30/01/2025

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YIL SONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN VE NEREDEN GELDİĞİ BELLİ OLMAYAN İSTENİLENİN DIŞINDA BİR YÖNTEMLE VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = xp - 2\sqrt{1+p}$ $\left(p = y'\right)$ denkleminin genel ve varsa aykırı (tekil) çözümünü bulunuz.

Denklem Clairaut tipi olduğundan x e göre türevini alalım.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\frac{dp}{dx} \qquad \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{\sqrt{1+p}}\right) = 0 \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$y = cx - 2\sqrt{1+c}$ (Genel Çözüm)

$$\left.\begin{aligned} y &= xp - 2\sqrt{1+p} \\ x - \frac{1}{\sqrt{1+p}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = \frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow y = x\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right) + 2\sqrt{1+\frac{1-x^2}{x^2}}$$

$y = \dfrac{-1-x^2}{x}$ veya $xy + x^2 + 1 = 0$ (Aykırı Çözüm)

---

2. $xy'' - \left(1+x\right)y' + y = 0$ denkleminin bir özel çözümünün $y_1 = x+1$ olduğu bilinmektedir. Bu özel çözümden yararlanarak mertebe düşürme yöntemi ile verilen denklemin genel çözümünü bulunuz.

$y_1 = x+1$ bir özel çözüm olduğundan genel çözüm, $y = \left(x+1\right)u$ dönüşümü yardımıyla bulunabilir.

$$y = \left(x+1\right)u \qquad y' = \left(x+1\right)u' + u \qquad y'' = \left(x+1\right)u'' + 2u'$$

değerleri denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$x\left(x+1\right)u'' - \left(1+x^2\right)u' = 0$$

elde edilir. $u' = v$ ve $u'' = v'$ yardımıyla $x\left(x+1\right)v' - \left(1+x^2\right)v = 0$ şeklinde birinci mertebeden birinci dereceden denklem elde edilmiş olur. Bu son denklem, $\dfrac{dv}{v} - \dfrac{1+x^2}{x+x^2}dx = 0$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilir. İntegral yardımıyla $v=\dfrac{c_1xe^x}{(x+1)^2}$ elde edilir. $v=u'$ olduğundan $u=c_1\int\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx+c_2$ olup, $u=c_1\dfrac{e^x}{x+1}+c_2$ olarak elde edilir. Bu değer $y=(x+1)u$ da yerine yazılırsa $y=c_1e^x+c_2(x+1)$ elde edilir.

---

3. $\begin{array}{l} y''-y'+y=0 \\ y(0)=2,\ y'(0)=0 \end{array}$ Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{y(x)\}=Y(s),\ L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-...-y^{(n-1)}(0)$

$L\{f(x)\}=F(s)\Rightarrow L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$

$L\{\cos ax\}=\dfrac{s}{s^2+a^2},\ L\{\sin ax\}=\dfrac{a}{s^2+a^2},\ L\{e^{ax}\}=\dfrac{1}{s-a}$

$L\{y''-y'+y\}=L\{0\}\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0$

Koşullar yerine yazılırsa, $Y(s)=\dfrac{2(s-1)}{s^2-s+1}$ şeklinde elde edilir. Buradan ters Laplace dönüşümü ile

$y(x)=L^{-1}\left\{\dfrac{2(s-1)}{s^2-s+1}\right\}$ olarak yazılabilir. Şimdi parantezin içindeki ifadeyi düzenleyelim.

$\dfrac{2(s-1)}{s^2-s+1}=\dfrac{2(s-1)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{2\left(s-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$. Buradan

$y(x)=2L^{-1}\left\{\dfrac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}$ olup

$y(x)=2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x$ şeklinde elde edilir.

---

4. $(x+1)y''+xy'+y=0$ denkleminin genel çözümünü $x=0$ noktası civarında aşağıdaki durumlara dikkat ederek elde ediniz.

a) $x=0$ noktası civarındaki çözüm ve türevleri net bir şekilde ifade edilmelidir.

b) Katsayılar ile ilgili genel bağıntı net bir şekilde ifade edilmelidir.

c) Genel çözümü $y=a_0(...)+a_1(...)$ şeklinde parantez içleri en az x^4 lü terimi içerecek şekilde yazılmalıdır.

$x=0$ denklemin adi noktası olduğundan $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde bir çözüm araştırabiliriz.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \text{ ve } \ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

değerleri denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$(a_0+2a_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2}+n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n\right\}x^n=0$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$a_0+2a_2=0 \ \text{ ve } \ (n+1)(n+2)a_{n+2}+n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_n=0$$

yazılabilir. Böylece, $a_{n+2}=\dfrac{-na_{n+1}-a_n}{n+2}$, $(n\geq 1)$ olup

$a_2=-\dfrac{1}{2}a_0 \qquad a_3=\dfrac{1}{6}a_0-\dfrac{1}{3}a_1, \qquad a_4=\dfrac{1}{24}a_0+\dfrac{1}{6}a_1$ … olarak elde edilirler. Son olarak genel çözüm,

$y=a_0\left(1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4+...\right)+a_1\left(x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{6}x^4+...\right)$ şeklinde elde edilir.