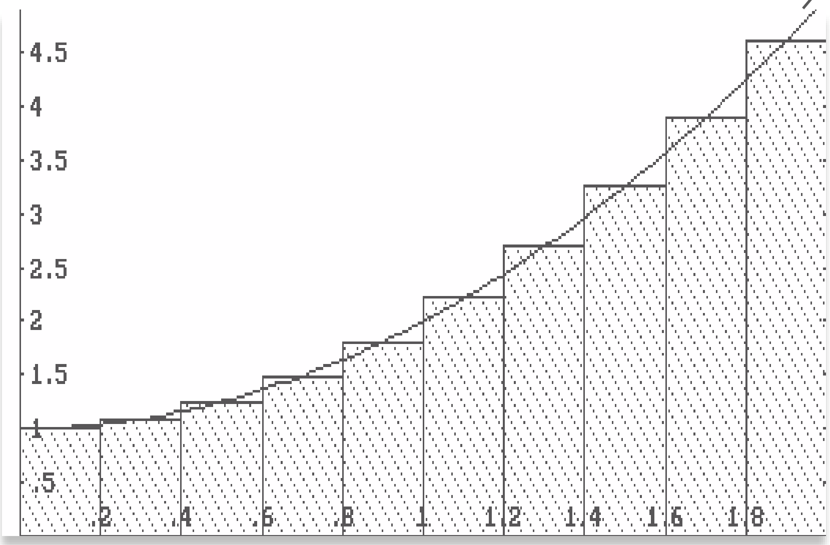
Sayısal İntegral



Ders İçeriği

$$\int_{-N\delta}^{N\delta}\left\{\frac{I_0/_c\, e^{-ik_1 z}e^{-ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{I_0/_c\, e^{-ik_1 z}e^{-ik\sqrt{z^2+\delta^2}}}{\sqrt{z^2+\delta^2}}\right\}dz$$

$$\approx\int_{-N\delta}^{N\delta}\left\{\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+\delta^2}}\right\}dz$$

$$=2\int_{0}^{N\delta}\left\{\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2+\delta^2}}\right\}dz=2\ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2+a^2}}{z+\sqrt{z^2+\delta^2}}\right)_0^{N\delta}$$

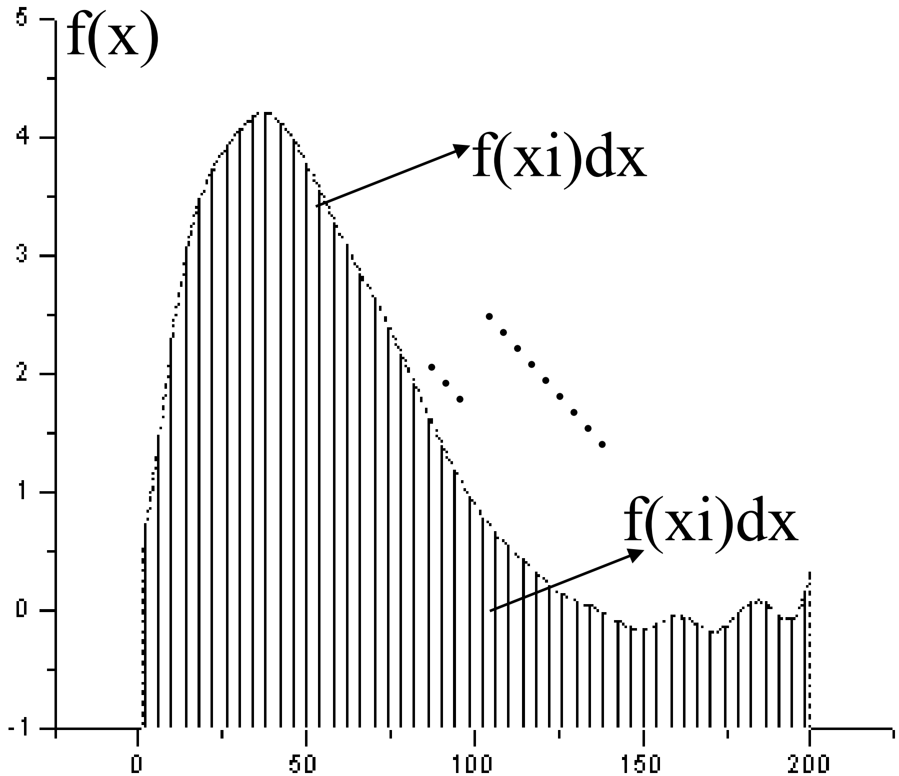
$$=2\ln\left(\frac{N\delta+\sqrt{N^2\delta^2+a^2}}{N\delta+\sqrt{N^2\delta^2+\delta^2}}\frac{\delta}{a}\right)\approx 2\ln\left(\frac{\delta}{a}\right)$$

- Sayısal İntegral
- Riemann İntegrali
- Yamuk(Trapez)Kuralı ile İntegrasyon
- Simpson Kuralı ile İntegrasyon
- Uygulama

İNTEGRAL TANIMI

- Yüksek matematikte diferansiyelin ters işlemi; integraldir

Birleştirme, bir araya getirme, toplama(sum)

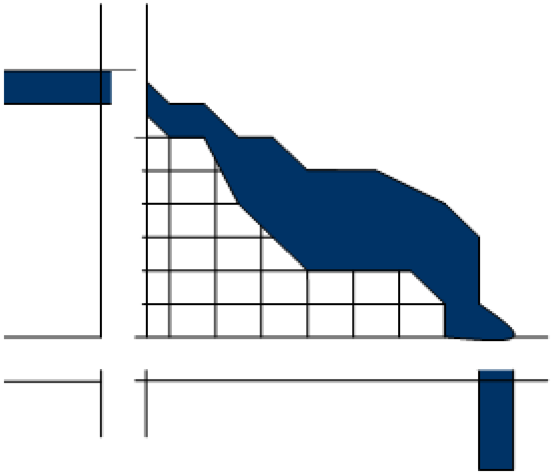


Sum [f(x)dx dilimleri

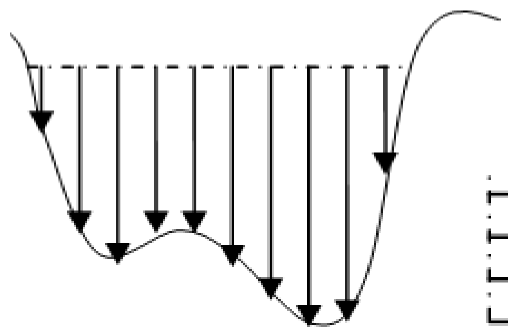
S

$$\int_{0}^{200} f(x)dx$$

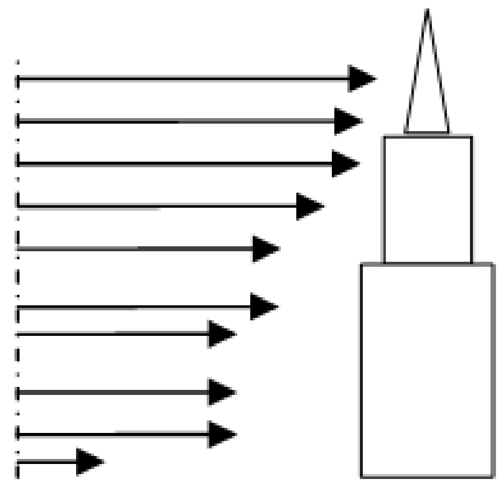
MÜHENDİSLİKTE İNTEGRAL: (FONKSİYONUN-EĞRİNİN ALTINDA KALAN ALAN)



(a)



(b)



