Tarih: 02/01/2020

Süre: 80 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

SAÜ Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü
Diferensiyel Denklemler – Yıl Sonu Sınavı

İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dileriz.

1. $xy' + y = x^2y^2$ Bernoulli denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} y^{-1} &= z \\ -y^{-2}y' &= z' \end{aligned}} \quad 5$$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

$$-z' + \frac{1}{x}z = x$$

$$\boxed{z' - \frac{1}{x}z = -x \quad (\text{lineer})} \quad 5 \qquad \lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x}z\right)' = -1} \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}z = -x + c \Rightarrow \boxed{z = -x^2 + cx} \quad 5$$

$z = y^{-1}$ ile

$$\boxed{y^{-1} = cx - x^2} \quad 5$$

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

2. $x^2y''-3xy'+4y=6x^2\ln x+\dfrac{6}{x}$ Cauchy-Euler denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) $x=e^t$ $\quad y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ $\quad y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$ ile

denklem $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=6te^{2t}+6e^{-t}}$ 10 ye dönüşür

$r^2-4r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=2$ $\quad \boxed{y_h=(c_1+c_2t)e^{2t}}$ 5

$y_p=t^2(At+B)e^{2t}+ce^{-t}$ ile $\quad \boxed{y_p=t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 5

$\boxed{y_g=(c_1+c_2t)e^{2t}+t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 2 $t=\ln x$ ile

$\boxed{y_g=(c_1+c_2\ln x)x^2+x^2(\ln x)^3+\frac{2}{3x}}$ 3

3) $r^2-2r+1=0$ $\quad r_1=r_2=1$ $\quad \boxed{y_h=c_1e^x+c_2xe^x}$ 5

$\boxed{y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x}$ 3

$$\begin{aligned} c_1'e^x+c_2'xe^x&=0\\ c_1'e^x+c_2'(e^x+xe^x)&=\frac{e^x}{x^2}\end{aligned}$$ 5

$\boxed{c_2=-\frac{1}{x}}$ 5

$\boxed{c_1=-\ln x}$

$\boxed{y_p=-e^x-e^x\ln x}$ 2

$\boxed{y_g=c_1e^x+c_2xe^x-e^x-e^x\ln x}$ 5

4. $\begin{array}{l} y''+y=x^2+2 \\ y(0)=1, y'(0)=-1 \end{array}$ probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$\left(L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)\right)$

$$L\{y''+y\}=L\{x^2+2\}$$

$$s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{-1}+Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}} \quad 10$$

$$\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+1} \quad 5$$

$A=B=0 \quad C=2 \quad D=1 \quad E=-1$

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{s^4-s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \quad 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=x^2+\cos x-\sin x} \quad 5$$

5. $y''-xy'+2y=0$ denkleminin $x=0$ noktası civarında $\left(y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)$ seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ adi nokta olup

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$$
$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots$$
$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots$$

5

denklemde yerlerine yazılırsa

$$(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots)-(a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots)+(2a_0+2a_1x+2a_2x^2+2a_3x^3+\cdots)=0$$

5

$$(2a_2+2a_0)+(6a_3-a_1+2a_1)x+(12a_4-2a_2+2a_2)x^2+(20a_5-3a_3+2a_3)x^3+\cdots=0$$

5

$$\begin{cases} a_2=-a_0\\ a_3=-\frac{1}{6}a_1\\ a_4=0\\ a_5=-\frac{1}{120}a_1\end{cases}$$

$$y=a_0+a_1x-a_0x^2-\frac{1}{6}a_1x^3-\frac{1}{120}a_1x^5+\cdots$$

$$\boxed{y=a_0(1-x^2)+a_1\left(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\cdots\right)}$$

5