

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4\end{aligned}$$

## Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

## Ders İçeriği

- ❖ Tanım
- ❖ Gauss Eliminasyon Yöntemi
- ❖ Örnek Uygulamalar
- ❖ Matlab uygulama

## Tanım

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

denklemine **n- bilinmeyenli bir lineer denklem** denir.

Bir lineer denklemde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sayılarına **denklemin katsayıları**,  $b$  sayısına da **denklemin sabiti** denir.

Örnek:

$2x - y + z = 1$  lineer denkleminde,

2, -1 ve 1 denklemin katsayıları, 1 de denklemin sabitidir.

## Tanım

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklin deki **n tane bilinmeyen** ve **m- tane lineer denklemden** oluşan sisteme bir **lineer denklem sistemi** denir.

lineer denklem sisteminde

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbf{R}$  sayılarına sistemin katsayıları,

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbf{R}$  sayılarına da **sistemin sabitleri** denir.

denklem sistemini farklı bir şekilde ifadesiyle

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = c_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad \text{yada} \quad A x = b \quad \text{gibi en genel ifadesi ile}$$

gösterilebilir.

Bu lineer denklem sistemleri;

$b=0 \Rightarrow$  **“homojen denklem sistemi”**

$b \neq 0 \Rightarrow$  **“homojen olmayan denklem sistemi”** adını alır.

Homojen olmayan denklem sisteminin çözümü için geliştirilen yöntemler iki grupta incelenebilir.

1. Dolaylı yöntemler
  - Gauss-Seidel yöntemi
  - Basit iterasyon yöntemi
  - ...
2. Dolaysız yöntemler
  - Gauss eliminasyon yöntemi
  - Gauss-Jordan yöntemi
  - Cramer yöntemi
  - ...

Bu iki gruba ait yöntemleri ve örnekleri önümüzdeki derslerde çözümleyeceğiz.

## Gauss Eliminasyon Yöntemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{3n}x_n = b_3$$

lineer denklem sistemini **AX=B** formunda matris yardımı gösterebiliriz.

$$AX=B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

A ve B matrisleri üzerinde işlem yapılacağından ,  
düzenlenerek;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

sistemimizi üst üçgensel matris formuna getirerek çözüme gidelim,

❖ Buna göre başlangıç adım için katsayı matrisinin ilk satırını  $a_{11}$  bölelim.

$$a'_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right.$$

elde edilir.

### Gauss Eliminasyon Yöntemi

❖ İkinci adımda ilk satırı  $a_{21}$  ile çarpıp ikinci satırdan çıkarırsak.

$$a_{21} = 0, a'_{22} = a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}', a'_{23} = a_{23} - a_{21} \cdot a_{13}', b'_2 = b_2 - a_{21} \cdot b'_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

❖ Aynı şekilde ilk satırı  $a_{31}$  ile çarpıp üçüncü satırdan çıkardığımızda elde edilen matrisleri ;

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} \text{ haline gelir.}$$

❖ Üçüncü adımda  $a'_{22}$  satırı kendisine bölünerek;

$$\left. a''_{23} = \frac{a_{23}'}{a_{22}'}, b''_2 = \frac{b'_2}{a_{22}'} \right\} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & 1 & a_{23}'' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2'' \\ b_3' \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

### Gauss Eliminasyon Yöntemi

- ❖ Benzer şekilde 3. Satırdaki  $a_{32}'$  elemanını sıfıra indirmek için ikinci satır  $a_{32}'$  ile çarpılıp üçüncü satırdan çıkarılırsa;

$$\left. \begin{aligned} a_{33}'' = a_{33}' - a_{32}' \cdot a_{23}'' \quad , \quad b_3'' = b_3' - a_{32}' \cdot b_2'' \end{aligned} \right\} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

- ❖ Son adım olarak son satırı  $a_{33}''$  ile bölersek;

$$\left. \begin{aligned} a_{33}''' = \frac{a_{33}''}{a_{33}''} = 1 \quad , \quad b_3''' = \frac{b_3''}{a_{33}''} \end{aligned} \right\} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

- ❖ Matrisler eliminasyonlardan sonra bilinmeyen matrisi ekleyerek düzenlersek;

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2'' \\ b_3''' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= b_3''' \\ x_2 &= b_2'' - a_{23}'' \cdot x_3 \\ x_1 &= b_1' - a_{12}' \cdot x_2 - a_{13}' \cdot x_3 \end{aligned}$$

Denklemleri sıra ile çözümlenerek  $x_1, x_2, x_3$  bilinmeyenleri elde edilir.