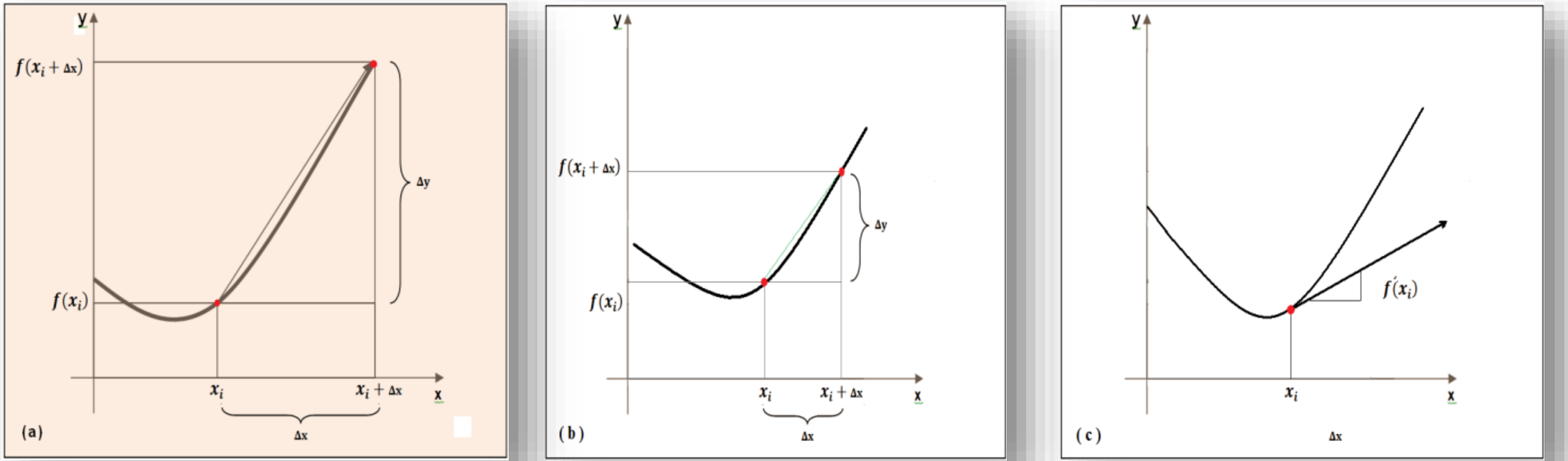
(c)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}$$

Burada y ve f(x) bağımlı değişkenin alternatif gösterimleri olup, x bağımsız değişkendir. Yani Δx'in sıfıra yaklaşması sağlanırsa, aradaki fark türevin ifadesidir.

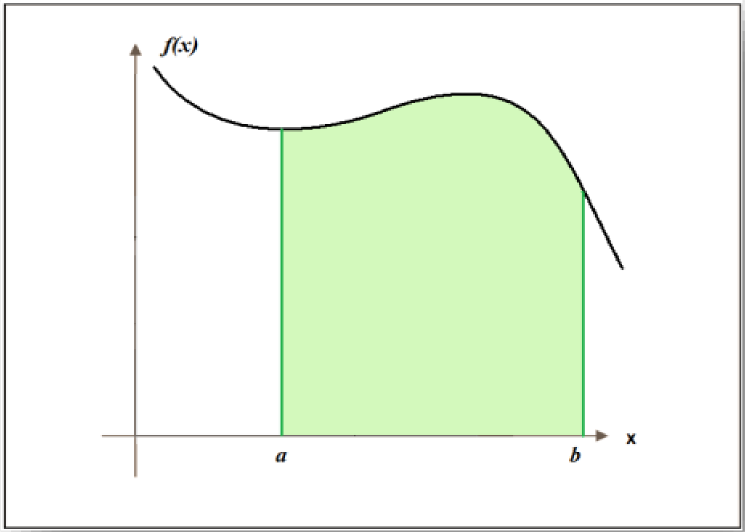
$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$ hesap yapılan noktasında y 'nin x 'e göre birinci türevidir. Dolayısıyla türev , eğrinin x_i noktasındaki teğetin eğimidir.



Δx, (a)'dan (c)'ye kadar sıfıra doğru giderken, fark yaklaştırması türevi olarak tanımlamaktadır.

x= a ’dan b ’ye kadar
f(x) ‘in integralinin grafik gösterimi.



“İntegral eğrinin altında kalan alana eşittir.”

Yüksek matematikte diferansiyelin ters işlemi, integraldir.
Sözlük anlamına göre integral almak “*parçaları bir bütün içinde bir araya getirmek ; birleştirmek toplam miktarı göstermek …*” anlamındadır.

Matematiksel olarak integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

formülüyle gösterilebilir ve x bağımsız değişkenine göre **f(x)** fonksiyonunun **x=a** ile **x=b** sınırları arasında hesaplanmış integralini belirtir.

Sayısal İntegral

Varsayalım ki $x_0 \leq x \leq x_r$ aralığında f(x) tanımlı ve integre edilebilir bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun bu aralıkta integre edilmesi istenmektedir.

Yani $x_r = x_0 + rh$ olduğuna göre $\int_{x_0}^{x_r} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+rh} f(x)dx$ ifadesinin değerini hesaplamak istiyoruz. Bu ifadeyi integrasyon işlemi özelliklerini kullanarak yazabiliriz.

$$\int_{x_0}^{x_0+rh} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx + \int_{x_0+h}^{x_0+2h} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_0+(r-1)h}^{x_0+rh} f(x)\,dx$$

Böylece f(x) uygulanmış her biri h adım uzunluğunda r adet integrasyon işlemi elde ettik. Simgesel Hesap yöntemimiz bizim bu işlemi şöyle yazmamıza izin veriyor.

$$\int_{x_0}^{x_0+rh} f(x)\,dx = \left[1 + E + E^2 + \ldots + E^{r-1}\right] Jf(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_0+rh} f(x)\,dx = \left[1+E+E^2+\ldots+E^{r-1}\right]Jf(x_0)$$

Burada parantez içindeki ifade, temsili olarak, iyi bildiğimiz Geometrik Seri olarak yorumlanabilir ve yine, temsili olarak, bunun toplamını yazabiliriz. Bu durumda integrasyon işlemimiz şu biçimi alacaktır.

$$\int_{x_0}^{x_0+rh} f(x)\,dx = \frac{E^r-1}{E-1}Jf(x_0)$$

Böylece temel integrasyon formülümüzü elde etmiş olduk. Bu noktadan sonra yapacağımız işlem bu denklemin sağındaki ifadeyi Sonlu Fark ifadeleri ile değiştirmek olacaktır.

İleri Farklarla İntegrasyon:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\left[1+\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{12}\Delta^2+\frac{1}{24}\Delta^3-\frac{19}{720}\Delta^4+-\ldots\right]f(x_0)$$

Geri Yönlü Farklarla İntegrasyon:

$$\int_{x_{n-h}}^{x_n} f(x)\,dx = h\left[1-\frac{1}{2}\nabla-\frac{1}{12}\nabla^2-\frac{1}{24}\nabla^3-\frac{19}{720}\nabla^4-\ldots\right]f(x_0)$$

Merkezi Farklarla İntegrasyon:

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = 2h\left\{1+\frac{1}{6}\delta^2+\frac{1}{180}\delta^4+\ldots\right\}f(x_0)$$

Gerçel bir f(x) fonksiyonu düşünelim.

