

# BSM307 İşaretler ve Sistemler

Dr. Seçkin Arı

Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler

# İçerik

- Temel Sistem Özellikleri
- Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler
- Birim Darbe Cevabi

- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- Giriş, x[n] = ?
- Çıkış, y[n] = ?

- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- $\bullet$  Giriş, x[n] =Yatırılan para
- Çıkış, y[n] = Hesaptaki para (balans)
- Iterasyon, y[n] = ?

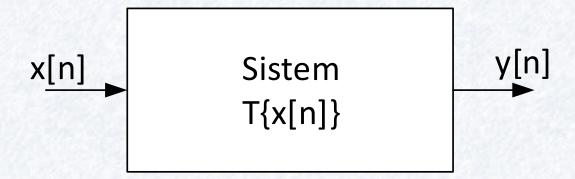
- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- $\bullet$  Giriş, x[n] =Yatırılan para
- Çıkış, y[n] = Hesaptaki para (balans)
- iterasyon, y[n] = y[n-1]

- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- Giriş, x[n] = Yatırılan para
- Çıkış, y[n] = Hesaptaki para (balans)
- ♦ İterasyon,  $y[n] = y[n-1] + 0,1 \times y[n-1]$

- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- Giriş, x[n] = Yatırılan para
- Çıkış, y[n] = Hesaptaki para (balans)
- iterasyon,  $y[n] = y[n-1] + 0.1 \times y[n-1] + x[n]$

- ♦ %10 faiz veren banka hesabı
- ♦ 10 sene sonraki balans?
- Giriş, x[n] = Yatırılan para
- Çıkış, y[n] = Hesaptaki para (balans)
- iterasyon,  $y[n] = y[n-1] + 0,1 \times y[n-1] + x[n]$
- $y[n] = 1,1 \times y[n-1] + x[n]$

- x[n]: Giriş işareti
- y[n]: Çıkış işareti
- T: Dönüşüm (Transform)



- Hafızalı ya da hafızasız sistem
- Hafızasız
  - ♦ Sistem çıkışının, giriş işaretinin zamanın sadece o andaki bilgisine bağlı olması
  - $y[n] = 2x[n] + (x[n])^2$

Hafızalı

Dr. Ari

- Hafızalı ya da hafızasız sistem
- Hafızasız
  - ♦ Sistem çıkışının, giriş işaretinin zamanın sadece o andaki bilgisine bağlı olması
  - $y[n] = 2x[n] + (x[n])^2$

- Hafızalı
  - ♦ Sistem çıkışının, giriş işaretinin ötelenmiş hallerine bağlı olması
  - $\bullet \ y[n] = x[n-1]$

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı?	
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı?	
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

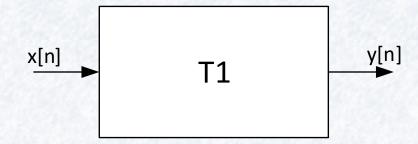
•  $T{x[n]} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı?	
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

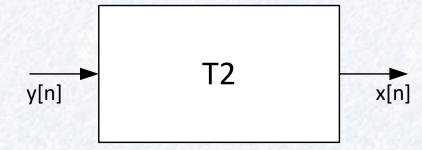
•  $T{x[n]} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

- Ters çevrilebilir ya da ters sistem
- $y[n] = T1\{x[n]\}$  karşılık



•  $x[n] = T2\{y[n]\}$  elde edilebiliyorsa



- Ters çevrilebilir ya da ters sistem
- $y[n] = T1\{x[n]\}$  karşılık
- $x[n] = T2\{y[n]\}$  elde edilebiliyorsa

- T1: Ters çevrilebilir bir sistem.
- T2: T1' in tersi.

- Ters çevrilebilir ya da ters sistem
- $y[n] = T1\{x[n]\}$  karşılık
- $x[n] = T2\{y[n]\}$  elde edilebiliyorsa
- T1: Ters çevrilebilir bir sistem.
- T2: T1' in tersi.

- $y[n] = T1\{x[n]\} = 2x[n]$
- $x[n] = T2\{y[n]\} = y[n]/2$

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir?	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

• 
$$T{y[n]} = x[n] = \frac{y[n]-3}{2}$$

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir?	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

• 
$$T{y[n]} = x[n] = \pm \sqrt{\frac{y[n+3]}{6}}$$

•  $T{x[n]} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir?	
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T\{x[n]\} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

• 
$$T{y[n]} = x[n] = \frac{y[n-2]}{(n-2)^2}$$

•  $T\{x[n]\} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

• 
$$T{y[n]} = x[n] = \frac{y[n-2]}{(n-2)^2}$$

• n = 2, sıfıra bölme hatası

- Nedensellik
- Nedensel
  - Sistem çıkışının, giriş işaretinin zamanın o andaki ve/veya geçmişteki bilgisine bağlı olması
  - $\bullet \ y[n] = x[n] + x[n-1]$

Nedensel olmayan

#### Nedensellik

- Nedensel
  - Sistem çıkışının, giriş işaretinin zamanın o andaki ve/veya geçmişteki bilgisine bağlı olması
  - $\bullet \ y[n] = x[n] + x[n-1]$

- Nedensel olmayan
  - ♦ Sistem çıkışının, giriş işaretinin gelecekteki bilgisine bağlı olması
  - $\bullet \ y[n] = x[n] + x[n+1]$

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel?	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 2x[n] + 3$ 

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel?	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = 6(x[n-3])^2$ 

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel?	
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

•  $T{x[n]} = y[n] = n^2x[n+2]$ 

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

#### Kararlılık

- Kararlı
  - ♦ Giriş işaretinin maksimum genliğinin sınırlı olması durumunda (sonsuza gitmemesi), sistem çıkış genliğinin de sınırlı olması (sonsuza gitmemesi)
  - $\bullet \ \forall n, |x[n]| < N \text{ iken}$
  - $\bullet \ \forall n, |y[n]| < M \text{ iken}$
- Kararsız
  - ♦ Giriş işareti sınırlı iken, sistem çıkışı sonsuza gidiyorsa
  - $\bullet \ \forall n, |x[n]| < N \text{ iken}$
  - $\bullet \ \forall n, |y[n]| \rightarrow \infty \text{ ise}$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı?	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

- $\max(|x[n]|) = N$  iken
- $\max(|y[n]|) = 2N + 3 \ll \infty$  dur.

