SAYISAL ANALIZ

Ara Değer Bulma Yöntemleri

Dr. Yüksel YURTAY

Ders İçeriği

- Polinom Enterpolasyonu
- Lagrange Enterpolasyonu
- Örnek Uygulamalar

Polinom Enterpolasyonu
(Ara Değer Bulma)

Bir fonksiyonun sonlu sayıdaki $x_0, x_1 \ldots, x_n \in \mathrm{R}$ noktalarında aldığı $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ değerleri bilinsin (fonksiyonun kendisi bilinmiyor). Bu noktalardan geçen *n*. dereceden bir tek,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

polinomu vardır ($i = 0, 1, 2 \ldots, n$ için $P_n(x_i) = f(x_i)$). $P_n(x)$ polinomu elde edilip bir x noktasındaki $f(x)$ değerinin yerine $P_n(x)$ alınırsa, bilinmeyen $f(x)$ değeri yaklaşık $f(x) \approx f(x) = P_n(x)$ olarak hesaplanmış olur. Bu yaklaşıma **polinom enterpolasyonu** (polinom kullanarak ara değer bulma) denir.

$(x_0, f(x_0))$

$(x_1, f(x_1))$

$\ldots$

$(x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen *n*. dereceden $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

polinomunu belirlemek için $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2 \ldots, n$ yani,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Polinom Enterpolasyonu (Ara Değer Bulma)

denklem siteminden $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Bu lineer denklem sistemi çözülerek bu katsayılar belirlenebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n^n) \end{bmatrix}$$

denklem sistemindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi Vandermonde matrisi olarak bilinir ve singüler değildir.

Polinom Enterpolasyonu
(Ara Değer Bulma)

Örnek

x	3,2	2,7	1	4,8	5,6
y	22	17,8	14.2	38.3	51.7

Verilen noktalardan hareketle bu noktaların ilk dördünden üçüncü dereceden bir polinom (kübik) geçirmek mümkünmüdür. Eğer mümkünse polinomu bularak $P(3) = ?$ hesaplayınız

Polinom Enterpolasyonu
(Ara Değer Bulma)

Örnek

x	3,2	2,7	1	4,8	5,6
y	22	17,8	14.2	38.3	51.7

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$a_0 + a_1(3,2) + a_2(3,2)^2 + a_3(3,2)^3 = 22$$
$$a_0 + a_1(2,7) + a_2(2,7)^2 + a_3(2,7)^3 = 17,8$$
$$a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 14,2$$
$$a_0 + a_1(4,8) + a_2(4,8)^2 + a_3(4,8)^3 = 38,3$$

şeklinde dört denklem sistemi elde edilir; sistem çözülerek ...

$a_0 = 24,3499$; $a_1 = -16,1177$; $a_2 = 6,4952$; $a_3 = -0,5275$

dolayısıyla polinomumuz.

$$P(x) = 24,3499 + 16,1177\,x + 6,4952\,x^2 - 0,5275\,x^3$$

şeklindedir. Buna göre

$P(3) = 20,212$ olarak elde edilir.

Polinom Enterpolasyonu
(Ara Değer Bulma)

Örnek 1: Sinüs fonksiyonu için

$x_0 = 0 \qquad \sin(x_0) = \sin(0) = 0 \qquad (0,0)$

$x_1 = \pi/2 \qquad \sin(x_1) = \sin(\pi/2) = 1 \qquad (\frac{\pi}{2},1)$

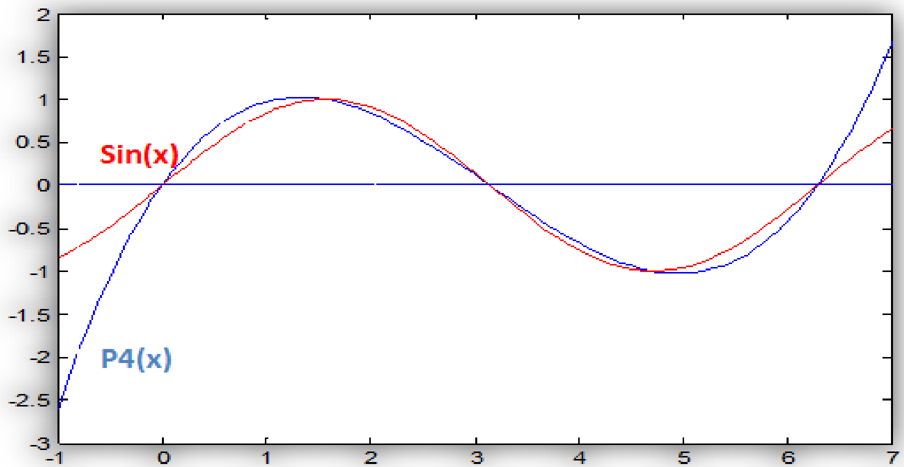
$x_2 = \pi \qquad \sin(x_2) = \sin(\pi) = 0 \qquad (\pi,0)$

$x_3 = 3\pi/2 \qquad \sin(x_3) = \sin(3\pi/2) = -1 \qquad (\frac{3\pi}{2},-1)$

$x_4 = 2\pi \qquad \sin(x_4) = \sin(2\pi) = 1$ olmak üzere, $(2\pi,1)$ noktalarından geçen 4. derece

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ polinomunu bulmaya çalışalım.

xi	fxi
0	0
1.5708	1
3.1416	0
4.7124	-1
6.2832	0



Fonksiyonların katsayıları

```
>> A=[ones(5,1) xi     xi.^2     xi.^3     xi.^4]
A =
      1        0          0          0          0
      1   1.5708     2.4674     3.8758     6.0881
      1   3.1416     9.8696     31.006     97.409
      1   4.7124     22.207     104.65     493.13
      1   6.2832     39.478     248.05     1558.5
>> a=inv(A)*fxi
a =
      0
   1.6977
  -0.81057
   0.086004
 -1.0408e-017
```

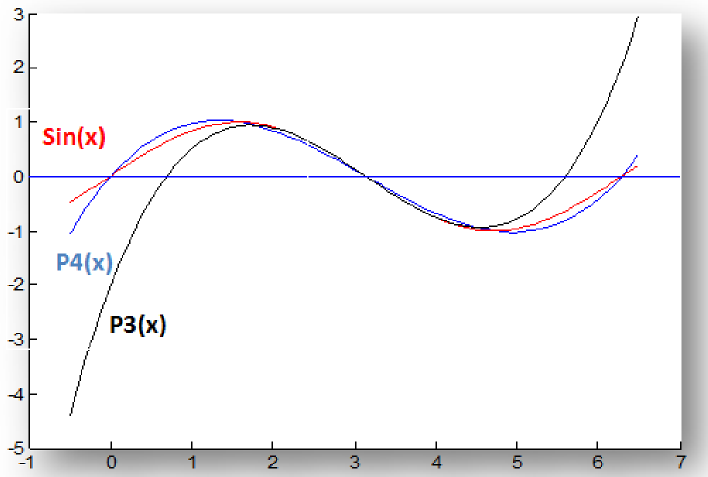
$x \in [0, 2\pi]$ için $\sin(x)$ değerlerinin hesaplanmasında,

$P_4(x)$=p4=1.6977*x-0.81057*x^2+0.086004*x^3-1.0408*10^(-17)*x^4

Polinom Enterpolasyonu (Ara Değer Bulma)

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5 - \frac{1}{720}(x-\pi)^7 - \dots$$ olmak üzere $$p3(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3$$

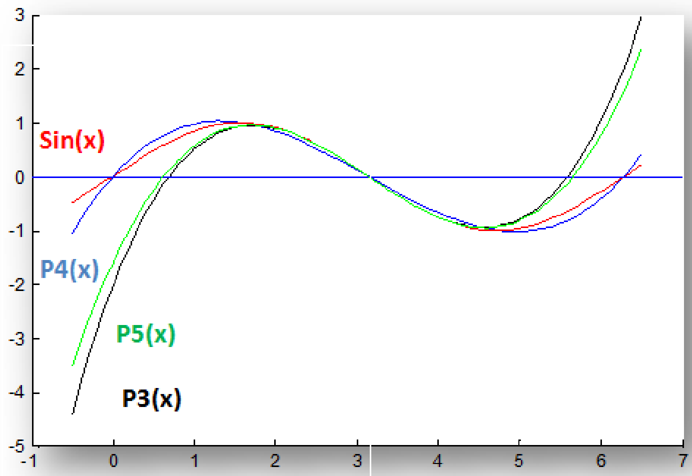
fonksiyonunu sinüs fonksiyonu yerine kullanalım.



