

Akdeniz Üniversitesi
Fen Fakültesi - Fizik Bölümü
FİZ319 Kuantum Fiziği Ders Notları



Doç. Dr. Mesut Karakoç

October 21, 2018

İçindekiler

2	Dalga-Parçacık İkilemi ve Schrödinger Denklemi	3
2.1	Dalga-Parçacık İkilemi	3
2.2	Düzlem Dalgalar ve Dalga Paketleri	5

List of Figures

1	Işık bir dalgadır!?	3
2	Buraya benzeri bir başka şekil konacak!	4
3	$+x$ yönünde ilerleyen ve $y - z$ düzleminde sabit değerli olan düzlem dalganın temsili çizimi.	6
4	$\omega(k)/k$ sabitken ve k 'nın bir fonksiyonu iken Denk. 19 ile hesaplanan $ \psi(x, t) ^2$ 'nin değişimi.	8

List of Tables

If all this damned quantum jumps were really
to stay, I should be sorry I ever got involved
with quantum theory.
—Erwin Schrödinger [?]

2 Dalga-Parçacık İkilemi ve Schrödinger Denklemleri

Kuantum fiziğinin doğum sürecini anlattığımız bir önceki bölümün içeriği genellikle *Eski Kuantum Teorisi* olarak adlandırılır. Çünkü, gerçekleştirilen keşifleri açıklamak için kullanılan veya ortaya konan kuralların tam olarak birbirleriyle sağlam bir bağlantısının olduğunu söylemek pek mümkün değildir. Daha iyi bir açıklama için ortaya konan “Kuantum Mekanik” iki defa keşfedilmiştir denebilir, ilki 1925’te matris mekaniği formalizmiyle Werner Heisenberg tarafından ve ikincisi 1926’da dalga mekaniği ile Erwin Schrödinger tarafından. Her ikisinin eş değeri olduğu sonradan gösterilmiş olmasına rağmen Schrödinger’in yöntemi daha çok kullanılır hale gelmiştir. Çünkü dalga mekaniğinin matematiği fizikçiler arasında daha yaygındır [8].

2.1 Dalga-Parçacık İkilemi

Kuantum fiziğini başlatan deneyler ve deneyleri açıklamak için geliştirilen teori ve modeller; klasik fizikte parçacık olarak bilinen (elektron, proton, nötron vb.) fiziksel varlıkların dalga özellikleri gösterdiklerini, benzeri şekilde dalga özelliği gösteren elektromanyetik dalganın parçacık (foton) özelliği gösterdiğini doğrulamıştır.

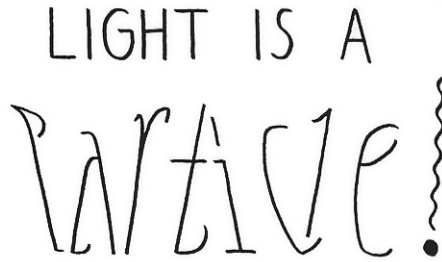


Figure 1: Işık bir dalgadır!?

Bu durumda kuantum fiziğinin sınırları içine giren herhangi bir fiziksel varlık, hem dalga hem de parçacık davranışı gösterebilmektedir. Dalga özelliği gösteriyorsa; kutuplanma, girişim ve kırınım gibi davranışlar göstermesi beklenirken, parçacık özelliği gösterdiğindeyse; klasik fizikteki gibi enerji ve momentum taşınması beklenmektedir. Belirli şartlar altında ışığın veya herhangi bir elektromanyetik dalganın enerji ve momentum taşıdıkları fotoelektrik etkisi, Compton saçılması ve karacısım ışıması deneylerinde gözlenmiştir.

Fakat her iki özelliğin de gözlenebiliyor olması öyle kolayca anlaşılamayabilir. Compton etkisi (veya saçılması) deneyiyle ışığın foton adı verilen bir parçacık gibi davrandığı doğrulanmıştır. İnsan gözüyle fotonlar tek tek seçilemese de, fotonları tek tek seçebilen ve fotoçoklayıcı [8] olarak adlandırılan cihazlar mevcuttur.

