Kleene's Theorem-2

$$L(p,q) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(p,x) = q\}$$

$$L(M) = \bigcup \{L(q_0, q) \mid q \in A\}$$

Her L(p, q) dilinin düzenli olduğunu, onu daha basit, düzenli dillerle ifade ederek göstereceğiz. L(p, q)'daki katarlar, M'nin herhangi bir şekilde p'den q'ya hareket etmesine neden olur. p'den q'ya geçmenin daha basit yollarını düşünmenin bir yolu, ilgili geçişlerin sayısını düşünmektir; Bu yaklaşımın sorunu, bu sayının üst sınırının olmaması ve dolayısıyla son düzenli ifadeyi elde etmenin açık bir yolunun olmamasıdır.

Daha umut verici olan benzer bir yaklaşım, M'nin p'den q'ya hareket ederken içinden geçtiği farklı durumları dikkate almaktır.

M'nin herhangi bir durumdan geçmeden p'den q'ya nasıl gidebilir?
Her adımda M'nin geçmesine izin verilen kümeye bir durum daha ekleyebiliriz.
Bu prosedür, seti olası tüm durumları kapsayacak şekilde genişlettiğimizde sona erecektir.

Kleene’s Theorem, Part 2

Eğer $x \in L(p, q)$ ise, $x = x_1x_2$, $\delta^*(p, x_1) = r$ olacak şekilde boş olmayan x_1 ve x_2 dizileri varsa, x'in M'nin bir r durumu aracılığıyla p'den q'ya gitmesine neden olduğunu söyleriz ve $\delta^*(r, x_2) = q$. P'den q'ya gitmek için 1 uzunluğunda bir dizi kullanıldığında, M herhangi bir durumdan geçmez.

$$x \in L(p, q), x = x_1x_2, \delta^*(p, x_1) = r \text{ and } \delta^*(r, x_2) = q$$

(Eğer M, a sembolü üzerinde p'den p'ye geri dönerse, a dizgesi onun p'den ayrılıp p'ye girmesine neden olsa bile p'den geçmez.) Uzunluğu $n \geq 2$ olan bir dizge kullanıldığında, bir durumdan geçer $n - 1$ kez, ancak $n > 2$ ise bu durumlar ayrık (belirgin) olmayabilir.

Şimdi Q'nun n elemanı olduğunu ve bunların 1'den n'e kadar numaralandırıldığını varsayalım. $p, q \in Q$ ve $j \geq 0$ için, $L(p, q, j)$, $L(p, q)$'deki M'nin bu j’den daha yüksek numaralı herhangi bir durumdan geçmeden p'den q'ya gitmesine neden olan katarlar kümesi olsun.

Kleene’s Theorem, Part 2

$L(p, q, 0)$ kümesi, M'nin herhangi bir durumdan geçmeden p'den q'ya gitmesine izin veren diziler kümesidir.
Bu, $\delta(p, \sigma) = q$ olan σ alfabe sembolleri kümesini içerir ve $p = q$ olması durumunda aynı zamanda **Λ** de içerir. Her durumda, $L(p, q, 0)$ sonlu bir katarlar kümesidir ve dolayısıyla düzenlidir.

Herhangi bir $k \geq 0$ sayısı için, $L(p, q, k)$'nin Q'daki her p ve her q için düzenli olduğunu varsayalım ve bir dizenin nasıl $L(p, q, k + 1)$ içinde olabileceğini hesaplyalım.

En kolay yol, $L(p, q, k)$'de olmasıdır, çünkü M, k'den daha yüksek numaralı bir durumdan geçmiyorsa, kesinlikle $k + 1$'den daha yüksek numaralı bir durumdan geçmez.

$L(p, q, k + 1)$'deki diğer dizeler, M'nin $k + 1$ durumundan geçerek ve daha yüksek numaralı durumlardan geçmeden p'den q'ya gitmesine neden olan dizelerdir.