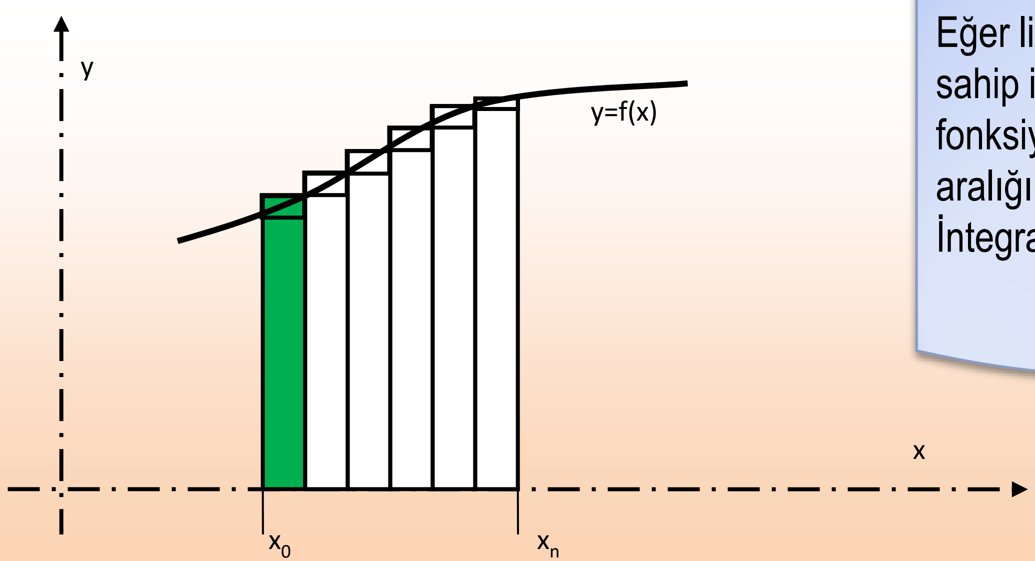
Bu fonksiyonun $x_0 \leq x_i \leq x_n$, **i = 1, 2, ..., n** aralığındaki integrali

$y = 0$, $y = f(x)$ ve $x = x_0$, $x = x_n$ eğrileri arasında kalan alanın büyüklüğüne eşittir.

Bunun matematik ifadesini şöyle yazıyoruz.

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{x_n - x_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Geometrik gösterim ise şöylece gerçekleştirilebilir.

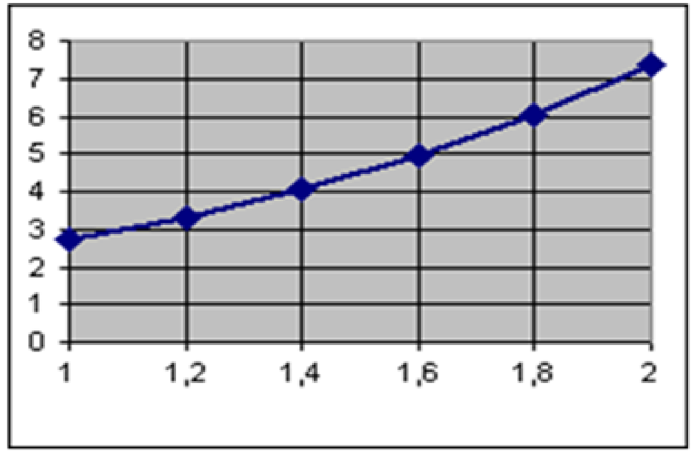


Eğer limit varsa ve sonlu bir değere sahip ise **I** ile gösterdiğimiz bu değer f(x) fonksiyonunun **$x = x_0$, $x = x_n$** aralığındaki **RIEMANN** anlamında İntegralidir denir.

Örnek 1: $\int_{x_0=1}^{x_n=2} e^x dx$ Verilen fonksiyonun değerlerini Δx =0.2 alarak tablolayalım.

x	e^x
1	2,718282
1,2	3,320117
1,4	4,0552
1,6	4,953032
1,8	6,049647
2	7,389056
	4,670774

Analitik İfadesi : 4.670774



Yukarıdaki tanıma göre sağ limitin **Δx =0.2, n =5** alınarak bulunacak ilk yaklaşımı

$$I=\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\lim{}^{sağ}{}_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{x_n-x_0}{n}=\lim{}^{sol}{}_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{x_n-x_0}{n}$$

$$I_{sağ}\cong\sum_{i=1}^{5} e^{x_i}\,\frac{2-1}{5}\cong 0.2[3.320+4.055+4.953+6.049+7.389]\cong 5.153411$$

Sol limitin ilk yaklaşımını bulabilmemiz için yukarıdaki formülde **i** yi **1** yerine **0** dan başlatmamız yeterli.

$$I_{sol}\cong\sum_{i=0}^{4} e^{x_i}\,\frac{2-1}{5}\cong 0.2[2.718+3.320+4.055+4.953+6.049]\cong 4.219256$$

$\mathbf{I} = (5,153411 + 4,219256)/2 \cong 4,686333$

Newton-Cotes integral formülleri

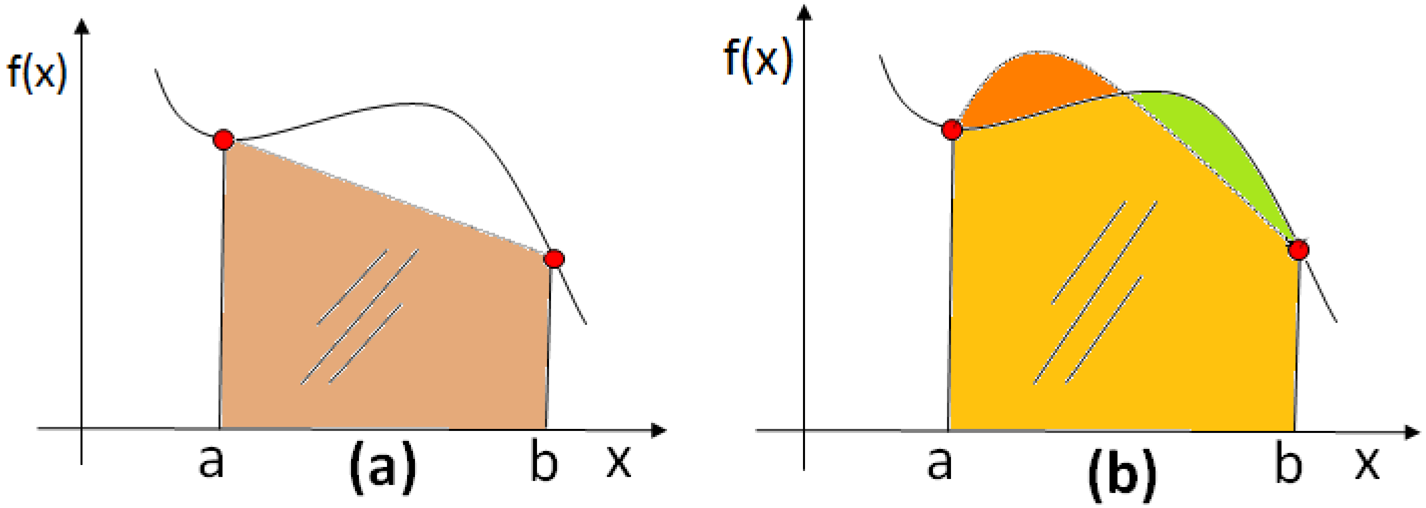
Newton-Cotes integral formülleri en yaygın integral yöntemleridir. Bu formüller, karmaşık bir fonksiyonu veya tablo şeklinde düzenlenmiş verileri, integre edilmesi kolay bir yaklaşım fonksiyonuyla ifade etme esasına dayanır.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

$\int_a^b f_n(x)$ aşağıdaki şekilde yazılabilen bir polinomdur;

$\int_a^b f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ **n** polinomun derecesidir.