Dirac’ın kuantum mekaniği üzerine yazdığı bir kitabında ilginç bir düşünce deneyi vardır. Belirli bir kutuplanmaya sahip ışık fotoelektrik etkide olduğu gibi elektron elde etmek için kullanılırsa, yayınlanan elektronların açıl dağılımı fotonların kutuplanmasıyla ilişkilidir. Fotoelektrik etkiye göre bir foton bir elektron koparabildiğine göre, fotonlar enerji ve momentuma ek olarak kutuplanmaya da sahiptir. Buna göre başlangıçta I_0 şiddetine sahip ve kutuplanmış bir ışık demetini sadece belli bir kutuplanma eksenindeki ışığın geçmesine izin veren bir

kristalden geçirdiğimizi düşünelim. Eğer gelen ışığın tamamı kristalden geçecek kutuplanmaya sahipse geçen ışığın şiddeti de I_0 olacaktır. Eğer kutuplanma vektörü kristalin kutuplandırma eksenini ile θ açısı kadar farka sahipse, geçen ışık şiddeti $I_0 \cos^2 \theta$ 'a kadar olur. Bu durumu her bir foton için tek tek ele alalım. Eğer ışık demeti tamamen kristalin kutuplanma eksenini ile aynı yönde kutuplanmışsa demeti oluşturan bütün fotonların hepsi aynı yöndeki kutuplanmaya sahiptir. Fakat farklı bir polarizasyona (kutuplanmaya) sahip bir ışık demetinde ise demetin şiddeti $\cos^2 \theta$ ile belirlenen oran kadar azalacaktır. Bunun anlamı bu oran kadar fotonun kristalden geçebilmesidir. Fakat, *fotonlar bölünemezler* bu durumda bir foton kristalden ya geçer ya da geçemez. Bireysel olarak hangi fotonun geçtiğini bilmemiz mümkün değildir. Bütün söyleyebileceğimiz N tane foton geldiyse, bunun $N \cos^2 \theta$ kadarının geçtiğidir. Böyle bir fotonun bu kristalden geçebilme olasılığı $\cos^2 \theta$ olur.

Klasik optik fiziğine göre bir çok foton içeren bir ışık demeti girişim ve kırınım gibi dalga özellikleri gösterecektir. Işığın dalga özelliğinin tek bir foton için de geçerli olduğunu gösteren bazı deneyler gerçekleştirilmiştir. Bunlardan birisi de G. I. Taylor tarafından 1909 yılında yapılmıştır. Bu deneyde bir iğne ucu etrafında çok düşük şiddetteki (bir kerede bir fotonun geçtiği) ışığın bile kırınımına uğradığı gösterilmiştir. Bu bize ışığın dalga davranışının fotonların toplu (kollektif) bir davranışı sonucunda değil de, bireysel özelliklerinin bir sonucu olarak var olduğunu göstermiştir. Bu durumda yeni sorunlar ortaya çıkmaktadır.

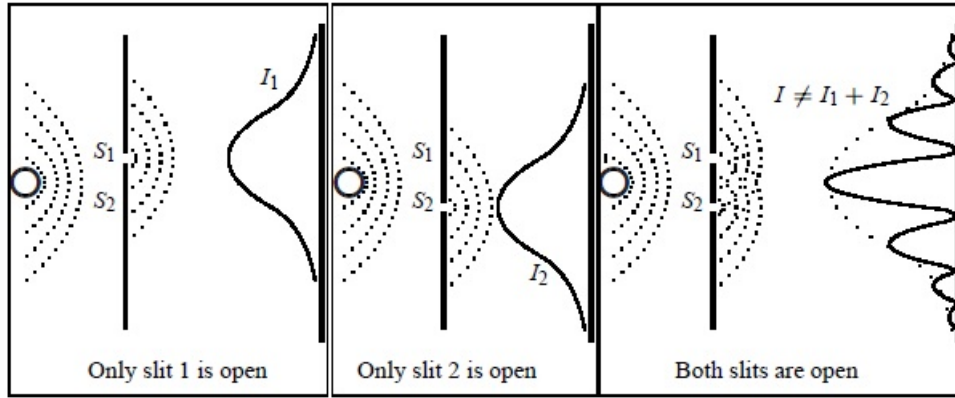


Figure 1.9 The double-slit experiment: S is a source of waves, I_1 and I_2 are the intensities recorded on the screen when only S_1 is open, and then when only S_2 is open, respectively. When both slits are open, the total intensity is no longer equal to the sum of I_1 and I_2 ; an oscillating term has to be added.

Figure 2: Buraya benzeri bir başka şekil konacak!

Taylor'un deneyinin bir benzeri olan çift yarık deneyini düşünelim. Diğer deneydeki gibi her defasında bir foton gelsin ve Şekil 2'deki gibi yarıklardan birinden geçtikten sonra arkadaki ekranda yakalansın. Her iki yarıktan açıkken, yeterince sayıda foton geçtikten sonra klasik olarak beklendiği üzere (ışık dalga olduğundan) Şekil 2'in en solundaki gibi bir girişim deseni gözlenir. Klasik olarak bu durum çok rahat açıklanabilir. Eğer yarık 1 ve yarık 2'den geçen elektromanyetik dalgalar $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ ve $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ ile temsil edilirlse, arkadaki ekrandaki bir \vec{r} konumunda t anında toplam dalga bu iki dalganın toplamı olacaktır. Bu klasik elektromanyetik teoremin bir parçası olan Maxwell denkleminin lineer olması dolayısıyla üst üste binme (süperpozisyon) ilkesine uymasının sonucudur. Arkadaki ekranda gözlenecek olan ışığın toplam şiddeti ise,

$$I \propto E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \quad (1)$$

denklemleri ile belirlenir. Oluşan girişim deseninin matematiksel kaynağı $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ 'dir. Eğer iki yarıktan sadece birisi açık olsaydı, sadece $|\vec{E}_1|^2$ veya $|\vec{E}_2|^2$ ile orantılı şiddetler gözlenebilirdi. Eğer bu şiddetleri polarizasyon deneyinde olduğu gibi olasıkla ilişkilendirirsek, sadece birinci

veya ikinci yarıktan geçme olasılıkları sırasıyla $P_1(r, t)$ ve $P_2(r, t)$ olurken, her iki delik açıkken geçme olasılıkları bu iki olasılığın doğrudan toplamı olmaz.

Fotonlar bölünemez olduklarına göre ve bu davranış tek bir foton için de geçerli olduğuna göre, bu durum ancak *bir fotonun kendi kendisiyle girişim* yapabileceğini varsaymakla çözülebilir. Böyle bir fotonun iki yarıktan açıkken sahip olacağı klasik elektromanyetik dalga alanı,

$$\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \quad (2)$$

şeklinde olacaktır ve Maxwell'in çizgisel klasik elektromanyetik dalga denklemlerine uygun olacaktır. Polarizasyon deneyinde olduğu gibi bu deneyde de tek bir fotonun hangi yarıktan geçtiğini bilmek mümkün değildir.

İlk keşfedildiklerinde elektronların parçacık yönüyle karşılaşmıştır. Klasik olarak hareketlerinin yörüngesi üzerlerine etki eden manyetik ve elektrik alanlar ile belirlenebilir, kütlelidirler, enerji ve momentum taşırlar. Daha sonraları elektron kırınımı ve elektron için çift yarık deneyleriyle elektronların da dalga davranışı gösterdikleri gösterilmiştir. Elektron için gerçekleştirilen çift yarık deneyinde de, yukarıda foton için gerçekleştirdiğimiz düşünce deneyine benzer şekilde, elektronların çift yarıktan geçtikten sonra arkadaki ekranda girişim desenleri oluşturdıkları gözlenmiştir. Fotonlarda girişim deseninin oluşma nedeni toplu bir davranışın değil bireysel davranışların sonucuydu, elektronların girişim deseni de aynı şekilde bireysel bir davranışın bir sonucudur. Foton için tanımladığımız gibi elektronun kendi kendisiyle girişimini ifade eden bir dalga fonksiyonu tanımlamak mümkündür. Böylece çift yarık deneyindeki bir elektronun dalga fonksiyonu,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t) \quad (3)$$

olarak yazılabilir. Bu dalga fonksiyonunun elektronun girişimini izah eden çizgisel bir denkleme uyması beklenir. Böylece elektronun yarıklardan birisi açık olduğundaki dalga fonksiyonlarının toplamı, üst üste binme ilkesi gereğince, her iki yarık açık olduğundaki dalga fonksiyonunu vermelidir. Böyle bir dalga fonksiyonunu kullanan ünlü bir çizgisel denklem **Schrödinger denklemi**'dir. Bu denklemde $\psi(\vec{r}, t)$ elektronun \vec{r} konumunda ve t anında ikinci ekranda bulunma olasılığıyla ilişkilidir.

2.2 Düzlem Dalgalar ve Dalga Paketleri

Bu bölümde sıradan düzlem dalgalardan yola çıkarak elektron gibi bir parçacığın parçacık özelliklerini de içerecek olan *dalga paketi* kavramını inceleyeceğiz. Bu dalga paketleri parçacıkları temsil etmekle beraber, sanki gerçekten parçacık gibi davranan dalga paketleri varmış gibi düşünmek doğru değildir [8].

