Sayısal Analiz

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ders İçeriği

- Taylor Serisi
- Newton Raphson Yöntemi
- Örnekler

Taylor Serisi

Matematikte, her mertebeden türevli bir f(x) fonksiyonunun (a − r,a + r) aralığındaki Taylor serisi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

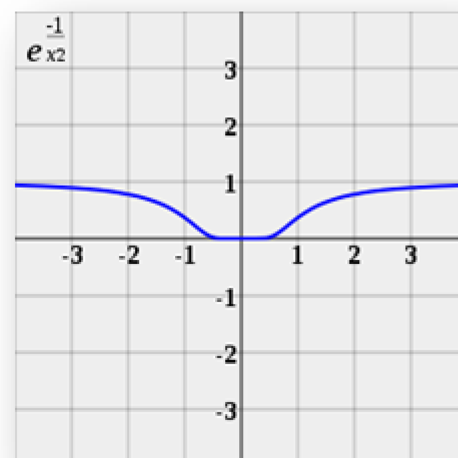
$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Genel ifadesi ;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a = 0 için Taylor formülü basit bir şekil alır, bu özel seriye MacLaurin serisi denir.

e^{-1/x^2}' nin grafiği



Eğer seri belirtilen aralıktaki her x noktasında f(x)'e yakınsıyorsa f(x) analitik bir fonksiyon olarak adlandırılır.

Her sonsuz türevlenebilir fonksiyon analitik değildir.

Newton Raphson Yöntemi

$f(x)$ fonksiyonunun x_0 yaklaşık bir kökü h ise yaklaşımdan dolayı ortaya çıkan hatayı göstersin. Dolayısıyla kökün düzeltilmiş değerini ;

$$x_1 = x_0 + h$$

şeklinde ifade etmekte mahsur yoktur.

x_1 düzeltilmiş değerinin $f(x)$ fonksiyonunun kökü olduğu kabul edilirse ;

$f(x_1) = 0$ veya $f(x_0 + h) = 0$ olmalıdır.

Bu kök değerini taylor serisine açarsak

$$\mathbf{f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_0) + \cdots}$$

Genellikle 0 ile 1 arasında olan h değeri yeteri kadar küçük ise taylor seri açılımında ilk terimleri alıp diğer terimleri terk etmekle fazla bir hata yapılmış olmaz.

Newton Raphson Yöntemi

İfadeyi taylor serisi ile düzenlersek;

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$$

x_0' ın $f(x)'$ in bir kökü olduğundan ifadeyi $f(x_0) + hf'(x_0)=0$ yazabiliriz.

$\mathbf{h = x_1 - x_0 \cong \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$ buradan düzenleme ile yeni kök değeri ;

$\mathbf{x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$ olur.

Hesaplanan her $\mathbf{h}$ hatasının mutlak değeri verilen bir $\boldsymbol{\varepsilon}$ değerinden küçük değilse hesapladığımız yeni kök değeri $\mathbf{x_1}$ yaklaşık kök olarak kabul edilip, işlemler tekrarlanarak $\mathbf{x_2}$ gibi yeni bir kök hesaplanır.

$$\mathbf{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

$$\mathbf{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}$$

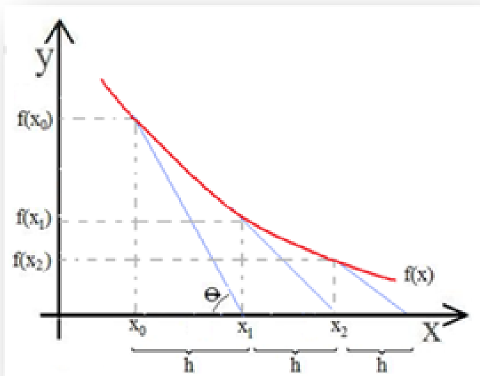
...

$\mathbf{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ şeklinde işlemler tekrarlanır,
her tekrarlanan işlemden sonra kabul edilebilir hata kontrolü yapılır.

