ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YIL SONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN VE NEREDEN GELDİĞİ BELLİ OLMAYAN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = xp - \arctan p$ denkleminin genel ve varsa tekil çözümlerini elde ediniz.

Denklem Clairaut tipi olduğundan x e göre türevini alalım.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dx} \qquad \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{1+p^2}\right) = 0 \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$y = cx - \arctan c$ (Genel Çözüm)

$$\left.\begin{aligned} & y = xp - \arctan p \\ & x - \frac{1}{1+p^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \mp x\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \arctan\left[\mp\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right] \text{ (Aykırı Çözüm)}$$

---

2. $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Homojen kısma ait karakteristik denklem $r^2 + 4r + 4 = 0$ olup $r_1 = r_2 = -2$ dir. Buradan $y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$ olarak yazılabilir. Sağ taraftaki fonksiyon nedeniyle özel çözüm parametrelerin değişimi yöntemi ile bulunmalıdır. Bu nedenle $y_p = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)xe^{-2x}$ olarak seçilir. Böylece,

$$\left.\begin{aligned} & c_1'e^{-2x} + c_2'xe^{-2x} = 0 \\ & c_1'\left(-2e^{-2x}\right) + c_2'\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = x^{-2}e^{-2x} \end{aligned}\right\} \text{den } c_1(x) = -\ln x \text{ ve } c_2(x) = \frac{-1}{x} \text{ olarak elde edilir.}$$

$y_p = -(\ln x)e^{-2x} - e^{-2x}$ ve son olarak genel çözüm $y_g = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - (\ln x)e^{-2x} - e^{-2x}$ şeklinde elde edilmiş olur.

---

3. $\begin{array}{l} y''-3y'+2y=3e^{x}\cos x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{array}$ Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{y(x)\}=Y(s),\ L\left\{y^{(n)}\right\}=s^{n}Y(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-...-y^{(n-1)}(0)$$

$$L\{f(x)\}=F(s)\Rightarrow L\left\{e^{ax}f(x)\right\}=F(s-a)$$

$$L\{y''-3y'+2y\}=L\left\{3e^{x}\cos x\right\} \qquad s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0)-3\left[sY(s)-y(0)\right]+2Y(s)=\frac{3(s-1)}{(s-1)^{2}+1}$$

Koşullar yerine yazılırsa, $Y(s)=\dfrac{3}{(s-2)\left(s^{2}-2s+2\right)}$ şeklinde elde edilir. Buradan ters Laplace dönüşümü ile

$y(x)=L^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s-2)\left(s^{2}-2s+2\right)}\right\}$ olarak yazılabilir. Şimdi parantezin içindeki ifadeyi bulalım.

$\dfrac{3}{(s-2)\left(s^{2}-2s+2\right)}=\dfrac{A}{s-2}+\dfrac{Bs+C}{s^{2}-2s+2}$ ile $A=\dfrac{3}{2},\ B=\dfrac{-3}{2}, C=0$ olarak bulunur. Buradan

$$y(x)=\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}-\frac{s}{s^{2}-2s+2}\right\}=\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}-\frac{s-1}{(s-1)^{2}+1}-\frac{1}{(s-1)^{2}+1}\right\}$$

$y(x)=\dfrac{3}{2}e^{2x}-\dfrac{3}{2}e^{x}\cos x-\dfrac{3}{2}e^{x}\sin x$ olarak elde edilir.

4. $\left(x^2+1\right)y''+\left(4x-1\right)y'+2y=0$ denkleminin genel çözümünü $x=0$ noktası komşuluğunda kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

$x=0$ denklemin adi noktası olduğundan $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ şeklinde bir çözüm araştırabiliriz. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,

$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ ve $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}$ değerleri denklemde yerlerine yazılırlarsa

$$\left(2a_2-a_1+2a_0\right)+\left(6a_3-2a_2+6a_1\right)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}-\left(n+1\right)a_{n+1}+\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_n\right\}x^n=0$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$2a_2-a_1+2a_0=0$ $\quad 6a_3-2a_2+6a_1=0$ $\quad$ ve $\quad \left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}-\left(n+1\right)a_{n+1}+\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_n=0$

yazılabilir. Böylece,

$a_2=-a_0+\frac{1}{2}a_1$ $\quad a_3=\frac{-1}{3}a_0-\frac{5}{6}a_1$ $\quad a_4=\frac{11}{12}a_0-\frac{17}{24}a_1$ … olarak elde edilirler. Son olarak genel

çözüm,

$$y=a_0\left(1-x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{12}x^4+...\right)-a_1\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^3-\frac{17}{24}x^4+...\right)$$ şeklinde elde edilir.