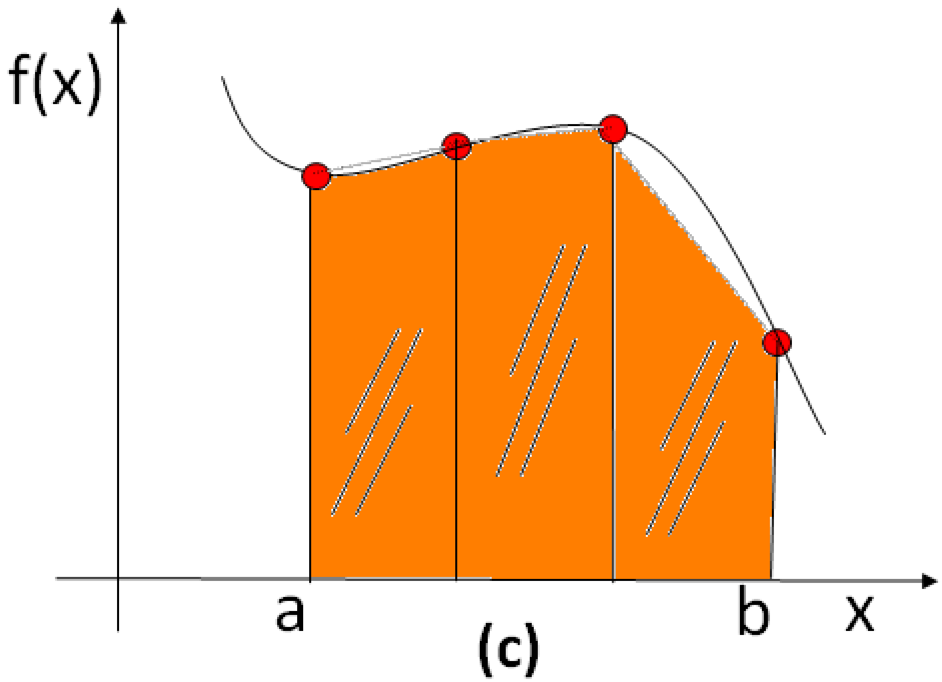
(a) Şeklindeki yaklaşımda birinci dereceden bir polinom kullanılmıştır, (b) de ise aynı amaçla parabol kullanılmıştır.



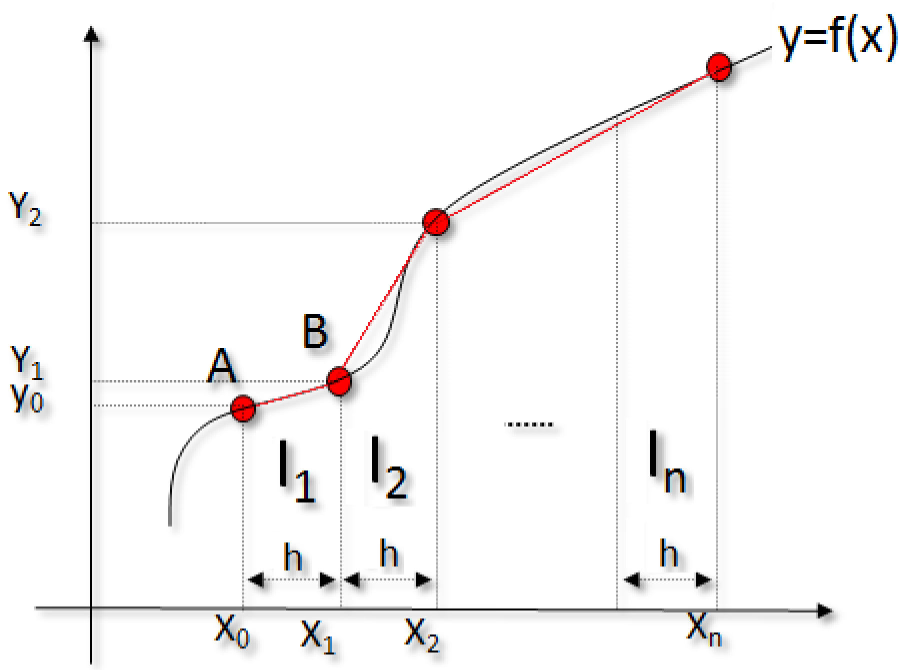
Newton-Cotes integral formülleri

Aynı şekilde integrale yaklaştırma fonksiyona veya sabit uzunluktaki aralıklar boyunca verilere uygulanan parçalı polinomlar dizisi kullanılarak da yapılabilir.

(c) şeklinde integrale yaklaştırma için üç tane düz doğru parçası kullanılmıştır. Yüksek dereceli polinomlarda aynı amaçlar için kullanılabilir.



Şekildeki gibi y=f(x) eğrisinin altında belli aralıktaki bu alanı $\mathbf{n=(x_n-x_0)/h}$ dilime bölerek elde edilen her bir dilimdeki y=f(x) eğri parçasını bir doğru parçası olarak alırsak dilim yamuğa benzeyeceğinden ;



(c)

I. dilim alanı :

$\mathbf{I_1=h(y_1+y_0)/2}$

II. dilim alanı :

$\mathbf{I_2=h(y_2+y_1)/2}$

ve n. dilim için ise

n. dilim alanı :

$\mathbf{I_n=h(y_n+y_{n-1})/2}$ olur.

Y=f(x) in altında x_0,x_n aralığındaki alan n adet dilimin alanına eşit olduğundan ;

$$I = \int_{x0}^{xn} y(x)\,dx \cong \int_{x0}^{x1} y(x)\,dx + \int_{x1}^{x2} y(x)\,dx + \cdots + \int_{xn-1}^{xn} y(x)\,dx$$

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$I = \frac{h}{2}(y_1 + y_0) + \frac{h}{2}(y_2 + y_1) + \cdots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$$

$$I = \frac{h}{2}[(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n]$$

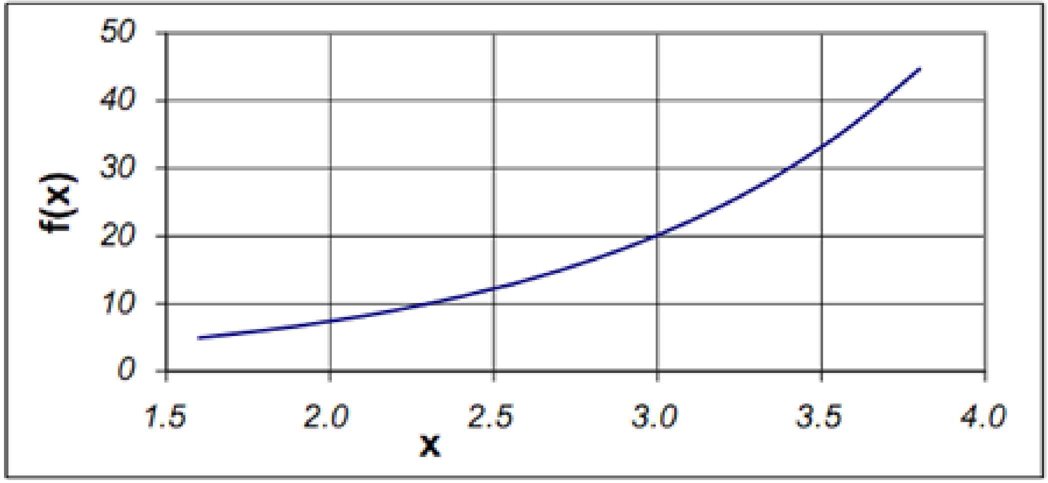
elde edilir.

Her dilimin alanı yamuk alanından küçükte olsa farklı olduğundan bulunan son ifade hata içeren bir ifadedir.

Son ifade ile alınan integrale "**Yamuk Kuralı**" denir.

