Diferansiyel Denklemler:

türev sayısı: mertebe
kuvvetinin büyüklüğü: derece

> $x^2 y''^{2} + xy' - y = 0$ (2. dereceden 2. mertebe)

Diferansiyel çözüm kavramı: Mertebe kadar türev alınır. Denklem yazılır.

> $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ eğri ailesinin dif denk?

$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$
$y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$ } c_1 ve c_2 çekilir. $y'' + 3y' + 2y = 0$

Değişkenlerine ayrılabilen denklemler:

$f(x)dx = g(y)dy$ şeklindeki denklemlerdir.
Taraflara ayırıp integral alınır.

> $\cos^2 x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 2$ genel çözüm?

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dy}{2-y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dy}{2-y} \Rightarrow -\ln|2-y| = \tan x + c$$

Homojen diferansiyel denklemler:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $y = u \cdot x$ dönüşümü yapılır.
$dy = udx + xdu$ da elde edilir. Denklemde yerine yazılır.

> $\underbrace{(xy+y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^2-xy)}_{Q}dy = 0$ denklemi homojen mi? Genel çözümü?

$P(x,ux) = x \cdot ux + (ux)^2 = x^2(u+u^2)$
$Q(x,ux) = x^2 - x \cdot (ux) = x^2(1-u)$
$y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$
$(ux^2 + (ux)^2)dx + (x^2 - ux^2)(udx + xdu)$
$x^2(u + \cancel{u^2} + (1-u) \cdot u)dx + (1-u) \cdot xdu = 0$

$\frac{2dx}{x} + \frac{(1-u)du}{u} = 0$
$\frac{2dx}{x} + \left(\frac{1}{u} - 1\right)du$ } integral al. $\rightarrow u = y/x$
$2\ln|x| + \ln|u| - u = c$
$2\ln|x| + \ln|y/x| - y/x = c$
$\ln x^2 + \ln y/x \rightarrow \ln|xy| = y/x + c$

Homojen olmayan diferansiyel denklemler:

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminde $P = ax + by + c$, $Q = ex + fy + g$ biçimindeyse homojen değildir.

2 durum oluşur:

① $\frac{a}{b} \neq \frac{e}{f}$ → doğrular birbirini keser. Bu kesim noktası (r,s) ise $x = X + r$, $y = Y + s$ } dönüşümü yapılır. $dx = dX$, $dy = dY$] olur.

→ $(aX + bY)dX + (eX + fY)dY = 0$ homojen denk. olur.
$y = ux$ ile homojen denklem çözülür.

> $(x+2y+1)dx + (2x-3y+2)dy = 0$ genel çözüm? $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-3}$ paralellik yok! Kesişiyorlar.

$-2/\ x + 2y + 1$
$2x - 3y + 2$
$y = 0 = s$
$x = -1 = r$

$x = X - 1$, $y = Y$ } dönüşümü yapılır.

$(X - \cancel{1} + 2Y + \cancel{1})dX + (2X - \cancel{2} - 3Y + \cancel{2})dY = 0$
$\underbrace{(X + 2Y)dX + (2X - 3Y)dY = 0}_{y = ux \text{ ile çözülür.}}$ → (Homojen dif. denk)

... olması hali:

③ $(ax+by+c)dx+(ex+fy+g)=0$ $\quad \frac{a}{b}=\frac{e}{f} \rightarrow$ doğrular paralel.

Yani $ax+by$, $ex+fy$'nin bir katı olduğundan $^{*}ax+by=k(ex+fy)^{*}$

$ex+fy=t$ dönüşümü yapılır.

$edx+fdy=dt$ $\quad dy=\frac{dt-edx}{f}$ (*) denkleminde yazılır ve çözülür.

> $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$ genel çözüm?

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \rightarrow$ paraleldir.

$x+2y=t \rightarrow dx+2dy=dt$

$dy=\frac{dt-dx}{2}$

$\rightarrow (t+3)dx+(2t-1)dy=0$ (homojen denk.)

