BÖLÜM 6

İMPULS VE MOMENTUM

Bu bölümde iki veya daha çok sayıda parçacığın etkileşmesi sırasında ortaya çıkan impuls ve Momentum kavramlarını tanımlayacağız. Bu kavramlardan Momentumun bir konum yasasına uyuyor olmazsa, problemin çözümünde kolaylık sağlayacaktır.

Newton'un 2. hareket yasasına göre

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m d\boldsymbol{v}/dt = d(m\boldsymbol{v})/dt$$

İfadesi elde edilebilir bu ifadeye dikkat edilirse kuvvetin Kendisi de bir başka niceliğin türevi olarak yazılabilmektedir.

Momentum, bir cismin m kütlesi ve $\boldsymbol{v}$ hız vektörünün çarpımı olarak tanımlanır.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

- Momentum vektörel bir nicelik midir ve hız ile aynı yöndedir
- Momentum birimi olarak SI birim sisteminde **kg.m/s** kullanılmaktadır.
- Cismin kütlesi ve hızı değişmediği sürece Momentum sabit kalır.
- Bir cismin Momentumunu değiştirmek için cismin hızını değiştirebiliriz. Cismin hızını değiştirebilmek için ise cisme ivme kazandırmalıyız. Bunun için ise cisme net bir kuvvet uygulamamız gerekir.

Uygulanan net kuvvet ile Momentum arasındaki ilişki Newton'un ikinci yasası ile verilir.

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\sum \boldsymbol{F} = md\boldsymbol{v}/dt$$

$$\sum \boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$$

Başlangıçta **v** hızı ile hareket etmekte olan m kütleli bir cisim ele alalım. Bu cisme küçük bir Δt zaman aralığında sabit bir kuvvet uygulanıyorsa m kütleli cismin hızı **v′** olarak değişecektir Buna göre başlangıçta ve son durumdaki Momentumları sırasıyla

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{v}'$$

olarak verilir. $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ denklemini Δt için tekrar yazılırsa

$$\boldsymbol{F} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t = \frac{\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}.\Delta t$$

veya

$$mv' - mv = \boldsymbol{F}.\Delta t \qquad (2)$$

Burada, momentumdaki artışın kuvvetin zamanla çarpımına eşit olduğu görülmektedir

Değişken bir **F** kuvvetinin $[t_1,t_2]$ aralığındaki integrali

$$\boldsymbol{J} = \int_{t1}^{t2} \boldsymbol{F}.dt$$

Olup, impuls olarak bilinir. Birim olarak Momentumla aynı birim kullanılır. İmpuls kavramı daha çok kısa süreli etki eden kuvvetler için kullanılır.

(2) numaralı bağıntıyı momentum ve impuls cinsinden tekrar yazabiliriz,

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{p}' \qquad \text{(impuls-momentum teoremi)}$$

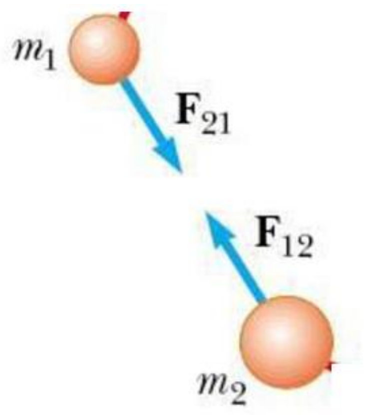
Impuls-Momentum teoremine göre, cismin ivmesini bilmeye gerek kalmadan ilk ve son hızları arasında kolay yorumlanabilir bir ifade elde edilmiş olur.

Momentumun Korunumu

Korunum yasaları fizik biliminde oldukça önemlidir. Atom altı parçacıklardan galaksilere kadar uygulanabildikleri için oldukça geniş bir alanda kullanılabilirler. Fizikte korunan niceliklerden biri de doğrusal momentumdur.

Bir sistem üzerine etki eden net bir dış kuvvet yoksa yani sıfır ise bu sistemin doğrusal Momentumu korunur.

Bu yasayı anlayabilmek için yandaki şekilde verilen iki cisimden oluşan sistemi düşünelim. Bu sisteme dışarıdan bir kuvvet etki etmiyor olsun. Yani sisteme etki eden net dış kuvvet sıfır olsun. Bu durumda sistemdeki kuvvetler yalnızca cisimlerin birbirlerine etki ettirmiş oldukları iç kuvvetler olacaktır.



Newton'un 3. yasasına göre,

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$$

olarak yazılabilir.