Örnek Tabloda değerleri verilen fonksiyonu x=1.8 ile x=3.4 noktaları arasında integre ediniz.

x	f(x)
1.6	4.953
1.8	6.050
2.0	7.389
2.2	9.025
2.4	11.023
2.6	13.464
2.8	16.445
3.0	20.086
3.2	24.533
3.4	29.964
3.6	36.598
3.8	44.701



$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.2\left(6.050/2 + 7.389 + 9.025 + \cdots + 24.533 + 29.964/2\right) = 23.9944$$

Tablodaki değerler aslında $f(x) = e^x$ fonksiyonundan üretilmiş olup integralin gerçek değeri

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{1.8}^{3.4} e^x\,dx = e^{3.4} - e^{1.8} = 23.9144$$

olarak bulunabilir. Bu durumda trapez kuralına göre yapılan integrasyonun toplam hatası *0.08* olmaktadır. Aynı hata sayısal olarak tahmin edilirse:

$$hata = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi), \qquad 1.8 \le \xi \le 3.4 \qquad hata = -\frac{(0.2)^3 \times 8}{12} \times \left\{\left(e^{3.4}\right) \div \left(e^{1.8}\right)\right\} = \left\{\left(-0.1598\right) \div \left(-0.0323\right)\right\}$$

bulunur.

Örnek

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad I = \int_0^{0,8} f(x)\, dx$$

Bu integral analitik olarak çözülürse I=1,64053334 bulunur. Burada $a = 0$, $b = 0,8$ dır.

$n = 8$ için $h = \dfrac{0,8 - 0}{8} = 0,1$ ve $x_0 = 0 \quad x_1 = 0,1 \quad x_2 = 0,2 \quad x_3 = 0,3 \quad x_4 = 0,4$

$x_5 = 0,5 \quad x_6 = 0,6 \quad x_7 = 0,7 \quad x_8 = 0,8$ değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$I \cong (0,8-0)\frac{f(0) + 2\,[\,f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7)\,] + f(0,8)}{2 * 8}$$

$f(0) = 0,2 \qquad f(0,1) = 1,289 \qquad f(0,2) = 1,288 \qquad f(0,3) = 1,607 \qquad f(0,4) = 2,456$

$f(0,5) = 3,325 \qquad f(0,6) = 3,464 \qquad f(0,7) = 2,363 \qquad f(0,8) = 0,232$

$$I \cong 0,8\,\frac{0,2 + 2\,[1,289 + 1,288 + 1,607 + 2,456 + 3,325 + 3,464 + 2,363\,] + 0,232}{16}$$

$$I \cong 1,6008 \qquad E_t = 1,64053334 - 1,6008 \;\Rightarrow\; E_t = 0,03973334$$

Yamuk (Trapez) Kuralı ile İntegrasyon:

Uygulama : $\int_0^{\pi} Sin(x)dx$

İntegralini n=4 alarak trapez yöntemi ile bulunuz.

Ödev : $\int_a^b e^x log^2 x \, dx$

İntegralini trapez yöntemi hesaplayan programı yazınız.

Örnek: $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ integrali $n=4$ olarak yamuklar yöntemi bulunuz.

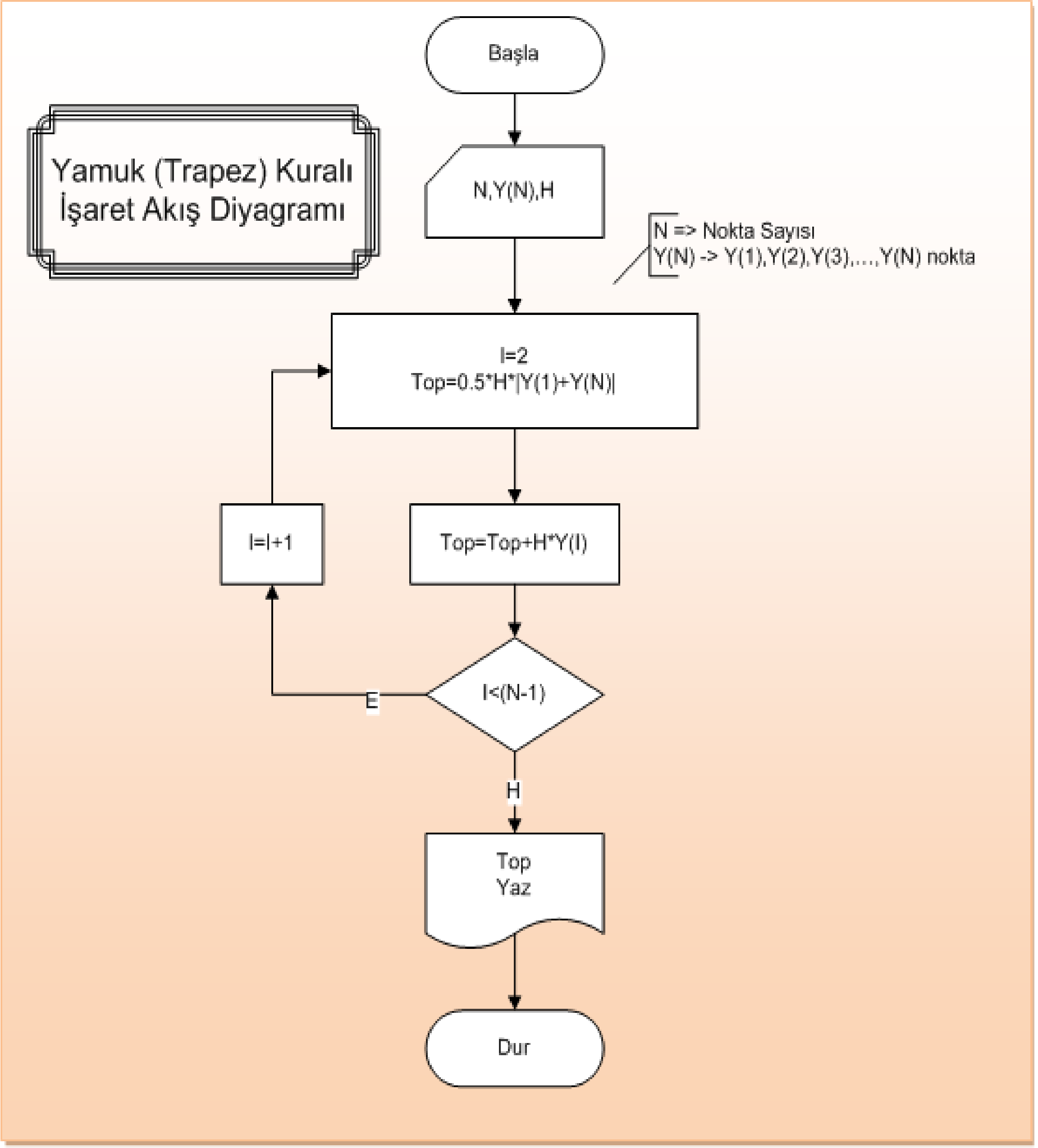
$$h = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$I \cong \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$

$$I \cong \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi\right) = 1.9$$

$$\left\{ \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \right\}$$

Yamuk (Trapez) Kuralı ile İntegrasyon:

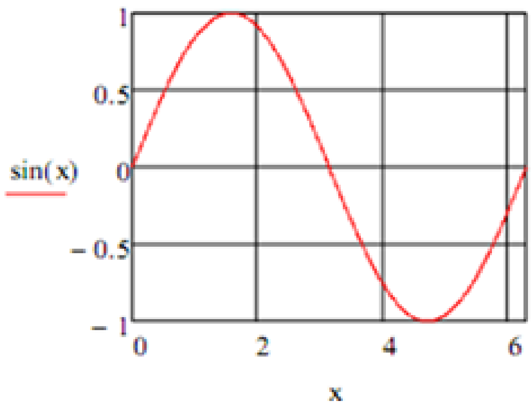


Yamuk (Trapez) Kuralı ile İntegrasyon:

Trapz(x,y) Komutu

Trapez sayısal integralde kullanılan yöntemlerde trapez yöntemine göre integral hesaplar. Yani verilen x ve y noktanın oluşturacak trapezlerin alanı integral değerini verir.