$\mathbf{|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon}$ Eğer koşul sağlanıyorsa işlem sonlandırılır.

Bir başlangıç kök için $f(x)'$in bu noktadaki $\mathbf{x_1}$ değeri alınarak ortaya çıkan $\mathbf{h}$ hata oranı bulunur.

$|\mathbf{h}| > \boldsymbol{\varepsilon}$ ise yeni teğetler alınarak köke yaklaşılır.



$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{f(x_0)}}{\mathbf{tg\,\theta}} = -\frac{\mathbf{f(x_0)}}{\mathbf{f'(x_0)}}$$

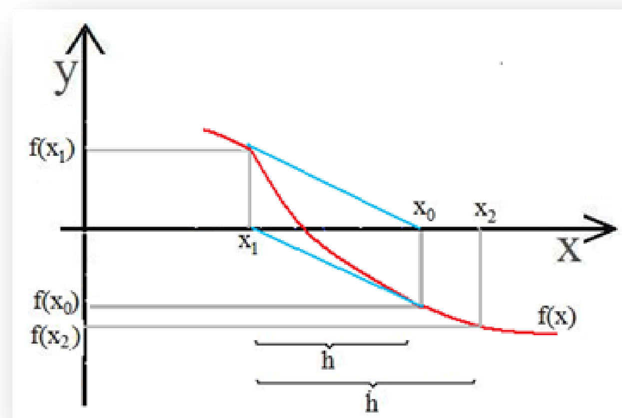
Olduğu bilindiğinden gerçek köke yaklaşıldıkça hata oranı $|\mathbf{h}|$ küçülmektedir.

Bu durum iterasyon işlemi yakınsak ise gerçekleşir.

Hata oranı $|\mathbf{h}|$ giderek büyüyorsa iterasyon ıraksaktır denir.

İterasyon yakınsak olması için iterasyon yapılan bölgede aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir.

$$\left|\frac{\mathbf{f(x).f''(x)}}{[\mathbf{f'(x)}]^2}\right| < 1$$



7. Hafta

Newton Raphson Yöntemi

Örnek :

$\mathbf{f(x) = x^3 - 5}$ fonksiyonunun bir kökünü $\mathbf{x_0 = 1}$ civarında $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-5}}$ hata oranı ile bulunuz.

Aksi belirtilmediği sürece $|\mathbf{x_{k+1} - x_k}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ kullanılacaktır.

$$\mathbf{f'(x) = 3x^2}$$

$$\mathbf{x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1})^3 - 5}{3(x_{k-1})^2}}$$

k=1 için iterasyon uygulanırsa $\mathbf{x_1 = 1 - \frac{1^3 - 5}{3.1^2} = 2,33333}$

İterasyon işlemine devam edilirse; $\mathbf{x_2 = 2,33333 - \frac{(2,33333)^3 - 5}{3.(2,33333)^2} = 1,861678}$

$$\mathbf{x_3 = 1,861678 - \frac{(1,861678)^3 - 5}{3.(1,861678)^2} = 1,7220019}$$

$\mathbf{x_4 = 1,7100597}$, $\mathbf{x_5 = 1,709976}$, $\mathbf{x_6 = 1,709976}$

$|\mathbf{x_6 - x_5}| \leq \mathbf{10^{-5}}$ olduğundan iterasyon işlemi sonlandırılır.

$\mathbf{x_5}$ değerinin $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-5}}$ hata ile kökü olduğu kabul edilir.

$\mathbf{x_5}$ değerinin $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-5}}$ hata ile kökü olduğu kabul edilir.