Her bir cisme Newton 2. yasasını uygulayalım.

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}$$

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$$

denklemleri taraf tarafı toplarsak,

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{dt} = 0$$

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = sbt$$

olacaktır. Burada $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ sistemin toplam momentumudur. Sisteme dışarıdan bir kuvvet etki etmediği sürece sistemin Momentumu sabit kalacaktır. Burada Momentum korunumunu birbirine kuvvet uygulayan iki cisim için çıkardık. Bu iki cisim, çarpışan atom altı parçacıklar, arabalar, bilardo topları yada birbirine kütle çekimi uygulayan iki yıldız da olabilir.

En genel haliyle N cisimden oluşan bir sistemin toplam momentumu sisteme etki eden net kuvvet sıfır ise korunur.

Toplam Momentum

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots \boldsymbol{p}_N \sum_{1}^{N} \boldsymbol{p}_i$$

ile verelim.

$$\sum \boldsymbol{F}_{dış} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{p} = sbt$$

Böyle bir sistemin herhangi bir t1 ve t2 anlarında sistemin toplam momentumu aynı olacaktır.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$$

Buradan $\boldsymbol{p}$ çarpışmadan hemen önceki sistemin toplam momentumu, $\boldsymbol{p'}$ ise çarpışmadan hemen sonra sistemin toplam momentumudur. Burada bu denklemin bir vektör denklemi olduğu unutulmamalıdır. Toplam Momentum korunması, her bir eksen üzerindeki momentumların ayrı ayrı korunması anlamına gelmektedir.

$$\boldsymbol{p_x} = \boldsymbol{p_x^{'}}$$

$$\boldsymbol{p_y} = \boldsymbol{p_y^{'}}$$

$$\boldsymbol{p_z} = \boldsymbol{p_z^{'}}$$

Olarak yazılabilir. Daha açık bir ifade ile,

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots = m_1\boldsymbol{v_1^{'}} + m_2\boldsymbol{v_2^{'}} + \cdots$$

yada,

$$m_1\boldsymbol{v}_{1x} + m_2\boldsymbol{v}_{2x} + \cdots = m_1\boldsymbol{v_{1x}^{'}} + m_2\boldsymbol{v_{2x}^{'}} + \cdots$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1y} + m_2\boldsymbol{v}_{2y} + \cdots = m_1\boldsymbol{v_{1y}^{'}} + m_2\boldsymbol{v_{2y}^{'}} + \cdots$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1z} + m_2\boldsymbol{v}_{2z} + \cdots = m_1\boldsymbol{v_{1z}^{'}} + m_2\boldsymbol{v_{2z}^{'}} + \cdots$$

Şeklinde eksenler üzerindeki momentumun korunumu ifadeleri yazılabilir.

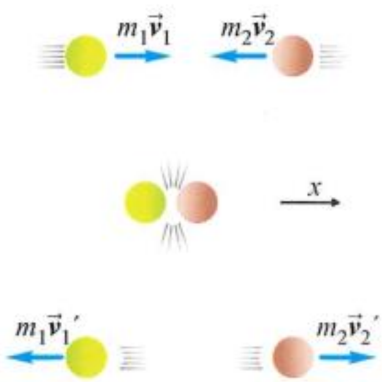
Bir Boyutlu Çarpışmalar

Bu kısımda iki cismin çarpışması sonrasında neler olabileceğini inceleyeceğiz. Çarpışma iki ya da daha fazla sayıda cismin çok kısa süren etkileşmeleri olarak tanımlanır. Bunlar için en sık verilen örneklerden bir tanesi bilardo toplarının çarpışmasıdır.

Bir boyutlu çarpışmalar esnek ve esnek olmayan çarpışmalar olmak üzere iki grupta incelenebilir.

Esnek Çarpışmalar

Momentum tüm çarpışma türlerinde korunmaktadır. Kolaylık olması açısından yalnızca x ekseni üzerinde hareket etmekte olan iki cismin tek boyutta çarpışmasından elde edilen Momentum korunumu ifadesini yazalım.



Şekil 1. Bir boyutta esnek çarpışma

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'$$

Bilardo toplarının çarpışmaları yakından incelendiğinde, sistemin toplam kinetik enerjisinin korunduğu sonucuna varılabilir. Bilardo topları birbirine değdiğinde, yüzeyler tıpkı bir yay gibi esneyerek sıkışırlar ve potansiyel enerji depolarlar.

