

Sayısal Analiz

İletişim :

Lineer Olmayan
Denklemlerinin
Çözüm Yöntemleri

yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

- ❖ Basit İterasyon Yöntemi
- ❖ Yarılama (Bisection) Yöntemi
- ❖ Kiriş (secant) Yöntemi
- ❖ Örnekler

BSM

6.
Hafta

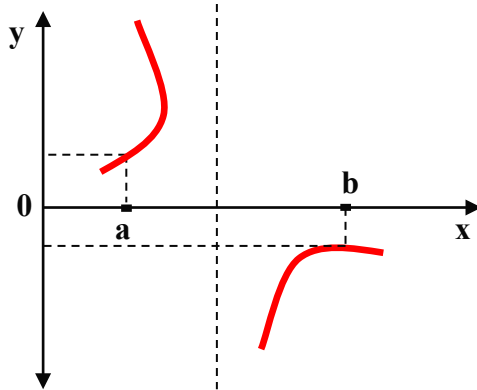
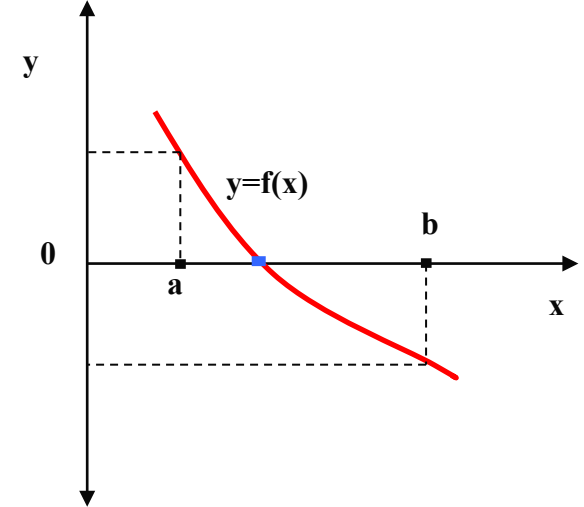
2.
Sayfa



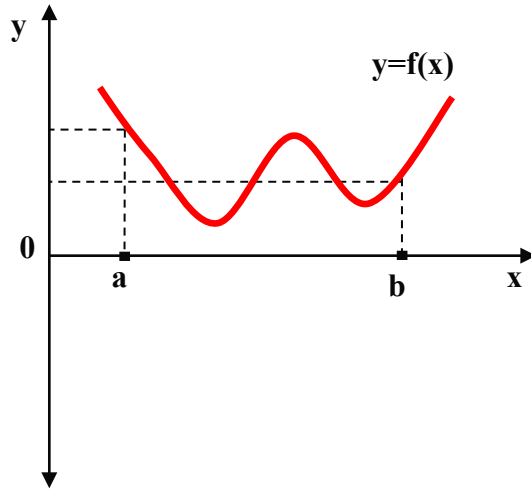
DENKLEMLERİN KÖKLERİ

TEOREM

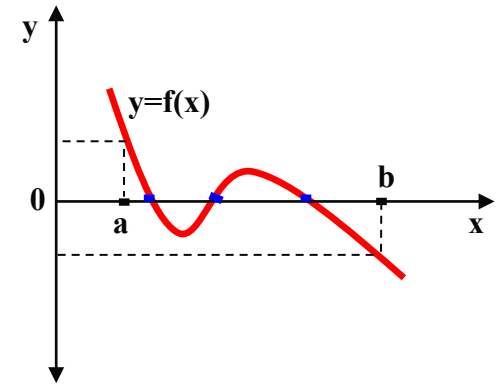
Eğer $f(x)$, $x=a$ ve $x=b$ aralığında sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli ise a, b aralığında en az bir kök vardır.



$f(a)$ ve $f(b)$ ters işaretli olmasına karşın fonksiyon süreksiz olduğundan bu aralıkta kök yoktur.



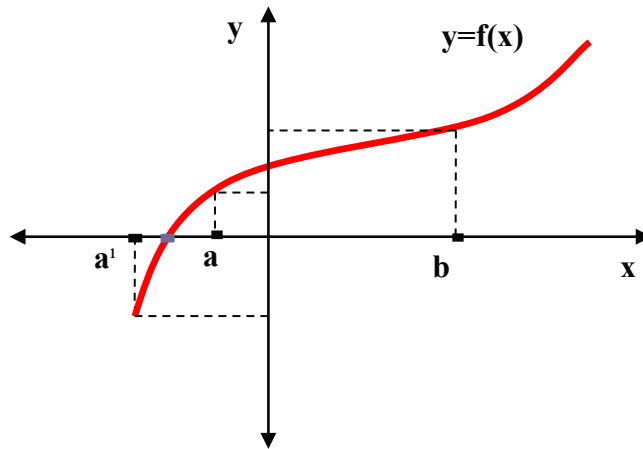
$f(x)$ f.nu hiç x eksenini kesmediğinden kök yoktur



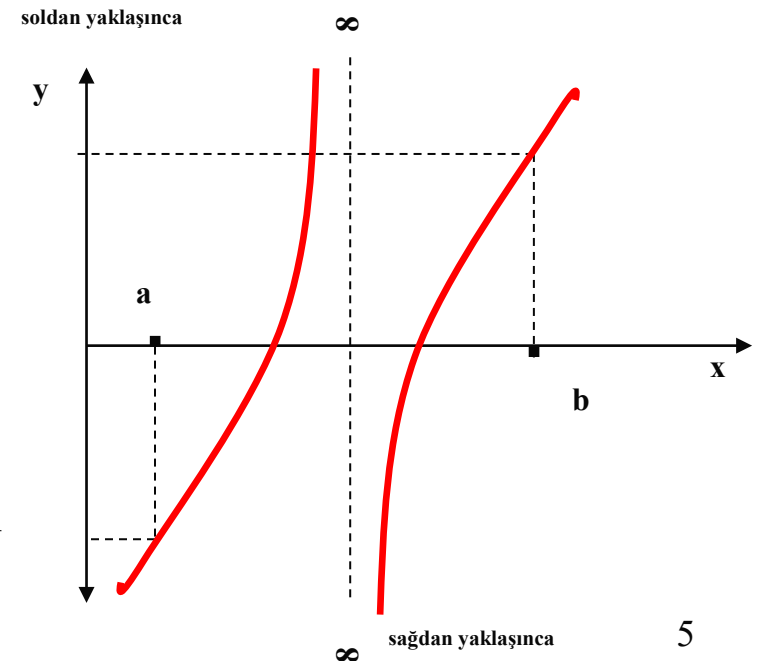
a, b arasında üç kök vardır

TEOREM

Eğer $f(x)$, $x=a$ ve $x=b$ aralığında sürekli ve aynı zamanda x değeri arttığında $f(x)$ da artıyorsa veya x değeri azaldığında $f(x)$ da azalıyorsa $f(x)=0$ değerini sağlayan bir kök vardır.



x arttığında fonksiyonda artıyor, fakat sürekli değil. Buna rağmen iki adet kök vardır.

