Sayısal Analiz

Dr. Yüksel YURTAY

Matrisler (Determinant)

Dersimizin İçeriği

- Determinantlar
- Determinant özellikleri
- Sarrus Kuralı
- Örnek Uygulama

Determinant

Tanım : Elemanları reel sayılar olan nxn tipindeki **kare** matrislerin kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlanan fonksiyona, determinant fonksiyonu denir.

A karesel matrisinin determinantı,

det A veya **|A|** ile gösterilir.

Eğer nxn kare matrisin determinantını hesaplamak için ;

n=2 olması durumu için a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} reel sayılar olmak üzere 2x2 tipinden bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ formülü ile tanımlanan bir reel sayıdır.

A $_{1\times 1}$ boyutlu bir matris ise, $\mathbf{det\ (A) = a_{11}}$' dir

Sayısal Analiz

Determinant özellikleri

Bir k reel sayısı ile A matrisinin bir satırının çarpılması ,A matrisinden elde edilen bir B matrisi için

$$\det B = k.\det A$$ **dır**

$$n\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = n(ad - bc) = nad - nbc$$

$$\begin{vmatrix} na & c \\ nb & d \end{vmatrix} = nad - nbc \qquad ve \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ nb & nd \end{vmatrix} = nad - nbc$$

Eğer B matrisi,A matrisinin satırlarının yer değiştirilmesi ile A'dan elde edilen bir matris ise,

$$\det B = -\det A$$ **'dır.**

Eğer B matrisi;A'nın bir satırının skaler katının A'nın diğer satırına ilave edilmesi ile A matrisinden elde edilen bir matrisi ise,

$$\det B = \det A$$ **'dır.**

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Determinant özellikleri

Her nxn matrise bir reel sayıyı karşılıklı getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon vardır:

B matrisi; verilen bir nxn A matrisinin bir satırının bir reel sayısı ile çarpılması sonucu A matrisinden elde edildiğinde her zaman

$$\det B = x \det A$$

B matrisi; verilen nxn A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A'dan elde edildiğinde her zaman

$$\det \mathrm{B} = -\det \mathrm{A}$$

B, nxn A matrisinin bir satırının bir skaler katının diğer bir satıra ilave edilmesi ile A'dan elde edilen matris olduğunda

$$\det \mathrm{B} = \det \mathrm{A}$$

I, nxn birim matris olmak üzere ,

$$\det I = 1$$ **'dir.**

```
>> A=[2,1;4,3]

A= 2    1
   4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[10,5;4,3]

B= 10   5
    4   3

>> det(B)

ans = 10
```

```
>> A=[2,1;4,3]

A= 2    1
   4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[4,3;2,1]

B= 4    3
   2    1

>> det(B)

ans = -2
```

```
>> A=[2,1;4,3]

A= 2    1
   4    3

>> det(A)

ans = 2

>> B=[2,1;8,5]

B= 2    1
   8    5

>> det(B)

ans = 2
```

Determinant özellikleri

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfırdır.

```
>> A=[3,4,-1,5;5,4,1,3;6,-4,7,2;3,4,-1,5]

A =
     3     4    -1     5
     5     4     1     3
     6    -4     7     2
     3     4    -1     5

>> det(A)

ans = 0
```

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 9 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 10 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfırdır.

```
>> A=[3,4,-1,5;5,4,1,3;0,0,0,0;3,4,-1,5]

A =
     3     4    -1     5
     5     4     1     3
     0     0     0     0
     3     4    -1     5

>> det(A)

ans = 0
```

Determinant özellikleri

Teorem

Bir köşegen matrisin determinantı matrisin köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}_{3x3} \Rightarrow \quad \det(a)=1x4x6=24$$

```
>> a=[1 3 2;0 4 5 ;0 0 6]

        1    3    2
  a =   0    4    5
        0    0    6

>> det(a)
   ans =    24
```

Determinant özellikleri

✓Bir satır veya bir sütunun tüm elemanları sıfır olan matrislerin determinantı sıfırdır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun elemanları eşit olan matrisin determinantı sıfırdır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun elemanları orantılı olan matrisin determinantı sıfırdır.

✓Herhangi iki satır veya iki sütunun yerleri değişirse determinantının işareti değişir.