Çarpışmadan sonra eski formlarına dönerken depolanmış oldukları potansiyel enerjiyi tekrardan kinetik enerjiye çevirir ve belli bir hız kazanırlar. Buna göre, kinetik enerjinin korunduğu çarpışmalara esnek çarpışma olarak isimlendirilir. Böylece esnek çarpışmalar da hem Momentum hem de kinetik enerji korunur.

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^{'2}$$

Momentum ve kinetik enerji için yazılan iki denklem birlikte çözülerek $\boldsymbol{v}_1^{'}$ ve $\boldsymbol{v}_2^{'}$ hızları bulunabilir.

Burada özel bir durum olarak, m_2 kütlesinin başlangıçta durgun olduğunu göz önünde bulunduralım. Buna göre kinetik enerji ve momentum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$m_1\boldsymbol{v}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1^{'} + m_2\boldsymbol{v}_2^{'}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_1^2 = m_1\boldsymbol{v}_1^{'2} + m_2\boldsymbol{v}_2^{'2}$$

Her iki denklemde de $\boldsymbol{v}_2^{'}$ bilinmeyenini yalnız bırakalım

$$m_1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1^{'}) = m_2\boldsymbol{v}_2^{'}$$

$$m_1(\boldsymbol{v}_1^2 - \boldsymbol{v}_1^{'2}) = m_2\boldsymbol{v}_2^{'2}$$

Bu iki denklem taraf tarafa oranlanırsa,

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1^{'} = \boldsymbol{v}_2^{'}$$

ifadesi elde edilebilir.

Bu son ifadeyi de momentum korunumu denkleminde kullanarak çarpışan cisimlerin son hızları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$v_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

1. Eğer kütleler eşitse (m_1=m_2), $v_1^{'} = 0$ ve $v_2^{'} = v_1$ olur. Çarpışma sonucunda gelen kütle tüm enerjisini kaybedip dururken, çarpışmadan önce durgun olan ikinci cisim birinci cismin hızı ile harekete başlar.
2. m_1 kütlesi m_2 kütlesinden daha büyük ise, her iki kütlenin de son hızları pozitif olur. Yani her ikisi de aynı yönde harekete devam ederler.
3. Eğer m_1 kütlesi m_2 kütlesinden daha küçük ise, gelen kütlenin son hızı negatif olur.

Esnek Olmayan Çarpışmalar

Cisimlerin çarpışması esnasında deforme olmaları durumunda kinetik enerjinin bir kısmı ısıya dönüşebilir. Bu tür çarpışmalarda kinetik enerji korunmaz ve esnek olmayan çarpışmalar olarak isimlendirilirler. Trafikteki araba çarpışmaları esnek olmayan çarpışmalara iyi bir örnektir. Buna rağmen esnek olmayan çarpışmalarda momentum daima kurulmaktadır.

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1^{'} + m_2 \boldsymbol{v}_2^{'}$$

Kinetik enerjinin korunumu yasasını artık yazamadığımız için son hızların ikisini birden belirlemek imkansızdır.

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 \neq \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^{'2}$$

Tamamen Esnek Olmayan Çarpışma

Esnek olmayan çarpışmaların özel bir hali olarak tamamen esnek olmayan çarpışmalar da görülmektedir. Bu çarpışma türünde, cisimler çarpıştıktan sonra yapışarak birlikte hareket ederler. Bu durumda cisimlerin son hızları aynıdır, dolayısıyla momentum korunumu ifadesinden ortak hız bulunabilir.

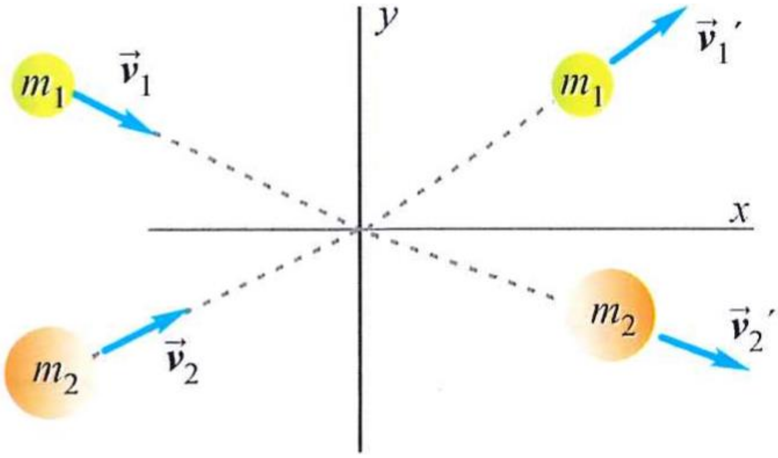
$$\boldsymbol{v}_1^{'} = \boldsymbol{v}_2^{'} = \boldsymbol{v}^{'}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}^{'}$$