### Gauss Eliminasyon Yöntemi

#### Not :

**Pivotlama** : Gauss eliminasyon yönteminde gerçekleştirilen hesaplamalarda paydaya karşılık gelen değer(pivot) sıfır olduğunda sorunlar ortaya çıkabilir, bu durumda satırların yeri en büyük eleman pivot elemanı olacak biçimde yer değiştirilebilir.

#### Çözüm kümesi ?

Homojen L.D.S. n. dereceden A katsayılar matrisinin rankının bilinmeyen (N) sayısından küçükse mümkündür .(  $\text{rank}(A) < N$  veya  $|A| = 0$  Birden fazla çözüme sahiptir. )

Homojen olmayan lineer denkl. sisteminin  $\text{rank}(A) = N$  ise tek çözüm mevcuttur.

Örnek :

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Buradan

$$x_3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 5.4 + 1.2x_3 = 5.4 + 1.2(-2) = 3$$

$$x_1 = -5.5 + 1.5x_2 - x_3 = -5.5 + 1.5(3) - (-2) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ x_1 = 1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Örnek uygulama :

Aşağıda  $AX=B$  formunda verilen lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz ?

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

Çözüm :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{Bmatrix} \quad \text{Denklem sistemi}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 15 \\ -3 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 13 \end{array} \right] \quad \text{Katsayılar matrisi}$$

Birinci sütun sıfırlanarak

$$\begin{aligned} R_2 - (-3/4) \times R_1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ R_3 - (1/4) \times R_1 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 2.75 & 9.25 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

İkinci sütun sıfırlanarak

$$R_3 - (-0.5/-2.5) \times R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2.5 & 4.75 & 19.25 \\ 0 & 0 & 1.80 & 5.40 \end{bmatrix} \quad \text{Geri süpürme ile}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_3 &= \frac{5.40}{1.80} = 3 \\ x_2 &= \frac{19.25 - 4.75 \times 3}{-2.5} = -2 \\ x_1 &= \frac{15 - [(-2) \times (-2) + 1 \times 3]}{4} = 2 \end{aligned} \right.$$

Uygulama :

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -4 \end{array}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz ?

Sistemde 1. denklemin -1 katını 3. denkleme ve yine 1. denklemi 4. denkleme ekleyelim.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$-x_2 = -2$$

$$x_4 = 2$$

bulunur.

Burada 2. denklem ile 3. denklemin yerlerini değiştirelim.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$-x_2 = -2$$

$$2x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$x_4 = -2$$

olur.

Son elde edilen denklem sisteminde 2. denklemin 2 katını 3. denkleme ekleyelim.

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-x_2 = -2$$

$$x_3 - x_4 = 1$$

$$x_4 = -2$$

elde edilir.

Bu son elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü ile başlangıçtaki sistemimizin çözümü aynıdır.

O halde, son elde edilen denklem sisteminde,

$$x_4 = -2$$

$$x_3 = 1 + x_4 = 1 - 2 = -1,$$

$$x_2 = 2 \quad \text{ve}$$

$$x_1 = 2 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 - 2 - 1 + 2 = 1 \quad \text{dir.}$$

Dolayısıyla verilen denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = -2 \quad \text{dir}$$

Uygulama :

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 11 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 1 \end{array}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

Çözüm :  $AX=B \Rightarrow (A|B)$

...