Taylor açılımındaki,

$$p5(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 - \frac{1}{120}(x-\pi)^5$$

kısmı sinüs fonksiyonu yerine kullanırsak yaklaşım biraz daha da ha iyi olacaktır (grafikte yeşil çizgi).



Birinci Dereceden Polinom Enterpolasyonu (Doğrusal Enterpolasyon)

Bir fonksiyonun $x_0, x_1 \in R$ noktalarındaki $f(x_0), f(x_1)$ değerleri bilinsin (ya da kolay hesaplanabilsin). $x_0 < x < x_1$ olmak üzere, x bir ara değer olsun ve $f(x)$ bilinmesin (kolay hesaplanamasın). $f(x)$ değerini birinci derecen polinom interpolasyonu ile hesaplamaya çalışalım.

$(x_0, f(x_0))$
$(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen doğru denklemi, $y - y_0 = m(x - x_0)$,

m= eğim= $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ olmak üzere,

birinci dereceden interpolasyon polinomu $P_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$ tır.

Bu interpolasyon polinomunu, $\boxed{P_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1)}$ biçiminde yazılsın.

$P_1(x)$ polinomu $L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -\dfrac{x_1}{x_0 - x_1} + \dfrac{1}{x_0 - x_1} x$ ve $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = -\dfrac{x_0}{x_1 - x_0} + \dfrac{1}{x_1 - x_0} x$

Polinomları cinsinden,

$P_1(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1)$ olarak yazılabilir. $L_0(x), L_1(x)$ polinomları için

$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$ $\quad L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$ dır.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ gibi (aralıkları eşit olan veya olmayan) ayrık noktalarda bilinen $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ değerleri varsa ve bu $f(x)$ fonksiyonunun, enterpolasyon fonksiyonu $P(x)$ 'i veren *Lagrange Enterpolasyon Formülü*,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

şeklinde verilir.

$$\boxed{P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + \ldots + L_n(x) f(x_n)}$$

genel ifadesi kullanılır. Burada L_i, Lagrange enterpolasyon katsayıları,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

ifadesi ile tanımlanmıştır. n. dereceden L_i katsayısı,

$$\boxed{L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}}$$

ile hesaplanır.

ÖRNEK −1

Aşağıda tabloda verilen noktalardan geçen polinomu bulunuz.

x	0	1	2
$f(x)$	1	2	4

Bu problem için denklemden,

$$\boxed{P(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)}$$ elde edilir.

Burada Lagrange enterpolasyon katsayıları,

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Sayısal değerler $P(x)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\boxed{P(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\cdot 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\cdot 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\cdot 4}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde enterpolasyon polinomu olarak

$$\boxed{P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1 \quad \text{bulunur.}}$$

X	110	130	160	190
Y	10.8	8.1	5.5	4.8

$f(127) = ?$ (8.888)

x	110	130	160	180
y	10.8	8.1	5.5	4.8

$f(127)=?$ (8.333)

$$P(x)=L(x_0)f(x_0)+L(x_1)f(x_1)+L(x_2)f(x_2)+L(x_3)f(x_3)$$

$$L(x_0)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-130)(x-160)(x-180)}{\underbrace{(110-130)}_{-20}\underbrace{(110-160)}_{-50}\underbrace{(110-180)}_{-80}} \Big\} -80.000$$

$$L(x_1)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-110)(x-160)(x-180)}{\underbrace{(130-110)}_{20}\underbrace{(130-160)}_{-30}\underbrace{(130-180)}_{-60}} \Big\} +36000$$

