14/11/2017

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = c_1 x^2 + c_2 e^{-x}$ eğrisini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi elde ediniz. Elde ettiğiniz denklemi mertebe, derece ve lineerlik yönünden inceleyiniz.

2. $x\left(1 - xy^2\right)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

3. $y' = p$ olmak üzere $p^3 + 3xp - 3y = 0$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

4. Karakteristik denkleminin kökleri $0, 0, -2 \mp i, 2 \mp i, \sqrt{2}, \mp 2i, 3, 3, 3$ olan sabit katsayılı homojen diferensiyel denklemin genel çözümünü yazınız.

SÜRE: 70 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

İnsaat

1) $y = C_1 x^2 + C_2 e^{-x}$ (1) · $C_1 = \dfrac{y' + y''}{2(x+1)}$

$y' = 2C_1 x - C_2 e^{-x}$ (2)

$y'' = 2C_1 + C_2 e^{-x}$ (3) · $C_2 e^{-x} = \dfrac{xy'' - y'}{x+1}$

C_1 ve $C_2 e^{-x}$ değerleri (1) de yerlerine yazılırsa

$(x^2+2x)y'' + (x^2-2)y' - 2(x+1)y = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklem 2. mrt, 1. derece ve lineer bir denklemdir.

---

2) $x(1-xy^2)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

$\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{1}{2y}x = \dfrac{1}{2}yx^2$ (Bernoulli)

$z = x^{1-2} = \dfrac{1}{x}$ $\qquad \dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dx}{dy}$ ile denklem

lineer denklemine dönüşür.

$\dfrac{dz}{dy} - \dfrac{1}{2y}z = -\dfrac{1}{2}y$

$\lambda = e^{\int -\frac{1}{2y}dy} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

$z = -\dfrac{1}{3}y^2 + Cy^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\frac{1}{x} = -\frac{1}{3}y^2 + Cy^{\frac{1}{2}}}$$

3) $p^3 + 3xp - 3y = 0$ $\quad y = xp + \frac{1}{3}p^3$ (Clairaut)

x'e göre türev alalım

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}\left[x + p^2\right] = 0$$ ✓

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow$ $\boxed{c^3 + 3cx - 3y = 0}$ ✓ Genel çözüm

$$\left.\begin{array}{l} x + p^2 = 0 \\ p^3 + 3xp - 3y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}y\right)^{\frac{1}{3}} x = 0}$$ Aykırı çözüm

---

4) $0, 0, -2 \mp i, -2 \mp i, \sqrt{2}, \mp 2i, 3, 3, 3$

Temel Çözümler Kümesi

$$\{1, x, e^{-2x}\cos x, e^{-2x}\sin x, xe^{-2x}\cos x, xe^{-2x}\sin x, e^{\sqrt{2}x}, \cos 2x, \sin 2x, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$$

$$y_h = c_1 + c_2 x + e^{-2x}\left[(c_3 + c_4 x)\cos x + (c_5 + c_6 x)\sin x\right] + c_7 e^{\sqrt{2}x} + c_8\cos 2x + c_9\sin 2x + e^{3x}(c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2)$$