Örnek olarak



$$\int_0^{2\cdot\pi} \sin(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$$

```
>> x=0:0.2:pi;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    1.9834

>> x=0:0.01:pi;
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    2.0000
```

Yamuk kuralında x_i ve x_{i+1} noktalarındaki fonksiyon $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ değerlerini kullanarak, $[x_i, f(x_i)]$, $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$ noktalarından geçen doğru parçasını y = f(x) eğrisinin yerine yerleştirmiş ve bu biçimde elde ettiğimiz

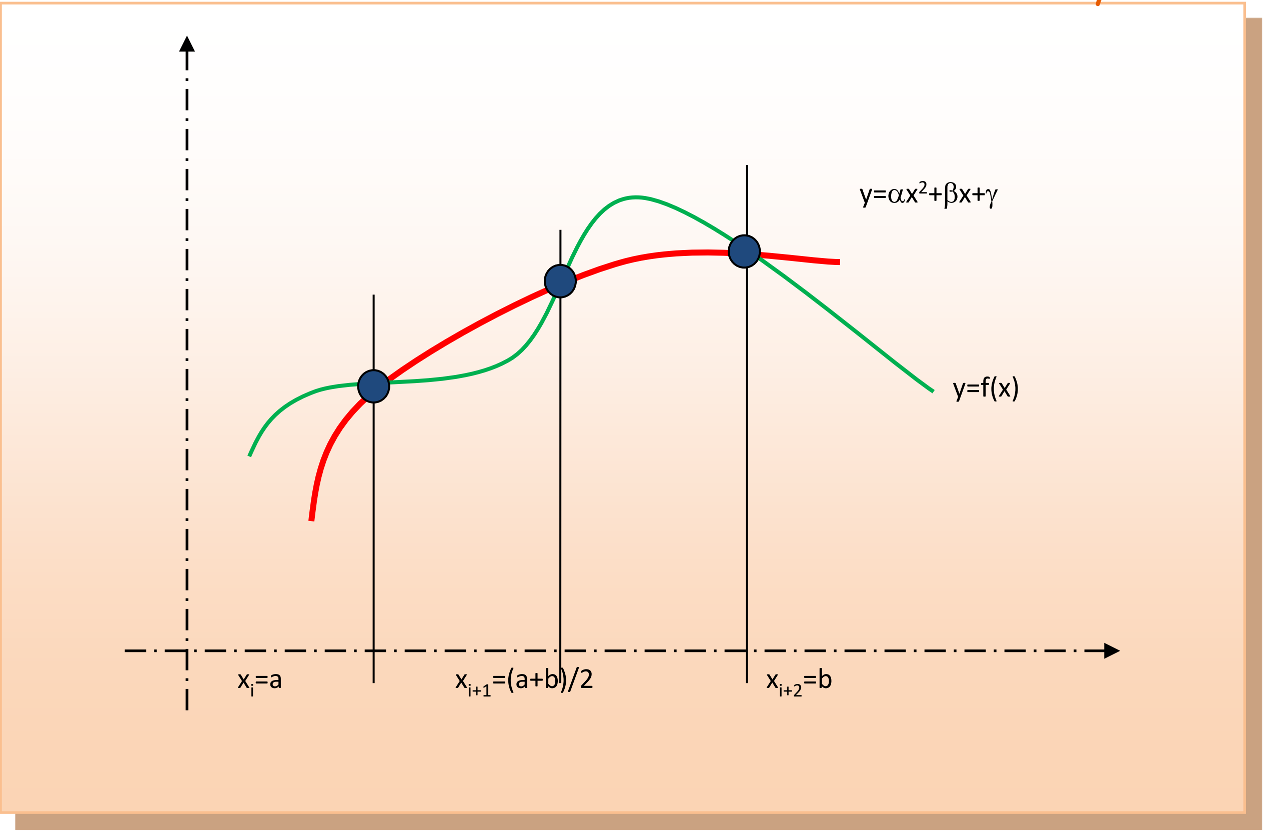
$$[x_i, \; x_{i+1}, \; f(x_i), \; f(x_{i+1})]$$

yamuğunun alanını hesaplamış ve bunu $[x_i, \; x_{i+1}]$ aralığında y = f(x) eğrisi altında kalan alana, yaklaşık, eşit kabul etmiştik.

Varsayalım ki $[x_i, \; x_{i+1}, \; x_{i+2}]$ noktalarında y = f(x) ile aynı değerlere sahip olmasını istediğimiz parabolün denklemi:

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

olarak verilmiştir.



Şimdi çok fazla indis yazmamak için $\mathbf{a} = \mathbf{x_i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x_{i+2}}$ yazalım; bu durumda $\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{(a+b)/2}$ olacaktır. Buna göre $\mathbf{y = f(x)}$ in yerini almasını istediğimiz parabol şu şartları sağlamalıdır.

$\mathbf{x = a}$ -> $\mathbf{y = \alpha\, a^2 + \beta\, a + \gamma}$

$\mathbf{x = (a+b)/2}$ -> $\mathbf{y = \alpha\, (a+b)^2/4 + \beta\, (a+b)/2 + \gamma}$

$\mathbf{x = b}$ -> $\mathbf{y = \alpha\, b^2 + \beta\, b + \gamma}$

$$\int_a^b \left[\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right] dx = \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma x\right]_a^b = \frac{1}{3}\left\{\alpha\left(b^3 - a^3\right) + \frac{3}{2}\beta\left(b^2 - a^2\right) + 3\gamma(b-a)\right\}$$

Bu denklemde yer alan **α, β, γ** da hesaplanıp yerlerine konulursa, hesaplamalardan sonra, şu sonuca ulaşılır.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left\{ \begin{array}{r} [f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+ \\ \ldots+[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{h}{3}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

yada bir başka ifade ile;

$$\mathbf{I \cong \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]}$$

SİMPSON Kuralı ile İntegrasyon:

$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \, , n = 10$ integralini simpson yöntemi ile çözümleyiniz

[1,2] aralığını n=2m=10 eşit parçaya bölelim. h=$\frac{2-1}{10} = 0{,}1$ *olur böylece* ;

y_0=f(1)=1;

y_1=f(1,1)=0,9090;

y_2=f(1,2)=0,833;

y_3=f(1,3)=0,77;

y_4=f(1,4)=0,7143;

y_5=f(1,5)=0,666;

y_6=f(1,6)=0,625;

y_7=f(1,7)=0,588;

y_8=f(1,8)=0,555;

y_9=f(1,9)=0,5263;

y_{10}=f(2)=0,5; değerleri formülde yerine yazılarak

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \cong \frac{0{,}1}{3}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

sonuçlar yerine yazılarak; $\boxed{I=0{,}69315}$ bulunur.

Analitik çözüm $\rightarrow \int_1^2 \frac{1}{x} dx = ln2 - ln1 = ln2 \cong 0{,}6931472$

$\int_1^2 e^x \, dx \; integralini$ Δx=0,2 için simpson yöntemi ile çözümleyiniz.

Simpson kuralını uygulayabilmemiz için [1,2] aralığının çift sayıda dilimden oluşması gerekmektedir, dolayısıyla integral sınırını 2 den 2,2 ye çıkarmamıza gereksinim vardır.