$$\boldsymbol{v}^{'} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

İki Boyutlu Çarpışmalar

Bir boyutlu çarpışmalar nadiren gözlenir. Karşılaştığımız çarpışma olaylarında, iki cisim çarpıştıktan sonra genelde ayrı yönlerde uzaklaşırlar. En genel durumda üç boyutlu uzaydaki çarpışmalarda iki boyutta incelenebilir. İki cismin hareket doğrultusu çarpışma noktasında birleştiği ne göre bir düzlem oluştururlar. Buna göre çarpışmaları iki boyutta incelemek yeterli olacaktır.



Momentum vektörel bir nicelik olduğundan dolayı, toplam Momentum korunuyor olması Momentumun eksenler üzerindeki bileşenlerinin de korunduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla iki boyutlu çarpışmalarda her bir eksendeki Momentum korunumu ifadesi ayrı ayrı yazılabilir.

$$\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p'_1} + \boldsymbol{p'_2}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1x} + m_2\boldsymbol{v}_{2x} = m_1\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{1x}} + m_2\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{2x}}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1y} + m_2\boldsymbol{v}_{2y} = m_1\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{1y}} + m_2\boldsymbol{v}'_{\boldsymbol{2y}}$$

Eksenler üzerindeki Momentum korunumu ifadelerine dikkat edildiğinde, son hızlar iki bileşenli yazıldığı için toplamda dört bilinmeyen vardır ve bu haliyle çözmek mümkün değildir. Çarpışmanın esnek olması durumunda kinetik enerjinin korunumu ifadesinden bir denklem daha gelmektedir.

$$\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2'^2$$

Tamamen esnek olmayan çarpışmalarda son hızlar eşit olduğundan dolayı,

$$\boldsymbol{v}_1^{'} = \boldsymbol{v}_2^{'} = \boldsymbol{v}^{'}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1x} + m_2\boldsymbol{v}_{2x} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_x^{'}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1y} + m_2\boldsymbol{v}_{2y} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_y^{'}$$

Denklemleri kullanılarak son hızlar elde edilebilir.

Kütle Merkezi BU KONU İŞLENMEDİ

Günlük hayatımızda karşılaştığımız cisimler genelde noktasal parçacık olmaktan ziyade bir boyuta sahiptirler. Bu tip cisimlerin hareketi genelde saf öteleme hareketi de değildir. Çoğunlukla öteleme hareketine kütle merkezi etrafında dönme hareketi de eşlik eder. Sonuç olarak bu tip bir hareketi kütle merkezinin öteleme hareketi ve kütle merkezi etrafında dönme hareketi olarak tanımlayabiliriz Fakat bunun için ilk olarak kütle merkezi ifadesini tanımlamalıyız.

Günlük yaşantımızda düzgün ve ağır bir kalası kaldırmak istediğimizde, ortasından tutarak kaldırırız. Bir kayığa binen kişilerin hepsi bir yere toplanmaz, kayığın devrilmemesi için farklı yerlere otururlar. Tüm bu örnekler, boyutlu cisimlerde cismin kütlesini temsil eden ortalama bir noktanın varlığını gösterir. Bu nokta kütle merkezi olarak isimlendirilir.

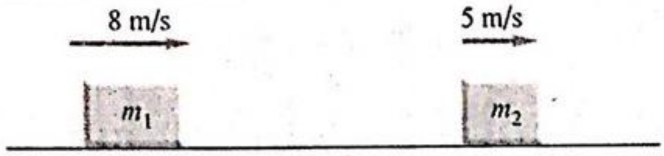
Bir boyutta x ekseni boyunca x_1, x_2,…x_N konumlarında bulunan m_1, m_2, … m_N kütlelerinin kütle merkezi ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$x_{KM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Problemler

1.

Kütlesi $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ olan bir blok sürtünmesiz raylar üzerine $8\,\mathrm{m/s}$ hızla gelip, aynı yönde $5\,\mathrm{m/s}$ hızla gitmekte olan $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ lık bloğa çarpıyor. Çarpışma sonrasında, m_2 bloğunun yine aynı yönde $6\,\mathrm{m/s}$ hızla gittiği gözleniyor. m_1 bloğunun son hızını bulun.



Bir boyutta momentumun korunumu ifadesini yazalım.

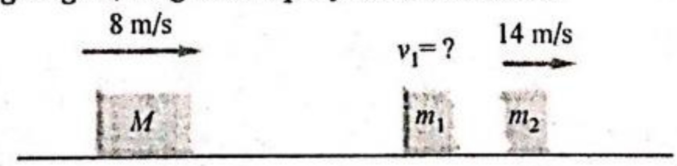
$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}'$$

$$1\cdot 8 + 10\cdot 5 = 1\cdot \vec{v_1}' + 10\cdot 6$$

$$v_1' = -2\ \mathrm{m/s}$$

2.

Sürtünmesiz yatay bir yolda $8\,\mathrm{m/s}$ hızıyla gitmekte olan $M = 10\,\mathrm{kg}$ kütlesi birden patlıyor ve iki parçaya ayrılıyor. Parçalardan $m_2 = 7\,\mathrm{kg}$ kütleli olanı aynı yönde $14\,\mathrm{m/s}$ hızla hareket ettiğine göre, $3\,\mathrm{kg}$ kütleli parçanın hızını bulun.



Momentumun korunumu ifadesini yazalım.

$$M\vec{v} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}'$$

$$10\cdot 8 = 3\vec{v_1}' + 7\cdot 14$$

$$v_1' = -6\ \mathrm{m/s}$$

3.

Kütlesi 3 kg *olan bir top* 10 m/s *hızla gelip, durmakta olan* 5 kg *lık diğer bir topa çarpıyor. Çarpışma esnek olduğuna göre topların son hızlarını bulun.*

Momentumun korunumu ifadesi: $V_2 = 0$ olduğundan göre

$m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2} = m_1 \vec{V_1}' + m_2 \vec{V_2}' \longrightarrow m_1 \vec{V_1} = m_1 \vec{V_1}' + m_2 \vec{V_2}'$

Enerjinin korunumu ifadesi

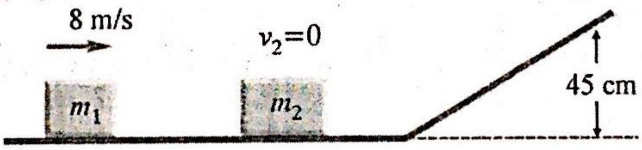
$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 \longrightarrow \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2$

Denklemler ortak çözülürse $\rightarrow V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot V_1 = \frac{3-5}{3+5} \cdot 10 = -2{,}5$ m/s

$\vec{V_2}' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1 = \frac{2.3}{3+5} . 10 = 7{,}5$ m/s

4.

Kütlesi $m_1 = 1$ kg *ve hızı* 8 m/s *olan blok durmakta olan* $m_2 = 2$ kg *lık bloğa çarpıyor. Çarpışmadan sonra,* m_2 *bloğu sürtünmesiz bir eğik düzlemde* 45 cm *yükseğe çıkıyor. İki kütlenin çarpışmadan hemen sonraki hızlarını hesaplayın.*



m_2 kütlesinin çarpışmadan hemen sonraki hızını bulalım.

$\frac{1}{2} m_2 V_2'^2 = m_2 g h \longrightarrow V_2' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 . 10 . 0{,}45} = 3$ m/s

Momentumun korunumu yasasına göre

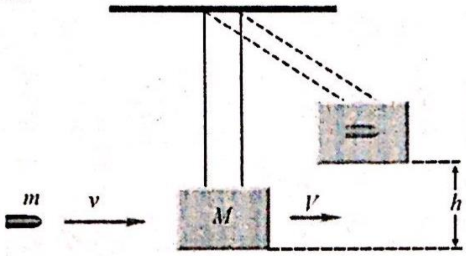
$m_1 \vec{V_1} + m_2 \vec{V_2} = m_1 \vec{V_1}' + m_2 \vec{V_2}'$

$1 . 8 + 0 = 1 . V_1' + 2 . 3$

$V_1' = 2$ m/s

5.

Balistik sarkaç. *Mermi hızlarını tayin etmekte kullanılan bu alet, L uzunluğunda bir ipin ucuna kütlesi çok büyük olan bir tahta blok asılarak yapılmış bir sarkaçtır. m kütleli mermi v hızıyla gelip M kütleli bloğa saplandığında, (mermi+blok) sistemi h kadar yükselir. Merminin hızını h yüksekliği cinsinden hesaplayın. Sayısal örnek: $m = 50\,\mathrm{g}$, $M = 5\,\mathrm{kg}$, $L = 2\,\mathrm{m}$ ve $h = 80\,\mathrm{cm}$.*



V' : mermi + blok sisteminin çarpışmadan hemen sonraki hızları

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V'$

$m_1 = m$, $m_2 = M$ olarak kabul edelim.

$mv + M \cdot 0 = (m+M) V'$

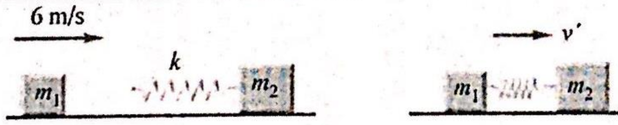
$V' = \dfrac{m}{m+M} v$

$\dfrac{1}{2}(m+M)V'^2 = (m+M)gh$

$v = \dfrac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$

6.

Sürtünmesiz yatay bir düzlemde durmakta olan 2 kg lık bir bloğun ön tarafına yay sabiti $k = 100\,\mathrm{N/m}$ olan bir yay monte edilmiştir. Kütlesi 1 kg olan diğer bir blok 6 m/s hızıyla gelip yaya çarpıyor. (a) Yay en fazla ne kadar sıkışır ve bu anda blokların hızları ne kadar olur? (b) Bloklar birbirinden ayrıldıktan sonra hızları ne kadar olur?



Burada dikkat edilmesi gereken kısım, aradaki yayın maksimum sıkıştığı anda kütleler birbirlerine yapışık gibi hareket ederler ve ortak V' hızına sahip olurlar.

a)

$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v' \rightarrow v' = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \dfrac{1 \cdot 6}{1+2} = 2\,\mathrm{m/s}$

Enerjinin korunumundan

$\dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \dfrac{1}{2}(m_1+m_2) v'^2 + \dfrac{1}{2} k x^2 \rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 = \dfrac{1}{2}(1+2) \cdot 2^2 + \dfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot x^2$

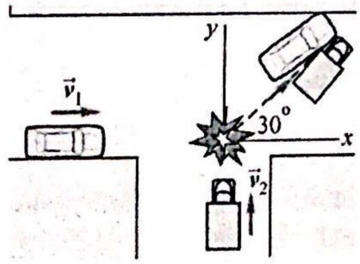
$x = 0{,}49\,\mathrm{m}$

b) $\vec{v}_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \dfrac{1-2}{1+2} \cdot 6 = -2\,\mathrm{m/s}$

$\vec{v}_2' = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \dfrac{2 \cdot 1}{1+2} \cdot 6 = 4\,\mathrm{m/s}$

7.

Bir kavşakta Doğu yönünde gitmekte olan $m_1 = 800\,\text{kg}$ kütleli bir otomobil ile kuzey yönüne gitmekte olan $m_2 = 1200\,\text{kg}$ kütleli bir kamyonet kafa kafaya çarpışıp kenetleniyorlar. İki sürücü de diğerinin kavşağa aşırı hızlı girdiğini iddia ediyor. Siz bir bilirkişi olarak olay yerine geliyorsunuz. Asfaltta çarpışmadan sonraki siyah lastik izlerinin Doğu yönü ile 30° açı yaptığını ölçüyorsunuz. Sadece bu bilgiden yararlanarak, v_2/v_1 oranını hesaplıyor ve hangi sürücünün daha hızlı gittiğini tespit ediyorsunuz. Bu hesabı nasıl yaparsınız?



İki boyutta momentumun korunumu yazalım.

① $M_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = (m_1+m_2) V_x'$ $\qquad V_x' = V' \cos 30$

② $m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = (m_1+m_2) V_y'$ $\qquad V_y' = V' \sin 30$

$m_1 V_1 + 0 = (m_1+m_2) \cos 30$

$0 + m_2 V_2 = (m_1+m_2) \sin 30$

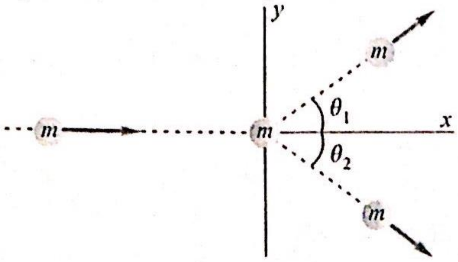
Bu iki denklem taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m_1}{m_2} \tan 30 = \frac{800}{1200} \cdot \tan 30 = 0{,}38$$

Buna göre m_1 kütleli otomobil daha hızlı

8.

