonu :
(İleri enterpolasyon için Newton Formülü) :

Uygulama 1:

Bir deney sonucunda elektrik devresinin zamana göre güc değişimi tabloda verilmiştir, Gücü zamana bağlayan polinomu bulunuz.(t=5 İçin güç =?)

$$F(x) = f_0 + (x-x_0)\frac{\Delta f_0}{h} + (x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f_1}{2!\cdot h^2}$$

$$P(t) = 0 + (t-0)\frac{24}{2} + (t-0)(t-2)\frac{32}{2\cdot 2^2}$$

$$P(t) = 4t^2 + 4t$$

$$P(5) = 120$$

t_i	$P(t_i)$	ΔP_i	$\Delta^2 P_i$
0	0	24	32
2	24	56	32
4	80	88	32
6	168	120	
8	288		

Problemler

a)

x	1	2	3	4
y	1	3	4	3

b)

x	1	2	3	4
y	8	5	4	0

c)

x	1	2	3	4
y	2	3	3	2

ç)

x	1	2	3	4	5
y	2	3	3	2	3

Kaynaklar

Sayısal Analiz
(S.Akpınar)
Mühendisler için Sayısal Yöntemler
(Steven C.Chapra&RaymontP.Canale)
Nümerik Analiz
(Schanum’s outlines-Nobel)