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = -1$$

$$x_4 = 3$$

$$x_5 = -2 \text{ bulunur.}$$



## Uygulamalar :

1)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\-2x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

2)

$$\begin{aligned}4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 1 \\3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 &= -1 \\1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -1\end{aligned}$$

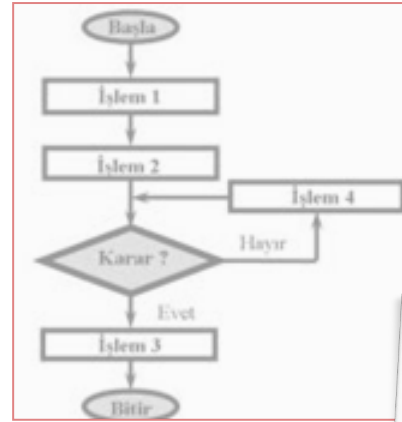
lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

3)

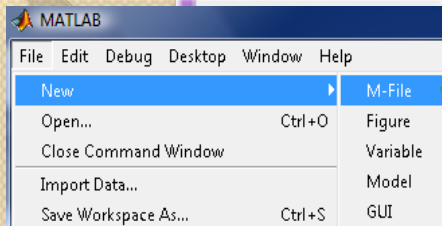
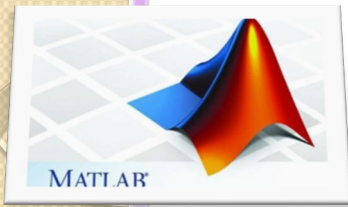
$$\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

lineer denklem sistemini gauss eliminasyon yöntemi ile çözünüz.

4) Gauss Eliminasyon yönteminin işaret akış diyagramını çiziniz.



**Gauss Eliminasyon yönteminin akış diyagramını çizerek ve matlab kodunu yazınız.**



```

%*** Gauss Eliminasyon ile denklem çözümleme ***
function I=gauss_eleme(N,Y)
X=[N Y]
[satir,sutun]=size(N)
for n=1:(sutun-1),
    s=1;
    while X(n,n)==0
        if not(X(n+s,n)==0)
            Y=X;
            X(n,:)=Y(n+s,:);
            X(n+s,:)=Y(n,:);
        end
        if s==n
            disp('Çözüm Bulunamadı!');return
        end;
        s=s+1;
    end
    for m=(n+1):(satir)
        X(m,:)=X(m,:)-X(n,:)*X(m,n)/X(n,n);
    end
end
% bilinmeyenlerin bulunması
I=zeros(satir,1);
for n=satir:-1:1
    tp=X(n,[sutun:-1:(n+1)])*I([sutun:-1:(n+1)]);
    I(n)=(X(n,sutun+1)-tp)/X(n,n);
end
    
```

```

>> N=[2 -3 2;1 1 -2;3 -2 -1]
N =
     2     -3     2
     1      1     -2
     3     -2     -1

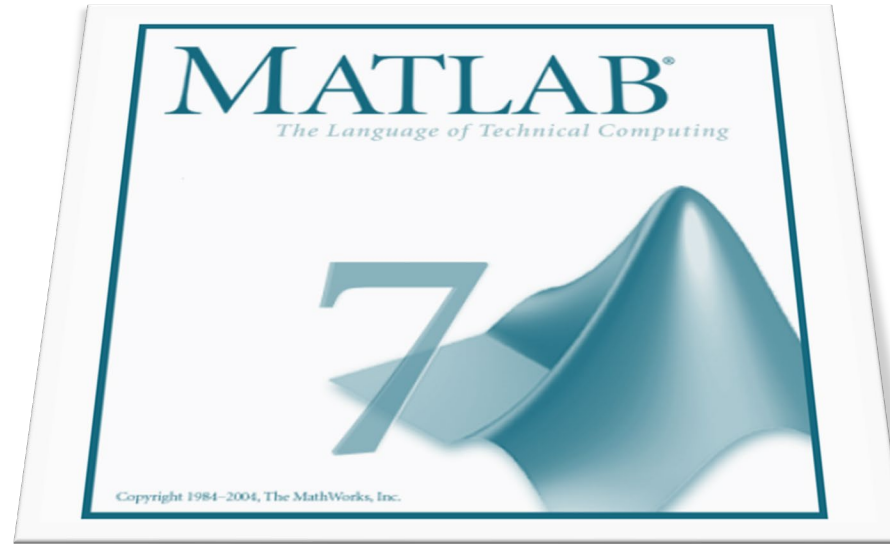
>> Y=[-11 8 -1]';
>> I=gauss_eleme(N,Y)

X =
     2     -3     2    -11
     1      1     -2      8
     3     -2     -1     -1

satir =
     3

sutun =
     3

I =
     1
     3
    -2
    
```



*Uygulama ...*