Buna göre formülümüz

$$\int_{x_0=1}^{x_n=2.2} e^x dx = \frac{0.2}{3}\left\{\begin{matrix} 2,718282 + 4(3,320117) + 2(4,0552) + 4(4,953032) \\ + 2(6,049647) + 4(7,389056) + 9,025013 \end{matrix}\right\} = \underline{6,306787}$$

değerini verirken öte yandan analitik yoldan integrasyon

$$\int_{x_0=1}^{x_n=2.2} e^x dx = e^{2.2} - e^1 = 9,025013 - 2,718282 = \underline{6,306732}$$

Örnek

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad I = \int_0^{0{,}8} f(x)\,dx$$

Bu integral analitik olarak çözülürse I=1,64053334 bulunur. Burada $a = 0$, $b = 0{,}8$ dır.

$n = 8$ için $h = \dfrac{0{,}8 - 0}{8} = 0{,}1$ ve $x_0 = 0$ $x_1 = 0{,}1$ $x_2 = 0{,}2$ $x_3 = 0{,}3$ $x_4 = 0{,}4$
$x_5 = 0{,}5$ $x_6 = 0{,}6$ $x_7 = 0{,}7$ $x_8 = 0{,}8$ değerleri aşağıdaki formülde yerine konursa

$$I \cong (b-a)\frac{f(x_0) + 4\displaystyle\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$$I \cong (0{,}8-0)\frac{f(0) + 4\,[\,f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7)] + 2[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6)\,] + f(0{,}8)}{3 * 8}$$

$f(0) = 0{,}2$ $f(0{,}1) = 1{,}289$ $f(0{,}2) = 1{,}288$ $f(0{,}3) = 1{,}607$ $f(0{,}4) = 2{,}456$

$f(0{,}5) = 3{,}325$ $f(0{,}6) = 3{,}464$ $f(0{,}7) = 2{,}363$ $f(0{,}8) = 0{,}232$

$$I \cong 0{,}8\,\frac{0{,}2 + 4\,[1{,}289 + 1{,}607 + 3{,}325 + 2{,}363\,] + 2[1{,}288 + 2{,}456 + 3{,}464] + 0{,}232}{24}$$

$$I \cong 1{,}6428$$

$$E_t = 1{,}64053334 - 1{,}6428 \;\Rightarrow\; E_t = -0{,}00226666 \qquad \varepsilon_t = \left|\frac{1{,}64053334 - 1{,}6428}{1{,}64053334}\right| * 100 \;\Rightarrow\; |\,\varepsilon_t\,| = 0{,}138\ \%$$

Uygulamalar :

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\, dx \ , n = 4$$ simpson yön. İle çözümleyiniz

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2cosx)\, sin^2x\, dx \ , n = 4$$ simpson yön. İle çözümleyiniz

$$\int_2^8 \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\, dx$$ Bir ,iki ,dört aralık kullanarak yamuklar yöntemi ni uygulayınız, sonucu **n=6** ile simpson yöntemi ile karşılaştırınız.

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\, dx \ , n = 10$$ simpson yön. İle çözümleyiniz

$$\int_{2}^{8} \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}}\,dx \quad , n=12 \quad , \text{trapez ?} \quad , \text{simpson ?}$$

$$h = \frac{8-2}{12} = 0,5$$

* Trapez kuralı $\Rightarrow I \cong \frac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1+y_2+\cdots+y_{11}) + y_{12}\right)$

$$y_0 = \frac{x}{\sqrt[3]{4+x^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4+x^2}} = 1$$

$y_1 = 1,1508$	$y_8 = 1,7544$
$y_2 = 1,2758$	$y_9 = 1,8108$
$y_3 = 1,3818$	$y_{10} = 1,8635$
$y_4 = 1,4736$	$y_{11} = 1,9131$
$y_5 = 1,5546$	$y_{12} = 1,9559$
$y_6 = 1,6274$	
$y_7 = 1,6935$	

$$I = \frac{0,5}{2}\left(y_0 + 2(y_1+y_2+\cdots+y_{11}) + y_{12}\right) = \underline{\underline{9,4898}}$$

* Simpson Kuralı $\Rightarrow I \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 2(y_2+\cdots+y_{10}) + 4(y_1+\cdots+y_{11}) + y_{12}\right)$

$$I \cong \underline{\underline{9,4949}}$$

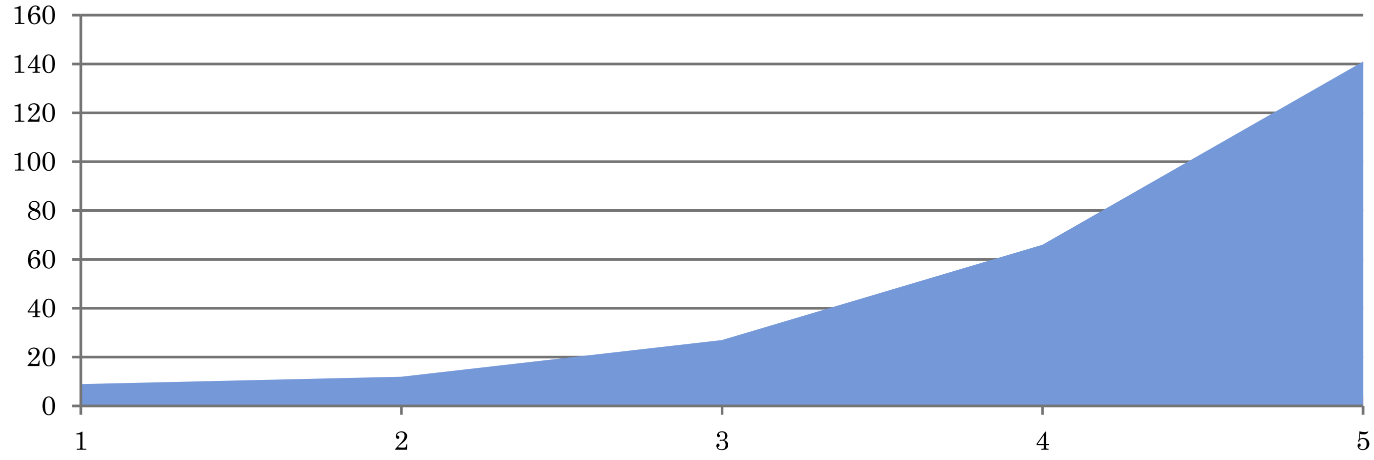
Örnek :

Bir inşaat firması almış olduğu arsanın üzerine konut yapmak istemektedir. Eğimli olan arazinin üzerindeki hafriyatı hesaplayabilmek için aşağıdaki, ölçüm değerlerini elde etmiştir.

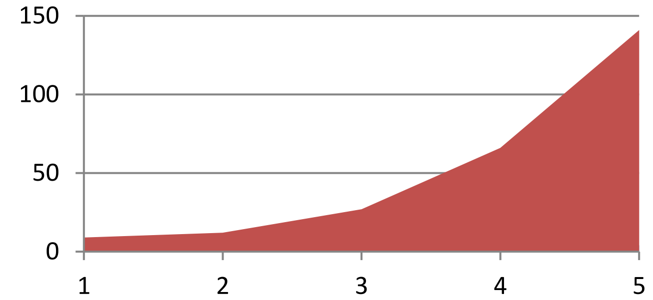
(0,9)(1,12)(2,27)(3,66)(4,141)

A-) Buna göre arazinin eğimini oluşturan fonksiyonu bulunuz.

