

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 48

Студент  
Новиков Даниил Дмитриевич  
Р3131

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

Функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $2 < |x_3x_4x_5 - x_5x_1x_2| \leq 5$  и неопределенное значение при  $|x_3x_4x_5 - x_5x_1x_2| = 1$ .

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_3x_4x_5$	$x_5x_1x_2$	$x_3x_4x_5$	$x_5x_1x_2$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	4	0	4	1
2	0	0	0	1	0	2	0	2	0	0
3	0	0	0	1	1	2	4	2	4	0
4	0	0	1	0	0	4	0	4	0	1
5	0	0	1	0	1	4	4	4	4	0
6	0	0	1	1	0	6	0	6	0	0
7	0	0	1	1	1	6	4	6	4	0
8	0	1	0	0	0	0	1	0	1	d
9	0	1	0	0	1	0	5	0	5	1
10	0	1	0	1	0	2	1	2	1	d
11	0	1	0	1	1	2	5	2	5	1
12	0	1	1	0	0	4	1	4	1	1
13	0	1	1	0	1	4	5	4	5	d
14	0	1	1	1	0	6	1	6	1	1
15	0	1	1	1	1	6	5	6	5	d
16	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0
17	1	0	0	0	1	0	6	0	6	0
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	6	2	6	1
20	1	0	1	0	0	4	2	4	2	0
21	1	0	1	0	1	4	6	4	6	0
22	1	0	1	1	0	6	2	6	2	1
23	1	0	1	1	1	6	6	6	6	0
24	1	1	0	0	0	0	3	0	3	1
25	1	1	0	0	1	0	7	0	7	0
26	1	1	0	1	0	2	3	2	3	d
27	1	1	0	1	1	2	7	2	7	1
28	1	1	1	0	0	4	3	4	3	d
29	1	1	1	0	1	4	7	4	7	1
30	1	1	1	1	0	6	3	6	3	1
31	1	1	1	1	1	6	7	6	7	d

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5}$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
$m_1$	00001	✓	$m_8-m_9$	0100X	✓	$m_8-m_9-m_{10}-m_{11}$	010XX	✓
$m_4$	00100	✓	$m_8-m_{10}$	010X0	✓	$m_8-m_9-m_{12}-m_{13}$	01X0X	✓
$m_8$	01000	✓	$m_8-m_{12}$	01X00	✓	$m_8-m_{10}-m_{12}-m_{14}$	01XX0	✓
$m_9$	01001	✓	$m_1-m_9$	0X001		$m_8-m_{10}-m_{24}-m_{26}$	X10X0	✓
$m_{12}$	01100	✓	$m_4-m_{12}$	0X100		$m_8-m_{12}-m_{24}-m_{28}$	X1X00	✓
$m_{24}$	11000	✓	$m_8-m_{24}$	X1000	✓	$m_{12}-m_{13}-m_{14}-m_{15}$	011XX	✓
$m_{10}$	01010	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$	01X1X	✓
$m_{11}$	01011	✓	$m_9-m_{11}$	010X1	✓	$m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}$	01XX1	✓
$m_{14}$	01110	✓	$m_{12}-m_{13}$	0110X	✓	$m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}$	11XX0	✓
$m_{19}$	10011	✓	$m_{12}-m_{14}$	011X0	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{26}-m_{27}$	X101X	✓
$m_{22}$	10110	✓	$m_9-m_{13}$	01X01	✓	$m_{12}-m_{13}-m_{28}-m_{29}$	X110X	✓
$m_{13}$	01101	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓	$m_{12}-m_{14}-m_{28}-m_{30}$	X11X0	✓
$m_{26}$	11010	✓	$m_{24}-m_{26}$	110X0	✓	$m_{10}-m_{14}-m_{26}-m_{30}$	X1X10	✓
$m_{28}$	11100	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓	$m_{28}-m_{29}-m_{30}-m_{31}$	111XX	✓
$m_{27}$	11011	✓	$m_{10}-m_{26}$	X1010	✓	$m_{26}-m_{27}-m_{30}-m_{31}$	11X1X	✓
$m_{29}$	11101	✓	$m_{12}-m_{28}$	X1100	✓	$m_{14}-m_{15}-m_{30}-m_{31}$	X111X	✓
$m_{30}$	11110	✓	$m_{14}-m_{15}$	0111X	✓	$m_{13}-m_{15}-m_{29}-m_{31}$	X11X1	✓
$m_{15}$	01111	✓	$m_{13}-m_{15}$	011X1	✓	$m_{11}-m_{15}-m_{27}-m_{31}$	X1X11	✓
$m_{31}$	11111	✓	$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓			
			$m_{26}-m_{27}$	1101X	✓			
			$m_{28}-m_{29}$	1110X	✓			
			$m_{28}-m_{30}$	111X0	✓			
			$m_{26}-m_{30}$	11X10	✓			
			$m_{19}-m_{27}$	1X011				
			$m_{22}-m_{30}$	1X110				
			$m_{11}-m_{27}$	X1011	✓			
			$m_{13}-m_{29}$	X1101	✓			
			$m_{14}-m_{30}$	X1110	✓			
			$m_{30}-m_{31}$	1111X	✓			
			$m_{29}-m_{31}$	111X1	✓			
			$m_{27}-m_{31}$	11X11	✓			
			$m_{15}-m_{31}$	X1111	✓			