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı?	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

- $\max(|x[n]|) = N$  iken
- $\max(|y[n]|) = 6N^2 \ll \infty$  dur.

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı?	
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	
Doğrusal	

- $\max(|x[n]|) = N$  iken
- $n \to \infty$  iken  $\max(|y[n]|) = \infty$

# Temel Sistem Özellikleri

- Zamanla Değişmezlik
- $y[n] = T\{x[n]\}$  iken
- Zamanla değişmez
  - $T\{x[n-k]\} = y[n-k]$  ise

- Zamanla değişir
  - $T\{x[n-k]\} \neq y[n-k]$  ise

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

• 
$$x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T\{x_1[n]\} = y_1[n] = ?$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_1[n] = 2x[n-k] + 3$$

• 
$$y[n-k] = ?$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_1[n] = 2x[n-k] + 3$$

• 
$$y[n-k] = 2x[n-k] + 3$$

$$\bullet \ y_1[n] = y[n-k]?$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_1[n] = 2x[n-k] + 3$$

• 
$$y[n-k] = 2x[n-k] + 3$$

• 
$$y_1[n] = y[n-k]$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T\{x_1[n]\} = y_1[n] = ?$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_1[n] = 6(x[n-3-k])^2$$

• 
$$y[n-k] = ?$$

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_1[n] = 6(x[n-3-k])^2$$

• 
$$y[n-k] = 6(x[n-k-3])^2$$

• 
$$y_1[n] = y[n-k]$$
?

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez?	<b>/</b>
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_1[n] = 6(x[n-3-k])^2$$

• 
$$y[n-k] = 6(x[n-k-3])^2$$

• 
$$y_1[n] = y[n-k]$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T\{x_1[n]\} = y_1[n] = ?$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

$$\bullet \ x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = n^2x_1[n+2]$$

• 
$$y_1[n] = n^2 x[n+2-k]$$

• 
$$y[n-k] = ?$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez?	
Doğrusal	

• 
$$x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T{x_1[n]} = y_1[n] = n^2x_1[n+2]$$

• 
$$y_1[n] = n^2 x[n+2-k]$$

• 
$$y[n-k] = (n-k)^2 x[n-k+2]$$

• 
$$y_1[n] = y[n-k]$$
?

Dr. Arı

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal	

• 
$$x_1[n] = x[n-k]$$

• 
$$T\{x_1[n]\} = y_1[n] = n^2x_1[n+2]$$

• 
$$y_1[n] = n^2 x[n+2-k]$$

• 
$$y[n-k] = (n-k)^2 x[n-k+2]$$

• 
$$y_1[n] \neq y[n-k]$$

#### Temel Sistem Özellikleri

- Doğrusallık
- $T\{x_1[n]\} = y_1[n]$  ve
- $T\{x_2[n]\} = y_2[n]$  ve
- $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$  iken
- Doğrusal
  - $T\{x_3[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$  ise
- Doğrusal değil
  - $T\{x_3[n]\} \neq ay_1[n] + by_2[n]$  ise

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = ?$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 2x_3[n] + 3$$

• 
$$y_3[n] = 2( ) + 3$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 2x_3[n] + 3$$

• 
$$y_3[n] = 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = ?$$

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 2x_3[n] + 3$$

• 
$$y_3[n] = 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = a(2x_1[n] + 3) + b(2x_2[n] + 3)$$

• 
$$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$
?

Hafızalı	X
Ters çevrilebilir	<b>/</b>
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal	X

• 
$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

• 
$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 2x_3[n] + 3$$

• 
$$y_3[n] = 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = a(2x_1[n] + 3) + b(2x_2[n] + 3)$$

• 
$$y_3[n] \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>✓</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_2[n] = 6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = ?$$

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>✓</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_2[n] = 6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 6(x_3[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] = 6()^2$$

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>/</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>✓</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_2[n] = 6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 6(x_3[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] = 6(ax_1[n-3] + bx_2[n-3])^2$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = ?$$

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>/</b>
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_2[n] = 6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 6(x_3[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] = 6(ax_1[n-3] + bx_2[n-3])^2$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = a6(x_1[n-3])^2 + b6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$
?

Hafızalı	<b>/</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	<b>✓</b>
Kararlı	<b>/</b>
Zamanla Değişmez	<b>✓</b>
Doğrusal?	X

• 
$$y_1[n] = 6(x_1[n-3])^2$$

• 
$$y_2[n] = 6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = 6(x_3[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] = 6(ax_1[n-3] + bx_2[n-3])^2$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = a6(x_1[n-3])^2 + b6(x_2[n-3])^2$$

• 
$$y_3[n] \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = n^2 x_1[n+2]$$

• 
$$y_2[n] = n^2 x_2[n+2]$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = ?$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = n^2 x_1[n+2]$$

• 
$$y_2[n] = n^2 x_2[n+2]$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = n^2 x_3[n+2]$$

• 
$$y_3[n] = n^2($$
 )

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = n^2 x_1[n+2]$$

• 
$$y_2[n] = n^2 x_2[n+2]$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = n^2 x_3[n+2]$$

• 
$$y_3[n] = n^2(ax_1[n+2] + bx_2[n+2])$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = ?$$

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal?	

• 
$$y_1[n] = n^2 x_1[n+2]$$

• 
$$y_2[n] = n^2 x_2[n+2]$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = n^2 x_3[n+2]$$

• 
$$y_3[n] = n^2(ax_1[n+2] + bx_2[n+2])$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = an^2x_1[n+2] + bn^2x_2[n+2]$$

• 
$$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$
?

Hafızalı	<b>✓</b>
Ters çevrilebilir	X
Nedensel	X
Kararlı	X
Zamanla Değişmez	X
Doğrusal	<b>✓</b>

• 
$$y_1[n] = n^2 x_1[n+2]$$

• 
$$y_2[n] = n^2 x_2[n+2]$$

• 
$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

• 
$$y_3[n] = n^2 x_3[n+2]$$

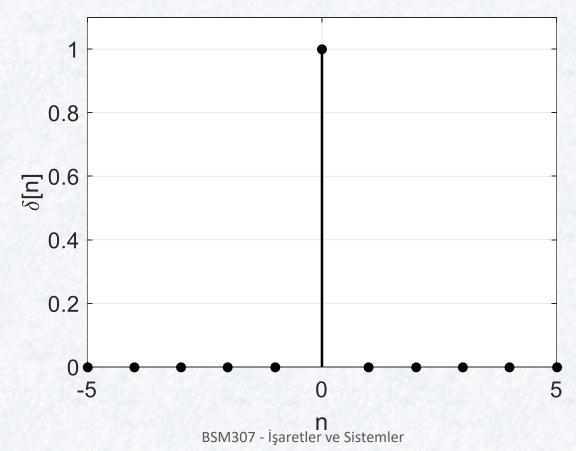
• 
$$y_3[n] = n^2(ax_1[n+2] + bx_2[n+2])$$

• 
$$ay_1[n] + by_2[n] = an^2x_1[n+2] + bn^2x_2[n+2]$$

• 
$$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

### Birim Darbe İşareti

$$\bullet \ \delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

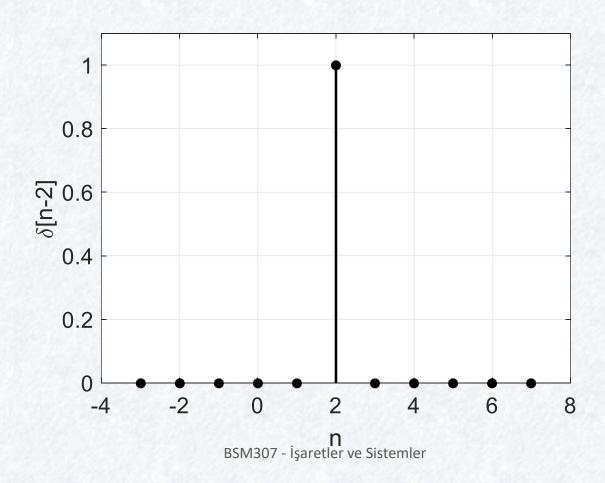


# Birim Darbe İşareti

• 
$$\delta[n-2] = ?$$

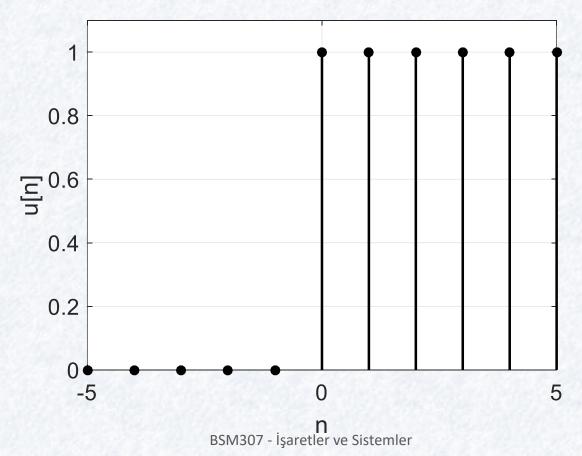
# Birim Darbe İşareti

•  $\delta[n-2]$ 



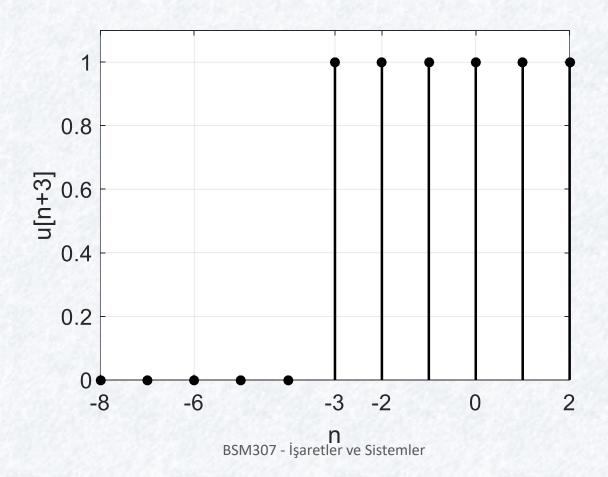
### Birim Basamak İşareti

• 
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \ge 0 \end{cases}$$

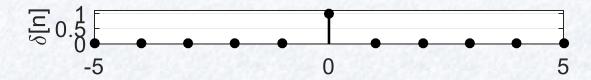


### Birim Basamak İşareti

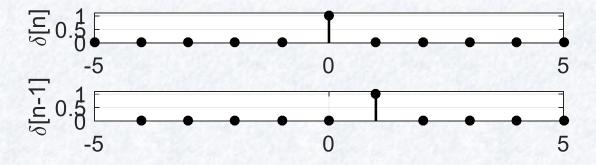
• u[n+3] = ?



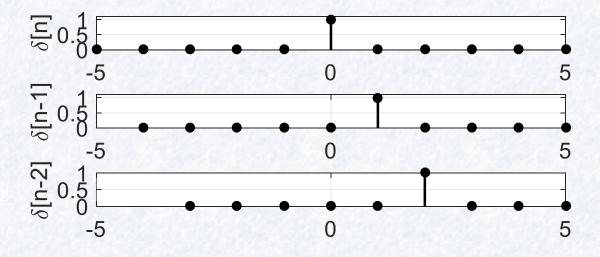
• u[n] = ?



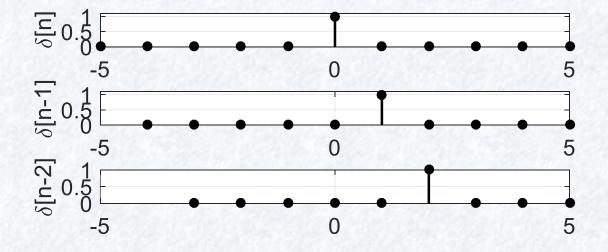
• u[n] = ?



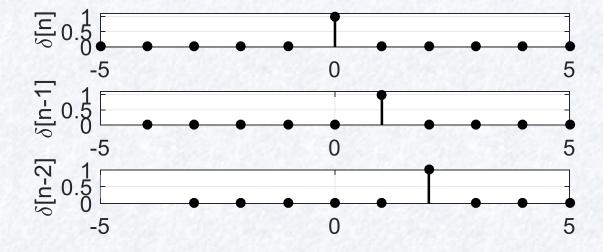
• u[n] = ?