✓Bir kare matrisin determinantı ile transpozunun determinantı eşittir.

✓Kare matrislerin çarpımlarının determinantı, bu matrislerin determinantları çarpımına eşittir.

$$\mathbf{det(A \times B) = detA \times detB}$$

Determinant özellikleri

✓**Bir kare matrisin kuvvetinin determinantı, determinantının kuvvetine eşittir.**

det(An)= (detA)n

✓**Bir kare matrisin çarpmaya göre tersinin determinantı, determinantının tersine eşittir.**

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} \qquad (|A| \neq 0)$$

✓**A = [aij|m×n matrisinin k ile çarpımının determinantı, A nın determinantının kn ile çarpımına eşittir.**

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \text{ ise } |k \cdot A| = k^n \cdot |A| \text{ olur.}$$

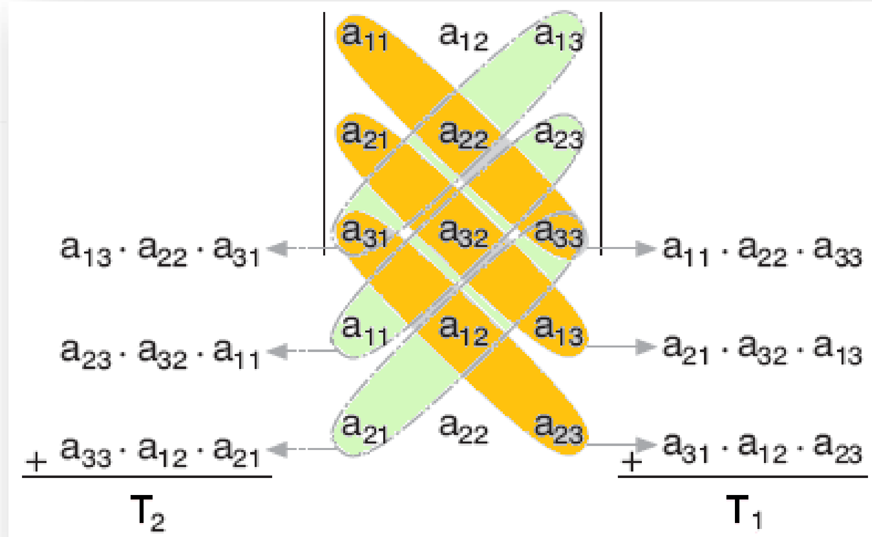
✓**Bir kare matrisin bir satır ve bir sütunun tüm elemanları k ile çarpılırsa, elde edilen matrisin determinantı ilk matrisin determinantının k ile çarpımına eşittir.**

✓**Bir matrisin herhangi bir satırını k ile çarpıp diğer bir satıra ekleyince veya herhangi bir sütununu k ile çarpıp diğer bir sütuna ekleyince determinantının değeri değişmez.**

✓**Sadece bir satır veya bir sütun elemanları farklı olan matrislerin determinantları toplamı, diğer satır veya sütunları aynı olan ve farklı sütunu farklı sütunların toplamı kadar olan yeni matrisin determinantına eşittir.**

```
>> A=[3,4,-1,3;5,4,1,3;6,-4,7,2;3,4,-1,5]

      3     4    -1     3
A =   5     4     1     3
      6    -4     7     2
      3     4    -1     5

>> det(A)

   ans = 48

>> B=inv(A)

      2.1667   -1.0000    0.3333   -0.8333
B =  -1.6667    1.1250   -0.3333    0.4583
     -2.6667    1.5000   -0.3333    0.8333
     -0.5000         0         0    0.5000

>> det(B)

   ans = 0.0208

>> C=1/48

   C = 0.0208
```

Determinant özellikleri



Sarrus Kuralı

A = [aij]3×3 biçimindeki matrislerin determinantını bulmak için Sarrus kuralı kullanılır.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki işlemleri sırayla yaptığımızda detA = T1 – T2 ifadesi aradığımız determinanttır.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Determinant özellikleri

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad |A| = \begin{array}{|ccc|} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

det A =1· 2· 2 + 0·1· 4 + 3·3·1− 4· 2·3−1·1·1− 2·3·0 = −12 bulunur.

Determinant özellikleri

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinant değerini elde ediniz

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 8 \end{matrix}$$

= [(3)(4)(-9)+(4)(-3)(1)+(-6)(4)(8)]-[(1)(4)(-6)+8(-3)(3)+(-9)(4)(4)]

= [-108 -12 -192]-[-24 -72 -144]

= (-312) - (240) = -312 + 240 = -72

Determinant özellikleri

Minörler ile Determinantların Hesaplanması

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} ise$$

$a_{11}=(-1)^{1+1}.1=1$
$a_{12}=(-1)^{1+2}.1=-1$
$a_{21}=(-1)^{2+1}.3=-3$
$a_{22}=(-1)^{2+2}.2=2$ olduğundan

Kofaktör matrisin transpozesine de ek (adjoint)matris denir. AdjA=(kofaktör A)T dir.

$$\text{kofaktör A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\text{ dir.}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix} iken \qquad \text{kofaktör A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\text{ idi. Buna göre Adj A}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\text{ dir}$$

Sayısal Analiz

Determinant özellikleri

Aşağıdaki gibi 3x3 tipinde genel bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Buna göre

$$\det A_{11} = \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det A_{12} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det A_{13} = \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

olup, $\propto_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det A_{11}$

$$\propto_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -\det A_{12}$$

$$\propto_{13} = (-1)^{1+3} deA_{13} = \det A_{13}$$

şeklindedir.

Sayısal Analiz

Sayısal Analiz

Determinant özellikleri

Buna göre 3x3 tipindeki bir A matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11} \propto_{11} + a_{12} \propto_{12} + a_{13} \propto_{13}$$

olarak hesaplanabilir.

$$\det A = a_{i1} \propto_{i1} + a_{i2} \propto_{i2} + \ldots + a_{in} \propto_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \propto_{ik}$$

yada

$$\det A = a_{1j} \propto_{1j} + a_{2j} \propto_{2j} + \ldots + a_{nj} \propto_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \propto_{kj}$$

Determinant özellikleri

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

matrisinin bütün elemanlarına karşılık gelen kofaktörlerini bulup bu kofaktörlerden faydalanarak determinant değerini hesaplayalım.

$$\propto_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}=-18 \qquad \propto_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{bmatrix}=2, \qquad \propto_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}=4,$$

...

Benzer şekilde hesaplanarak … $\det A = a_{11}\propto_{11}+a_{12}\propto 12+a_{13}\propto_{13}=2.(-18)+3.(2)+-4.4=-46$

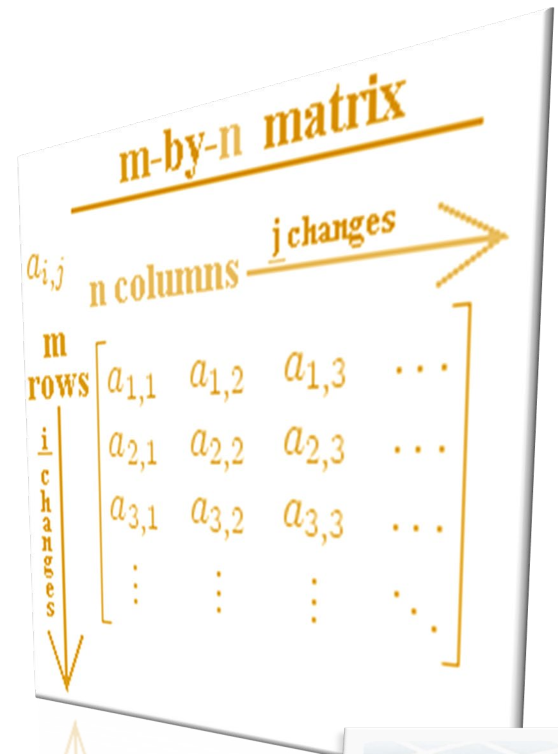
yada $\det A = a_{11}\propto_{11}+a_{21}\propto_{21}+a_{31}\propto_{31}=2.(-18)+0.(-11)+1.-10=-46$ **bulunur.**

```
>> A=[2,3,-4;0,-4,2;1,-1,5]

         2       3      -4
   A =   0      -4       2
         1      -1       5

>> det(A)

    ans = -46
```

Sayısal Analiz

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar



Sonraki Hafta :

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri...