Тема II. Линейные операторы

§ 1. Замена базиса

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Пусть V, W – векторные пространства над полем F. Отображение $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ называется *линейным оператором*, если для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и любого скаляра $t \in F$ выполняются равенства $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$.

Теорема существования и единственности линейного оператора

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем F, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ – базис пространства V, а $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_n$ – произвольные вектора из пространства W. Тогда существует, и притом только один, линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Итак, линейный оператор на конечномерном пространстве V однозначно определяется тем, как он действует на базисных векторах этого пространства. Если и пространство W конечномерно, то чтобы иметь полную информацию о линейном операторе, достаточно знать координаты образов этих векторов в некотором базисе пространства W.

Recap: матрица линейного оператора

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, причем $\dim V = n > 0$, $\dim W = k > 0$. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ – базис пространства V, а $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ – базис пространства W. *Матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to W$ *в базисах* P и Q называется $k \times n$-матрица, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, $i = 1, 2, \dots, n$. Эта матрица обозначается $A_{P,Q}$ или просто A, если базисы зафиксированы.

Зная матрицу оператора, можно вычислить координаты образа произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ по координатам $\mathbf{x}$:

$$\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = A_{P,Q}[\mathbf{x}]_P.$$

Ясно, что матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах могут быть различными. Как они связаны между собой? Как выбрать самую «простую» матрицу для данного оператора?

Матрица перехода от одного базиса к другому

Определение

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем F, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ – два базиса этого пространства. *Матрицей перехода от базиса P к базису Q* называется $n \times n$-матрица, i-й столбец которой (для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$) есть координатный столбец вектора $\mathbf{q}_i$ в базисе P.

Матрица перехода от базиса P к базису Q обозначается через $T_{P \to Q}$.

Принято базис P называть *старым*, а базис Q – *новым*.
Итак, матрица перехода от старого базиса к новому строится из старых координат новых базисных векторов.

Через матрицу перехода можно связать между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах.

Предложение (формула замены координат)

Пусть P и Q – два базиса пространства V. Тогда для любого $\mathbf{x} \in V$

$$[\mathbf{x}]_P = T_{P \to Q}[\mathbf{x}]_Q.$$

Доказательство. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$,

$$T_{P \to Q} = (t_{ij}),\ [\mathbf{x}]_P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ [\mathbf{x}]_Q = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n = x'_1\mathbf{q}_1 + x'_2\mathbf{q}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{q}_n$.

Раскроем правую часть, выразив вектора $\mathbf{q}_i$ через базис P.

$$
\begin{aligned}
x'_1\mathbf{q}_1 + x'_2\mathbf{q}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{q}_n &= x'_1(t_{11}\mathbf{p}_1 + t_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{p}_n) + \\
&+ x'_2(t_{12}\mathbf{p}_1 + t_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{p}_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x'_n(t_{1n}\mathbf{p}_1 + t_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{p}_n) = \\
&= (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n)\mathbf{p}_1 + \\
&+ (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n)\mathbf{p}_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n)\mathbf{p}_n.
\end{aligned}
$$

В силу единственности разложения вектора по базису, имеем

$$
\begin{cases}
x_1 = t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n, \\
x_2 = t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n.
\end{cases}
$$

Эта система эквивалентна матричному равенству $[\mathbf{x}]_P = T_{P\to Q}[\mathbf{x}]_Q$. $\square$

Матрица обратного перехода

Итак, $\boxed{[\mathbf{x}]_P = T_{P\to Q}[\mathbf{x}]_Q}$. Меняя ролями P и Q, имеем $[\mathbf{x}]_Q = T_{Q\to P}[\mathbf{x}]_P$. Подставляя второе равенство в первое, получаем $[\mathbf{x}]_P = T_{P\to Q}T_{Q\to P}[\mathbf{x}]_P$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}$ поочередно все вектора базиса P, получаем

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = T_{P\to Q}T_{Q\to P}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} = T_{P\to Q}T_{Q\to P}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Отсюда $E = T_{P\to Q}T_{Q\to P}E = T_{P\to Q}T_{Q\to P}$. Мы доказали такой факт:

Предложение о матрице перехода

Пусть P и Q – два базиса пространства V. Матрица $T_{P\to Q}$ обратима и обратной к ней является матрица обратного перехода $T_{Q\to P}$.

Теорема (о замене матрицы)

Пусть V и W – конечномерные векторные пространства над полем F, P_1 и P_2 – базисы пространства V, Q_1 и Q_2 – базисы пространства W, а $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор. Тогда

$$A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}.$$

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ имеем

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_2} = A_{P_2,Q_2}[\mathbf{x}]_{P_2} = A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1}[\mathbf{x}]_{P_1}.$$

С другой стороны,

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_2} = T_{Q_2\to Q_1}[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}[\mathbf{x}]_{P_1}.$$

Итак, $A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1}[\mathbf{x}]_{P_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}[\mathbf{x}]_{P_1}$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}$ поочередно вектора базиса P_1, получаем $A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}$. Умножая справа на матрицу $T_{P_1\to P_2}$, обратную к $T_{P_2\to P_1}$, получаем $A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}$. $\square$

Итак, $\boxed{A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}}$.

Важный частный случай: $V = W$. В этом случае $Q_1 = P_1$ и $Q_2 = P_2$, и пишут A_{P_1} вместо A_{P_1,P_1} и A_{P_2} вместо A_{P_2,P_2}. С учетом этого получаем

$$A_{P_2} = T_{P_2\to P_1} A_{P_1} T_{P_1\to P_2} = T^{-1}_{P_1\to P_2} A_{P_1} T_{P_1\to P_2}.$$

Определение

Квадратные матрицы A и B над некоторым полем F называются *подобными над F*, если существует невырожденная квадратная матрица T над F такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом, все матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ подобны между собой.

Свойства линейных операторов выражаются теми свойствами матриц, которые *инвариантны относительно подобия*.

Задача о выборе самой «простой» матрице для данного оператора равносильна задаче о выборе самой простой матрицы в каждом классе подобных между собой матриц.