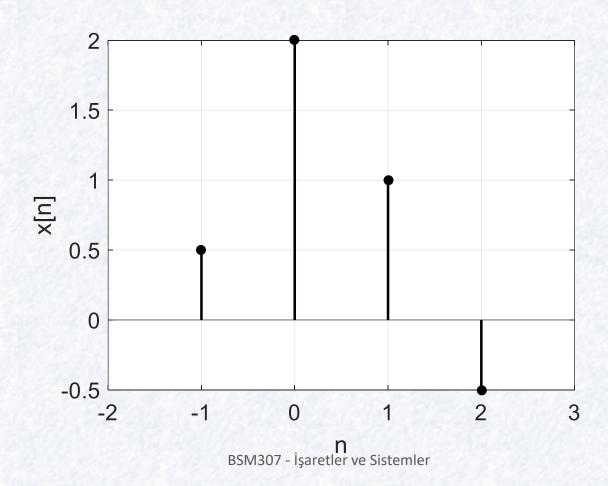
• 
$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$

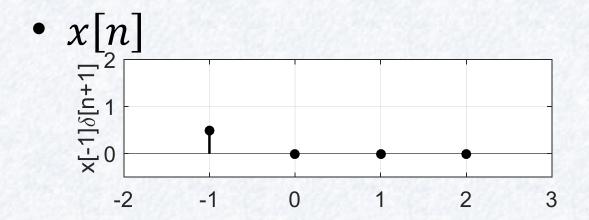


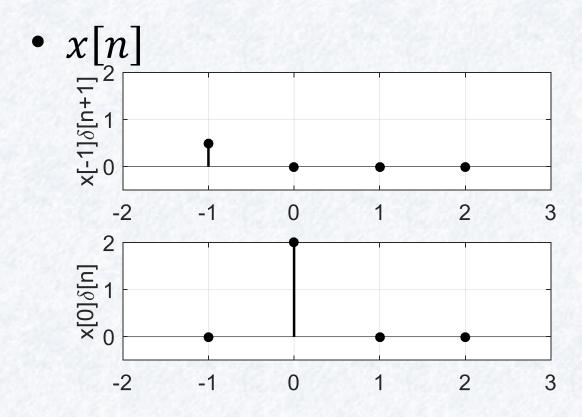
• 
$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

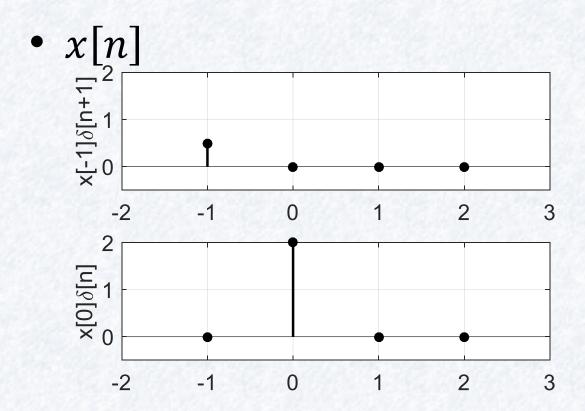


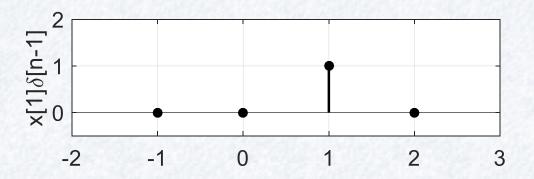
• x[n]

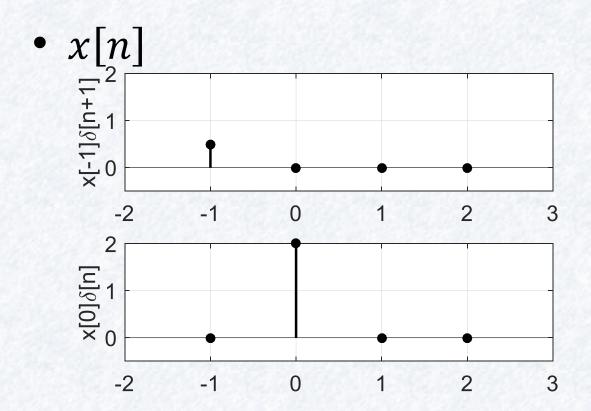


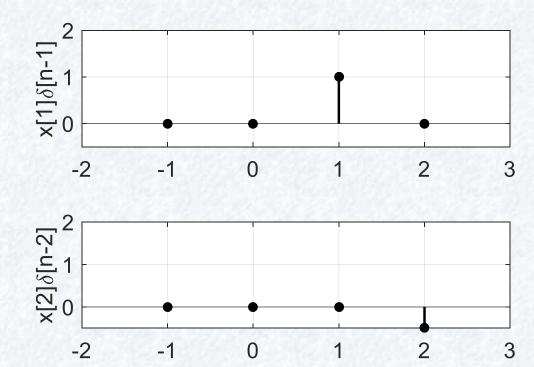


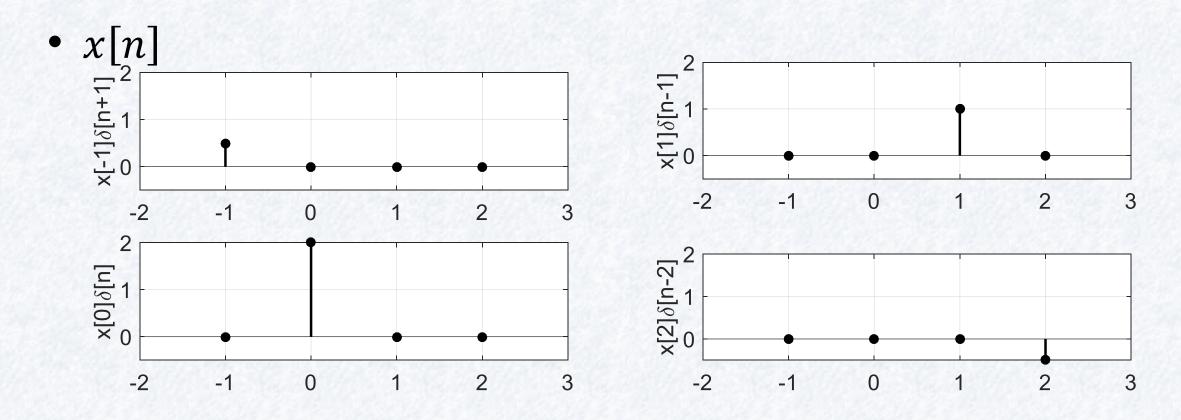




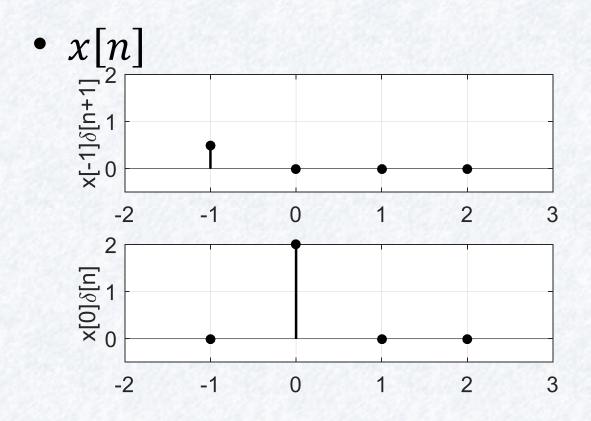




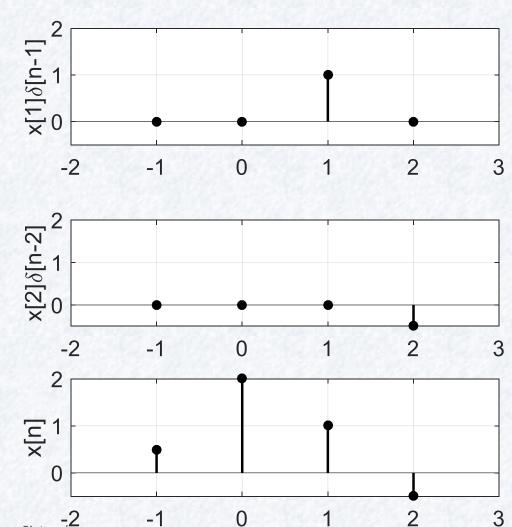




$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$



$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$



- $x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$
- Herhangi bir x[n] ayrık zaman işaret birim darbe işaretleri ile ifade edilebilir.
- En genel hali
  - $\star x[n] = \dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$ 
  - $\star x[k]$ : İşaretin k anındaki genlik değeri (sabit katsayı)
  - $\bullet$   $\delta[n-k]$ : Birim darbe işaretinin k kadar ötelenmiş hali

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $T{ax_1(n) + bx_2(n)} =$

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $T{ax_1(n) + bx_2(n)} = T{ax_1(n)} + T{bx_2(n)}$

92

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$
- $y[n] = T\{x(n)\} =$

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$
- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\} = \mathbf{T}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\}$

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$
- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\} = \mathbf{T}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\}$
- $y[n] = \mathbf{T}\{\dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots\}$

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$
- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\} = \mathbf{T}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\}$
- $y[n] = \mathbf{T}\{\dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots\}$
- y[n] =

- $y[n] = \mathbf{T}\{x(n)\}$ 
  - ◆ T doğrusal ise
  - $T{ax_1(n) + bx_2(n)} = T{ax_1(n)} + T{bx_2(n)}$
- $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$
- $y[n] = T\{x(n)\} = T\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\}$
- $y[n] = \mathbf{T}\{\dots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \dots\}$
- $y[n] = \cdots + \mathbf{T}\{x[-1]\delta[n+1]\} + \mathbf{T}\{x[0]\delta[n]\}$ +  $\mathbf{T}\{x[1]\delta[n-1]\} + \mathbf{T}\{x[2]\delta[n-2]\} + \cdots$

• 
$$\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$$
  
=?

• 
$$\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$$
  
=  $a\mathbf{T}\{x_1(n)\} + b\mathbf{T}\{x_2(n)\}$ 

• 
$$y[n] = \cdots + \mathbf{T}\{x[-1]\delta[n+1]\} + \mathbf{T}\{x[0]\delta[n]\} + \mathbf{T}\{x[1]\delta[n-1]\} + \mathbf{T}\{x[2]\delta[n-2]\} + \cdots$$

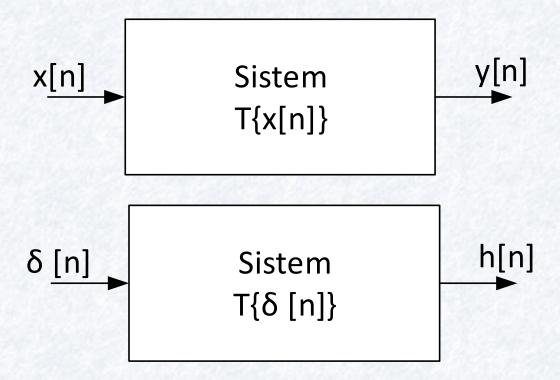
• y[n] = ?

• 
$$\mathbf{T}\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = \mathbf{T}\{ax_1(n)\} + \mathbf{T}\{bx_2(n)\}$$
  
=  $a\mathbf{T}\{x_1(n)\} + b\mathbf{T}\{x_2(n)\}$ 

• 
$$y[n] = \cdots + \mathbf{T}\{x[-1]\delta[n+1]\} + \mathbf{T}\{x[0]\delta[n]\}$$
  
+ $\mathbf{T}\{x[1]\delta[n-1]\} + \mathbf{T}\{x[2]\delta[n-2]\} + \cdots$ 

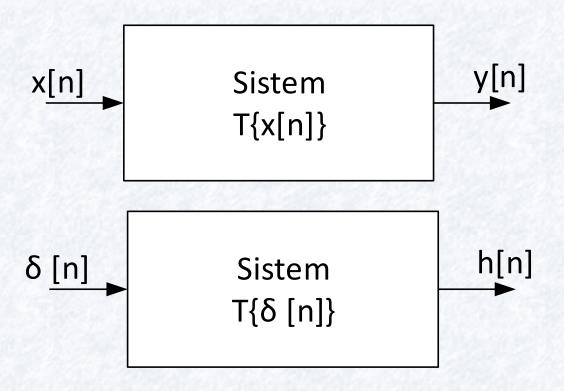
• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\mathbf{T}\{\delta[n]\}$$
  
  $+x[1]\mathbf{T}\{\delta[n-1]\} + x[2]\mathbf{T}\{\delta[n-2]\} + \cdots$ 

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\mathbf{T}\{\delta[n]\}$$
  
  $+x[1]\mathbf{T}\{\delta[n-1]\} + x[2]\mathbf{T}\{\delta[n-2]\} + \cdots$ 



• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\mathbf{T}\{\delta[n]\}$$
  
  $+x[1]\mathbf{T}\{\delta[n-1]\} + x[2]\mathbf{T}\{\delta[n-2]\} + \cdots$ 

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$ 
  - ♦ Birim darbe cevabi



- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $T{x[n-k]} = y[n-k]$
- $T{\delta[n-k]} = ?$

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$
- $y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\mathbf{T}\{\delta[n]\} + x[1]\mathbf{T}\{\delta[n-1]\} + x[2]\mathbf{T}\{\delta[n-2]\} + \cdots$
- y[n] = ?

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\underbrace{\mathbf{T}\{\delta[n]\}}_{h[n]} + x[1]\underbrace{\mathbf{T}\{\delta[n-1]\}}_{2} + x[2]\mathbf{T}\{\delta[n-2]\} + \cdots$$

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]\mathbf{T}\{\delta[n+1]\} + x[0]\underbrace{\mathbf{T}\{\delta[n]\}}_{h[n]} + x[1]\underbrace{\mathbf{T}\{\delta[n-1]\}}_{h[n-1]} + x[2]\underbrace{\mathbf{T}\{\delta[n-2]\}}_{?} + \cdots$$

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1] \underbrace{T\{\delta[n+1]\}}_{?} + x[0] \underbrace{T\{\delta[n]\}}_{h[n]} + x[1] \underbrace{T\{\delta[n-1]\}}_{h[n-1]} + x[2] \underbrace{T\{\delta[n-2]\}}_{h[n-2]} + \cdots$$

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1] \underbrace{T\{\delta[n+1]\}}_{h[n+1]} + x[0] \underbrace{T\{\delta[n]\}}_{h[n]} + x[1] \underbrace{T\{\delta[n-1]\}}_{h[n-1]} + x[2] \underbrace{T\{\delta[n-2]\}}_{h[n-2]} + \cdots$$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n]$$
  
+ $x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$ 

## Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler

- $h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\}$
- Zamanla değişmez sistem ise
- $\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}=h[n-k]$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1] \underbrace{T\{\delta[n+1]\}}_{h[n+1]} + x[0] \underbrace{T\{\delta[n]\}}_{h[n]} + x[1] \underbrace{T\{\delta[n-1]\}}_{h[n-1]} + x[2] \underbrace{T\{\delta[n-2]\}}_{h[n-2]} + \cdots$$

• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n]$$
  
+ $x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$ 

## Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler

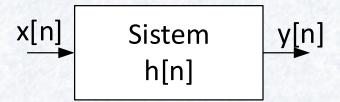
• 
$$y[n] = \cdots + x[-1]h[n+1] + x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \cdots$$

- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - ♦ Konvolüsyon Toplamı

### Doğrusal Zamanla Değişmez Sistemler

- Konvolüsyon Toplamı
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$

- y[n] = x[n] \* h[n] = h[n] \* x[n]
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$



• 
$$x[n] * \delta[n] = ?$$

• 
$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] =$$

- $x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0

- $x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k, k = n ise  $\delta[n k] = 1$

- $x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k = n ise  $\delta[n k] = 1$
- $x[n] * \delta[n] = \cdots + 0 + x[n]\delta[0] + 0 + 0 + \cdots$

- $x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k = n ise  $\delta[n k] = 1$
- $x[n] * \delta[n] = \cdots 0 + 0 + x[n]\delta[0] + 0 + 0 + \cdots$
- $x[n] * \delta[n] = x[n]$

• 
$$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] =$$

Dr. Arı

• 
$$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] x[n-k] =$$

119

• 
$$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] x[n-k] = \delta[0] = 1$$
, diğerleri 0

• 
$$\delta[n] * x[n] = \cdots + 0 + 0 + \delta[0]x[n] + 0 + 0 + \cdots$$

• 
$$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] x[n-k] = \delta[0] = 1$$
, diğerleri 0

• 
$$\delta[n] * x[n] = \cdots + 0 + 0 + \delta[0]x[n] + 0 + 0 + \cdots = x[n]$$

• 
$$x[n] * \delta[n-1] = ?$$

•  $x[n]*\delta[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k-1] =$ •  $\delta[0]=1$ , diğerleri 0

- $x[n] * \delta[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k-1] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k = n 1 ise  $\delta[n k 1] = 1$

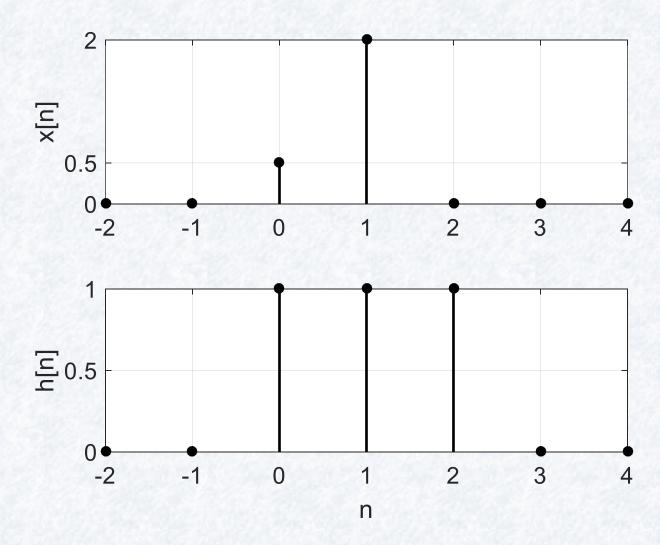
- $x[n] * \delta[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k-1] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k = n 1 ise  $\delta[n k 1] = 1$
- $x[n] * \delta[n-1] = \cdots + 0 + x[n-1]\delta[0] + 0 + 0 + \cdots$

- $x[n] * \delta[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k-1] =$ 
  - $\delta[0] = 1$ , diğerleri 0
  - ♦ Toplamın indisi k = n 1 ise  $\delta[n k 1] = 1$
- $x[n] * \delta[n-1] = \cdots + 0 + x[n-1]\delta[0] + 0 + 0 + \cdots$
- $x[n] * \delta[n-1] = x[n-1]$

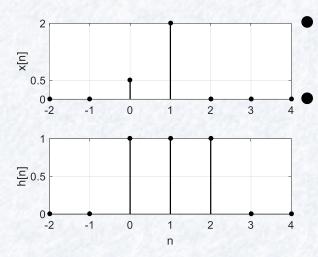
- $x[n] * \delta[n] = x[n]$
- $x[n] * \delta[n-1] = x[n-1]$
- $x[n] * \delta[n+1] = ?$

- $x[n] * \delta[n] = x[n]$
- $x[n] * \delta[n-1] = x[n-1]$
- $x[n] * \delta[n+1] = x[n+1]$

• y[n] = ?