Basit harmonik bir hareketi tanımlayan k dalga sayısına sahip ve $+x$ yönünde ilerleyen bir dalga,

$$\psi_k(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t) \quad (4)$$

olarak veya,

$$\psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Dalga sayısı ve dalga boyu arasında, açısal frekans ve periyot arasında ve açısal frekans ile frekans arasında sırasıyla aşağıdaki bağıntılar vardır;

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \text{ve} \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (6)$$

Klasik dalgalardan hatırlanacağı üzere ω ve k arasındaki bağıntı, bir dalganın dağınımlı bir ortamda mı, yoksa dağınımsız bir ortamda mı ilerlediğinin belirlemektir. Örneğin boşlukta ilerleyen ışık (veya elektromanyetik dalga) için ω ve k arasındaki bağıntı,

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda, \quad \text{olduğundan} \quad \omega = ck \quad (7)$$

olur. Çünkü dağınımsız ortamlarda ω ve k doğru orantılıdır. Dağınımlı bir ortam da ise açısal frekans dalga sayısının ($\omega(k)$) bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Örneğin, dağınımlı ortamda ışığın frekansı ortamın kırılma indeksine bağlı olarak $\nu = c/n\lambda$ şeklinde yazılabilir. n ise genellikle λ 'nın bir fonksiyonudur. Doğal olarak ω ve k arasındaki doğru orantının kaybolacağı açıktır. Şimdi yukarıdaki bilgilere göre dalga paketi kavramını tanımlaya çalışalım. $\psi_k(x, t)$ y



Figure 3: $+x$ yönünde ilerleyen ve $y - z$ düzleminde sabit değerli olan düzlem dalganın temsili çizimi.

ve z 'den bağımsız olduğu için Şekil 3'deki gibi bir davranışa sahip düzlem dalgadır. $\psi_k(x, t)$ ile bir kuantum davranışlı varlığın (elektron, foton v.b.) bütün sahip olabileceği k değerli dalga fonksiyonlarını tanımlamak mümkündür. Çift yarık deneyinde elektron veya foton için sadece iki dalga fonksiyonunun süperpozisyonu söz konusuysa bu durumda bütün olası durumları göz önüne alabilmek için genliği k 'ye bağlı $A(k)$ genlikli,

$$\psi_k(x, t) = A(k)e^{i(kx - \omega t)} \quad (8)$$

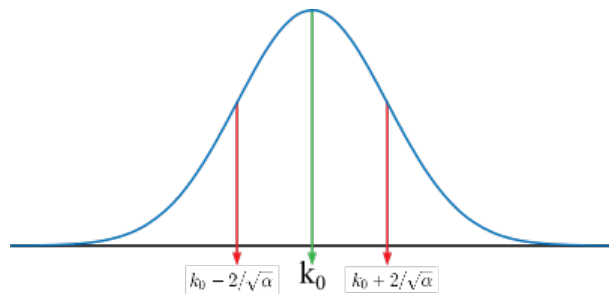
bir ilerleyen düzlem dalga yazmak mümkündür. Bu düzlem dalgaların süperpozisyonu ise,

$$\psi(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k)e^{i(kx - \omega t)} \quad (9)$$

ile elde edilir. Süperpozisyon sonucu elde edilen bu dalga fonksiyonu, *dalga paketi* olarak adlandırılır. Dalga paketi $t = 0$ 'da

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k)e^{i(kx)} \quad (10)$$

olur. Klasik parçacıklar dalgalardan farklı olarak belirli bir konuma sahip olduklarından ve bir dalga paketi ile parçacık özelliklerini tanımlamak istediğimizden, dalga paketinin erişimi de sonlu bir dağılım olmalıdır. Bu nedenle $A(k)$,



$$A(k) = e^{-\alpha(k - k_0)^2/2} \quad (11)$$

gibi, gausyen (gaussian) dağılım olarak adlandırılan, bir dağılım tercih edilebilir. Bu dağılımın merkezi k_0 civarındadır ve merkezden uzaklaşırken hızla değeri azalır. Daha sonra bir parçacığın momentumunun belirli bir aralıkta olma özelliğini tanımlayan bu fonksiyonun karesinin önemli olduğunu göreceğiz. Kare fonksiyonun tepe değerinden $\frac{1}{3}$ değerine $\alpha(k - k_0)^2 \approx 1$ civarında düşer. Buna göre bu dağılımın genişliği $\Delta k \equiv k - k_0 = 2/\sqrt{\alpha}$ olarak tanımlanabilir. $t = 0$ 'daki dalga paketini tanımlayan integral önce $q' = k - k_0$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$\psi(x, 0) = e^{ik_0 x} e^{x^2/2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dq' e^{-\alpha q'^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{ik_0 x} e^{x^2/2\alpha} \quad (12)$$

şeklinde çözümlenebilir. Sabitleri göz önüne almazsak elde ettiğimiz dalga paketi sanki yeni bir dağılım fonksiyonuyla düzlem dalganın çarpımı gibi durmaktadır. Bu yeni dağılım fonksiyonu parçacığı $x = 0$ civarında yerleştirmeye çalışmaktadır. $A(k)$ dağılım fonksiyonuna benzer şekilde bu dağılım fonksiyonun genişliği ise $\Delta x \equiv x - 0 = 2\sqrt{\alpha}$ 'dır. İlginç bir şekilde dalga paketinin şeklini belirleyen Δk ve Δx genişliklerinin çarpımı,

$$\Delta k \Delta x = 4 \quad (13)$$

değerine sahiptir ve α 'dan bağımsızdır. Bu ilişki Fourier türü integrallerin genel bir özelliğidir.

Bir dalga paketinin $t = 0$ anında sahip olabileceği formunu ve bu formun genişliğini sınırlayan bir bağıntı elde etmiş olduk. Bu dalga paketinin zamanla nasıl ilerleyeceğini ise (şimdilik) yaklaşık olarak çalışmak yeterlidir. Bu yaklaşıklıkta k_0 etrafında çok dar bir dağılıma sahip bir dalga paketini düşünelim, böyle bir dağılım için çok geniş bir x dağılımına sahip olacaktır. Bu özelliklere sahip dalga paketi aşağıdaki gibi tanımlanan grup hızı ile hareket eder ([grup hızını ve faz hızını karşılaştıran bir video bağlantısı](#)).

$$v_g = \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_0} \quad (14)$$

Denk. 9'e göre $A(k)$ ve $\omega(k)$ 'nin davranışı bilinirse dalga paketinin zamanla değişimi hakkında bilgi sahibi olunabilir. Dalga paketi k_0 etrafında dar bir dağılıma sahip olduğundan $A(k)$ çok keskin artan bir tepe şeklinde olacaktır. $\omega(k)$ 'nin ise k 'nin yavaş değişen bir fonksiyonu olduğunu kabul edersek ω için yaklaşık olarak,

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} \quad (15)$$

ifadesi yazılabilir. Böylece $(kx - \omega t)$ için de,

$$(kx - \omega(k)t) \approx (k_0 x - t\omega(k_0)) + (k - k_0) \left[x - t \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_0} \right] - \frac{t}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade Denk. 9'te yerine konursa ve $q = k - k_0$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\psi(x, t) \approx e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq A(q + k_0) e^{iq(x - v_g t)} e^{-iq^2 \beta t/2} \quad (16)$$

dalga paketi integrale ulaşılır, burada β sembolü

$$\beta = \left. \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$$

olarak integrali kısaltmak için tercih edilmiştir. İntegral çözülünce,

$$\psi(x, t) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha + 2i\beta t}} e^{i(k_0 x - w_0 t)} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\alpha + 4i\beta t}} \quad (17)$$

dalga paketi fonksiyonu elde edilir. Dalga fonksiyonu içinde sanal bir kısım da içerdiğinden pek açık değildir. Fizikçiler arasında daha çok anlamlı bulunan dalga fonksiyonunun mutlak değeridir. Karmaşık sayı yapısına sahip bir dalga fonksiyonunun mutlak değeri ise,

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t) \quad (18)$$

dalga fonksiyonunun kendi eşleniği ile çarpılması işlemiyle hesaplanır. Böylece ilgilenilen dalga paketinin mutlak değeri,

$$|\psi(x, t)|^2 \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} \quad (19)$$

olur. Eğer integrale ω 'nın ikinci dereceden türevinden gelen terim de diğer yüksek dereceli terimler gibi sıfır olsaydı. Dalga paketi hiç değişmeden v_g hızı ilerlerdi. Örneğin, boşlukta ilerleyen ışık için $\omega = kc$ ve $v_g = c$ olur ve ışık v_g hızlı bir dalga paketi olarak ilerler. β sembolü ile temsil edilen ikinci dereceden bu terim sıfırdan farklı olursa, bu durumda $e^{-iq^2\beta t/2}$ ifadesinden dolayı dalga paketinin şekli (genişliği ve yüksekliği) değişir.

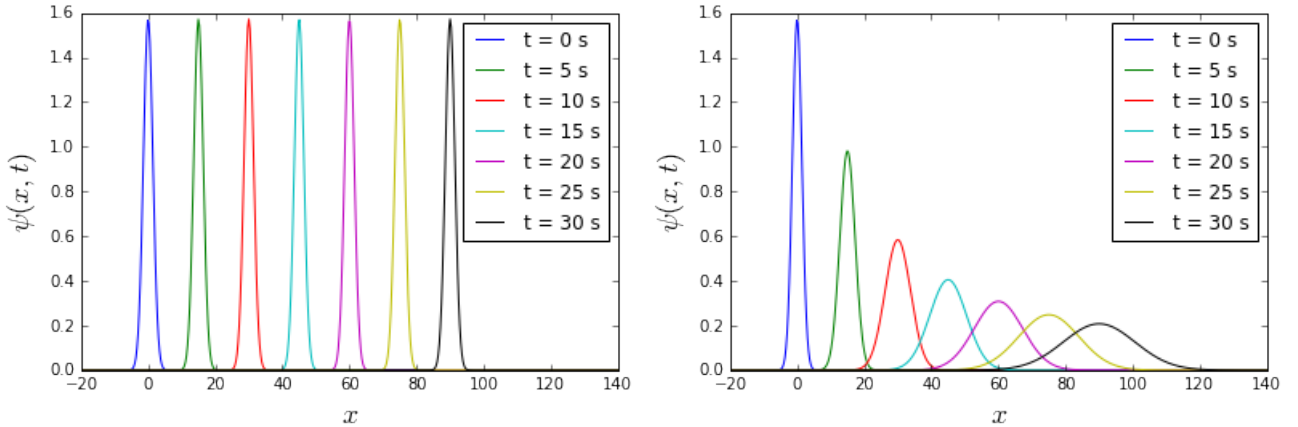


Figure 4: $\omega(k)/k$ sabitken ve k 'nın bir fonksiyonu iken Denk. 19 ile hesaplanan $|\psi(x, t)|^2$ 'nin değişimi.

2.3 Dalga Fonksiyonunun Olasılık Yorumu

Kaynaklar

- [1] AIP. Alpha particles and the atom, 2018. [Online; accessed 8-October-2018].
- [2] CODATA. “codata value: Stefan-boltzmann constant”. the nist reference on constants, units, and uncertainty. us national institute of standards and technology. june 2015. retrieved 2015-09-25. 2014 codata recommended values.
- [3] Wikipedia contributors. Davisson–germer experiment, 2018. [Online; accessed 6-October-2018].
- [4] Wikipedia contributors. Double-slit experiment, 2018. [Online; accessed 6-October-2018].
- [5] C. J. Davisson and L. H. Germer. “reflection of electrons by a crystal of nickel.” proceedings of the national academy of sciences of the united states of america 14.4 (1928): 317–322.
- [6] Robert Martin Eisberg. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles / Robert Eisberg, Robert Resnick, assisted by David O. Caldwell, J. Richard Christman. 2nd ed. New York : Wiley, c1985. 1 v. (various pagings) : ill. ; 27 cm. QC174.12 .E34 1985 ISBN: 047187373X.*
- [7] A. P. French and E. F. Taylor. *An Introduction to Quantum Physics, M.I.T. Introductory Physics Series, 1978.*
- [8] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics, John Wiley & Sons, 2003.*
- [9] hyperphysics. Davisson–germer experiment, 2018. [Online; accessed 6-October-2018].
- [10] Max Jammer. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1956.*
- [11] Gustav Robert Kirchhoff. ”uber den zusammenhang zwischen emission und absorption von licht und warme,” monatsberichte der akademie der wissenschaften zu berlin 1859 (december), pp. 783-787; reprinted in g. kirchhoff, gesammelte abhandlungen (leipzig, 1882), pp. 566-571, and in ostwald’s klassiker der exakten wissenschaften no. 100 (akademische verlagsgesellschaft, leipzig, 1889), pp. 6-10.
- [12] S. Krane. *Modern Physics.*
- [13] Eugene A. Sharkov. *Passive Microwave Remote Sensing of the Earth, Physical Foundations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*
- [14] J. J. Thomson. Conduction of electricity through gases (2d ed., cambridge university press, 1906), pp. 321-330 (theory of the secondary radiation).