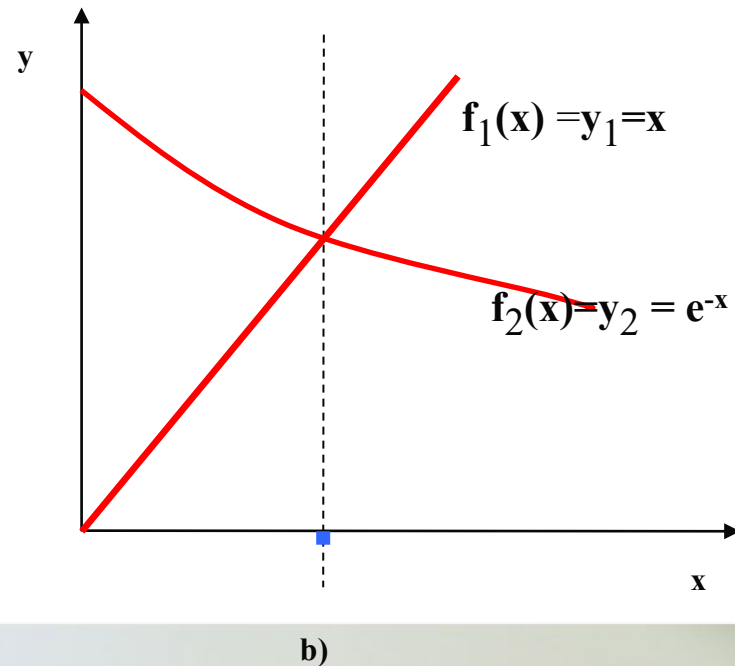
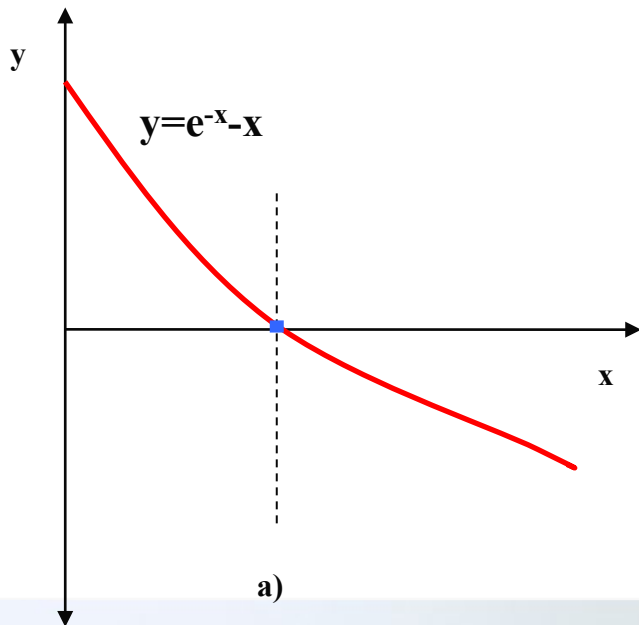


ÖRNEK

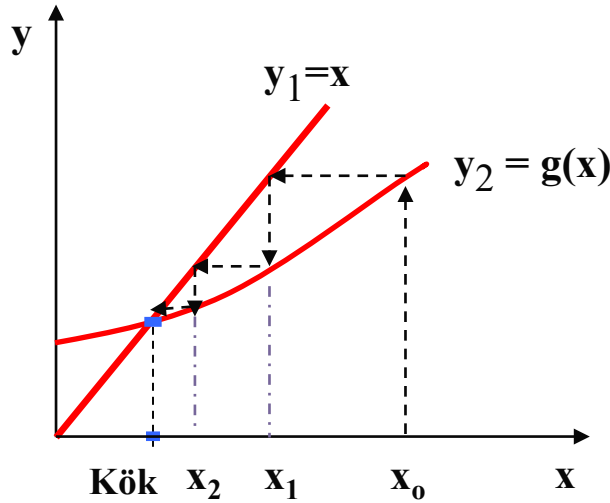
Bu f.nun kökleri grafik yöntemle iki şekilde bulunabilir.

- a) x eksenini kestiği yerdeki kök
- b) Bileşen f.larının kesiştiği yerdeki kök.

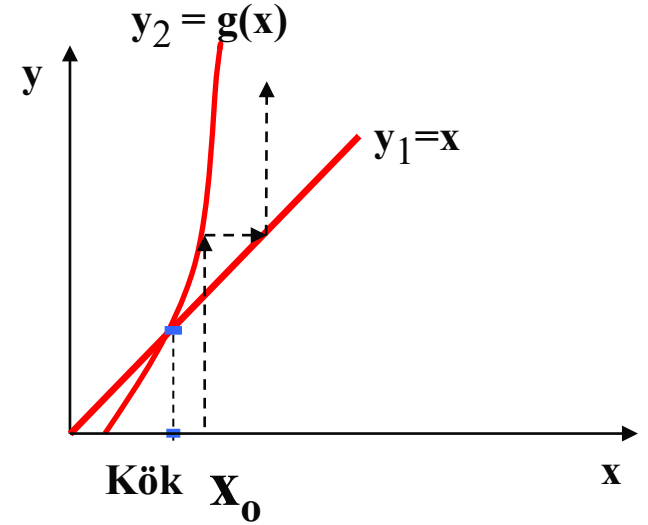
$$e^{-x} - x = 0, \quad x = e^{-x} \Rightarrow y_1 = x \quad \text{ve} \quad y_2 = e^{-x}$$



Basit iterasyonun yakınsamasının ve ıraksamasının gösterimi



Yakınsak



İraksak

Yakınsama ve ıraksama şartı

$$y_1 = x \rightarrow y'_1 = 1 \text{ (Eğim)}$$

$$y_2 = g(x) \rightarrow |g'(x_0)| < 1 \text{ ise yakınsak}$$

$$|g'(x_0)| > 1 \text{ ise ıraksak}$$

Burada $y_2 = g(x)$ f.nun eğiminin mutlak değeri $y_1 = x$ f.nun eğiminden küçük olması halinde yakınsama olmaktadır.

ÖRNEK

$y = x^2 - x - 3$ denkleminin $x_0 = 1$ noktasında yakınsak mıdır ?

Çözüm :

$$x = x^2 - 3 \text{ ' den}$$

$$y_1 = x$$

$$y_2 = x^2 - 3 = g(x) \rightarrow |g'(x_0) = 2x = 2| > 1$$

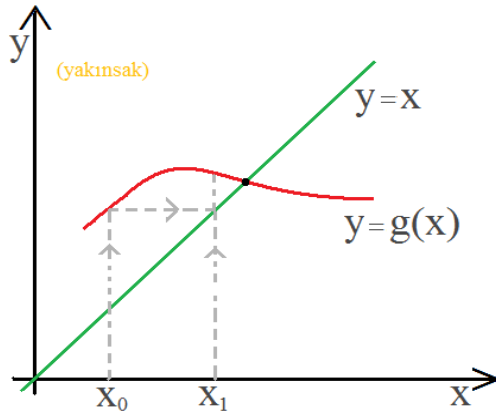
olduğundan ıraksaktır

Lineer Olmayan

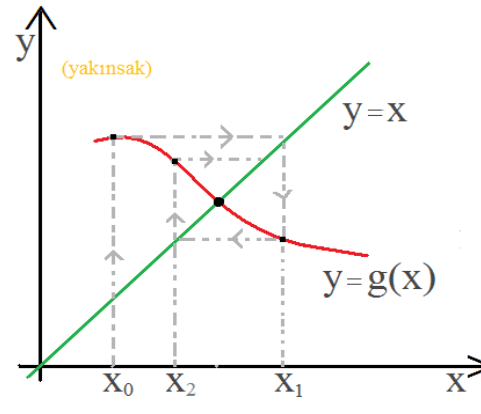
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Basit İterasyon Yöntemi :

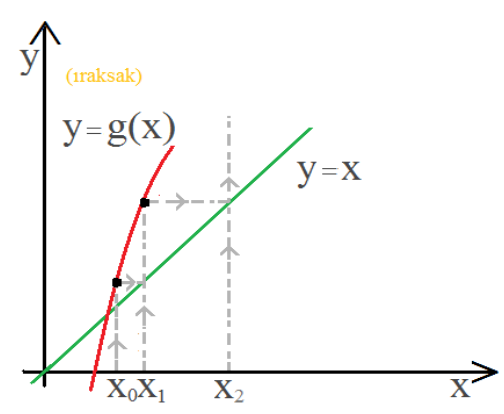
$f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için $f(x)=0$ denkliği $x=g(x)$ durumuna getirilir. Bu eşitliğin anlamı $y=x$ doğrusu ile $y=g(x)$ fonksiyonunun kesişim noktasını bulmaktır. $x=x_0$ başlangıç değeri için $g(x_0)$ değerini bularak işlem yapılırsa ;



- I -



- II -



- III -

BSM

6.
Hafta

9.
Sayfa

X' in yeni değeri olarak $X_1=g(x_0)$ alınır. İşlemler tekrarlanırsa

$$X_1=g(x_0)$$

$$X_2=g(x_1)$$

...

$X_n=g(x_{n-1})$ her bir işlem sonunda yeni bir X değeri elde edilir.

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek :

$f(x) = 3e^{-0.5x} - x$ denkleminin kökünü $x_0=8$ başlangıç değeri için $\varepsilon = 0.07$ mutlak hata ile bulunuz.

Verilen $f(x)$ fonksiyonu $x=g(x)$ şekline sokulursa $x=3e^{-0.5x}$ elde edilir.

$g(x) = 3e^{-0.5x}$, $x_0=8$, $\varepsilon = 0.07$ verileri ile İterasyon işlemleri gerçekleştirildiğinde;

13. iterasyondan sonra $\varepsilon = 0.07$
hata ile kök değeri $x=1.4$ elde edilir.
(Yakınsak iterasyon)

iterasyon sayısı	x	g(x)	$h= x_n-x_{n-1} $
1	8	0,054946917	7,945053083
2	0,054946917	2,918701514	2,863754597
3	2,918701514	0,697161304	2,221540209
4	0,697161304	2,117066992	1,419905688
5	2,117066992	1,040892786	1,076174206
6	1,040892786	1,782765652	0,741872867
7	1,782765652	1,230264839	0,552500813
8	1,230264839	1,621707926	0,391443087
9	1,621707926	1,333435008	0,288272918
10	1,333435008	1,540173057	0,206738049
11	1,540173057	1,388919019	0,151254038
12	1,388919019	1,498032798	0,109113779
13	1,498032798	1,418494205	0,079538593
14	1,418494205	1,476043484	

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek :

$f(x) = 3 \ln(x) - x$ denkleminin kökünü $x_0=2$ başlangıç değeri için $\varepsilon = 0.09$ mutlak hata ile bulunuz.

Verilen $f(x)$ fonksiyonu $x=g(x)$ şekline sokulursa $x=3 \ln(x)$ elde edilir.

$g(x) = 3 \ln(x)$, $x_0=2$, $\varepsilon = 0.09$ verileri ile iterasyon işlemleri gerçekleştirildiğinde;

x	$g(x)$	$h= x_n-x_{n-1} $
2	2,079441542	0,079441542
2,079441542	2,196298104	0,116856563
2,196298104	2,36031979	0,164021685
2,36031979	2,576391342	0,216071552
2,576391342	2,839169145	0,262777804
2,839169145	3,130534365	0,291365219
3,130534365	3,423611141	0,293076776
3,423611141	3,692087649	

(İraksak iterasyondur)

İterasyon yapılan bölgede, iterasyonun yakınsak olabilmesi için $|g'(x)| < 1$ İraksak olabilmesi için $|g'(x)| > 1$ eşitsizliğini sağlaması gerekir.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $x_0 = 1.3$ civarında kökü olduğu bilindiğine göre, gerçek kökü $\varepsilon = 0.0000001$ hassasiyetle basit iterasyon yöntemiyle bulunuz.

Bu denklemin $x_0 = 1.3$ civarında kökü olduğu bilindiğine göre önce şartları sağlayıp sağlamadığına bakalım.

Çözüm:

BSM

Denklemi; $x = g(x)$ şeklinde yazalım. (Yani $x = g(x)$ dönüşümü yapılır)

$$a) \quad x = x^3 - 1 \rightarrow g(x) = x^3 - 1$$

$$\text{ve } g'(x) = 3x^2 \text{ olur.}$$

$$|g'(x_0)| = |3x^2| = 5.07 > 1$$

olduğu için yaklaşım çok zordur. Yani kök yoktur. ¹²

6.
Hafta

2.
Sayfa

b) $f(x) = x(x^2 - 1) - 1 = 0$ dan

$$x = \frac{1}{x^2 - 1} \longrightarrow g^l(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 5.46 > 1 \quad |g^l(x_0)| = 5.46 > 1$$

olduğu için yaklaşım çok zor.

c) $x^3 = x + 1$ ' den

$$x = (x + 1)^{1/3} \rightarrow g^l(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^{-2/3} = 0.19 < 1$$

Olduğu için yaklaşım vardır. Yani köke ulaşılır.

c) şıkkı yakınsama şartını yerine getirdiğinden iterasyon bu şekilde başlatılır.

$X_{k+1} = g(x_k)$ yaklaşımıyla köke ulaşılmaya çalışılır.
 $X_1 = g(x_0)$ olacaktır.

$k=0$ için

$$x_1 = g(x_0) = (x+1)^{1/3} = (1.3+1)^{1/3} \rightarrow x_1 = 1.3200061$$

Mutlak _{hata}

$$\begin{aligned} E_t &= x_1 - x_0 \\ &= 1.3200061 - 1.3 \\ &= 0.0200061 \end{aligned}$$

Bağıl hata

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= E_t / x_1 \\ &= 0.0200061 / 1.3200061 \\ &= 0.015156 \rightarrow \% 1,5156 \end{aligned}$$

$|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir.

$$k=1 \text{ için } \rightarrow x_2 = g(x_1) = (x_1+1)^{1/3} = (1.320006+1)^{1/3} \\ = 1.323822$$

$$E_t = x_2 - x_1 = 1.323822 - 1.320006 = 0.003816$$

$$\epsilon_t = E_t / x_2 = 0.003816 / 1.323822 = 0.002882$$

$|\epsilon_t| < \epsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir

$$k=2 \text{ için } \rightarrow x_3 = g(x_2) = (x_2+1)^{1/3} = (1.323822+1)^{1/3} \\ = 1.324547$$

$$E_t = x_3 - x_2 = 1.324547 - 1.323822 = 0.0007254$$

$$\epsilon_t = E_t / x_3 = 0.000547$$

$|\epsilon_t| < \epsilon_k$ şartı sağlanmadığı için iterasyona devam edilir

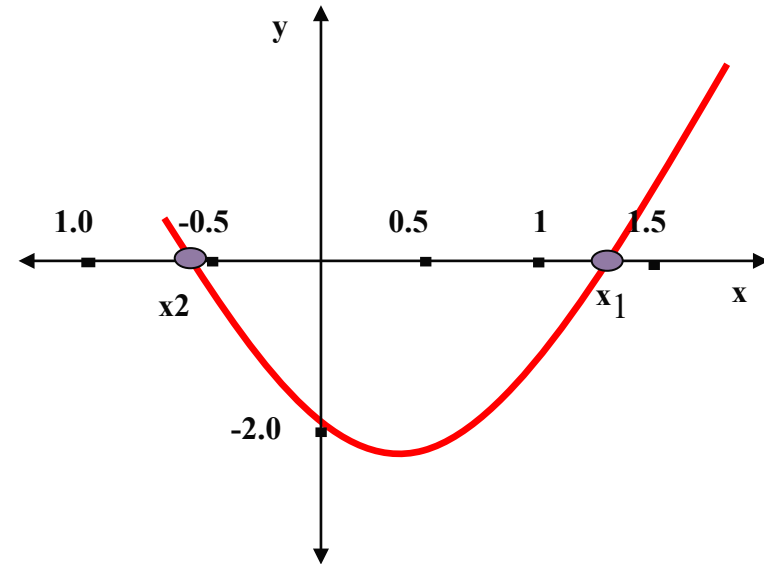
		E_t	ε_t
k= 3 için	$x_4= 1.3246856$	0.0001378	0.00010
k= 4 için	$x_5= 1.3247118$	0.0000261	0.000019
k= 5 için	$x_6= 1.3247168$	0.0000049	0.0000037
k= 6 için	$x_7= 1.3247177$	0.00000094	0.00000071
k= 7 için	$x_8= 1.3247179$	0.00000017	0.00000013
k= 8 için	$x_9= 1.3247179$	0.00000003	0.00000002

9 iterasyon sonunda 0.0000001 hassasiyetle köke yaklaşılmıştır.

İterasyonu sonlandırmak için $|\varepsilon_t| < \varepsilon_k$ şartına bakılır (ε_k daha önce anlatılmıştı). ε_k problemi çözen kişi tarafından belirlenen çok küçük bir sayıdır. Köke yaklaşma hassasiyeti ne ölçüde isteniyorsa ε_k ona göre seçilir.

ÖRNEK

$f(x) = 2x^4 - 3x - 2 = 0$ fks.nun $x_0 = 1.3$ ve $x_0 = -0.5$ civarında kökleri olduğu bilindiğine göre $\varepsilon_k = 0.0000001$ hassasiyetle basit iterasyon yöntemiyle denklemin köklerini bulunuz



Çözüm:

Denklem; $x = g(x)$ şeklinde yazılım. (Yani $x = g(x)$ dönüşümü yapılır)

Öncelikle $x_0 = 1.3$ civarındaki kökü arayalım.

1. Adım $3x = (2x^4 - 2)$

$$x = \frac{(2x^4 - 2)}{3} \rightarrow g'(x) = \frac{8}{3}x^3 \rightarrow g'(1.3) = |-4.506| > 1 \text{ ol.dan uygun de\u011f}$$

2. Adım

$$x(2x^3 - 3) - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{2x^3 - 3} \rightarrow g'(x) = \frac{-12x^2}{(2x^3 - 3)^2} \rightarrow g'(1.3) = |-10.43| > 1 \text{ ol.dan uygun degildir}$$

3. Adım

$$x = \left(\frac{3x + 2}{2} \right)^{1/4} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{3x + 2}{2} \right)^{-3/4} \left(\frac{3}{2} \right) \rightarrow g'(1.3) = |0.167| < 1 \text{ ol.dan uygundur}$$

$X_{k+1} = g(x_k)$ yaklaşımıyla köke ulaşılmaya çalışılır.
 $X_1 = g(x_0)$ olacak.

$$x_0 = 1.3$$

$$x_1 = 1.3105558$$

$$x_2 = 1.3123108$$

$$x_3 = 1.3126019$$

$$x_4 = 1.3126502$$

$$x_5 = 1.3126582$$

$$x_6 = 1.3126595$$

$$x_7 = 1.3126597$$

8 iterasyon sonucunda
0.0000001 hassasiyetle kök
bulunmuştur.

İterasyona son vermek için
 $|\epsilon_t| < \epsilon_k$ şartı aranır.

ϵ_k problemi çözen tarafından
saptanır. Ne kadar küçük olursa
iterasyon sayısı o kadar artar.
 ϵ_k seçiminde köke yaklaşma
hassasiyetine göre karar verilir.

$x_0 = -0.5$ yakınlarındaki kök için

$$1) \quad x = \frac{(2x^4 - 2)}{3} \rightarrow g'(x) = \frac{8}{3}x^3 \rightarrow g'(0.5) = |-0.33| < 1 \text{ ol. dan uygundur}$$

$$x_0 = -0.5$$

$$x_1 = -0.6250$$

$$x_2 = -0.5649$$

$$x_3 = -0.5988$$

$$x_4 = -0.5810$$

$$x_5 = -0.5967$$

$$x_6 = -0.5855$$

$$x_7 = -0.5883$$

$$x_8 = -0.5868$$

$$x_9 = -0.5876$$

$$x_{10} = -0.5872$$

$$x_{11} = -0.5874$$

12 iterasyon sonucunda 0.0000001 hassasiyetle kök bulunmuştur.

ÖDEV

$f(x) = x^3 - 4.\sin(x)$ denkleminin

$x_0=1.5$ civarında bir kökünün olduğu bilindiğine göre kökü $\varepsilon_k=0.0000001$ yaklaşımla basit iterasyon yöntemini kullanarak bulunuz.

BSM

6.
Hafta

2.
Sayfa

(x radyan alınacak)

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

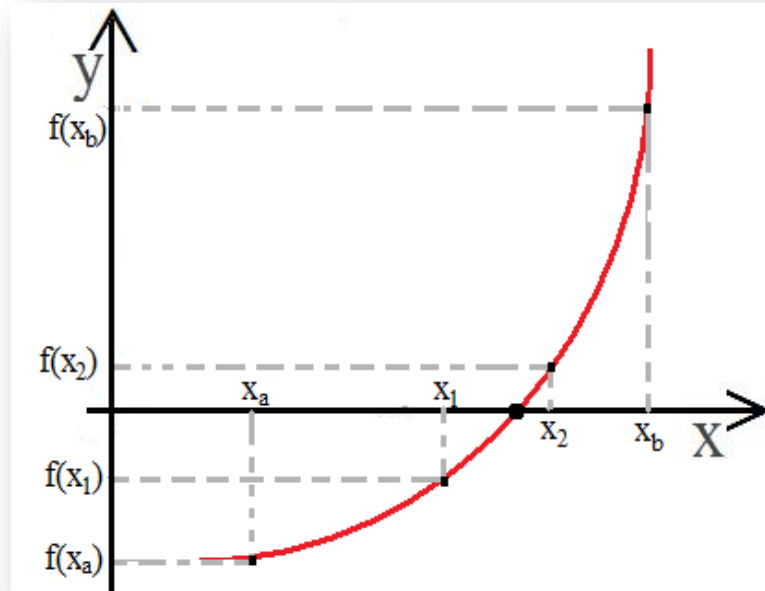
Yarılama (Bisection) Yöntemi :

X_a, X_b başlangıç değerleri için $f(X_a)$ ve $f(X_b)$ değerleri zıt işaretli, böyle başlangıç noktaları bulunabiliyorsa kökün X_a ve X_b arasında olacağı açıktır.

Bir bilinmeyenli bir denklem $f(x) = 0$ biçiminde yazılabilir. Denkleminin kökleri $I_0 = [a, b]$ aralığında ve bu aralıkta f fonksiyonu sürekli olsun.

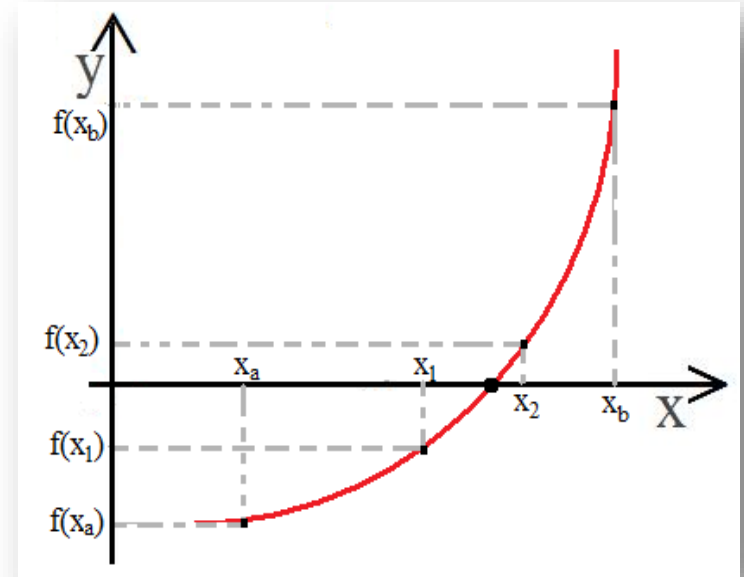
Aralığı ikiye bölme yöntemi ardışık olarak kökün bulunduğu aralığın uzunluğunu ikiye bölerek kökü içeren aralık uzunluğunu istenildiği kadar daraltan bir yöntemdir.

X_a ile X_b aralığını küçültürük $x_1 = \frac{x_a + x_b}{2}$ ile yeni bir x_1 ve $f(x_1)$ değerleri bulunur. $f(x_1), f(x_a)$ ile aynı işaretli $f(x_b)$ ile zıt işaretli olduğundan kök X_1 ile X_b arasındadır.



Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Yarılama (İkiye Bölme veya Bisection) Yöntemi :



O halde yönteme göre bu iki aralığı daraltmalıyız.

Yani $x_2 = \frac{x_1 + x_b}{2}$ ile yeni x ve $f(x_2)$ değerlerini bulalım.

Grafikten $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ 'nin zıt işaretli olduğu görülür. Dolayısıyla kök x_1 ile x_2 arasındadır, bu aralık ikiye bölünerek köke bir adım daha yaklaşılacaktır.

İşlemler son iki x değerinin farkının mutlak değeri verilen bir ϵ değerine eşit veya küçük olana kadar devam eder.

İşlemler $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$ olduğunda işlem sonlandırılır ve kök değerin x_n olduğu kabul edilir.

BSM

6.
Hafta

23.
Sayfa

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek : $f(x)=x^3-6.5x^2+13x-9$ fonksiyonunu $[a=1,75, b=2.5]$ aralığında $\epsilon=0,8$ hata ile yarılama metodu ile çözünüz.

$$f(a) = f(1,75) = 0,078125$$

$$f(b) = f(2,5) = -0,25$$

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,75+2,5}{2} = 2,125$$

$$c_2 = \frac{a + c_1}{2} = \frac{1,75 + 2,125}{2} = 1,9375$$

Zıt işaretli olduğundan kök mevcuttur.

$$f(c_1) = f(2,125) = -1,13086$$

$$f(c_2) = f(1,9375) = -0,93970$$

iterasyon	C=(a+b)/2	X	f(x)
		1,75	0,078125
		2,5	-0,25
1	2,125	2,125	-0,068359375
2	1,9375	1,9375	0,029052734
3	2,03125	2,03125	-0,016082764
4	1,984375	1,98438	0,007686615
5	2,0078125	2,00781	-0,003936291
6	1,99609375	1,99609	0,001945436
7	2,001953125	2,00195	-0,000978462
8	1,999023438	1,99902	0,000487803
9	2,000488281	2,00049	-0,00024426
10	1,99975586	1,9998	0,00012204

İşlemlere devam edildiğinde
 $x_{\text{kök}} = 1,99975586$ bulunur

BSM

6.
Hafta

24.
Sayfa

Örnek :

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 3 = 0$ denkleminin $-1 < x < 0$ aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir.