$K^3(f)$		$Z(f)$
$m_8-m_9-m_{10}-m_{11}-m_{12}-m_{13}-m_{14}-m_{15}$	01XXX	0X001
$m_8-m_{10}-m_{12}-m_{14}-m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}$	X1XX0	0X100
$m_{12}-m_{13}-m_{14}-m_{15}-m_{28}-m_{29}-m_{30}-m_{31}$	X11XX	1X011
$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}-m_{26}-m_{27}-m_{30}-m_{31}$	X1X1X	1X110
		01XXX
		X1XX0
		X11XX
		X1X1X

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы												
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
		0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
		0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
		1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
		1	4	9	11	12	14	19	22	24	27	29	30	
	0X001	X		X										
	0X100		X			X								
	1X011							X			X			
	1X110								X				X	
A	01XXX			X	X	X	X							
	X1XX0					X	X			X				X
	X11XX					X	X					X		X
B	X1X1X				X		X				X			X

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		0
		1
		0
		1
		1
		11
A	01XXX	X
B	X1X1X	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ 01XXX \end{matrix} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ X1X1X \end{matrix} \right\}$$

$$S_1^a = 22 \quad S_1^b = 29 \quad S_2^a = 22 \quad S_2^b = 29$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ 01XXX \end{matrix} \right\}$$

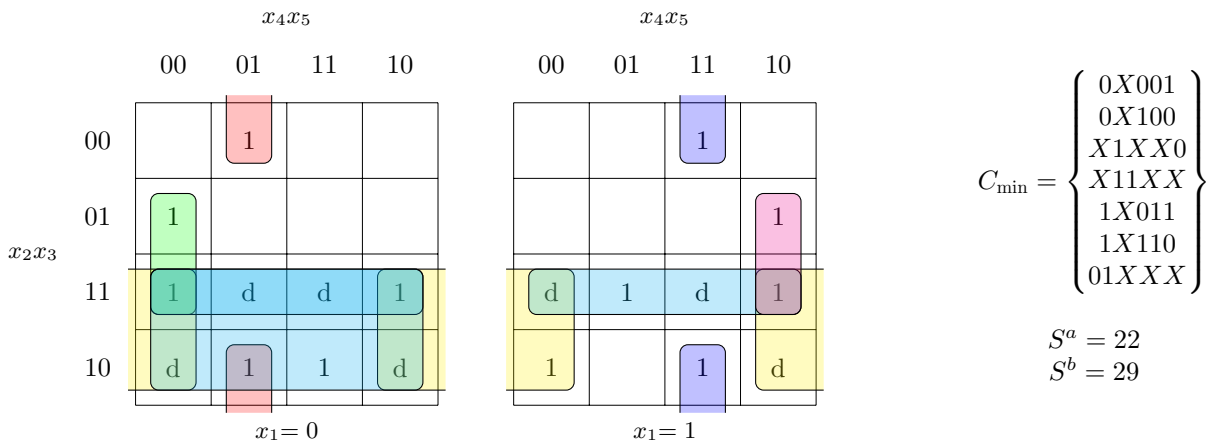
$$S^a = 22 \quad S^b = 29$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2$$