Nükleer fizikte proton-proton çarpışmaları önemli bir bilgi kaynağıdır. Hızı 5×10^6 m/s olan bir proton durmakta olan diğer bir protonla esnek çarpışma yapıyor. Gelen protonun çarpışma sonrasında 3×10^6 m/s hızıyla saçıldığı gözleniyor. Protonların saçılma açılarını ve ikinci protonun hızını hesaplayın.



Esnek çarpışmalarda enerji korunumundan

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \qquad \left(\begin{matrix} m_1 = m_2 = m \\ v_2 = 0 \end{matrix}\right)$$

$$v_2' = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} \times 10^6 = 4\times10^6 \text{ m/s}$$

İki boyutlu esnek çarpışmalar için momentum korunumu

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v_{1x}' + m_2v_{2x}' \rightarrow v_1 = v_1'\cos\theta_1 + v_2'\cos\theta_2$$

$$m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1v_{1y}' + m_2v_{2y}' \rightarrow 0 = v_1'\sin\theta_1 + v_2'\sin\theta_2$$

$$v_2'\cos\theta_2 = v_1 - v_1'\cos\theta_1$$

$$v_2'\sin\theta_2 = -v_1'\sin\theta_1$$

İki denklemin kareleri alınıp toplanırsa

$$v_2'^2 = v_1'^2\sin^2\theta_1 + (v_1 - v_1'\cos\theta_1)^2 \qquad \left[(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1)\right]$$

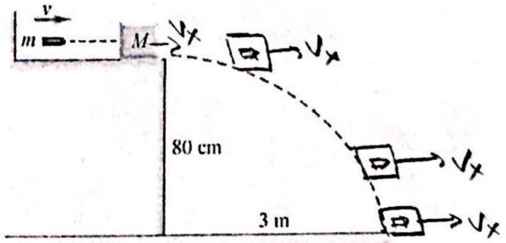
$$v_2'^2 = v_1'^2\sin^2\theta_1 + v_1^2 - 2v_1v_1'\cos\theta_1 + v_1'^2\cos^2\theta_1$$

$$\left(\begin{matrix}\text{Enerjinin korunumundan} \\ v_1^2 - v_2'^2 = v_1'^2\end{matrix}\right) \rightarrow \cos\theta_1 = \frac{v_1'}{v_1} = \frac{3}{5} \rightarrow \theta_1 = 53^\circ$$

$$\sin\theta_2 = -\frac{3}{4}\sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 = -37^\circ$$

11.

Yatay doğrultuda ateşlenen $m = 50\,\text{g}$ kütleli bir mermi, yerden $80\,\text{cm}$ yüksekte bir masanın kenarında durmakta olan $M = 950\,\text{g}$ kütleli tahta bloğa çarpıp saplanıyor. (Blok+mermi) kütlesi masadan $3\,\text{m}$ uzakta yere düşüyor. Merminin ilk hızını bulun.



$y = y_0 + V_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0.8 = \frac{1}{2}.10.t^2$

$t^2 = 0.16 \rightarrow \boxed{t = 0.4\ s}$

$x = V_x . t$

$3 = V_x . 0.4$

$\boxed{V_x = 7.5\ m/s}$

$m v + M V = (m+M)V_x$

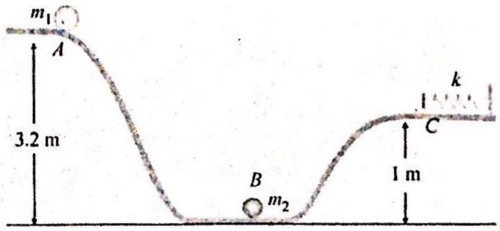
$0.05 v + 0.95.0 = (0.05+0.95).7.5$

$0.05 v = 7.5$

$\boxed{v = 150\ m/s}$

12.

Sürtünmesiz ABC yolu üzerinde, 3.2 m yükseklikte bir A noktasından ilk hızsız bırakılan $m_1 = 3\,\text{kg}$ kütleli top, B noktasında durmakta olan $m_2 = 1\,\text{kg}$ kütleli diğer bir topa çarpıp yapışıyor. Çarpışmadan sonra $(m_1 + m_2)$ sistemi 1 m yükseklikteki C noktasına tırmanıp, düzleme tespit edilmiş olan $k = 400\,\text{N/m}$ sabitli yayı sıkıştırıyor. (a) Çarpışmadan hemen sonraki hız, (b) C noktasındaki hız, (c) Yayın sıkışma miktarı ne kadar olur?



