Dr. Yüksel YURTAY

Sayısal Analiz

Giriş

İletişim :

yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

Amaç :

Mühendislik problemlerinin bilgisayar ortamında çözümünü mümkün kılacak sayısal çözüm metot ve algoritmalarının öğretilmesi.

Öğrenme Çıktısı :

1. Teorik derslerde el ile yapılan tüm hesaplamaların bilgisayar ortamına nasıl taşınabileceği ve bu problemlerin bilgisayarlara nasıl çözdürülebileceği hakkında beceriler kazandırmak.

2. Sayısal çözüm yaklaşımlarının mutlaka bir algoritma yapısına dayandığının anlaşılması.

3. Bilgisayar ve yazılım dillerinin mühendislik hayatında nasıl bir fonksiyon icra ettiğinin anlaşılması.

Ders İçeriği:

1. Sayısal analize giriş, sayısal yöntemler, algoritma mantığı
2. Algoritma kurulması ve algoritma alt birimlerinin tanıtılması
3. Matrisler ve matris işlemleri
4. Matrisler ve matris işlemleri
5. Uygulama
6. Lineer denklem sistemleri çözüm yöntemleri
7. Lineer olmayan denklem sistemleri çözüm yöntemleri
8. Lineer olmayan denklem sistemleri çözüm yöntemleri
9. Uygulama
10. Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri
11. Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri
12. Sayısal türev yöntemleri
13. Sayısal integral yöntemleri
14. Genel Tekrar - Dif .Denkl. çöz.- Kompleks Sayılar (Matlab)

Değerlendirme Sistemi

Yarıyıl İçi Çalışmaları	Sayısı	Katkı Payı %
Ara Sınav	1	70
Kısa Sınav	2	20
Ödev/Kısa Sınav	1	10
TOPLAM		100
Yarıyıl içinin Başarıya Oranı		50
Finalin Başarıya Oranı		50
TOPLAM		100

Beklenenler

- Bütün derslere gelmeniz ve dersleri dikkatle takip etmeniz,
- Sınıf aktivitelerine katılmanız,
- Ödevlerinizi zamanında yapmanız,
- Bir konuyu iyi anlayamadığınızı düşündüğünüzde bunu hemen paylaşmanız.

Ödevler

- Ev ödevleri
- Her ödev, verilmesini takip eden haftada sonlanacaktır.
- Dönemin ilk ve son haftalarında ve arasınav haftasında ödev verilmeyecektir.
- Ödevler WORD ortamında yazılıp, elektronik ortamda toplanacaktır.
  (sayisalanaliz54@gmail.com)
- Ödev gönderileri Öğrenci numarası_haftano şeklinde düzenlenerek gönderilecektir. (030110035_Hft01)

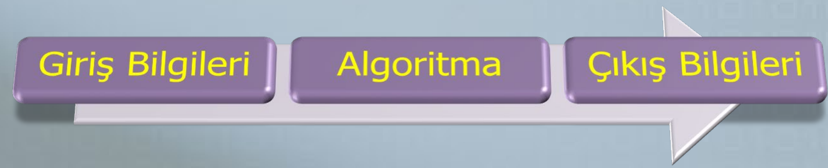
Sayısal analize giriş

- Sayısal analiz konusunun sınırları diğer bazı disiplinlerin aksine kesin olarak belirlenmemektedir.

- Sayısal çözümleme ile yapılan işlem verilen sayısal bilgileri belli bir algoritma ile işleyerek sayısal bilgi elde etmektedir.

Sayısal analize giriş

▪Sayısal çözüm yöntemleri, matematiksel problemleri elektronik hesaplayıcılar üzerinde çözmek için kullanılan bir yoldur.