$$L(x_2)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-110)(x-130)(x-180)}{\underbrace{(160-110)}_{50}\underbrace{(160-130)}_{30}\underbrace{(160-180)}_{-30}} \Big\} -45000$$

$$L(x_3)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-110)(x-130)(x-160)}{\underbrace{(180-110)}_{80}\underbrace{(180-130)}_{60}\underbrace{(180-160)}_{30}} \Big\} 144000$$

$$f(127)=\frac{(127-130)(127-160)(127-180)}{-80000}.10.8+\frac{(127-110)(127-160)(127-180)}{+36000}.8.1$$

$$+\frac{(127-110)(127-130)(127-180)}{-45000}.5.5+\frac{(127-110)(127-130)(127-160)}{144000}.4.8$$

$$f(127)=0.841+7.852-0.392+0.056$$

$$f(127)=\underline{\underline{8.45}}$$

x	0	20	40	60	80	100
y	26	48,6	61,6	71,2	74,8	75,2

$f(55) = ?$

X	0	20	40	60	80	100
y	26	48,6	61,6	71,2	74,8	75,2

$f(55) = ?$

$$L_0(x) = \frac{(x-20).(x-40).(x-60).(x-80).(x-100)}{(0-20).(0-40).(0-60).(0-80).(0-100)} . 26 = 0,19$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0).(x-40).(x-60).(x-80).(x-100)}{(20-0).(20-40).(20-60).(20-80).(20-100)} . 48,6 = -2,93$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0).(x-20).(x-60).(x-80).(x-100)}{(40-0).(40-20).(40-60).(40-80).(40-100)} . 61,6 = 17,37$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0).(x-20).(x-40).(x-80).(x-100)}{(60-0).(60-20).(60-40).(60-80).(60-100)} . 71,2 = 60,23$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0).(x-20).(x-40).(x-60).(x-100)}{(80-0).(80-20).(80-40).(80-60).(80-100)} . 74,8 = -6,32$$

$$L_5(x) = \frac{(x-0).(x-20).(x-40).(x-60).(x-80)}{(100-0).(100-20).(100-40).(100-60).(100-80)} . 75,2 = 0,7$$

$$f(55) = 0,19 - 2,93 + 17,37 + 60,23 - 6,32 + 0,7 = 69,24$$

ÖRNEK

Aşağıda tabloda verilen noktalardan geçen Lagrange Enterpolasyon polinomunun $P(3.2) =$? bulunuz

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	6	10	48	94

Langrange Enterpolasyonu

ÖRNEK

Aşağıda tabloda verilen noktalardan geçen Lagrange Enterpolasyon polinomunun $P(3.2) =$? bulunuz

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	6	10	48	94

Lagrange enterpolasyon formülü,

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3) + L_4(x)f(x_4)$$

şeklinde düzenlenir, bu ifadedeki $L(x)$ katsayıları,

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

Tablodaki değerler yerine yazılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

...

Böylece enterpolasyon polinom değeri,

$$P(3.2) = 58.4128$$

olarak bulunur.

Örnek :

Üçüncü dereceden bir polinomu ele alalım. Polinomun belirli noktalarda aldığı değerler aşağıdaki gibi olsun. Bu polinomu bularak x=2.3 değerine karşılık P(x)= değerini bulunuz

x	0	1	2	3	4
P(x)	10	4	-8	-14	-2

Örnek :

Üçüncü dereceden bir polinomu ele alalım. Polinomun belirli noktalarda aldığı değerler aşağıdaki gibi olsun. Bu polinomu bularak x=2.3 değerine karşılık P(x)= değerini bulunuz

x	0	1	2	3	4
P(x)	10	4	-8	-14	-2

Çözüm :

$$L1(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)}=\frac{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}{24}$$

$$L2(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)}=\frac{x^4-9x^3+26x^2-24x}{6}$$

$$L3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)}=\frac{x^4-8x^3+19x^2-12x}{4}$$

$$L4(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)}=\frac{x^4-7x^3+14x^2-8x}{6}$$

$$L5(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}=\frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{24}$$

P(x)=10L1(x)+4 L2(x)-8 L3(x)-14 L4(x)-2 L5(x)

. . .