• 
$$y[n] = \sum_{k=0}^{1} x[k]h[n-k]$$

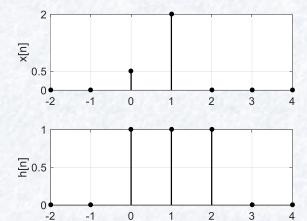


Dr. Ari

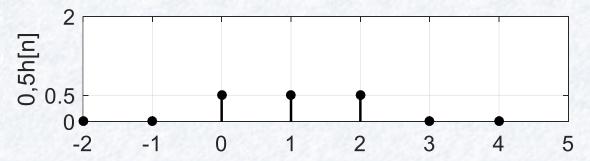
$$y[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1]$$

• 
$$y[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1]$$
  
•  $y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$ 

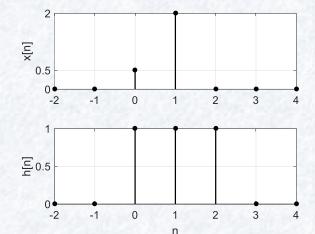
• 
$$y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$



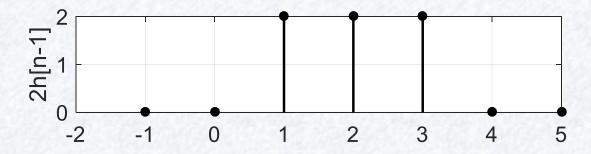
• 
$$y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$



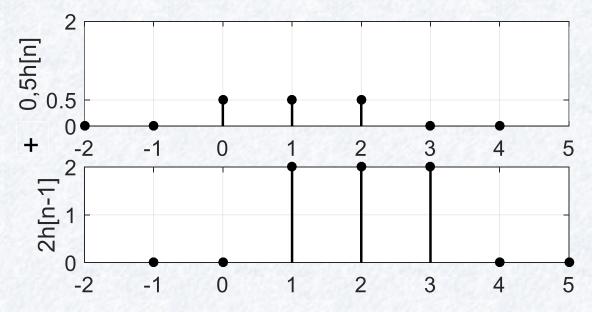
• 
$$y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$



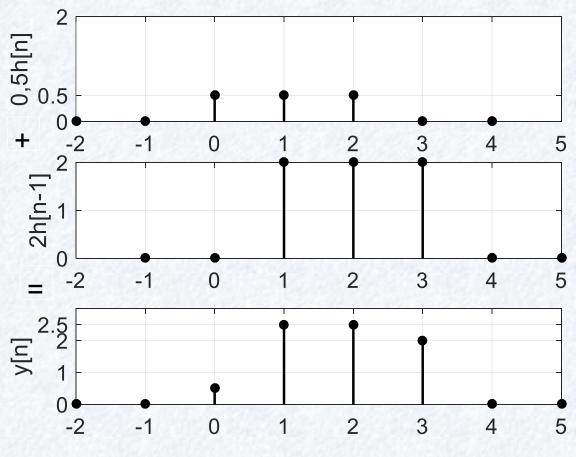
• 
$$y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$



• 
$$y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$

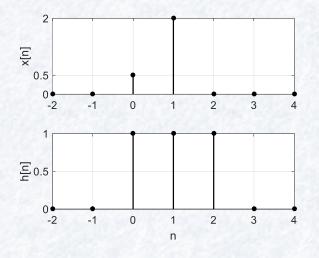


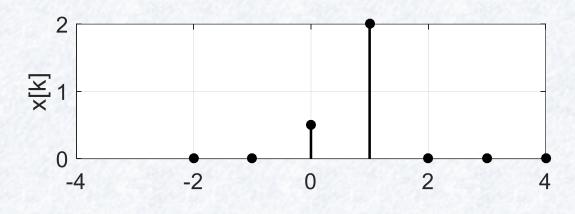
• 
$$y[n] = y[n] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1]$$

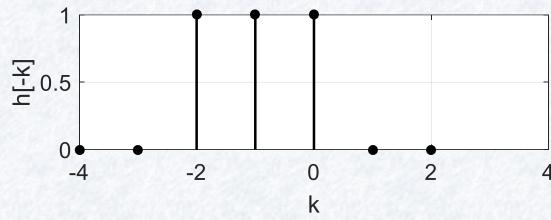


BSM307 - İşaretler ve Sistemler

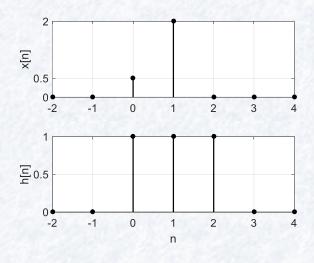
• 
$$y[n] = \sum_{k=0}^{1} x[k]h[n-k]$$







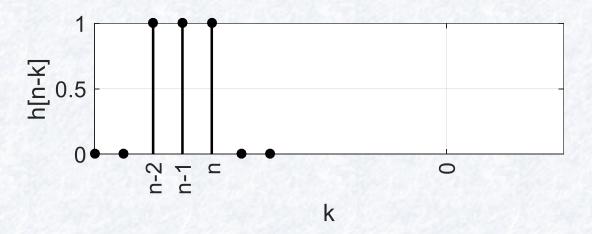
• 
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