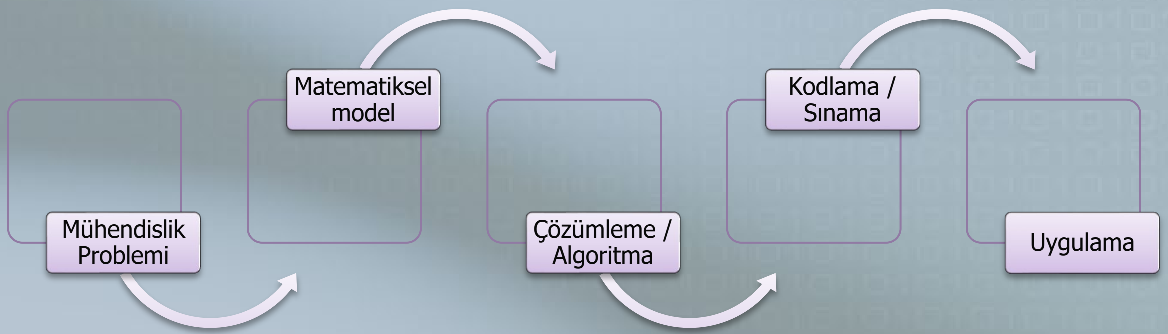


▪Çözümlerdeki hassasiyet artırıldıkça, işlem yükü artmaktadır bu yük elektronik hesaplayıcılar yardımıyla kolayca aşılabilmektedir.

▪Hatalarda sayısal analiz konuları içersinde yer almaktadır.

Sayısal analize giriş

▪Bir işlevin veya çözüm yönteminin tekrar tekrar uygulanması işlemi ardışık yaklaşım (iterasyon) olarak bilinir.

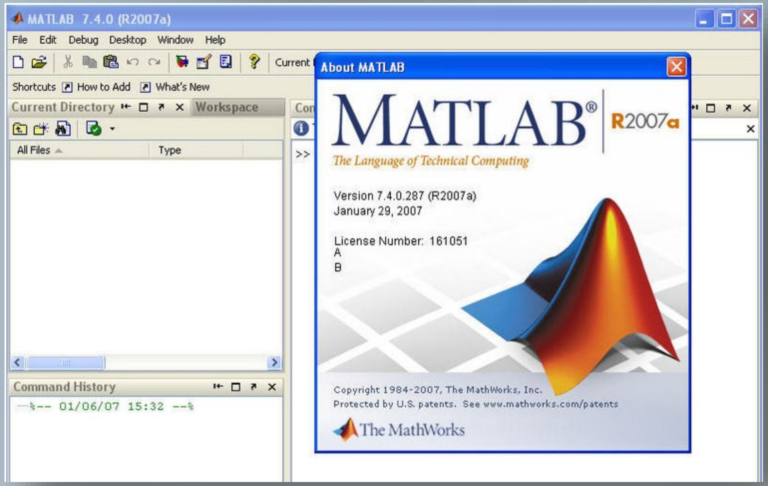


▪Şüphe yok ki hataları en az olan algoritma verilen problemin çözümü için kullanılacaktır.

Sayısal Analiz Bilimi

▪Bu alanındaki çalışmaların sonunda elde edilen veya geliştirilen sayısal yöntemler bilgisayar yardımıyla çok çeşitli mühendislik problemlerinin ve bazı temel bilimlerin çözümünü kolaylaştırır.

▪Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için genel amaçlı programlama dilleri kullanılabileceği gibi ticari paket programlar, **MatLab**, **MathCAD**, veya **Mathematica** gibi matematiksel işlemler yapmak için geliştirilmiş programlarda kullanılabilir.



HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir.

Bu hataların bir kısmı kullanıcılardan, bir kısmı elektronik hesaplayıcılardan , bir kısmı da yazılımlardan kaynaklanır.

Belirli bir ondalıktan sonra gelecek sayılar kestirilemez. Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu durumda gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algoritmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemden sonra, sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz.

HATAL A R VE HA TALARIN KAYNAKLARI

Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözülmelerinde yapılan hatalar genellikle üç ana başlıkta toplanır. Bunlar modelleme hataları, ölçme hataları ve sayısal hatalardır.

- Modelleme hatası bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır.

  Örnek olarak serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.

- Ölçme hatası, deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır.

  örnekte eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken gecen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.

- Sayısal hatalar veya diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Örnek vermek gerekirse,

Π= 3,141592653589793...
√2= 1,1414128...
2/3=0,666666666...

Bu sayılarla işlem yapıldığında hataların büyük olacağı açıktır.

Verilen reel sayı ise ondalık kısmının iki tabanında tam karşılığı olup olmadığı araştırılmalıdır.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

$(0.125)_{10} = (0.001)_2$ durumunda olduğu gibi (0.125) sayısının iki tabanlı karşılığı (0.001) dir. Dolayısıyla (0.1) reel sayısının iki tabanında tam olarak ifade edilmesi mümkün değildir.

Elektronik hesaplayıcılarda sayılar iki tabanında ancak belirli uzunlukta ifade edilebilmektedir.

Örneğin, reel sayılar için normal hassasiyette 32 bitlik bir yer ayrılan hesaplayıcıda 7 ondalık basamağa, çift hassasiyette ise 64 bitlik yer ayrılır ve buda yaklaşık 15 ondalık basamağa karşılık gelir. Bu nedenle değerler için hesaplayıcılardaki ayrılan yerler veri tipine göre değişmektedir. Buda farklı bir türde hataya neden olabilmektedir.

SAYILARIN İFADE ŞEKLİ

Sayılar günlük hayatta onluk sisteme göre işlemler yapılır. Örnek olarak 298 sayısı

$$\begin{aligned} 298 &= 2*100+9*10+8*1 \\ &= 2*10^2+9*10^1+8*10^0 \end{aligned}$$

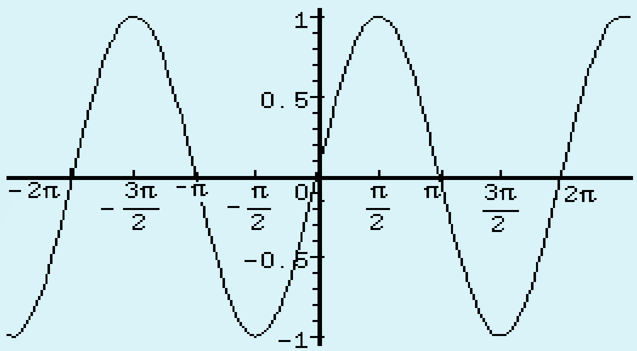
Şeklinde işlemler yapılır. Bunun yanında bazı 12 lik 16 sistemlerde mevcuttur. Bilgisayarlarda ise işler 2 ilk (binary) sistemler üzerine kurulduğu için ikilik sistem kullanılır yani 298 sayısı bilgisayar hafızasında

$$\begin{aligned} 298 &= 1*2^8+0*2^7+0*2^6+1*2^5+0*2^4+1*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0 \\ &= 1*256+0*128+0*64+1*32+0*16+1*8+0*4+1*2+0*1 \\ &= (100101010)_2 \end{aligned}$$

Hatalar

Hata = Gerçek değer-Yaklaşık değer

$$Sin(x) = x - \frac{x3}{3!} + \frac{x5}{5!} - \frac{x7}{7!} + \cdots$$



Hesaplamada ihmal edilen terimlerin toplamı yapılan kesme hatasına eşit olur.

Mutlak Hata

Analitik olarak bulunan veya doğru olarak kabul edilen değer ile sayısal olarak bulunan değerin farkının mutlak değeri mutlak hata olarak tanımlanır.

$$\varepsilon_{mutlak} = | f_{gerçek} - f_{hesaplanan} |$$

BSM

1. Hafta

Bir integral işlemini analitik olarak yapmak yerine sayısal olarak hesaplamak için sürekli bir f(x) fonksiyonu yerine, bu fonksiyonun alanını kolay yoldan bulabilecek biçimde küçük parçacıklara bölünerek sürekli olmayan hale getirilebilir.

Bu durum hatalara neden olur; bu tür hatalara **kesme hatası** denir.

sin(*x)* fonksiyonunun değeri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Fakat sin(x) fonksiyonunun gerçek değeri bu değildir. Fonksiyonunun gerçek değerini hesaplamak için

$$\sin(x) = p(x) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

gibi sonsuz bir seri kullanılmalıdır.

Belli sayıda terim kullanılmasından dolayı meydana gelen bu tür hatalara ***'kesme hatası'*** *denir.*

Kesme hatalarına ilaveten diğer bir problem bilgisayarların rakamları belli hassasiyetteki büyüklüklerde hafızalarında tutmalarıdır. Aşağıdaki örnek kesme hatasının nasıl oluştuğunu göstermektedir.

Örnek : Asıl fonksiyonda verilen ifadenin açılımını kullanarak sin(∏/7) fonksiyonunun değerini hesaplanması.

	Fonksiyon	Değeri
1	$\frac{\pi}{7}$	= 0.4487989505
2	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3$	= 0.4337327325
3	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5$	= 0.4338844648
4	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7$	= 0.4338837371
5	$\frac{\pi}{7}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^5+\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^7-\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{7}\right)^9$	= 0.4338837391

Bağıl Hata

Gerçek değer ile yaklaşık değerin farklarının, gerçek değere oranı olarak tanımlanır.

$$\varepsilon_{bağıl} = \varepsilon_{mutlak} / f_{gerçek} = \varepsilon_{mutlak} / f_{yaklaşık}$$

Bağıl hata boyutsuz olduğu için, mutlak hatadan daha anlamlıdır. Ama fonksiyonun gerçek değeri sıfıra eşit olduğunda bağıl hata tanımsız olacağından dolayı her problem için kullanışlı değildir.

Bağıl hata ve yaklaşım hatası 100 ile çarpılarak çoğu zaman hata yüzdesi olarak gösterilir. Yüzde değerlerin negatif çıkmaması için farklar mutlak değer olarak alınabilir.

Yaklaşım Hatası ve Veri Hataları

Gerçek değeri bilinmeyen fakat yaklaşık olarak hesaplanabilen değerlerin ne kadar hata ile birbirlerine yakın bulunduklarını tanımlayan hata türüdür.

Genellikle bir yinelemede (iterasyon) her adımda bir önceki adım sonuçu ile olan bağıl hatası olarak da tanımlanır.

$$\varepsilon_{yaklaşım} = (f_{yeni} - f_{eski}) / f_{yeni}$$

Bağıl hata ve yaklaşım hatası 100 ile çarpılarak çoğu zaman hata yüzdesi olarak gösterilir.

İşlemlerde kullanılacak verilerde bulunan hatalara veri hataları diyoruz.

Yaklaşım Hatası ve Veri Hataları

Örnek :

e^x fonksiyonunun seri açılımı $e^x = 1+x+x^2/1!+x^3/2!+\ldots+x^{n+1}/n!$

ile veriliyor. x=0.5 değeri için $e^{0.5}$=1.648721271 olduğu bilindiğine göre seri açılımından yararlanarak ilk iki ve üç terim alarak bağıl ve yaklaşım hata yüzdelerini bulunuz?

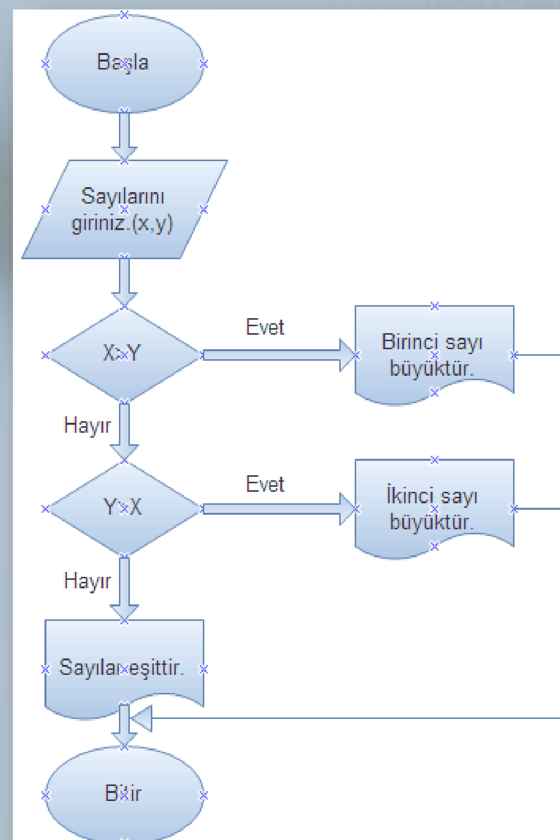
x = 0.5 değeri için

ilk iki terim alındığında e^x= 1.50 ilk üç terim alındığında e^x= 1.75 hesaplamada yapılan bağıl ve yaklaşım hata yüzdeleri sırasıyla,

$$e_{bağıl} = \frac{e^{0.5} - 0.5}{e^{0.5}} x100 = \frac{|1.648721271 - 1.75|}{1.648721271} x100 = 6.1428$$

$$e_{yaklaşım} = \frac{|1.75 - 1.5|}{1.75} x100 = 14.2857$$

Algoritma ve Akış Diyagramları



Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar

Sonraki Hafta :

Algoritma Kurulması …