29/04/2020

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ÖDEV SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y' = 2xy^2 + 6xy + 4x$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = -1$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

2. $y = xy' - \sin y'$ denkleminin genel ve varsa tekil çözümlerini elde ediniz.

3. $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre genel çözümünü mertebe düşürme yöntemi ile bulunuz.

4. $y''' + y'' = 1 + x^2 + 3e^{-x}$ denklemin genel çözümünü elde ediniz.

Süre: 90 dk

BAŞARILAR DİLERİM

Prof. Dr. Şevket GÜR

1. Ödevin sisteme son yükleme saatini geçirmeyiniz.
2. Cevaplarınız mutlaka kendi el yazınız ile olmalıdır.
3. İsimsiz dosyalar, adınızın yazılmadığı sayfalar, yatay veya ters yüklenmiş sayfalar DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

29/04/2020

CEVAP ANAHTARI

1. $y' = 2xy^2 + 6xy + 4x$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = -1$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

Denklem Riccati denklemi olup $y = -1 + \frac{1}{u}$ dönüşümü ile lineer hale gelir. $y' = \frac{-u'}{u^2}$ olup denklem, $u' + 2xu = -2x$ şeklinde lineer denkleme dönüşür. $\lambda = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ integral çarpanıdır.

$e^{x^2}(u' + 2xu) = -2xe^{x^2}$ den $\left(e^{x^2}u\right)' = -2xe^{x^2} \Rightarrow u = -1 + ce^{-x^2}$ elde edilir. Böylece bu değer $y = -1 + \frac{1}{u}$ de yerine yazılırsa $y = \frac{2 - ce^{-x^2}}{ce^{-x^2} - 1}$ elde edilmiş olur.

---

2. $y = xy' - \sin y'$ denkleminin genel ve varsa tekil çözümlerini elde ediniz.

$y' = p$ olmak üzere denklem $y = xp - \sin p$ şeklinde Clairaut tipinde bir denklemdir. x e göre türev alınacak olursa $p = p + x\frac{dp}{dx} - \cos p\frac{dp}{dx}$ olup buradan $\frac{dp}{dx}(x - \cos p) = 0$ elde edilir. Bu son eşitlikten ise $\frac{dp}{dx} = 0 \quad \vee \quad x - \cos p = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla,

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx - \sin c$ genel çözümü elde edilir. Diğer yandan $\begin{array}{l} x - \cos p = 0 \\ y = xp - \sin p \end{array}$ arasından ise $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$ aykırı çözümü bulunur.

---

3. $(x-1)y''-xy'+y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^x$ olduğuna göre genel çözümünü mertebe düşürme yöntemi ile bulunuz.

$y=e^x u,\quad y'=e^x(u+u'),\quad y''=e^x(u''+2u'+u)$ türevleri yerlerine yazılırsa

$(x-1)u''+(x-2)u'=0$ denklemi elde edilir. $u'=v$ denirse $u''=v'$ olup denklem,

$(x-1)v'+(x-2)v=0$ şeklinde birinci basamaktan denkleme indirgenmiş olur. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklem $\frac{dv}{v}+\frac{x-2}{x-1}dx=0$ şeklinde yazılabildiğinden integral yardımıyla

$\ln|v|+x-\ln|x-1|=\ln c_1$ elde edilir. Buradan $v=c_1(x-1)e^{-x}$ olup $u'=v$ ile integral yardımıyla

$u=c_1\left(-xe^{-x}\right)+c_2$ elde edilir. Böylece $y=e^x u$ dan $y=c_1x+c_2e^x$ genel çözümü bulunur.

---

4. $y'''+y''=1+x^2+3e^{-x}$ denklemin genel çözümünü elde ediniz.

Önce homojen kısma ait çözümü bulalım. $y'''+y''=0$ denklemine ait karakteristik denklem

$r^3+r^2=0$ olup $r_1=r_2=0, r_3=-1$ kökleri yardımıyla $y_h=c_1+c_2x+c_3e^{-x}$ elde edilir. Şimdi homojen olmayan kısma ait çözümü belirsiz katsayılar metodu ile bulalım. Özel çözüm

$y_p=x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)+Dxe^{-x}$ şeklinde seçilmelidir. İki kök 0 olduğundan ilk terim x^2 ile, bir kök -1 olduğundan ikinci terim x ile çarpılmıştır. Türevler alınıp denklemde yerlerine

yazıldığında $A=\frac{1}{12}, B=\frac{-1}{3}, C=\frac{3}{2}, D=3$ olarak elde edilir. Böylece

$$y_p=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3xe^{-x}$$

olup genel çözüm $y_g=y_h+y_p$ ile

$$y_g=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3xe^{-x}$$

şeklinde elde edilmiş olur.