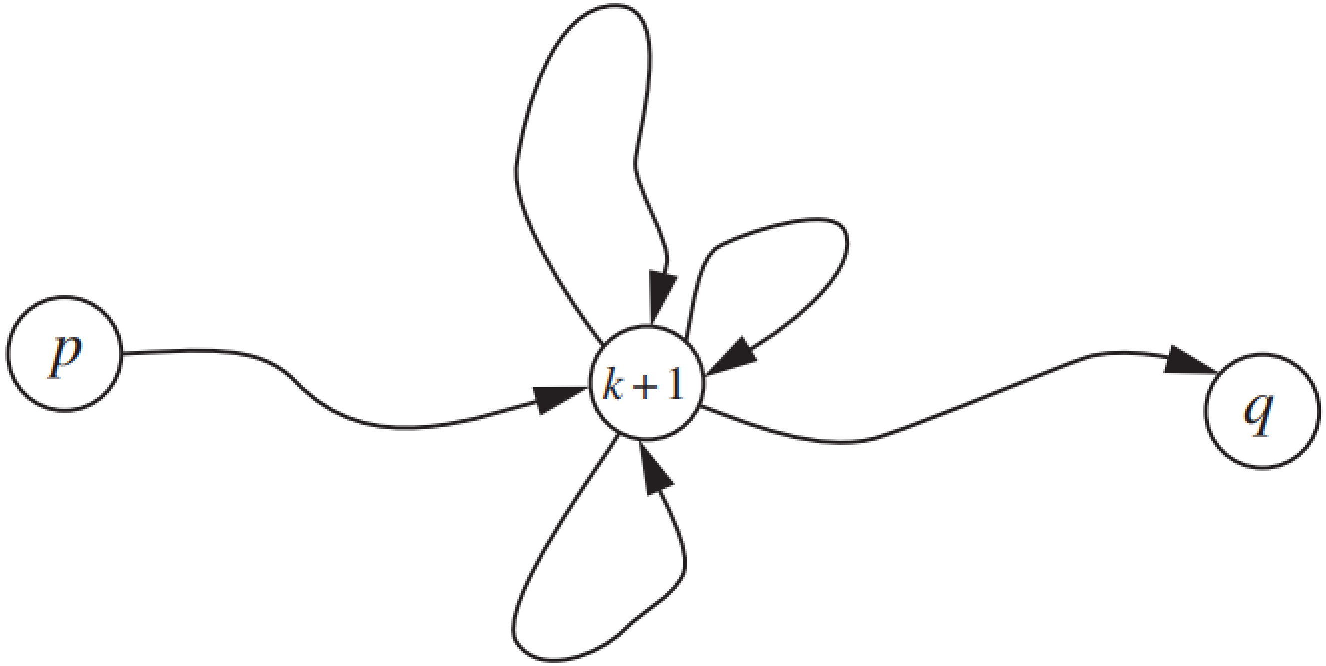
Bu tür bir yol p'den $k+1$'e gider; bir veya daha fazla kez $k+1$'e dönebilir; ve $k+1$'den q'ya giderek tamamlanır.

Bu bireysel bölümlerin her birinde, yol $k + 1$ durumunda başlar veya durur ancak k'den daha yüksek numaralı herhangi bir durumdan geçmez.

Kleene’s Theorem, Part 2

L(p, q, k + 1)'deki her dizi bu ikisinden biriyle tanımlanabilir. Bu iki biçimden birine sahip olan her dize L(p, q, k + 1) kümesindedir.

$$L(p, q, k+1) = L(p, q, k) \cup L(p, k+1, k) L(k+1, k+1, k)\ L(k+1, q, k)$$



k + 1'den geçerek p'den q'ya geçiş

Kleene’s Theorem, Part 2

Hem L(p, q)'nun düzenli olduğunu matematiksel tümevarımla kanıtlamak hem de bu dil için düzenli bir ifade elde edecek bir algoritma için gerekli bileşenlere sahibiz.