## Минимизация булевой функции на картах Карно

### Определение МДНФ



$$f = x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5}$$

## Определение МКНФ

		$x_4x_5$						$x_4x_5$			
		00	01	11	10			00	01	11	10
$x_2x_3$	00	0		0	0			0	0		0
	01		0	0	0			0	0	0	
	11		d	d				d		d	
	10	d			d				0		d
		$x_1 = 0$						$x_1 = 1$			

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ X00X0 \\ X01X1 \\ 1X001 \\ 1X100 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 17$$

$$S^b = 22$$

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

## Преобразование минимальных форм булевой функции

### Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5} \quad S_Q = 29 \quad \tau = 2$$

$$f = x_2 (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_3} x_5$$

$$\overline{\varphi} = x_3 \vee \overline{x_5}$$

$$f = x_2 (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_3 \overline{x_5} \vee \varphi) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 5$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_2 (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

### Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (x_2 \vee (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_5) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 4$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_2 (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5) \quad (S_Q = 21, \tau = 4)$$

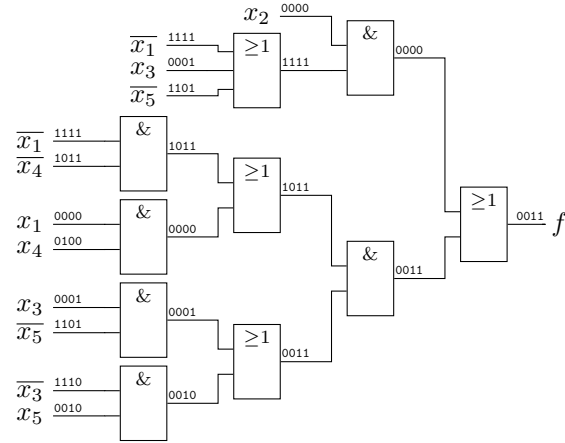
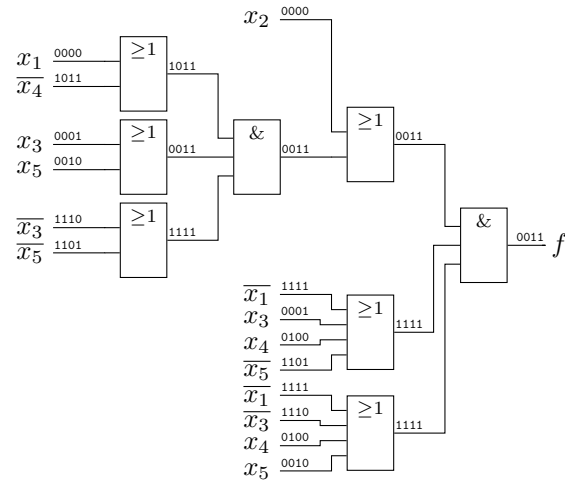


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_5) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \quad (S_Q = 22, \tau = 4)$$



### Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_2 \varphi x_1} \overline{x_1 x_4 x_1 x_4 x_3 x_5 \varphi} \quad (S_Q = 30, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_3} x_5$$