Problemlin matlab çözümü

```
%newton raphson1 (özel Çözüm)
clear all;
%f(x)=k1*x^3+k2
k1=1;k2=-5;
x(1)=1;                          % x'in baslangic
degeri
f_x=k1*x(1)^3+k2;          % fonksiyon
derivate_fx=3*x(1)^2;      % türevi
epsilon=0.00005;
k=1;
     while abs(f_x)>=epsilon
         x(k+1)=x(k)-f_x/derivate_fx;
         k=k+1;
         f_x=k1*x(k)^3+k2;
         derivate_fx=3*x(k)^2;
     end
k=k-1;
disp(['iterasyon sayisi :' int2str(k)]);
disp(['Yaklasık kök degeri :' num2str(x(k))]);
```

Newton Raphson Yöntemi

Örnek: Bir A sayının istenilen duyarlılıkta karekökünün bulunması için Newton Raphson yöntemini kullanarak bir algoritma geliştiriniz.Buna göre 10' un karakökünü $x_0=1$ başlangıç değeri , $\varepsilon=0,005$ mutlak hatasıyla bulunuz.

Örnek: Bir A sayının istenilen duyarlılıkta karekökünün bulunması için Newton Raphson yöntemini kullanarak bir algoritma geliştiriniz.Buna göre 10’ un karakökünü x_0=1 başlangıç değeri , ε=0,005 mutlak hatasıyla bulunuz.

A gibi bir sayının karekökünü bulma $x^2=A$ gibi bir denklemin x gibi bir kökünü bulmaya eşdeğer bir problemdir.

O halde $f(x)=x^2-A$ olup buradan

$$f'(x)=2x$$

yönteme göre yaklaşık kök x_0 ise düzeltilmiş kök

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

f(x) ve f'(x) in ifadeleri yerlerine konularak

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - A}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{A}{x_0}\right)$$ elde edilir.

iterasyon için genelleme x_n bilinen kök ise hesaplanan kök

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$ olarak elde edilir.

Her hesaplanan yeni kök eskisiyle karşılaştırılarak mutlak hatası ε ile karşılaştırılır. Bu hata ε dan küçük olunca işlem durdurulur.

Buna göre 10 un karekökü

Bilinen x_n	Hesaplanan $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$	Hata $h = x_{n+1} - x_n$
1	5.5	4.5
5.5	3.66	-1.84
3.66	3.181	-0.479
3.181	3.1623	-0.0187
3.1623	3.1622	-0.0001 $< \varepsilon$

Böylece 10 un 0,005 mutlak hata ile karekökü 3.1622 dir.

Örnek: $x^3+2x^2+6x+3=0$ denkleminin $[-1,0]$ arasında kökü olup olmadığını araştırınız. Varsa Newton-Raphson ile köke yaklaşınız.

$f(-1)=-1+2+(-6)+3=-2<0 \qquad f(0)=3>0$ kök var.

$x_0=0$ alalım.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0-\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{-3}{6}=-0,5$$

$$x_2=-0,5-\frac{f(-0,5)}{f'(-0,5)}=-0,578$$

$$x_3=-0,578-\frac{f(-0,578)}{f'(-0,578)}=-0,578-\frac{0,007}{4,69}=\underline{\underline{-0,5794}}$$

Örnek: $e^x - 3x = 0$ denklemine $[0,1]$ aralığında kökü var mı varsa Newton–Raphson kuralını uygulayınız.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= e^0 - 0 = 1 - 0 = 1 \\ f(1) &= e - 3 < 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} f'(x) &= e^x - 3 \\ f''(x) &= e^x \end{aligned}$$

$x_0 = 0$ alınarak $\longrightarrow$ $f''(0) = e^0 = 1 > 0 \qquad f''(1) = e > 0$

$f(0) = 1 > 0 \qquad f(1) < 0$

işaretleri aynı olmalı.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-2} = 0,5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 + \frac{0,1487}{1,3513} = 0,61$$

Newton Raphson Yöntemi

Örnek :

$X^3+6x^2+13x-20$ bir kökünü $x_0=2$ alarak N-R ile araştırınız (iter.say=3)

Örnek: $x^3+6x^2+13x-20=0$ bir kökünü $x_0=2$ alarak Newton-Raphson ile araştırınız.

