

Akdeniz Üniversitesi
Fen Fakültesi - Fizik Bölümü
FİZ319 Kuantum Fiziği Ders Notları



Doç. Dr. Mesut Karakoç

September 28, 2018

İçindekiler

1	Kuantum Fiziğinin Ortaya Çıkışı	3
1.1	Karacisim Işıması	3
1.1.1	Klasik Fiziğe Göre	3
1.1.2	Planck Dağılımı ve Kuantumlu Enerji Kavramı	6
1.2	Fotoelektrik Etki	8
1.3	Compton Etkisi	11

For, as it has once been said, “research is to see what everybody has seen and to think what nobody has thought.” But post iacturam quis non sapit! [4]

1 Kuantum Fiziğinin Ortaya Çıkışı

Kuantum fiziğinin doğum sürecinin 14 Aralık 1900 tarihinde başladığı kabul edilebilir. O gün Max Planck Alman Fizik Topluluğu’nun bir toplantısında “Normal Spektrumun Enerji Dağılım Yasasının Teoremi” başlıklı makalesini sunmuştu [2]. Bu makale çok ilgi görmemesine rağmen, bir elektronun enerjisinin kuantumlu olabileceğini ilk defa öne sürdüğü için önemlidir.

Kuantum fiziğinin bütünüyle sadece bu makaleyle başladığını söylemek pek doğru olmaz. On dokuzuncu yüzyılın başlarında gerçekleştirilen bazı deneyleri klasik fizik açıklamakta yetersiz kalmıştır. Bu ilk bölümde bu deneyleri ve bu deneylerin açıklanması için ortaya çıkan yeni kavramları (ışığın parçacık özelliği, maddenin dalga davranışı, fiziksel niceliklerin kuantumlanması) anlamaya çalışacağız.

1.1 Karacisim Işınması

1.1.1 Klasik Fiziğe Göre

On dokuzuncu yüzyılın başlarında fizikçilerin en çok ilgilendikleri konulardan birisi: ısıtılmış cisimlerin nasıl ışıma yaptıklarıdır? Bu nedenle ısıtılmış cisimlerin ışıması üzerine bir çok deney yapılmış ve teorik olarak açıklanmaya ihtiyaç duyan bir çok deneysel veri ortaya çıkmıştır [7]. Termal ışımlar üzerine teorik çalışmalar Gustav Kirchhoff’un 1859 yılındaki çalışmaları ile başlar [3].

Kirchhoff “Işık ve ısıнын yayılımı ve soğurulması arasındaki ilişki” [4, 5] adlı makalesinde etrafları mükemmel yansıtıcılarla sarılmış iki yayıcı ve soğurucu sonsuz paralel plakanın ısı dengeli durumundaki ışıma alışverişlerini inceledi. Plakaların yayıcılık (Emitting) ve soğuruculuk (Absorbing) özellikleri için $E(\lambda, T)$ ve $A(\lambda, T)$ şeklinde iki ifade tanımladı.

- $E(\lambda, T)$: yayınlanma gücü herhangi bir T sıcaklığında herhangi bir λ dalga boyundaki ışımanın birim alan ve birim zaman başına şiddetini tanımlar ve birimi $W/m^2 \equiv \frac{J}{s \cdot m^2}$ ’dir.
- E/A yayınlanan ışının ne kadarlık kısmının soğurulduğunu tanımlar.

Kirchhoff ortaya attığı problemdeki termal denge durumundaki levhalardan birinden yayınlanan ışımanın enerjisinin diğeri tarafından soğurulanın enerjisine eşit olması gerektiğini gösterdi ve böylece her iki plaka içinde E/A oranının eşit olacağını gösterdi.

Daha sonra Kirchhoff “kara cisim” diye adlandırdığı bütün ışık spektrumunu soğurabilen bir nesne kavramını ortaya attı ve bu nesne için $A = 1$ olduğunu fark etti. Bu durumda $E(\lambda, T)$ bütün termal ışıma yapan nesneler için evrensel bir fonksiyon halini almaktadır.

Böyle bir karacisim şekilde gibi bir küresel kovukta açılan delikle temsil edilir. Bu deliğe gelen neredeyse bütün elektromanyetik ışınlar tekrar kovuktan çıkamazlar ve kovuk duvarları tarafından soğurulurlar. Böylece kovuğun bu çok küçük deliği bütün elektromanyetik spektrumu soğuran bir kara cisim halini alır.

- Termodinamiğin ikinci yasasına göre yalıtılmış bir sistemin entropisi ya artar ya da ideal bir denge durumunda sabit kalır.

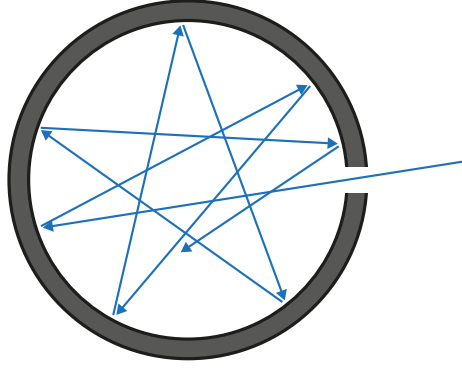


Figure 1: Kara cisim, küre şeklindeki kovukta açılan deliktir.

Kirchhoff bu yasaya dayanarak kovuğun içinde termal ışımanın homojen olması gerektiğini ve ısıma akısının yönden bağımsız olması gerektiğini ve aynı sıcaklığa sahip herhangi bir kovuk sistemi için bu durumun geçerli olduğunu gösterdi.

Kovuğun içindeki enerji yoğunluğunun ($w(\lambda, T)$) yayınlama gücü E ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir,

$$w(\lambda, T) = \frac{4E(\lambda, T)}{c}. \quad (1)$$

burada c ışığın boşluktaki hızıdır. Wilhelm Wien 1894 yılında enerji yoğunluğunun (deneysel verilerin bir sonucu olarak),

$$w(\lambda, T) = \lambda^{-5} f(\lambda T) \quad (2)$$

gibi bir fonksiyon cinsinden yazılabileceğini gösterdi. Bu fonksiyonun bir benzerini frekansa

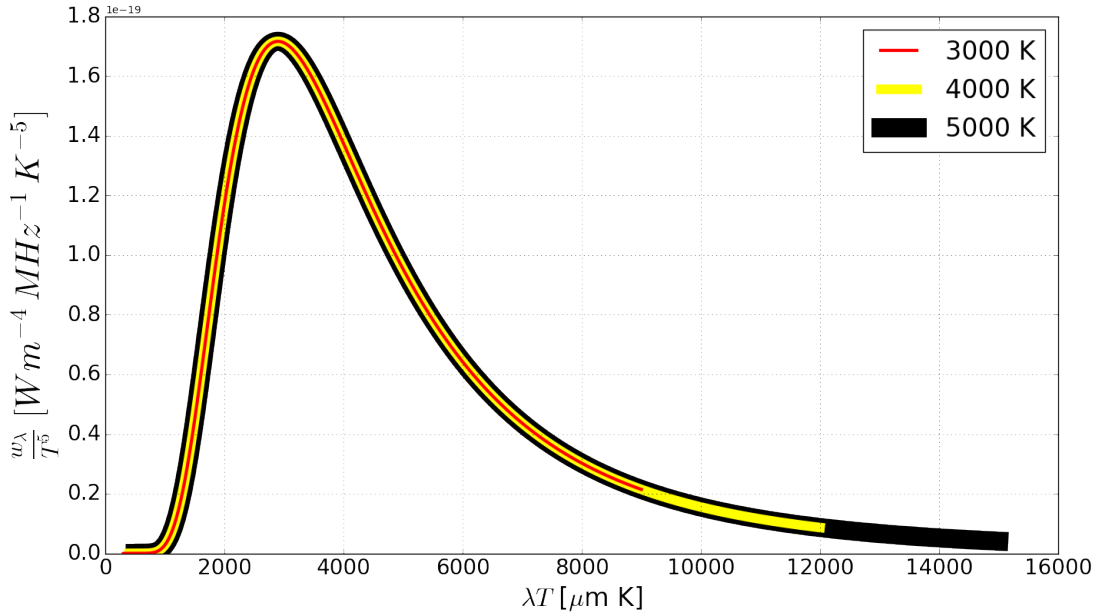


Figure 2: Denk. 2'deki fonksiyonun varlığını gösteren spektrum.

bağlı olarak aşağıdaki eşitliği kullanarak yazmak da mümkündür.

$$u(\nu, T) = w(\lambda, T) \left| \frac{d\lambda}{\nu} \right| = w\left(\frac{c}{\nu}, T\right) \frac{c}{\nu^2}. \quad (3)$$

Böylece Wien'in önerdiği tek parametrelili bilinmeyen fonksiyon,

$$u(\nu, T) = \nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (4)$$

olarak da önerilebilir. Wien bilinmeyen bu fonksiyon için Lummer ve Pringsheim tarafından önerilen deneylere dayanarak,

$$g(\nu/T) = Ce^{-\beta\nu/T} \quad (5)$$

formunu önermiştir ve ışıma spektrumun yüksek frekanslı (düşük dalga boylu) kısımlarını açıklamayı başarmıştır. Yine aynı fonksiyondan faydalanarak,

$$\lambda_{enb} = b/T \quad (6)$$

Wien kayma yasası olarak bilinen eşitliği bulmuştur. Burada $b = 2.8977729(17) \times 10^{-3}$ m

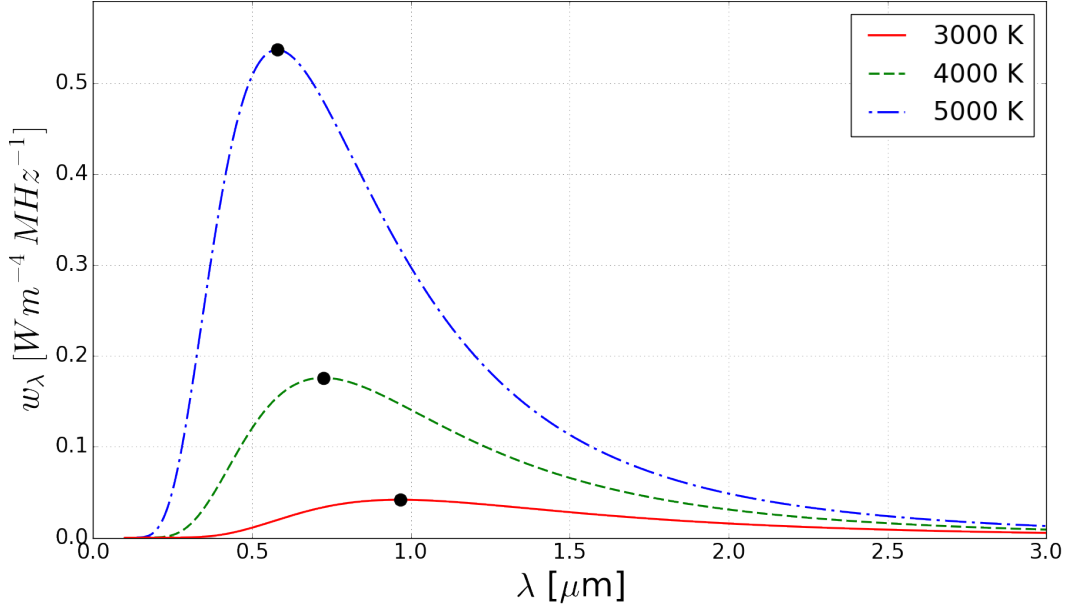


Figure 3: 3000, 4000 ve 5000 Kelvin sıcaklıklarındaki sistemlerin kara cisim spektrumları.

K değerindedir ve biraz önce bahsedilen deneyden elde edilen bir sabittir. Bütün kara cisim spektrumları için geçerlidir. Bu yasa ile belirli bir sıcaklıkta hangi dalga boyunda en büyük ışıma şiddetinin gerçekleşeceği belirlenebilir.

Örneğin Şekil 3'teki spektrumlar için Wien yasasından faydalanılarak Tablo 1'deki değerler bulunur.

T (°K)	$\lambda_{enb} (\mu m)$
3000	0.966
4000	0.724
5000	0.580

Table 1: Wien kayma yasası ile elde edilen dalga boyu değerleri. Şekil 3'de spektrum eğrileri üzerinde içi dolu noktalar olarak işaretlenmişlerdir.

Wien'in modeli yüksek frekanslarda deneyle uyumlu olmasına karşın düşük frekanslarda bu başarıyı yakalayamamıştır. Ek olarak Wien'in modeli klasik fizikğin temel bazı varsayımlarını göz önüne almamıştır. J. W. S. Rayleigh klasik fizikteki enerjinin eş bölüşümü teoremini ve elektromanyetik dalgaların kovuk içerisindeki normal modlarını hesaba katarak,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (7)$$

sonucuna ulaşmıştır. Burada $k_B = 1.38064852 \times 10^{-23}$ J/K, Boltzmann sabitidir ve enerjinin eş bölüşüm teoremine göre $k_B T$ serbestlik derecesi başına ortalama enerjidir. Elde edilen bu

dağılım Rayleigh-Jeans dağılımı olarak bilinir. Jeans'in katkısı Rayleigh'in hesaplarında yaptığı bir düzeltmeden kaynaklanmaktadır. Rayleigh-Jeans dağılımı Wien dağılımının aksine yüksek frekanslarda başarısızdır. Ek olarak bütün frekanslar üzerinden alınan integral sonucunda elde edilen kovuk içindeki toplam enerji yoğunluğu ıraksar ve sonsuz değer verir, böylece fiziksel açıdan doğru olmayan bir sonuç elde edilmiş olur.

1.1.2 Planck Dağılımı ve Kuantumlu Enerji Kavramı

Planck, Wien ve Rayleigh-Jeans dağılımlarını dikkate alarak deneysel eğriyi çok iyi açıklayan,

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (8)$$

dağılım formülünü elde etmiştir. Burada h daha sonra çok ünlenen fakat Planck tarafından sadece deneysel ve teorik eğriyi birbirine uydurabilmek için eklenmiş bir serbest parametredir. Serbest parametrenin(!) değerinin $h = 6.626070040 \times 10^{-34}$ J s olduğu bulunmuş ve adına Planck sabiti denmiştir. Planck'ın elde ettiği dağılım ifadesi $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$ için Rayleigh-Jeans dağılımına indirgenirken, $\frac{h\nu}{k_B T} \gg 1$ için Wien dağılımına indirgenmektedir.

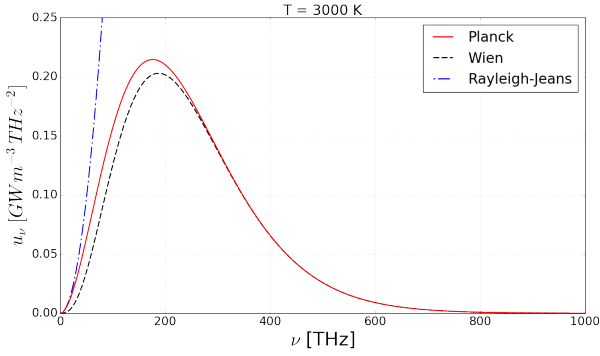


Figure 4: Üç farklı modelle elde edilen kara cisim ısıma spektrumlarının frekansa göre davranışı.

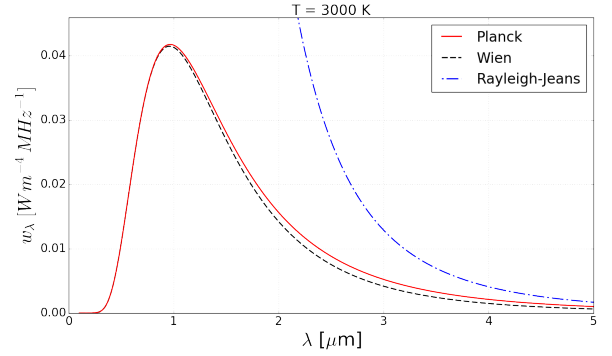


Figure 5: Üç farklı modelle elde edilen kara cisim ısıma spektrumlarının dalga boyuna göre davranışı.

Planck ilk önceleri bu ifade için teorik bir temel kuramasa da daha sonra, kovuğun duvarlarındaki ışıının yayılma ve soğurulma dinamik dengesini izah edebilmek için kovuğun duvarlarının basit salıncıklar (osilatör) gibi davrandığını ortaya atmıştır. Bu düşüncüyü ortaya atarken önemli bir varsayımda bulunmuştur: “herhangi bir ν frekanslı ışıının sadece $E = h\nu$ enerjili paketler (kuanta) halinde yayılabilir veya soğurabilir”.

Boltzmann dağılımı ile kara cisim kovuğu içindeki ortalama enerji,

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E P(E) dE}{\int_0^{\infty} P(E) dE} \quad (9)$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Burada $P(E)$ basit harmonik salıncıkların E enerjisine sahip olma olasılığını tanımlayan Boltzmann dağılımıdır ve

$$P(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{k_B T} \quad (10)$$

olarak tanımlanır. Planck E 'nin sürekli bir değişken değilde izinli ve kesik değerlere sahip olmasını gerektüğünü düşündüğünden, $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere, Denk. 9,

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} EP(E)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E)} \quad (11)$$

olarak yazılabilir. Böylece, herhangi bir radyasyon yayılımı ve soğurulması $E = nh\nu$ enerjili değerler alabildiğine göre,

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \frac{e^{-E/k_B T}}{k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-E/k_B T}}{k_B T}} \quad (12)$$

sonucuna ulaşılır. Gerekli matematiksel işlemler tamamlandığında [2] kovuk içi basit salınıcıların (harmonik osilatörlerin) ortalama enerjisi,

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (13)$$

olarak bulunur. Elde edilen bu sonuç birim hacimdeki harmonik osilatör sayısı ile çarpıldığında Denk. 8'deki Planck dağılımı elde edilmiş olur.

Şekil 4 ve 5'te sürekli çizgiyle çizilen dağılım Planck dağılımıdır ve deneysel verileri en iyi açıklayan dağılımdır. Ek olarak Planck enerji yoğunluğu dağılımının bütün frekanslar üzerinden integrali alındığında Rayleigh-Jeans gibi ıraksamaz ve sonlu bir değerde kalır. Integral ve sonucu aşağıdaki gibidir.

$$U(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} d\nu \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = aT^4 \quad (14)$$

Eğer integral yayının gücü yoğunluğu üzerinden alınmış olsaydı sonuç,

$$E(T) = \sigma T^4 \quad (15)$$

olurdu. Her iki ifade de karacisim ışıınımı için benzeri bir sonucu ifade etmektedir ve Stefan-Boltzman yasası olarak bilinmektedir: "bütün ışıma spektrumu üzerinden alınan integral sonucu elde edilen ışıma enerji yoğunluğu veya ışıma yayının gücü sıcaklığın dördüncü kuvvetiyle doğru orantılıdır". Her iki ifadedeki sabitlerin değerleri,

$$\begin{aligned} \sigma &= 5.670367(13) \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \\ a &= 4 \frac{\sigma}{c} \end{aligned} \quad (16)$$

olarak verilir ve σ Stefan-Boltzmann sabiti [1] olarak adlandırılır.

Planck neden bu şekilde kesikli bir davranışın gerçekleştiğine bir açıklama getiremedi ve bilinmeyen bir neden kovuk duvarlarındaki atomların paketler (kuantlar) halinde kesikli enerjiler yayınladıklarını öne sürdü. Bilinmeyen nedenin açıklaması fotoelektrik etkinin Einstein tarafından çalışılmasıyla ortaya çıktı.

Günlük hayatımızda ışığın kesikli veya parçacıklı doğasını görememiz doğaldır. Örneğin, beyaz ışık yayan ve 5 Watt'lık tasarruflu bir ampulden gözümüze 400 nm (mor) ve 700 nm (kırmızı) dalga boyu aralığında bir çok ışık gelmektedir. Ampulden gelen bütün ışığın en küçük dalga boyuna yani en fazla enerjiye sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bir tek ışık paketinin sahip olacağı enerji,

$$h\nu = hc/\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{400 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 5 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (17)$$

olur. Bu çok küçük bir enerji miktarıdır. 5 Watt'lık tasarruflu ampülün bir saniyede yayınlayacağı ışık paketi sayısı ise,

$$N = \frac{5 \text{ J/s}}{5 \times 10^{-19} \text{ J}} \approx 10^{19} \text{ paket/s} \quad (18)$$

olur. Bu miktarda paketin bir saniyede insan tarafından tek tek sayılması mümkün değildir!

1.2 Fotoelektrik Etki

1860'larda Maxwell ünlü Elektrik ve Manyetik alan denklemlerini yazdı, bu denklemler elektrik yükünün olmadığı bir yerde

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (20)$$

şeklini alırlar. Bu denklemlerden faydalanarak Elektrik ve Manyetik alanının zamanla davranışını Elektromanyetik (EM) dalga olarak aşağıdaki denklemlerle tanımladı.

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (21)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (22)$$

Işığın da bu denklemlere uygun davranış gösteren EM dalgaları olduğu biliniyordu. Denk. 21 dalga denklemlerinin çözümüyle belirlenen bu EM dalgaları boşlukta,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t), \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t), \quad (23)$$

ifadeleri ile tanımlanırlar. Burada $k = 2\pi/\lambda$ dalga sayısı ve $\omega = 2\pi\nu$ açısal frekanstır. EM dalgaları temsili olarak aşağıdaki şekildeki gibi ilerler ve enerji taşırlar. EM dalgalarının taşıdığı

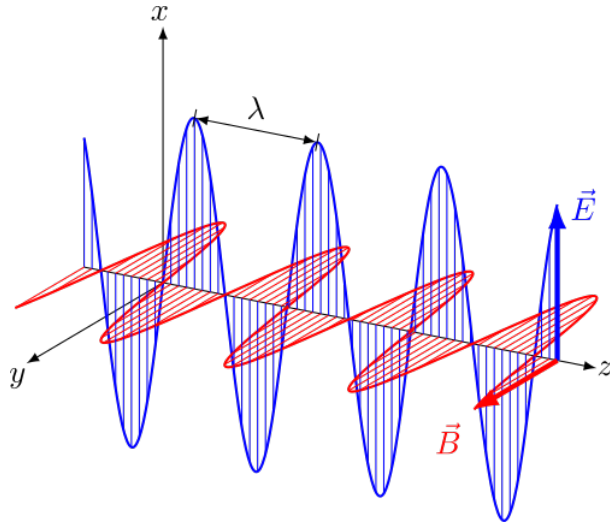


Figure 6: +z yönünde ilerleyen düzlem EM dalgalar.

enerjinin akışı matematiksel olarak ise Poynting vektörü ile tanımlanır. Yukarıdaki düzlem dalgalar için,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (24)$$

genel tanımından yola çıkarak,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \sin^2(kz - \omega t) \hat{z} \quad (25)$$

olarak bulunur. Poything vektörü birim alan başına aktarılan gücü (W/m^2) veya birim alan başına birim zamanda aktarılan enerjiyi ($J/s/m^2$) tanımlar. Eğer $x - y$ düzlemine paralel z eksenine dik A alanına sahip bir dedektör yüzeyine aktarılan güç hesaplamak istersek,

$$P = SA \quad (26)$$

ile hesaplayabiliriz. EM dalgasının elektrik ve manyetik alan bileşenlerinin genlikleri arasında $B_0 = E_0/c$ bağıntısı olduğunu da hatırlayarak,

$$P = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 A \sin^2(kz - \omega t) \quad (27)$$

ile dedektöre aktarılan güç hesaplayabiliriz. Böylece klasik olarak ışığın bir yüzeye aktarabileceği gücün (veya şiddetin $I = P/A$) elektrik veya manyetik alanın genliğinin karesiyle orantılı olduğu görülür.

Fakat, 1887'de Heinrich Hertz onu izleyen diğerleri tarafından gerçekleştirilen fotoelektrik etki deneyleri ışığın EM dalga davranışına aykırı sonuçlar ortaya koydu. Deneyde ba-

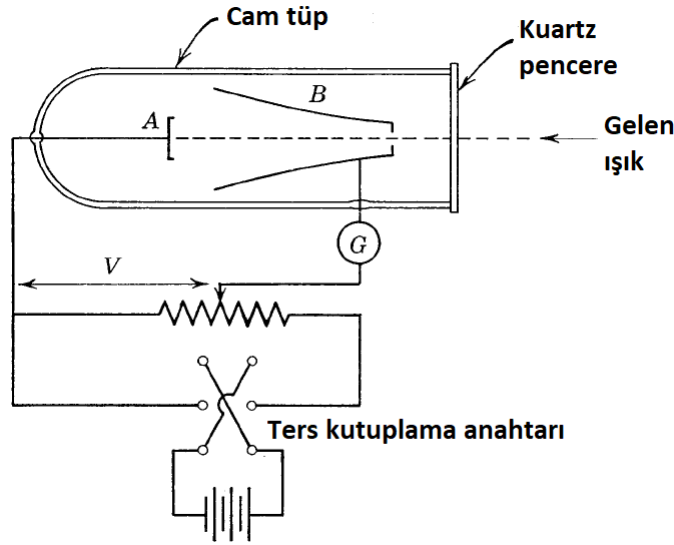


Figure 7: Hertz tarafından kullanılan deney düzenine şeması [2].

sitçe, A metal plakasına gelen tek renkli ışık eğer elektron koparabilirse ve bu koparılan elektron B plakasına ulaşabilirse G ampermetresinde bir akım okunmaktadır. Böyle bir deney düzenine göre klasik EM teoremine göre elektronların koparılabilirliği ve dolayısıyla fotoelektrik etkinin izah edileceği düşünülebilir. Buna göre klasik fiziğin fotoelektrik etki için tahminleri [6] aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- **Koparılan elektronların sahip olabileceği en büyük kintetik enerji ışığın şiddetiyle orantılı olmalıdır:** Işık şiddeti arttıkça E artmalı, E arttıkça $I = P/A$ artmalıdır. Böylece bir elektrona aktarılan enerji artmalıdır.
- **Fotoelektrik etki ışığın frekansından veya dalga boyundan bağımsızdır:** Işık şiddeti yeterliyse frekansı ne olursa olsun elektron koparılabilir.

- **Işık A plakasına vardıktan sonra saniye mertebesindeki sürelerde plakadan elektron yayımlanır:** $\Delta E/\Delta t = P_{ort}$ ifadesinden bir elektronu koparmak için ne kadar süre harcanması gerektiği hesaplanabilir. Burada ΔE elektron koparmak için gerekli enerji, P_{ort} gönderilen ışığın ortalama gücü ve Δt elektronun koparılma süresidir.

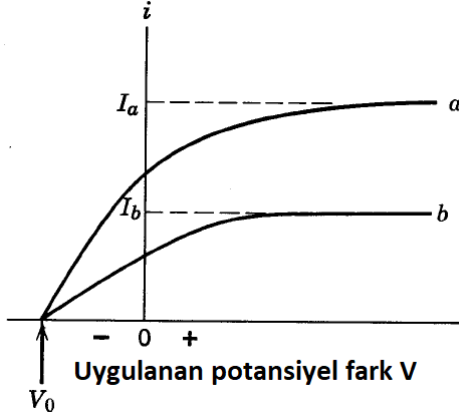


Figure 8: Fotoelektronların (fotoelektrik etkiyle koparılan elektron) sahip olabileceği en büyük kinetik enerjinin ölçümü [2].

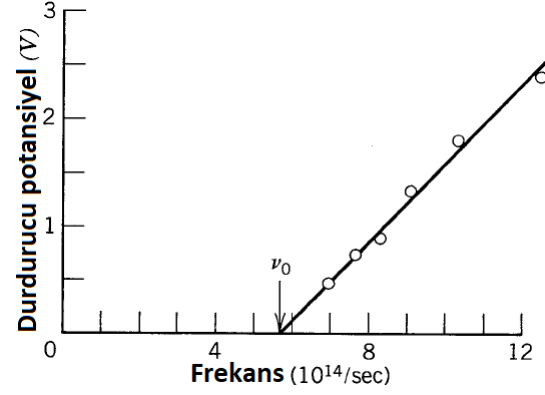


Figure 9: Işık gönderilen plakanın cinsine bağlı olarak belirli bir frekans değerinin altındaki değerlerde fotoelektron koparılamaz [2].

Klasik EM teorisinin önerilerine rağmen deneylerde gözlenen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

- **Belirli bir frekanstaki veya dalga boyundaki ışık ile koparılan bir elektronun en yüksek kinetik enerjisinin ışığın şiddetiyle bağlantısı yoktur:** Şekil 8'e göre i akım eksenı ışığın şiddeti arttıkça yayınlanan elektron sayısının arttığının bir ölçüsüdür. Fakat her iki farklı şiddetteki ışığın ortak noktası frekanslarının aynı olmasıdır ve bir elektrona aktarabildikleri enerji aynıdır.
- **Eğer ışığın frekansı belirli bir değerin altındaysa fotoelektrik etki gerçekleşmez:** Deney düzeneğindeki metal plakanın cinsine bağlı olarak ışığın frekansı yetersizse, şiddeti ne olursa olsun ışık elektron yayınlanmasını sağlayamaz (bkz. Şekil 9).
- **Işık metal plakaya ulaştıktan 10^{-9} s sonra, neredeyse hiç zaman geçmeden, fotoelektron salınımı gerçekleşir:** Bu durum klasik EM dalga teorisinin tahmin ettiği saniye mertebesiyle çelişmektedir.

Einstein 1905 yılında Planck'ında fikirlerinden faydalanarak ışığın dalga paketleri halinde,

$$E = h\nu \quad (28)$$

var olabileceklerini ortaya attı. Planck'da kesikli enerjili ışımaları önermişti fakat Planck'a göre siyah cismin duvarlarından salınan termal ışımlar $h\nu$ enerjisiyle salındıktan sonra tekrar bir su dalgası gibi yayılmaktaydılar. Einstein ise salınan bu ışık paketlerinin (light quanta) dalga gibi yayılmak yerine birer parçacık gibi davrandıklarını iddia etmiştir. Bu parçacığa daha sonraları foton adı verilmiştir.

Foton adlı bu parçacıklar $h\nu$ enerjisi taşımakla beraber boşlukta ışık hızında hareket ederler ve bu yüzden Einstein'ın bir başka teorisine göre (özel görelilik) hareket ederler. Bu teoriye uyduklarına göre kütle sahibi olamazlar aksi takdirde ışık hızına ulaştıklarında sonsuz enerjili olmaları gerekir. Bu teoreme göre fotonlar aynı zamanda $p = E/c$ momentumu taşırlar. Böylece kütleli parçacıklara benzer davranışlar göstermiş olurlar.

Einstein fotonun enerjisinin fotoelektrona aktarılmasını,

$$E = h\nu \quad (29)$$

1.3 Compton Etkisi

Kaynaklar

- [1] CODATA. “codata value: Stefan-boltzmann constant”. the nist reference on constants, units, and uncertainty. us national institute of standards and technology. june 2015. retrieved 2015-09-25. 2014 codata recommended values.
- [2] Robert Martin Eisberg. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles / Robert Eisberg, Robert Resnick, assisted by David O. Caldwell, J. Richard Christman. 2nd ed. New York : Wiley, c1985. 1 v. (various pagings) : ill. ; 27 cm. QC174.12 .E34 1985 ISBN: 047187373X.*
- [3] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics, John Wiley & Sons, 2003.*
- [4] Max Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1956.*
- [5] Gustav Robert Kirchhoff. ”uber den zusammenhang zwischen emission und absorption von licht und warme,” monatsberichte der akademie der wissenschaften zu berlin 1859 (december), pp. 783-787; reprinted in g. kirchhoff, gesammelte abhandlungen (leipzig, 1882), pp. 566-571, and in ostwald’s klassiker der exakten wissenschaften no. 100 (akademische verlagsgesellschaft, leipzig, 1889), pp. 6-10.
- [6] S. Krane. *Modern Physics.*
- [7] Eugene A. Sharkov. *Passive Microwave Remote Sensing of the Earth, Physical Foundations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*