Çarpışmadan sonra ortak hız ifadesini elde edelim.

$E_{1A} = E_{1B}$

$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2$

$V_{1B} = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2.10.3.2}$

$\boxed{V_{1B} = 8\ m/s}$

a) $m_1 V_{1B} + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V'$

$3.8 + 1.0 = (3+1).V'$

$V' = 6\ m/s$

b) $E_B = E_C$

$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V'^2 = (m_1+m_2)gh_2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_c^2$

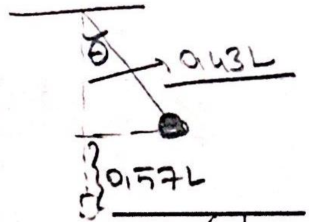
$V_c^2 = V'^2 - 2gh_2 \rightarrow V_c = \sqrt{V'^2 - 2gh_2}$

$V_c = \sqrt{6^2 - 2.10.1} \rightarrow V_c = 4\ m/s$

c) $\frac{1}{2}(m_1+m_2).V_c^2 = \frac{1}{2}kx^2$

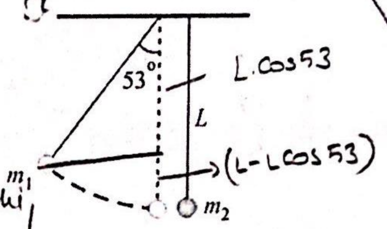
$x = \left(\frac{(m_1+m_2)\,V_c^2}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{(3+1).4^2}{400}\right)^{1/2} = 0.4$

$\boxed{x = 0.4\ m}$



13.

Eşit L uzunlukta iki ipin ucuna kütleleri $m_1 = 3\,\text{kg}$ ve $m_2 = 2\,\text{kg}$ olan iki top asılarak yanyana iki sarkaç yapılmıştır. Birinci top ip düşeyden 53° ayrılarak serbest bırakılıyor. İki top elastik çarpıştığına göre, ikinci topun düşeyle yaptığı maksimum açı ne kadar olur?



m₁ için çarpışmadan hemen önceki hızını bulalım.

$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$

$m_1 g (L - L\cos 53) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$

$V_1^2 = 2gL(1-\cos 53)$

$V_1 = 2,82\sqrt{L}$

Çarpışmadan sonraki hızlar

$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$

$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1$

$V_2' = \frac{2.3}{2+3} . 2,82\sqrt{L}$

$\boxed{V_2' = 3,39L}$

Enerji korunumu ile.

$\frac{1}{2} m_2 V_2'^2 = m_2 g h$

$h = \frac{V_2'^2}{2g} = 0,57L$

$L.\cos\theta = 0,43L$

$\theta = \cos^{-1}(0,43)$

$\boxed{\theta \cong 65°}$

14.

Sürtünmesiz yatay bir düzlemde $m_1 = 1\,\text{kg}$ kütleli top $v_0 = 10\,\text{m/s}$ hızıyla gelip, durmakta olan $m_2 = 2\,\text{kg}$ kütleli topa çarpıyor. Çarpışma sonrası m_1 topu 60° açıyla saçılırken, m_2 topu −37° açıyla saçılıyor. Topların son hızlarını hesaplayın.

$m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = m_1 V_{1x}' + m_2 V_{2x}'$

$1.10 + 0 = 1.V_1'.\cos 60 + 2.V_2'\cos 37$

$10 = 0,5V_1' + 2.0,8.V_2'$ (1)

$m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} = m_1 V_{1y}' + m_2 V_{2y}'$

$0 + 0 = 1.0,86V_1' - 2.0,6V_2'$

$\boxed{V_1' = 1,39V_2'}$ (2)

$10 = 0,5.1,39V_2' + 2.0,8V_2'$

$V_2' = 4,4$ m/s

$V_1' = 6$ m/s

15.

Bir futbolcu kendisine doğru 30 m/s hızla gelmekte olan 400 g kütleli futbol topuna vurarak, onu aynı doğrultuda 40 m/s hızla geri gönderiyor. Topun ayakla teması 0.04 s sürdüğüne göre, futbolcunun ayağındaki ortalama kuvvet ne kadardır?

İmpuls - Momentum teorime göre

$$\vec{P} + \vec{F} \cdot \Delta t = \vec{P}'$$

$$m\vec{V} + \vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{V}'$$

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{V}' - \vec{V})}{\Delta t}$$

$$F = \frac{0{,}4(40 - (-30))}{0{,}04}$$

$$F' = 700 \text{ N}$$