$$f(x) = x^3+6x^2+13x-20$$

$$f(2) = 8+24+26-20 = 38 > 0$$

$$f'(x) = 3x^2+12x+13 \Rightarrow f'(2) = 3.4+24+13 = 49$$

$$f''(x) = 6x+12 \Rightarrow f''(2) = 12+12 = 24 > 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{38}{49} = 1{,}224$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}224 - \frac{f(1{,}224)}{f'(1{,}224)} = 1{,}224 - \frac{6{,}734}{\underbrace{32{,}182}} = 1{,}014$$

$$f(1{,}224) = (1{,}224)^3 + 6(1.224)^2 + 13(1{,}224) - 20 = 6{,}734$$

$$f'(1{,}224) = 3(1{,}224)^2 + 12(1{,}224) + 13 = 32{,}182$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}04 - \frac{f(1{,}04)}{f'(1{,}04)} = 1{,}04 - \frac{\overbrace{1{,}134}^{0{,}039}}{\underbrace{28{,}72}} = 1{,}0005 \cong 1$$

$$f(1{,}04) = (1{,}04)^3 + 6(1{,}04)^2 + 13(1{,}04) - 20 = 1{,}134$$

$$f'(1{,}04) = 3(1{,}04) + 12(1{,}04) + 13 = 28{,}72$$

Haftalık Ödev
7. Hafta

Çalışma Soruları

1) $x^3-2x-5=0$ denkleminin $x_0=2$ civarındaki kökünü N-R yöntemi ile bulunuz.

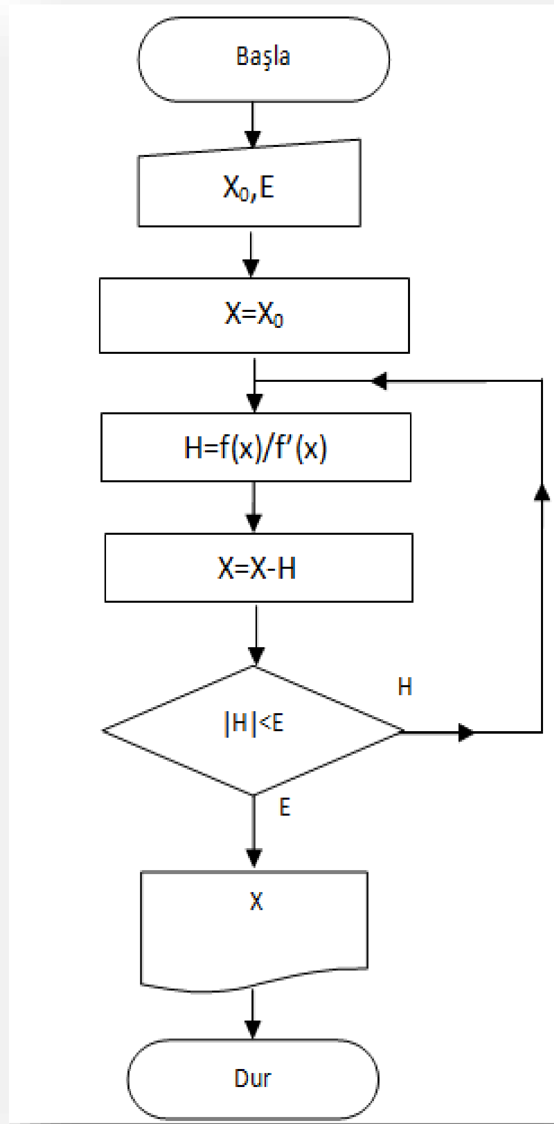
2) $f(x)=x^3-0{,}6x^2-13{,}2x-20.8$ fonks. bir kökünü N-R göre 0,01 den küçük hata ile bulunuz.