P(x)=2x^3 -9x^2 +x+10

$\boxed{\text{P(2.3) = } 2(2.3)^3-9(2.3)^2+2.3+10 = -10,976}$

Örnek :

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=0,1,2$ noktalarındaki değerleri sırasıyla $f=1,2,4$ olarak verilmiş olsun. $N=2$ alınması halinde Lagrange fonksiyonları

Örnek:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=0,1,2$ noktalarındaki değerleri sırasıyla $f=1,2,4$ olarak verilmiş olsun. $N=2$ alınması halinde Lagrange fonksiyonları

$$L_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}; \qquad L_1 = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}; \qquad L_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

olarak hesaplanabilir. Bu durumda interpolasyon fonksiyonu

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(-1)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{2} \times 4$$

şeklinde olup, bu fonksiyon x için düzenlenirse

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1}$$

şekline getirilebilir. Aynı fonksiyonu $N=2$ inci dereceden polinomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

şeklinde tanımlayıp, veri noktaları yardımıyla yazılacak

$$1 = a_0 + a_1 0 + a_2 0$$
$$2 = a_0 + a_1 1 + a_2 1$$
$$4 = a_0 + a_1 2 + a_2 4$$

lineer denklem takımını çözerek de elde etmek mümkündür.

Uygulama :

Paraşütle atlayan bir sporcunun, zamana göre hız değişimi aşağıda verilmiştir, Buna göre

a) Hızın zamana göre değişimini gösteren (f(x) veya p(x)) polinomu bulunuz ?
b) Sporcunun 5. sn deki düşme hızını bulunuz ?

t_i	$P(t_i)$
0	0
2	24
4	80
6	168
8	288

Langrange Enterpolasyonu

```
%% lagrange enterpolasyonu
x=[0 1 2 3 4];          % x değerlerinin verilmesi
f=[10 4 -8 -14 -2];       % Y değerlerinin verilmesi

n=length(x);              % x 'in sahip olduğu değerlerin sayısı

xd=2.3;                     % ilk değerin verilmesi
polinom=0;

for i=1:n                 % polinomun hesaplanması
    v=[1:(i-1) (i+1):n];
    pay=polyval(poly(x(v)), xd);
    payda=polyval(poly(x(v)), x(i));
    polinom = polinom + pay / payda*f(i);
end

% istenen ara değerin görüntülenmesi
disp(['f(' num2str(xd) ')=' num2str(polinom)]);
```

```
>> lagrange
f(2.3)=-10.976
```

PROBLEMLER

Problem 1: Aşağıdaki veri tablosu bir polinoma aittir. Bu polinomun derecesini ve x in en büyük kuvvetine sahip olan terimin katsayısını bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5
y=f(x)	-7	-4	5	26	65	128

Problem 2: Aşağıdaki veri tablosu için ileri yön sonlu farklar tablosunu hazırlayınız. Hazırlanacak olan bu tabloda x=4 olan satırı temel satır olarak ele alıp f(4.31) için enterpolasyon yapınız.

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	6	10	46	138	430

Problem 3: Aşağıda verilmiş olan tablodan faydalanarak f(3.0) yi bulunuz.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y=f(x)	2.014	3.221	4.701	7.71	13.594	23.58

Problem 4: Aşağıda tablo halinde verilen fonksiyon için Lagrange enterpolasyonunu kullanarak f(4.3) ü bulunuz.

x	0	1	2.0	3.8	5
y=f(x)	0	0.569	0.791	0.224	-0.185

Problem 5:

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8
y=f(x)	-3	-0.742	2.143	6.452	14.579	31.48	65.628

9. Hafta

tablosunu kullanarak

a) f(1.09)

b) f(0.93)

c) f(1.42)

d) f(0.21)

UYGULAMA

Kaynaklar

Sayısal Analiz
(S.Akpınar)
Mühendisler için Sayısal Yöntemler
(Steven C.Chapra&RaymontP.Canale)
Nümerik Analiz
(Schanum's outlines-Nobel)