$(t+3)dx+(2t-1)\frac{dt-dx}{2}=0$

$(t+3+1/2-t)dx+(t-1/2)dt=0$

$(7/2)dx+(t-1/2)dt=0$

$7/2\,x+\frac{t^2}{2}-t/2=c$

Tam Diferansiyel Denklem:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ denkleminde $P_y=Q_x$ varsa tam dif.'tir.

> $\underbrace{\left(6xy^3-\frac{4}{x}\right)}_{P}dx+\underbrace{\left(9x^2y^2-\frac{8}{y}\right)}_{Q}dy=0$ denklemi tam dif. mi? Genel çözüm?

$P_y=18xy^2-0$

$Q_x=18xy^2-0$ $\Big\}$ $P_y=Q_x$ tam dif ✓

$U_x=6xy^3-4/x$

$U_y=9x^2y^2-8/y$ $\Big\}$ $\int U_x dx=\int 6xy^3-4/x\,dx+f(y)$

$U(x,y)=3x^2y^3-4\ln|x|+f(y)$

$U_y=9x^2y^2-0+f'(y)=9x^2y^2-8/y$

$f'(y)=-8/y \rightarrow f(y)=-8\ln y+c$

$U(x,y)=3x^2y^3-4\ln x-8\ln y+c$

$=3x^2y^3-4(\ln x+\ln y^2)+c$

integrasyon Çarpanı:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ denkleminde $P_y=Q_x$ (tam dif) özelliği sağlanamıyorsa bu denklemi tam dif haline getirmek için $\mu(x,y)$ fonksiyonuyla denklem çarpılır.

$$\mu(v)=e^{\int \frac{Q_x-P_y}{Pv_y-Qv_x}}$$ formülü kullanılır. (önce tam dif mi? kontrol)

• Genel çözüm istenirse int. çarpanı yerine yazılıp çözüm yapılır.

1) integrasyon çarpanının sadece x'in bir fonksiyonu olması hali:

Bu durumda $v=x$ olur. $v_x=1$, $v_y=0$'dır.

$$\mu(x)=e^{\int \frac{Q_x-P_y}{-Q}dx}$$ formülü kullanılır.

> $\underbrace{(3xy^2+2y)}_{P}dx+\underbrace{(2x^2y+x)}_{Q}dy=0$ denkleminin x'e bağlı integrasyon çarpanı?

$$\mu(x)=e^{\int \frac{4xy+1-(6xy+2)}{-2x^2y-x}dx}=e^{\ln x}\rightarrow x$$

2) İntegrasyon çarpanının sadece y'nin bir fonksiyonu olması hali:

$v = y$ olur. $v_x = 0,\ v_y = 1$

$$\mu_{(x)} = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$ formülü kullanılır.

> $(2x-1)y\,dx + (y^2 - x^2 + x)\,dy = 0$ denkleminin y'ye bağlı integrasyon çarpanı?

$$\mu_{(x)} = e^{\int \frac{-2x+1-(2x-1)}{2x-1}} = e^{-2 \cdot \ln|y|} = y^{-2} \rightarrow \text{integrasyon çarpanı}$$

NOT: Denklem tam değil fakat homojense $\mu = \dfrac{1}{xP + yQ}$ onun int. çarpanıdır.

> $(x-2y)dx + y\,dy = 0$ int. çarpanı?

$\left.\begin{matrix} P_y = -2 \\ Q_x = 0 \end{matrix}\right\}$ tam dif değil! $\mu = \dfrac{1}{x.(x-2y) + y.y} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$

> $(xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$ $\mu = \mu(xy^2)$ şeklindeki int. çarpanı yardımıyla çöz!

$[\mu(xy+y^2)]_y = [\mu(-x^2)]_x$

$\mu_y . (xy+y^2) + \mu(x+2y) = \mu_x . (-x^2) + \mu(-2x)$

$\mu = \mu(xy^2) \rightarrow u = xy^2 \rightarrow \mu = \mu_{(u)}$

$\left.\begin{matrix} \mu_y = \mu_u . u_y = \mu' . 2xy \\ \mu_x = \mu_u . u_x = \mu' . y^2 \end{matrix}\right\}$ $2xy . \mu'(xy+y^2) + x^2 . \mu' . y^2 = \mu(-2x - x - 2y)$

$\mu'(2x^2y^2 + 2xy^3 + x^2y^2) = -\mu(3x+2y)$

$\dfrac{d\mu}{du}(3x^2y^2 + 2xy^3) = -\mu(3x+2y)$

$xy^2(3x+2y)$

$= xy^2(3x+2y)\dfrac{d\mu}{du} \rightarrow \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{-du}{xy^2} = \dfrac{-du}{u} \rightarrow \ln\mu = -\ln u = \ln\dfrac{1}{u}$

$\mu = \dfrac{1}{u} \rightarrow \mu = \dfrac{1}{xy^2}$

$\rightarrow \mu_y . P + \mu P_y = \mu_x . Q + \mu . Q_x$ yapılır.

μ_y ve $\mu_x \rightarrow \mu_u, u_x, u_y$ cinsinden yazılır. $\mu(u)du$

$\mu_y . P - \mu_x . Q = \mu(Q_x - P_y)$ yapılır. Sadeleştirilir. İntegral alınır.

1. mertebeden lineer diferansiyel denklemler:

$y' + P(x)y = Q_x$ tipindeki denklemlerde $y = uv$ formlu çözüm aranır.

$y' = u'v + uv'$ yerine yazılırsa $u'v + uv' + P(x).uv = Q(x)$ elde edilir.

$v\underbrace{(u' + uP(x))}_{} + uv' = Q(x)$

0 yapan v fonk. bulunur.

> $(1+x)y' - 2y = (1+x)^4$ denkleminin genel çözümü?

$y' - \dfrac{2}{1+x}y = (1+x)^3$ $y = uv$ $y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \dfrac{2}{1+x}.uv = (1+x)^3$ $v\underbrace{\left(u' - \dfrac{2}{1+x}u\right)}_{0} + u.v' = (1+x)^3$

$u' - \dfrac{2}{1+x} = 0 \rightarrow \dfrac{du}{u} = \dfrac{2dx}{1+x}$ → dep.

$\ln u = 2\ln|1+x|^2$ $(1+x)^2 v' = (1+x)^3 \rightarrow v' = (1+x)$

$u = (1+x)^2$

$v = \dfrac{(1+x)^2}{2} + c \rightarrow y = (1+x)^2\left[\dfrac{(1+x)^2}{2} + c\right]$

Sabitlerin Değişimi Yöntemi: ?

$y' + P(x) \cdot y = Qx$ denkleminde homojen kısım için çözüm bulunursa:

$$0 \to \frac{dy}{y} = -P(x)dx \to \ln y = -\int P(x)dx + \ln c \to y = c\,e^{-\int P(x)dx} + \ln c$$

c sabiti c(x) ile değiştirilir. $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$c'(x)e^{\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x) = Q(x)$$

$c'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x) \to c'(x) = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + c$ çıkar.

yerine yazılınca:

$$y = \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + c\right] \cdot e^{-\int P(x)dx}$$ olarak bulunur.

Video izle!

Bernoulli Diferansiyel Denklemi:

$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$ denkleminde $n \neq 1$

$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$ denk. $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ dönüşümü yapılır.

$z = y^{1-n} \to z' = (1-n)y' \cdot y^{-n}$ yerine yazılıp denk. lin. dif denk. haline gelir.

> $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ genel çözüm?

$\frac{1}{y^2} = z$ $\quad z' = \frac{-2y'\cancel{y}}{y^{\cancel{4}\,3}}$

$\frac{y'}{y^3} = \frac{-z'}{2}$

$y' - xy = -y^3 e^{-x^2} \to \frac{y'}{y^3} - xy = -e^{-x^2}$

$-\frac{z'}{2} - xz = -e^{-x^2} \to z' + 2xz = 2e^{-x^2}$ (lin dif denk)

$z(x) = e^{-\int 2x\,dx}\left[\int e^{\int 2x\,dx} \cdot 2e^{-x^2}dx + c\right]$

$z = e^{-x^2}(2x+c) = 1/y^2$

Riccati Diferansiyel Denklemi:

Eğer özel çözümü biliniyorsa, y_1 özel çözüm ise:

$y = y_1 \mp 1/u$ dön. yapılır. Denklemde türevi ve kendisi yazılır.

Lineer dif denk. bulunur. Ve çözülür.

> $y' + y^2 - 1 = 0$ denk'nin bir özel çözümü $y = 1$ old. göre genel çözüm?

$y = 1 + 1/u$ dön. yapılır. $y' = \frac{-u'}{u^2} \to \frac{-u'}{u^2} + \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 - 1 = 0$

$= \frac{-u'}{u^2} + \cancel{1} + 2/u + 1/u^2 - \cancel{1} \to u' - 2u = 1$ (lin. dif. denk)

$u = e^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2} + c\right) = \frac{-1 + 2ce^{2x}}{2} \to y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{2}{2ce^{2x} - 1} = y$

Riccati Diferansiyel Denklemler:

$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$ tipindeki denklemdir. y_1 özel çözümü biliniyorsa:

$y = y_1 \mp 1/u$ dönüşümü yapılır.

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \rightarrow y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x) + Q(x)(y_1 + 1/u) + R(x)(y_1 + 1/u)^2$$

$$y_1' - (P(x) + Q(x).y_1 + R(x).y_1^2) = \frac{u'}{u^2} + \frac{Q(x)}{u} + \frac{R(x)}{u^2} + \frac{2R(x)y_1}{u}$$

$$\rightarrow \frac{u'}{u^2} + (Q(x) + 2y_1R(x))u = -R(x)$$ şeklinde lineer diferansiyel denkleme dönüşür.

> $y' + y^2 - 1 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = 1$ old. göre genel çözüm?

$y = 1 + 1/u$ dönüşümü $\rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2} \rightarrow \frac{-u'}{u^2} + (1 + 1/u)^2 - 1 = 0$

$$\rightarrow \frac{-u'}{u^2} + \cancel{1} + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} - \cancel{1} = 0 \rightarrow -u' + 2u + 1 = 0 \rightarrow -u' + 2u = -1$$ (lin. dif. denk.)

$$u = e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2dx} dx + c\right] = e^{2x}\left[e^{-2x}/_{-2} + c\right] = \frac{-1 + 2ce^{2x}}{2}$$

$$y = 1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{2}{2ce^{2x} - 1} = \frac{2ce^{2x} + 1}{2ce^{2x} - 1}$$

NOT: Bir Riccati dif. denkleminin 3 çözümü biliniyorsa bu denklemin genel çözümü yazılabilir.

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = c$$ → eğri ailesinin genel çözümü.

> $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ özel çözümlerine sahip Riccati denkleminin genel çözümü?

$$\frac{y-1}{y-x} : \underbrace{\frac{x^2-1}{x^2-x}}_{\frac{x+1}{x}} = c \qquad \frac{y-1}{y-x} = c.\frac{x}{x+1} \rightarrow y - 1 = \frac{c.x.(y-x)}{x+1}$$

$$y = \frac{1 - \frac{cx^2}{x+1}}{1 - \frac{cx}{x+1}} = \frac{x + 1 - cx^2}{x + 1 - cx}$$

Clairout diferansiyel denklemi:

$y' = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = xp + f(p)$ formundaki denklemin x'e göre türevi alınır. $y' = p = 1.p + x.\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \rightarrow (x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0$

Buna göre: A) $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c = sbt$

genel çözümü: $y = cx + f(c)$

B) $\frac{dp}{dx} \neq 0 \rightarrow x + f'(p) = 0 \rightarrow x = -f'(p)$ değeri yerine yazılır

$y = -f'(p).p + f(p)$ bu elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{array}\right\}$$ p parametresine bağlı tekil çözüm elde edilir.