B-) Fonksiyonun altında kalan alanı simpson ve trapez yöntemi ile bununuz.



x	y	1	2	3
0	9	3	12	12
1	12	15	24	12
2	27	39	36	
3	66	75		
4	141			



George-Newton enterpolasyonundan

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 9 + \frac{3}{1}(x-0) + \frac{12}{2.1}(x-0)(x-1) + \frac{12}{6.1}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 9 + 3x + 6(x^2-x) + 2(x^2-x)(x-2)$$

$$= 9 + 3x + \cancel{6x^2} - \cancel{6}x + 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 + \cancel{4}x$$

$$P_3(x) = 2x^3 + x + 9$$

Trapez Kuralı $I_1 = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)\right]$

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[9 + 141 + 2(12 + 27 + 66)\right]$$

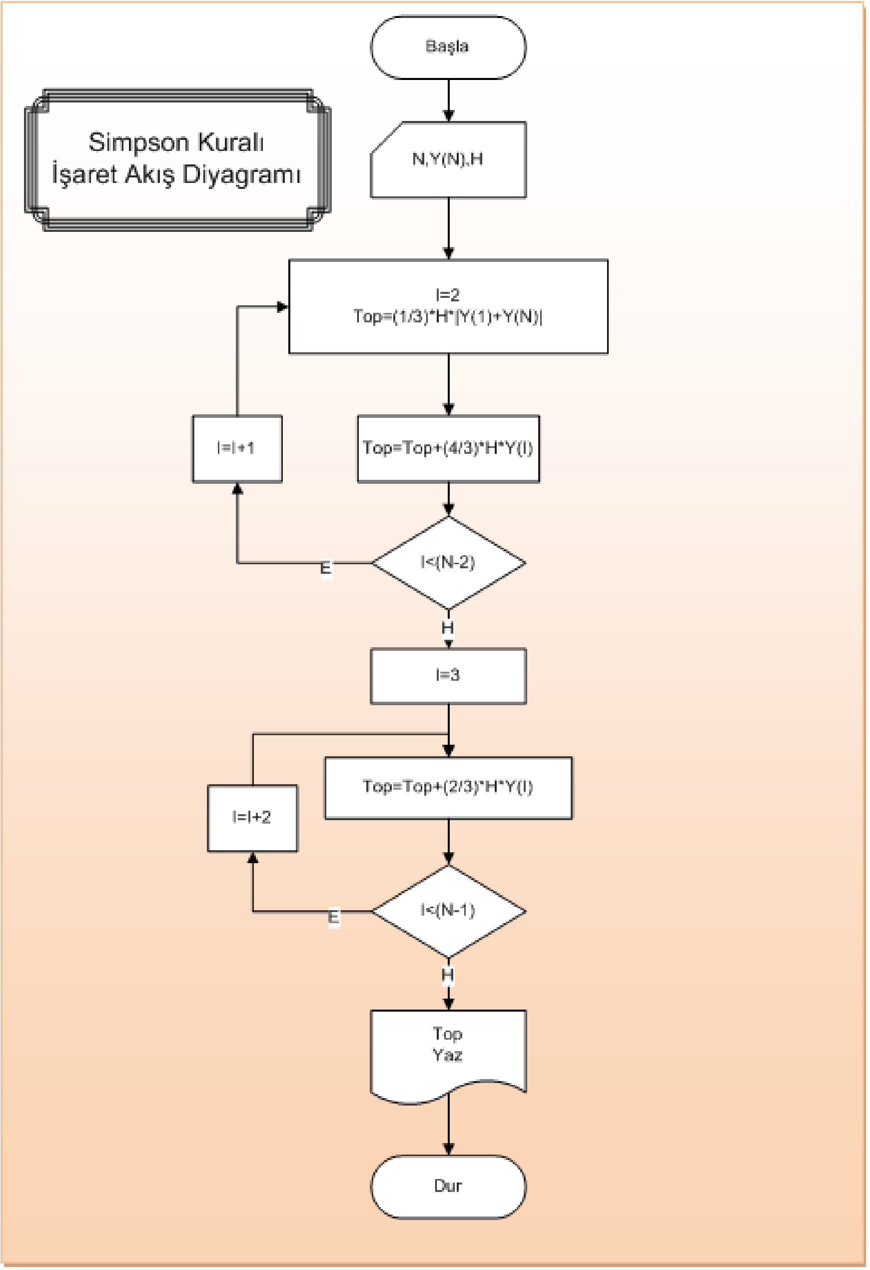
$$I_1 = 180$$

Simpson $I_2 = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4y_1 + 4y_3\right]$

$$I_2 = \frac{1}{3}\left[9 + 141 + 2.27 + 4.12 + 4.66\right]$$

$$I_2 = 172$$

SİMPSON Kuralı ile İntegrasyon:



Simpson yöntemi için matlab örneği ;

```
>> a=0;b=1;h=0.25;
>> x=a:h:b;
>> y=exp(-x.^2);
>> % Simpson formülü kullanılarak sonucun bulunması
>> n=length(y);


>> Alan=(y(1)+4*sum(y([2:2:n-1]))+2*sum(y([3:2:n-1]))+y(n))*h/3

Alan =

    0.7469
```

$y(x)=e^{-x^2}$

$a=0,\ \ b=1,\ \ h=0.25$

$$Alan \cong \frac{h}{3}\,[\,y_1+4\,(\,y_2\ \ +y_4\,)+(\,2\,(\,y_3\ \,)+y_5\,]$$

```
%     değişkenin tanımlanması
>>syms x

% int komutu ile alan hesaplanması
>>Alan = int(exp(-x^2),x,0,1)

Alan=

1/2*erf(1)*pi^(1/2)

>> double(Alan)

ans =
   0.7468
```

Quad(f,xmin, xmax) Komutu :

Bu komut integral işlemini nümerik olarak yinelemeli Simpson yöntemini kullanarak *[a - b]* aralığında hesaplar. integral

```
>>I=quad(f,a,b)
```

Yazılarak hesaplanabilir. Buradaki fonksiyon integrali alınacak fonksiyonu göstermek zorundadır.

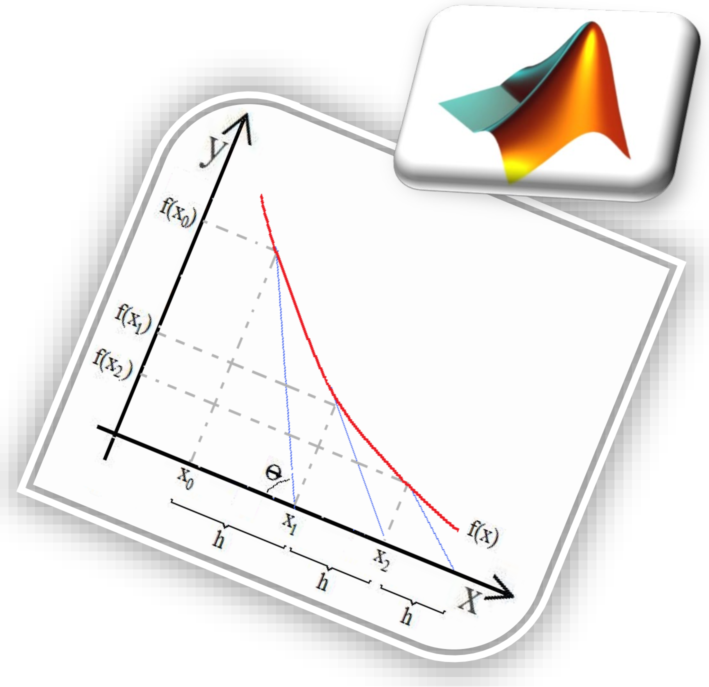
Dblquad Komutu

MATLAB' iki değişkenli fonksiyonların integrallerinde alınabilir. Yani $f(x,y)$ gibi iki değişkene bağlı ise fonksiyonun integrali

```
>>dblquad (f,xmin,xmax,ymax,ymin)
```

Şeklinde yazılarak hesaplatılabilir.

Uygulama …



Kaynaklar

Sayısal Analiz
S.Akpınar

Mühendisler için Sayısal Yöntemler
(Steven C.Chapra&RaymontP.Canale)