Bu kök bu aralıkta yarılama yöntemiyle $\varepsilon = 0.06$ hata ile hesaplayınız.

BSM

6.
Hafta

25.
Sayfa

Çözüm:

$$x_L = -1 \quad x_U = 0 \quad \text{ve}$$

$$f(x_L) = f(-1) = -2 \quad f(x_U) = f(0) = 3 \quad \text{Buradan,}$$

$f(x_L) f(x_U) < 0$ olduğundan $-1 < x_k < 0$ olacak şekilde bir kök vardır.

$$\bullet \quad x_k = \frac{x_L + x_U}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -0.5, \quad f(x_k) = f(-0.5) = 0.375 \Rightarrow x_L = -1,$$

$$x_U = x_k = -0.5$$

$$f(-0.5) = 0.375 \quad f(-1) = -2.0$$

$$|x_k - x_L| = |-1 + 0.5| = 0.5 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

$$\bullet \quad x_k = \frac{-1 - 0.5}{2} = -0.75 \quad f(x_k) = f(-0.75) = -0.79688 \Rightarrow x_L = x_k = -0.75,$$

$$x_U = -0.5$$

$$f(-0.75) = -0.796875 \quad f(-0.5) = 0.375$$

$$|-0.5 + 0.75| = 0.25 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

$$\bullet \quad x_k = \frac{-0.75 - 0.5}{2} = -0.625 \quad f(x_k) = f(-0.625) = -0.21289 \Rightarrow :$$

$$x_L = x_k = -0.625, \quad x_U = -0.5$$

$$f(-0.625) = -0.212891 \quad f(-0.5) = 0.375$$

$$|-0.625 + 0.5| = 0.125 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

$$\bullet \quad x_k = \frac{-0.625 - 0.5}{2} = -0.5625 \quad f(x_k) = f(-0.5625) = 0.0798 \Rightarrow x_L = -0.625,$$

$$x_U = x_k = -0.5625$$

$$f(-0.625) = -0.212891 \quad f(-0.5625) = 0.0798340$$

$|-0.625 + 0.5625| = 0.0625 > \varepsilon$ olduğundan işleme devam edilir.

$$\bullet \quad x_k = \frac{-0.625 - 0.5625}{2} = -0.59375 \quad f(x_k) = f(-0.59375) = -0.0667 \Rightarrow x_L = -0.59375,$$

$$x_U = x_k = -0.5625$$

$$f(-0.59375) = -0.0667419 \quad f(-0.5625) = 0.0798340$$

$|-0.59375 + 0.5625| = 0.03125 < \varepsilon$ olduğundan

verilen denklemin yaklaşık kökü $\varepsilon = 0.05$ hata ile $x_k = -0.59375$ dir.

x	$f(x)$
-1	-2
0	3
-0.5	0.375
-0.75	-0.796 88
-0.625	-0.212 89
-0.5625	0.0798
-0.59375	-0.0667

Örnek : $f(x) = \exp(x) - x - 2 = 0$ denkleminin $1 < x < 1.8$ aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü aralık yarılama yöntemiyle $\varepsilon = 0.06$ hata ile hesaplayınız.

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Çözüm: $f(1) = -0.281\,718\,172$ $f(1.8) = 2.249\,647\,46$

$$f(1)f(1.8) < 0 \text{ olduğundan}$$

$f(x)$ fonksiyonunun $1 < x < 1.8$ aralığında bir kökü vardır.

- $x_k = \frac{1 + 1.8}{2} = 1.4$ $f(1.4) = 0.655\,199\,967 \Rightarrow x_L = 1, \quad x_U = x_k = 1.4$

$$f(1) = -0.281\,718\,172 \quad f(1.4) = 0.655\,199\,967$$

$$|x_k - x_L| = |1.4 - 1| = 0.4 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

- $x_k = \frac{1 + 1.4}{2} = 1.2$ $f(1.2) = 0.120\,116\,923 \Rightarrow x_L = 1, \quad x_U = x_k = 1.2$

$$f(1) = -0.281\,718\,172 \quad f(1.2) = 0.120\,116\,923$$

$$|x_k - x_L| = |1.2 - 1| = 0.2 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

- $x_k = \frac{1 + 1.2}{2} = 1.1$ $f(1.1) = -0.09583\,39761 \Rightarrow x_L = x_k = 1.1, \quad x_U = 1.2$

$$f(1.1) = -0.09583\,39761 \quad f(1.2) = 0.120\,116\,923$$

$$|x_k - x_L| = |1.2 - 1.1| = 0.1 > \varepsilon \text{ olduğundan işleme devam edilir.}$$

$$\bullet \quad x_k = \frac{1.2 + 1.1}{2} = 1.15 \quad f(1.15) = 0.00819290969 \Rightarrow x_L = 1.1, \quad x_U = x_k = 1.15$$

$$f(1.1) = -0.0958339761$$

$$f(1.15) = 0.00819290969$$

$$|x_k - x_L| = |1.1 - 1.15| = 0.05 > \varepsilon \quad \text{olduğundan işleme devam edilir.}$$

$$\bullet \quad x_k = \frac{1.1 + 1.15}{2} = 1.125 \quad f(1.125) = -0.0447831511 \Rightarrow x_L = x_k = 1.125, \quad x_U = 1.15$$

$$f(1.125) = -0.0447831511$$

$$f(1.15) = 0.00819290969$$

$$|x_k - x_L| = |1.125 - 1.15| = 0.025 < \varepsilon = 0.06 \quad \text{olduğundan}$$

verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 1.125$ tir.