> $y = xp + p^2$ tekil ve genel çözümü?

$p = 1 \cdot p + x \cdot \frac{dp}{dx} + 2p \cdot \frac{dp}{dx} \rightarrow (x+2p) \cdot \frac{dp}{dx} = 0$

$p = -x/2 \rightarrow y = -(x/2)^2 \rightarrow y = \frac{-x^2}{4}$

a) $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c = \text{sbt}$

$y = cx + c^2$ (genel çözüm)

b) $x + 2p = 0 \rightarrow x = -2p$

$y = (-2p) \cdot p + p^2 = -p^2$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2p \\ y = -p^2 \end{array}\right\} \text{tekil çözüm.}$$

Lagrange Diferansiyel Denklemleri

$y = \frac{dy}{dx} = p$ olmak üzere $y = x f(p) + g(p)$ formundadır. ①

x'e göre türev alınırsa $p = f(p) + x \cdot f'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$ bulunur. ②

a) $p - f(p) = 0$ bu denklemden bulunan p değerleri yerine yazılıp tekil çözümler bulunur.

b) $p - f(p) \neq 0$ 2. denklemden

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x \cdot f'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \quad ③$$

(1. mertebeden lineer denk.)

Lineer denklem çözülünce

$x = \underbrace{\vartheta(p, c)}_{p \text{ ve sabite bağlı}}$ genel anlamda çözümü elde edilir. x'in bu değeri ①'de yazılırsa

$y = f(p) \cdot \vartheta(p, c) + g(p)$ çıkar. Bu çözüm denklemin parametrik halidir.

> $y = x(p^2 + 2p) - (p^2 + 2p - 1)$ denkleminin genel ve tekil çözümü?

$p = p^2 + 2p + x(2p+2)\frac{dp}{dx} - (2p+2)\frac{dp}{dx}$

$-(p^2 + p) = [x(2p+2) - (2p+2)]\frac{dp}{dx}$

A) $-(p^2 + p) = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 0 \rightarrow y = 1 \\ p = -1 \rightarrow y = -x + 2 \end{cases}$

• $y = 1$ ve $y = 2 - x$ denklemin tekil çözümleridir.

B) $-(p^2 + p) \neq 0 \rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x(2p+2) - (2p+2)}{-(p^2+p)}$

$\frac{dx}{dp} = \frac{(2 - 2x)}{p} \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = \frac{2}{p}$

$x(p) = e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left(\int e^{\int \frac{2}{p} dp} \cdot \frac{2}{p} dp + c \right) \rightarrow x(p) = e^{-2 \ln p} \left(\int e^{2 \ln p} \cdot \frac{2}{p} dp + c \right)$

$= \frac{1}{p^2} \left[\int p^2 \cdot \frac{2}{p} dp + c \right] \rightarrow \frac{1}{p^2}(p^2 + c) = 1 + \frac{c}{p^2}$

$x(p) = 1 + \frac{c}{p^2} \rightarrow y(p) = \left(\cancel{1} + \frac{c}{p^2} \right)(p^2 + 2p) - (\cancel{p^2} + \cancel{2p} - 1) \rightarrow y = c + \frac{2c}{p} + 1$

$$\left.\begin{array}{l} x(p) = 1 + \frac{c}{p^2} \\ y(p) = 1 + \frac{2c}{p} + c \end{array}\right\} \text{genel çözümün parametrik hali.}$$