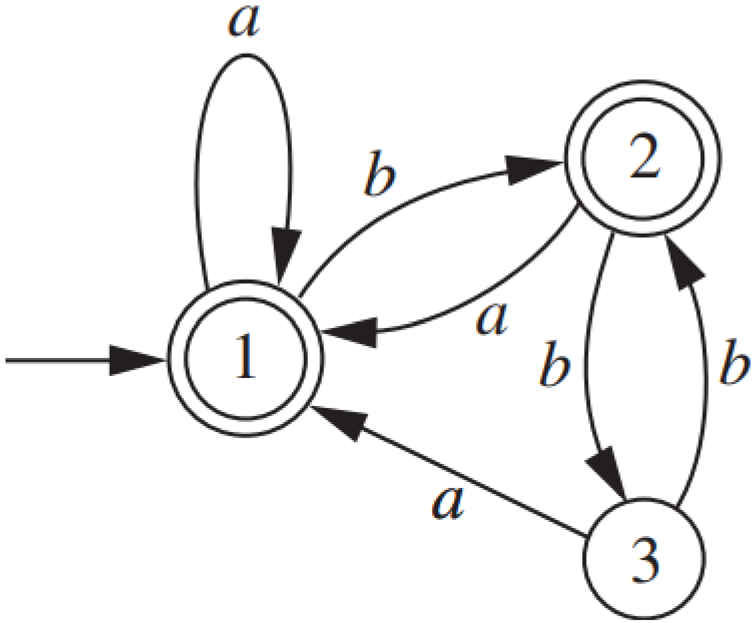
L(p, q, 0) düzenli bir ifadeyle tanımlanabilir.

Her k<n için L(p, q, k + 1) yukarıdaki formülle tanımlanır.

$$L(p, q, n) = L(p, q)$$

çünkü yolun n'den büyük numaralandırılmış hiçbir durumdan geçmemesi koşulu, eğer n'den büyük numaralandırılmış hiçbir durum yoksa hiçbir şekilde kısıtlama değildir.

L(M) için düzenli bir ifade elde etmenin son adımı, q ∈ A olan L(q0,q) dillerine ait ifadeleri birleştirmek için + işlemini kullanmaktır.



Kleene’s Theorem, Part 2

$$r(M) = r(1, 1, 3) + r(1, 2, 3)$$

Bu ifadeyi yukarıdan aşağıya hesaplamayı deneyebiliriz, en azından k'nin daha küçük değerlerini içeren r(i, j, k) terimlerinden kaç tanesine ihtiyacımız olacağını görene kadar.

$$r(1, 1, 3) = r(1, 1, 2) + r(1, 3, 2)r(3, 3, 2)^*r(3, 1, 2)$$
$$r(1, 2, 3) = r(1, 2, 2) + r(1, 3, 2)r(3, 3, 2)^*r(3, 2, 2)$$

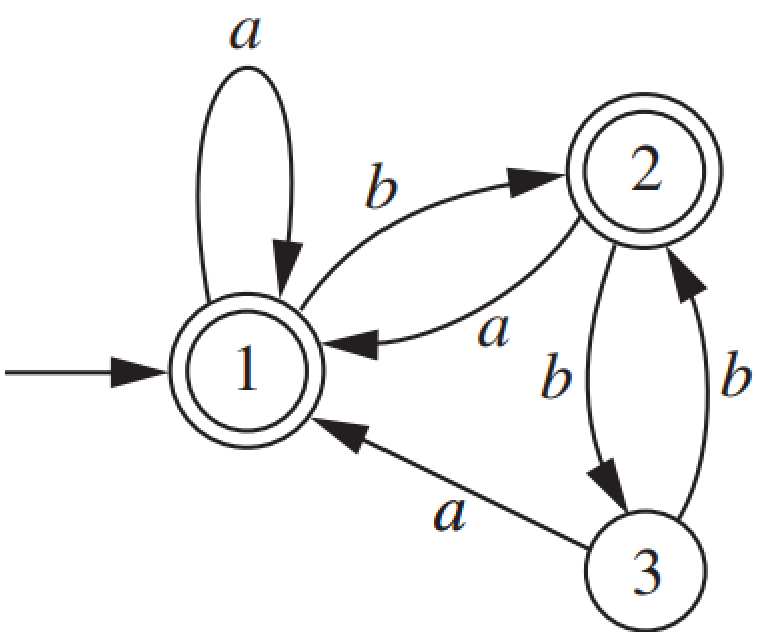
Formülü görünüşte ihtiyacımız olan r(i, j, 2) ifadelerine uygulayarak şunu elde ederiz:

$$r(1, 1, 2) = r(1, 1, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1)$$
$$r(1, 3, 2) = r(1, 3, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 3, 1)$$
$$r(3, 3, 2) = r(3, 3, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 3, 1)$$
$$r(3, 1, 2) = r(3, 1, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1)$$
$$r(1, 2, 2) = r(1, 2, 1) + r(1, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 2, 1)$$
$$r(3, 2, 2) = r(3, 2, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 2, 1)$$

Kleene’s Theorem, Part 2

Bu noktada r(i,j,1) ifadelerinin her birine ihtiyacımız olduğu açıktır ve şimdi en alttan başlayıp yukarı doğru çalışıyoruz. Aşağıdaki üç tablo, i ve j'nin tüm kombinasyonları için r(i, j, 0), r(i, j, 1) ve r(i, j, 2) ifadelerini göstermektedir. (Son tablodaki dokuz girişten yalnızca altısı gereklidir.)

p	$r(p,1,0)$	$r(p,2,0)$	$r(p,3,0)$
1	$a+\Lambda$	b	$\emptyset$
2	a	Λ	b
3	a	b	Λ



Eşdeğer bir düzenli ifade istediğimiz DFA

Kleene's Theorem, Part 2

p	$r(p,1,1)$	$r(p,2,1)$	$r(p,3,1)$
1	a^*	a^*b	$\emptyset$
2	aa^*	$\Lambda + aa^*b$	b
3	aa^*	a^*b	Λ

p	$r(p,1,2)$	$r(p,2,2)$	$r(p,3,2)$
1	$a^*(baa^*)^*$	$a^*(baa^*)^*b$	$a^*(baa^*)^*bb$
2	$aa^*(baa^*)^*$	$(aa^*b)^*$	$(aa^*b)^*b$
3	$aa^* + a^*baa^*(baa^*)^*$	$a^*b(aa^*b)^*$	$\Lambda + a^*b(aa^*b)^*b$

$$
\begin{aligned}
r(2,2,1) &= r(2,2,0) + r(2,1,0)r(1,1,0)^*r(1,2,0) \\
&= \Lambda + (a)(a+\Lambda)^*(b) \\
&= \Lambda + aa^*b
\end{aligned}
$$

p	$r(p, 1, 1)$	$r(p, 2, 1)$	$r(p, 3, 1)$
1	a^*	a^*b	$\emptyset$
2	aa^*	$\Lambda + aa^*b$	b
3	aa^*	a^*b	Λ

p	$r(p, 1, 2)$	$r(p, 2, 2)$	$r(p, 3, 2)$
1	$a^*(baa^*)^*$	$a^*(baa^*)^*b$	$a^*(baa^*)^*bb$
2	$aa^*(baa^*)^*$	$(aa^*b)^*$	$(aa^*b)^*b$
3	$aa^* + a^*baa^*(baa^*)^*$	$a^*b(aa^*b)^*$	$\Lambda + a^*b(aa^*b)^*b$

$$
\begin{aligned}
r(3, 1, 2) &= r(3, 1, 1) + r(3, 2, 1)r(2, 2, 1)^*r(2, 1, 1) \\
&= aa^* + (a^*b)(\Lambda + aa^*b)^*(aa^*) \\
&= aa^* + a^*b(aa^*b)^*aa^* \\
&= aa^* + a^*baa^*(baa^*)^*
\end{aligned}
$$

Son düzenli ifade için gerekli terimler artık son tablodan alınabilir. Gördüğünüz gibi, bunları basitleştirmek için bazı girişimlerde bulunmuş olsak da, bu ifadeler oldukça karmaşıktır. Nihai düzenli ifadenin mümkün olan en basiti olduğunun garantisi yoktur (bu durumda öyle olmadığı açıktır), fakat en azından L(M)'ye karşılık gelen bir düzenli ifadeyi üretmenin sistematik bir yoluna sahibiz.