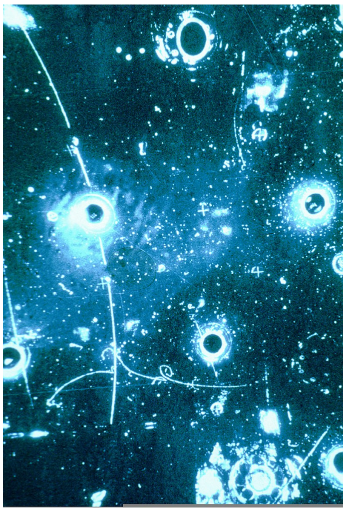
Akdeniz Üniversitesi
Fen Fakültesi - Fizik Bölümü
FİZ319 Kuantum Fiziği Ders Notları



Doç. Dr. Mesut Karakoç

December 11, 2018

İçindekiler

List of Figures

List of Tables

If all this damned quantum jumps were really to stay, I should be sorry I ever got involved with quantum theory.
—Erwin Schrödinger [1]

4 Bir Boyutlu Potansiyeller

Üç boyutlu bir evrende yaşıyor olmamıza rağmen, bir çok fiziksel olayı (hareketi) bir boyutlu olarak tanımlamak mümkündür. Bu nedenle bu bölümde klasik fiziğin açıklayamadığı fakat kuantum fiziğiyle çalışabildiğimiz bazı bir boyutlu sistemleri inceleyeceğiz.

4.1 Basamak Potansiyeli

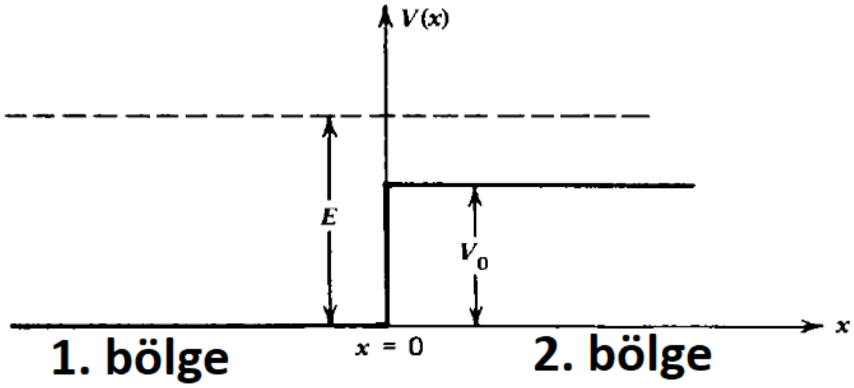


Figure 1: Basamak potansiyeli.

Basamak potansiyeli için bir örnek yukarıdaki şekildeki gibi olur. Şekilden anlaşılacağı üzere basamak potansiyeli; birbirinden farklı sabit potansiyellere sahip iki bölge içeren bir durumdur. Bir boyutlu hali için matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < 0 \\ V_0 & \Leftarrow x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

Bu potansiyeli zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ile çalışabiliriz. Öncelikle Schrödinger denklemini yazılışı daha kolay olan,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x) \tag{2}$$

formuna dönüştürebiliriz.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]u(x) = 0 \tag{3}$$

Basamak potansiyelinin değerinin sıfır olduğu bölge için,

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = k^2 \tag{4}$$

tanımını ve sıfırdan farklı olduğu bölge için

$$\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) = q^2 \tag{5}$$

tanımını yapabiliriz. $x < 0$ ve $V(x) = 0$ bölgesi için çözüm

$$u_1(x) \equiv u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{6}$$

olarak yazılabilir. Burada Ae^{ikx}, $x = -\infty$'deki bir kaynaktan gelen serbest düzlem dalga olarak düşünülebilir, Be^{-ikx} ise $x = 0$ noktasında ortam değişikliğinden dolayı yansıyan dalga olarak düşünülebilir. Bu bölgedeki toplam olasılık akısı,

$$\begin{aligned} j_1 &\equiv j = \tfrac{\hbar}{2im}\left(u^*\tfrac{du}{dx} - \tfrac{du^*}{dx}u\right) \\ &= \tfrac{\hbar}{2im}\left[\left(A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx}\right)\left(ikAe^{ikx} - ikBe^{-ik}\right) - \left(-ikA^*e^{-ikx} + ikB^*e^{ik}\right)\left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)\right] \\ &= \tfrac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

olur. $x > 0$ ve $V(x) = V_0$ için ise,

$$u_2(x) \equiv u(x) = Ce^{iqx} \tag{8}$$

çözümü elde edilir. Sadece Ce^{iqx} kısmı vardır, çünkü bu bölge $x = +\infty$'a kadar uzanmaktadır ve potansiyel sabittir bu yüzden, yansıyan dalga söz konusu değildir. Sadece $+x$ yönünde ilerleyen olasılık dalgası vardır. Bu olasılık dalgası için olasılık akısı,

$$j_2 \equiv j = \frac{\hbar q}{m}|C|^2 \tag{9}$$

bulunur. Her iki bölgedeki olasılık akıları $(j_1 = j_2)$ birbirine eşit olmalıdır. Eğer,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0 \tag{10}$$

olduğu hatırlanırsa ve kısmi değişkenlere ayrılabilir dalga fonksiyonu ile çalıştığımızdan $P(x,t) = \psi(x,t)\psi^*(x,t) = u(x)u^*(x)$ olacağına göre,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}|u(x)|^2 = 0 \tag{11}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0 \tag{12}$$

sonucuna ulaşırız. $x = 0$ civarında $x = \pm\varepsilon \to 0$ aralığında yukarıdaki ifadenin integrali,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = j(\varepsilon,t) - j(-\varepsilon,t) = 0 \tag{13}$$

sonucunu verir. Böylece $j_1 = j_2$ olması gerektiği ortaya çıkar. Her iki bölgedeki olasılık akıları da x'ten bağımsız olduklarından sınırda eşitlerse bütün tanımlı uzay boyunca birbirlerine eşit olmalıdırlar,

$$\frac{\hbar k}{m}\left(1 - |R|^2\right) = \frac{\hbar q}{m}|T|^2 \tag{14}$$

yukarıdaki eşitlikle bu sonuç ifade edilmiş olur. Böylece bu tür sistemler için olasılık akısının bir

$$1 + R = T \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{du}{dx}\right)_s - \left(\tfrac{du}{dx}\right)_{-\varepsilon} &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\tfrac{d}{dx}\tfrac{du}{dx} \\ &= \int_{-s}^{s} dx\tfrac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]u(x) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)_{a+s} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{a-s} &= \frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-s}^{a+s} dx\lambda\delta(x-a)u(x) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2}\lambda u(a)\end{aligned} \tag{17}$$

$$ik(1-R) = iqT \tag{18}$$

$$\begin{aligned}R &= \tfrac{k-q}{k+q} \\ T &= \tfrac{2k}{k+q}\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{\hbar k}{m}|R|^2 &= \tfrac{\hbar k}{m}\left(\tfrac{k-q}{k+q}\right)^2 \\ \tfrac{\hbar q}{m}|T|^2 &= \tfrac{\hbar k}{m}\tfrac{4kq}{(k+q)^2}\end{aligned} \tag{20}$$

$$u(x) = Te^{-|q|x} \tag{21}$$

$$|R|^2 = \left(\frac{k-i|q|}{k+i|q|}\right)\left(\frac{k-i|q|}{k+i|q|}\right)^* = 1 \tag{22}$$

$$T = \frac{2k}{k+i|q|} \tag{23}$$

4.2 Sonlu Potansiyel Kuyusu

Kaynaklar

[1] Zbigniew Ficek. *Quantum Physics for Beginners.*