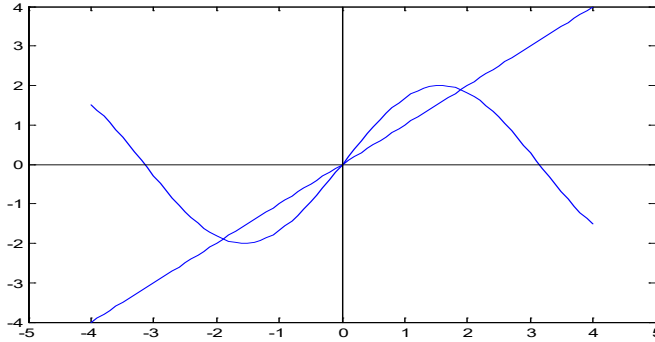
Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

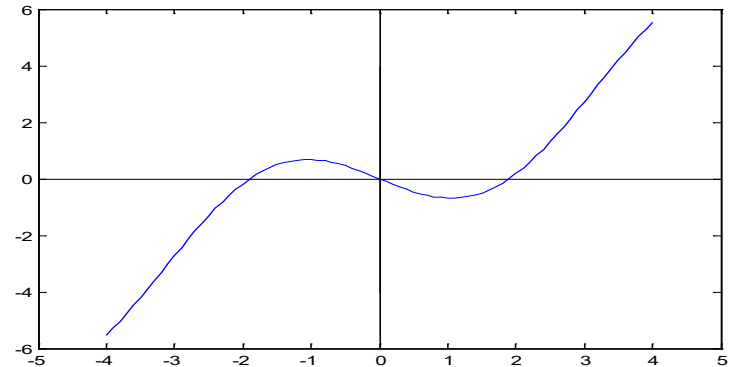
Örnek

$x - 2\sin x = 0$ denkleminin köklerini $\varepsilon = 0.001$ den daha küçük mutlak hata ile bulmaya çalışalım.

$x - 2\sin x = 0$ denklemini $x = 2\sin x$ biçiminde yazalım. Bu denklemin kökleri $y = \sin x$ eğrisi ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalardır. Aşağıdaki grafikten görüldüğü gibi üç tane kök söz konusudur. Bunlardan biri $x_1 = 0$, diğer ikisinden pozitif olanı $x_2 \in [1, 3]$ dir. Üçüncü kök $x_3 = -x_2$ dir.



Kökleri ve yerlerini fonksiyonunun grafiğini çizerek de tespit edebiliriz. $[-4, 4]$ aralığında fonksiyonunun grafiği aşağıdadır.



BSM

6.
Hafta

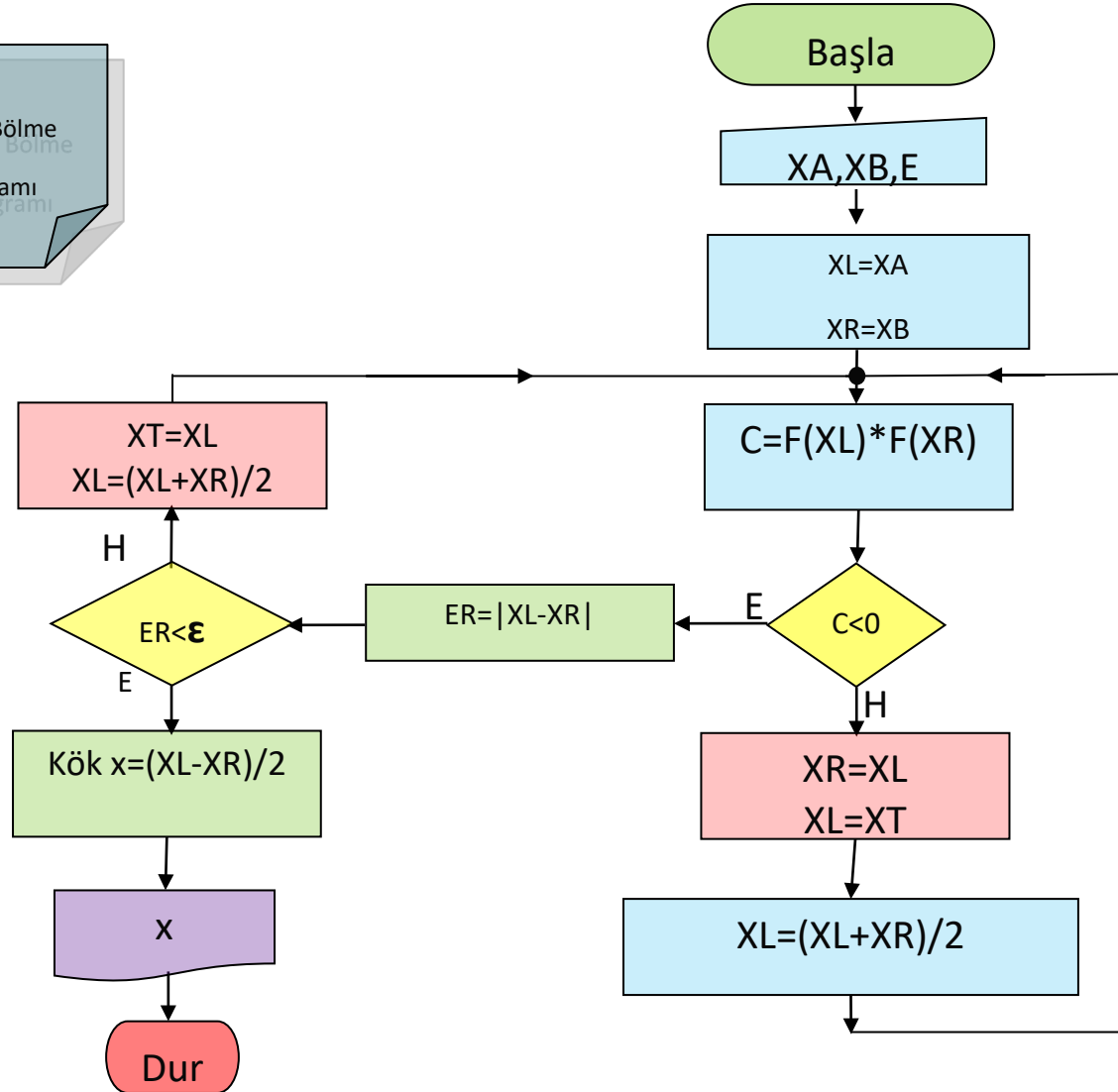
33.
Sayfa

Pozitif kök $x_2 \in I_0 = [1, 3]$ dir.

$$\varepsilon_{\bar{x}_2} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} \leq 0.001$$

olması için $n \geq 10$ olmalıdır.