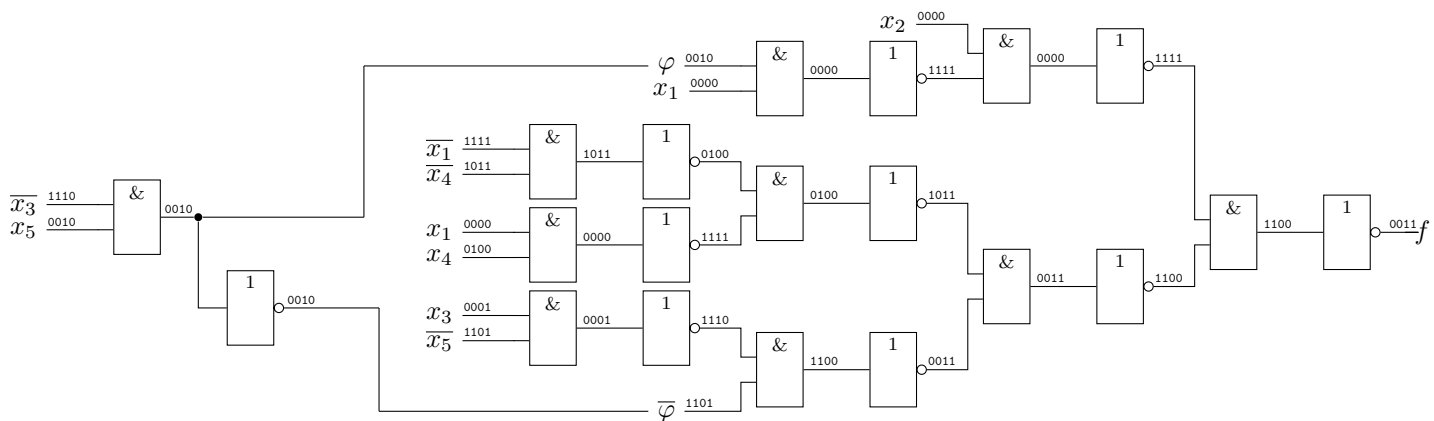
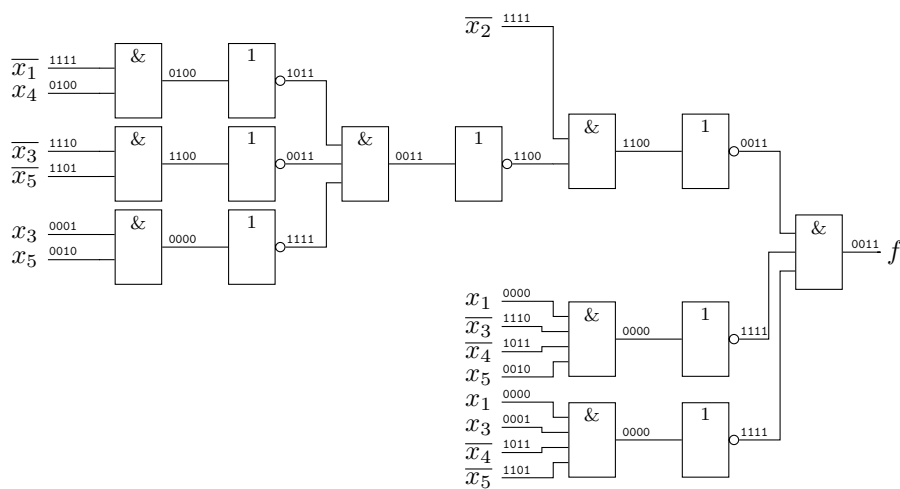


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_3 x_5}}}} \overline{\overline{x_1 x_3 x_4 x_5}} \overline{\overline{x_1 x_3 x_4 x_5}} \quad (S_Q = 29, \tau = 7)$$





## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = x_2 x_1 \overline{x_3} x_5 \overline{x_1} \overline{x_4} x_1 x_4 x_3 \overline{x_5} \overline{x_3} x_5 \quad (S_Q = 24, \tau = 5)$$

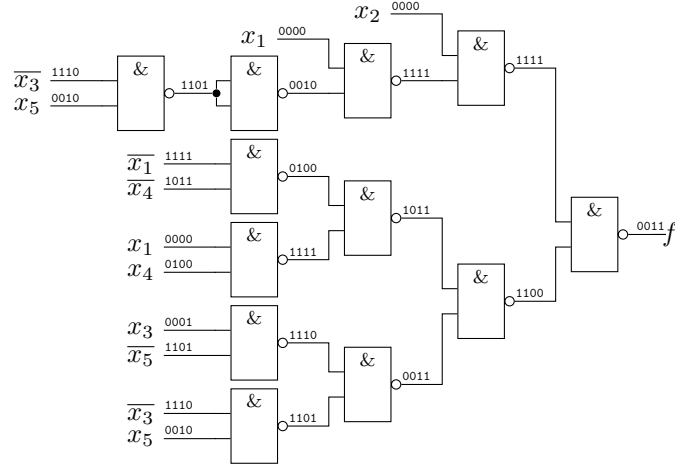


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_2} \overline{x_1} x_4 x_3 x_5 x_3 x_5 x_1 x_4 x_3 x_5 x_3 x_5 \quad (S_Q = 30, \tau = 7)$$