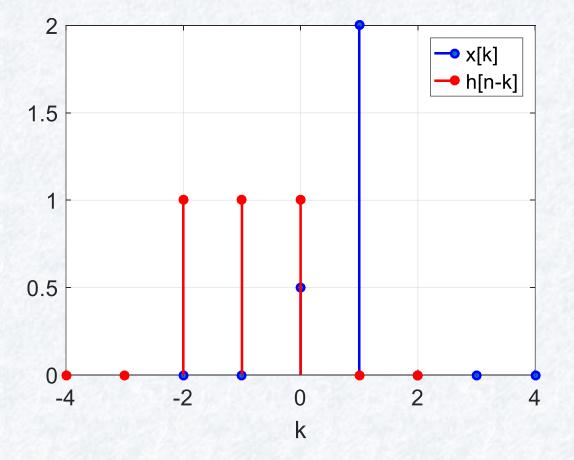
• n < 0 iken

$$y[n] = 0$$

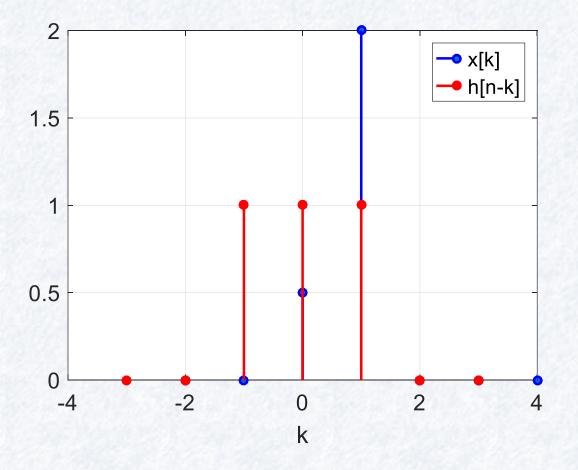




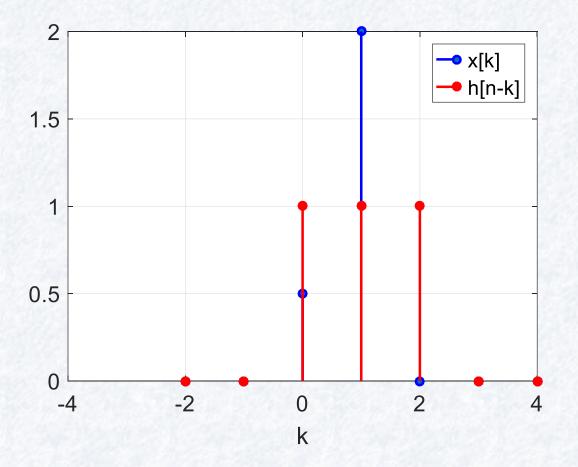
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet n = 0$  ise
  - $y[0] = 0.5 \times 1 = 0.5$



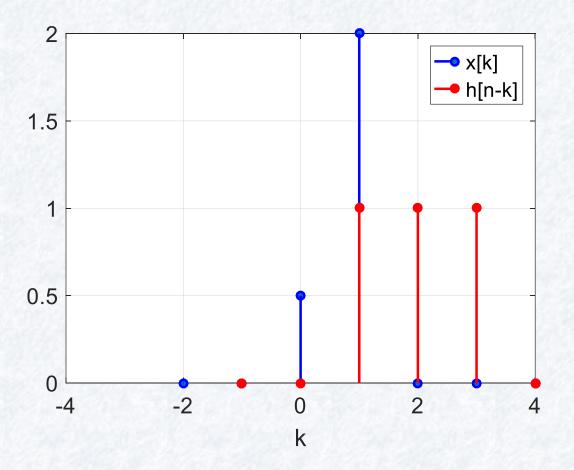
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet n = 1$  ise
  - $y[1] = 0.5 \times 1 + 2 \times 1 = 2.5$



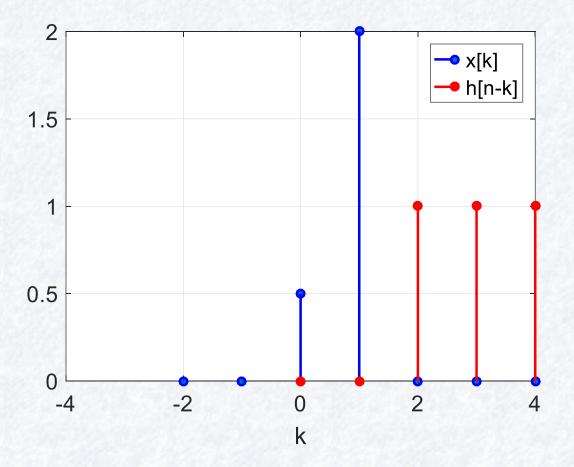
- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet$  n=2 ise
  - $y[2] = 0.5 \times 1 + 2 \times 1 = 2.5$



- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet n = 3$  ise
  - $y[3] = 2 \times 1 = 2$

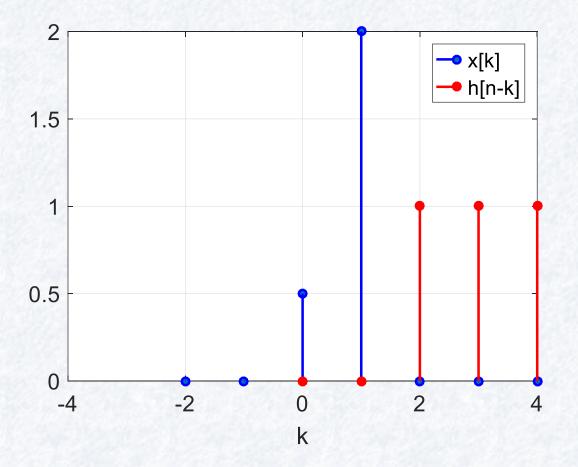


- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet$  n=4 ise
  - y[4] = 0



BSM307 - İşaretler ve Sistemler

- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ 
  - $\bullet$   $n \ge 4$  ise
  - y[n] = 0



• 
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

• 
$$n < 0$$
 iken  $y[n] = 0$ 

$$y[0] = 0.5 \times 1 = 0.5$$

$$y[1] = 0.5 \times 1 + 2 \times 1 = 2.5$$

$$y[2] = 0.5 \times 1 + 2 \times 1 = 2.5$$

$$y[3] = 2 \times 1 = 2$$

• 
$$n \ge 4$$
 iken  $y[n] = 0$ 