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri



Lineer Olmayan

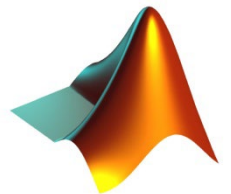
Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

```
1  %---- Aralığı İkiye Bölme Yöntemi -----
2  - clear all;
3  % f(x) = k1 * x^2 + k2 * x + k3 olmak üzere:
4  - k1 = 1; k2 = -7;    k3 = 10;
5  % [a , b] aralığına ait değerler giriliyor
6  - a(1) = 1;    b(1) = 4;
7  %İlk yarılama işlemi yapılıyor
8  - x(1) = (a(1) + b(1)) / 2;
9  - f_x = k1 * x(1)^2 + k2 * x(1) + k3;
10 - epsilon = 0.03;
11 - k = 1; % İterasyon başlangıç değeri veriliyor.
12 - while abs(f_x) >= epsilon
13 -     x(k+1) = (a(k) + b(k)) / 2;
14 -     f_x = k1 * x(k+1)^2 + k2 * x(k+1) + k3;
15 -     f_b = k1 * b(k)^2 + k2 * b(k) + k3;
16 -     if f_x * f_b < 0
17 -         a(k+1) = x(k+1);    b(k+1) = b(k);
18 -     else
19 -         a(k+1) = a(k);    b(k+1) = x(k+1);
20 -     end
21 -     k = k + 1;
22 - end
23 - k = k-1;
24 - disp(['iterasyon sayısı:']);
25 - disp(k);
26 - disp(['Yaklaşık kök değeri: ']);
27 - disp(int2str(x(k)));
```

BSM

6.
Hafta

35.
Sayfa



Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

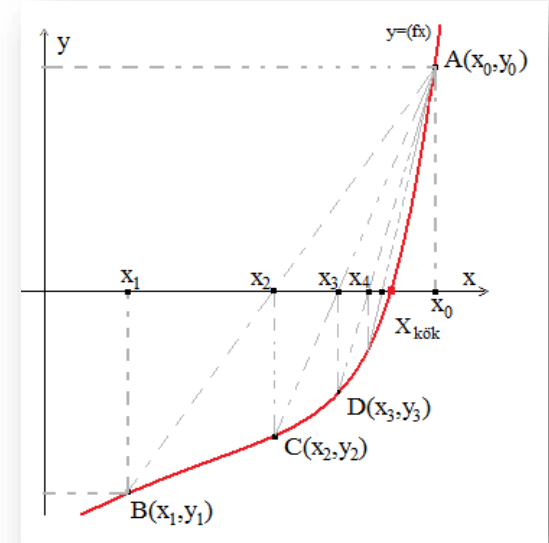
Kiriş (secant) Yöntemi :

Grafikteki A ve B noktaları arasındaki kirişin denklemini yazalım ,

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0)$$

A ve B noktalarının oluşturduğu kirişin eksenini kestiği nokta bu denklemde ;

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} (x - x_0)$$



Böylece x_0 ve x_1 gibi bilinen başlangıç noktalarıyla gerçek kök $x_{\text{kök}}$ 'e daha yakın bir kökü $f(x)$ fonksiyonunun türevine gerek kalmadan bulabiliriz.

İşlemlere devam ederek yeni giriş noktaları bularak bunların x eksenini kestiği noktalarından gerçek köke daha da yaklaşabiliriz.

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

A ve C noktalarını oluşturan kirişe göre;

$$x_3 = x_0 - \frac{(x_2 - x_0)y_0}{y_2 - y_0}$$

olur.

İşlemler benzer şekilde devam ettirildiğinden, genel ifadeyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$x_{n+1} = x_0 - \frac{(x_n - x_0)y_0}{y_n - y_0}$$

Önceki yöntemlerle olduğu gibi burada da mutlak hatanın verilen bir ϵ değerinden küçük olana kadar işlemlere devam edilir.

Yöntem her zaman yakınsak olması nedeniyle **A** noktasındaki $f(x_0)$ noktasına karşılık gelen **B,C,D** gibi hesaplanan noktalardaki değerleri ile zıt işaretli olması gerekir.

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

$$\textit{Kiriş yöntemi} \quad x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})} y_i$$

BSM

6.
Hafta

38.
Sayfa

Lineer Olmayan

Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Örnek : $f(x) = e^{-x} - x = 0$

denkleminin köklerini $(0,1)$ aralığında **Kiriş Yöntemi** ile hesaplayınız.

Çözüm:

$$f(0) = 1.0 \quad f(1) = -0.632\,120\,559 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

olduğundan bu aralıkta bir kök vardır.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = f(x_1) = -0.632\,120\,559$$

$$\bullet \quad x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} y_1 = 1 - \frac{1 - 0}{-0.632120559 - 1} (-0.632120559) = 0.612\,699,$$

$$f(0.612\,699) = y_2 = -0.07\,081\,27$$

$$\bullet \quad x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_2 = 0.612\,699 - \frac{(0.612\,699 - 1)}{(-0.07\,081\,27 + 0.632\,120)} (-0.07\,081\,27) = 0.563\,838$$

$$|x_3 - x_2| = |0.563\,838 - 0.612\,699| = 0.048\,861$$

$$f(0.563\,838) = y_3 = 0.00518297,$$

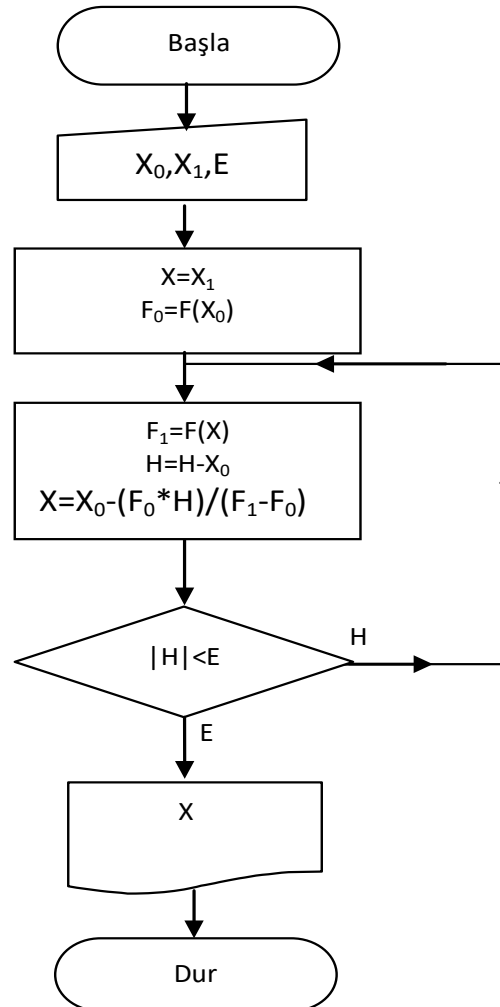
- $x_4 = 0.567170$ $|x_4 - x_3| = |0.567170 - 0.563838| = 0.003332$
- $x_5 = 0.567143$ $|x_5 - x_4| = |0.567143 - 0.567170| = 2.7 \times 10^{-5}$
- $x_6 = 0.567143$ $|x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567143| = 0$

O halde verilen denklemin yaklaşık kökü $x = 0.567143$ dir.

Not : Bulunan yeni kök değerleri her zaman ayrı yönde olmak zorunda değil, Önemli olan kökler arasındaki yakınsamanın devam etmesidir.

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Kiriş Yöntemi



Sayısal Analiz S.Akpınar

BSM

6.
Hafta

42.
Sayfa

Sonraki Hafta :

Lineer Olmayan
Denklem Sistemlerinin Çözümleri...