3) $x^3-3x-4=0$ denkleminin $[2{,}1\ ,\ 2{,}2]$ aralığındaki bir kökünü N-R yöntemi ile bulunuz. (iter. sayısı = 2)

4) $f(x)=x^6+5x^4-9x+1$ fonk. $[0,1]$ aralığında bir extramuma sahip olduğu biliniyor. Bu noktanın koordinatlarını $\varepsilon=0{,}01$ veya daha az hata ile bulunuz.

5) $x^3-5x^2-17x+20=0$ denklemini N-R. yöntemi ile kökünü bul. (iter. sayısı = 3)

Newton Raphson Yöntemi Akış Diyagramı



Newton Raphson Yöntemi

Örnek : $\mathbf{f(x) = x^2 - 7x + 10}$ fonksiyonunun bir kökünü $\mathbf{x_0 = 4}$ civarında $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}03}$ hata oranı ile bulan programı matlab ortamında kodlayınız.

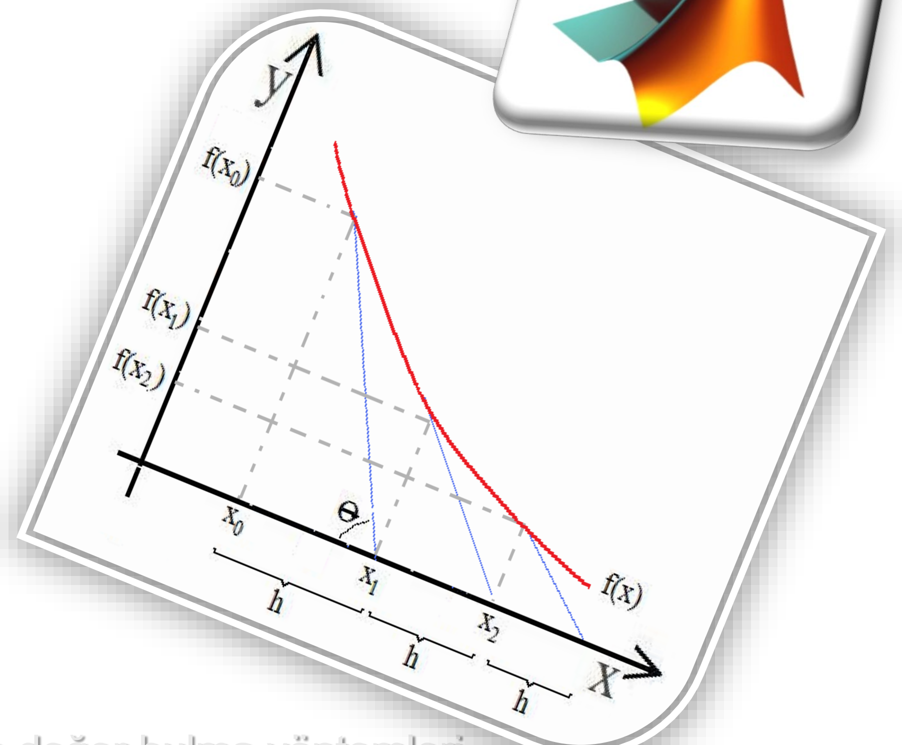
Çözüm :

```
clear all;
%f(x)=k1*x^2+k2*x+k3
k1=1;k2=-7;k3=10;
% x'in başlangıç değeri değeri
x(1)=4;
f_x=k1*x(1)^2+k2*x(1)+k3;   % fonksiyon
derivate_fx=2*k1*x(1)+k2;   % türevi
epsilon=0.03;
k=1;
while abs(f_x)>=epsilon
   x(k+1)=x(k)-f_x/derivate_fx;
   k=k+1;
   f_x=k1*x(k)^2+k2*x(k)+k3;
   derivate_fx=2*k1*x(k)+k2;
end
k=k-1;
disp(['x(k) değeri:' int2str(x(k))]);
```

```
>> newtonraphson
x(k) değeri:5
>>
```

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar



Sonraki Hafta :

Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri…