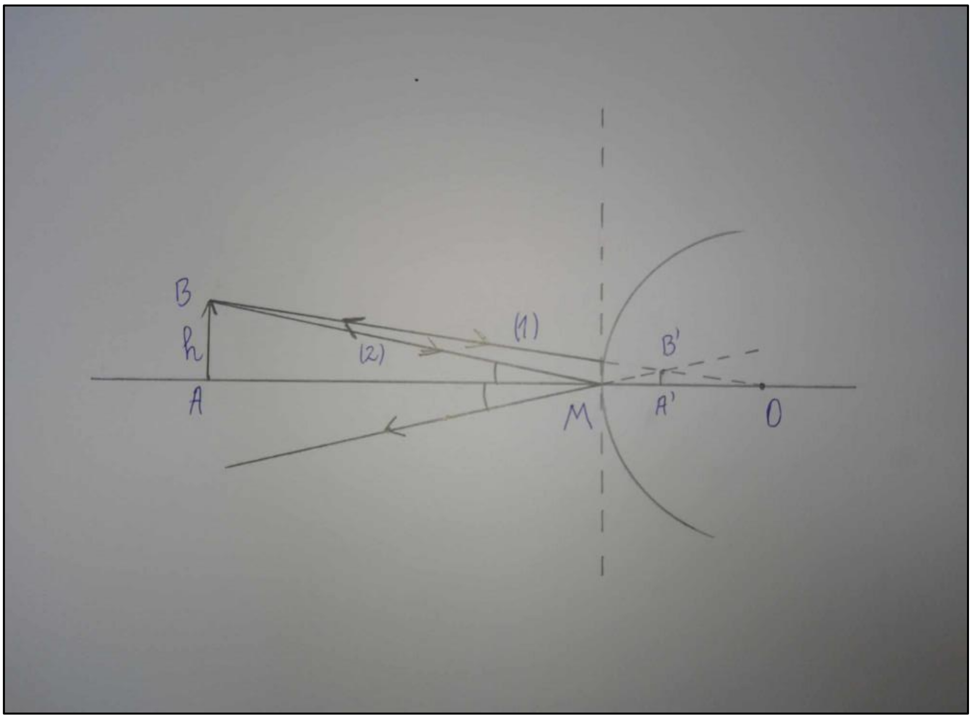
ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
V ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 24 юни 2023
Решения на темата за 7-8 клас

Задача 1. Изпъкнало огледало.
А) На чертежа е показано как се получава образът A’B’ на предмета AB.

Използвани са следните лъчи, които се излъчват от точка B:
1 – Лъч, чието продължение преминава през центъра на огледалото (т. O). Той попада върху огледалото перпендикулярно на допирателната в точката, в която се отразява, т.е. неговият ъгъл на падане е 0. Поради това, този лъч се отразява сам в себе си.
2 – Лъч, който се отразява в т. M (където се пресичат огледалото и главната оптична ос). След отражението си, той сключва с главната оптична ос същия ъгъл, който е сключвал преди това, тъй като тя представлява перпендикуляр към нормалата в точката му на падане. Измерваме тези ъгли с транспортир и така начертаваме отразения лъч.

Пресечната точка на продълженията на двата отразени лъча е образът на т. B – B‘. Спускаме перпендикуляр към оптичната ос и така получаваме целия образ на A’B’.



Образът може да бъде получен и като се използва лъч от точка B, който е успореден на главната оптична ос. Според изучавания от учениците в 7 клас материал, този лъч би трябвало да се отрази така, че неговото продължение да минава през фокуса на огледалото (точка F, която лежи на главната оптична ос и разполовява отсечката OM). По принцип това не е вярно, но за лъчи, които са достатъчно близки до главната оптична ос, е приблизително правилно. Ако ученикът е построил образа по този начин, без да допуска други грешки, би следвало да се присъди максималният брой точки за това подусловие.

Б) Образът е:
- прав, защото е ориентиран спрямо главната оптична ос по начина по който и предметът;
- умален, защото е по-малък от предмета;
- недействителен, защото се получава от пресичане на продължения на лъчи, а не от самите отразени лъчи.

В) На нашия чертеж: AM = a; MA' = b и OM = R.
Използвайки подобието на триъгълници ABM и A'B'M, можем да запишем следното равенство:

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}. (\mathbf{1})$$

Триъгълниците OAB и OA'B' също са подобни и поради това, можем да запишем следното равенство:

$$\frac{h'}{h} = \frac{R-b}{a+R}. (\mathbf{2})$$

Приравнявайки десните страни на уравнения (1) и (2), получаваме:

$$\frac{b}{a} = \frac{R-b}{a+R}.$$

След умножаване на кръст и аритметични преобразования, получаваме следната връзка между a, b и R:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R}.$$

Г) От получения израз намираме:

$$b = \frac{aR}{2a+R} \approx 1.67 \text{ m}.$$

Използвайки уравнение (1), се получава:

$$h' = \frac{b}{a}h = \frac{R}{2a+R}h \approx 0.33 \text{ m}.$$

Д) От уравнението, което изведохме в подусловие В), се вижда, че ако предметът се приближава към огледалото (разстоянието a намалява), то b би трябвало също да намалява.
Нека разгледаме някакъв много малък интервал от време Δt, за който предметът изминава разстояние много по-малко от началната стойност на a. След преминаването на този интервал, предметът ще е на разстояние от огледалото

$$a' = a - V\Delta t.$$

Разстоянието от образа до огледалото ще е

$$b' = b - u\Delta t,$$

където с u сме означили скоростта на образа, спрямо огледалото.

От изведената зависимост следва, че

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'} = \frac{1}{a - V\Delta t} - \frac{1}{b - u\Delta t} = -\frac{2}{R}.$$

Изваждайки почленно това равенство и

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R},$$

се получава

$$\frac{1}{a - V\Delta t} - \frac{1}{b - u\Delta t} - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0.$$

След алгебрични преобразования:

$$\frac{V}{a(a-V\Delta t)}-\frac{u}{b(b-u\Delta t)}=0.$$

Бихме могли да пренебрегнем членовете $V\Delta t$ и $u\Delta t$ в знаменателите на двете дроби, защото разглеждаме много кратък времеви интервал. Освен това, в задачата се пита за моментната относителна скорост на предмета и образа.

След извършване на това действие, получаваме:

$$u=\frac{b^2}{a^2}V=\frac{R^2}{(2a+R)^2}V\approx 0.06\ \mathrm{m/s}.$$

Понеже и предметът, и образът му се приближават към огледалото, то относителната им скорост е

$$V+u\approx\ 2.06\ \mathrm{m/s}.$$

<u>Критерии за оценяване:</u>

А) *За построяване на образа в мащаб и правилно обяснение на използваните лъчи –* ***2 т.***

Забележка: За липсващата аргументация се отнемат 2 т.

Б) *За правилно описание на предмета –* ***0.5 т.***

За правилна аргументация - ***0.5 т.***

В) *За правилно написани равенства, следващи от подобието на триъгълниците – всяко по* ***1 т.***

За правилни математически преобразования и краен резултат – ***1 т.***

Г) *За правилна пропорция между размерите на образа и предмета –* ***1 т.***

За правилен израз за h' и верен числен резултат – ***1 т.***

Д) *За правилно изразяване на новите разстояния от предмета до огледалото и от огледалото до образа и включването им във вече изведеното уравнение от В) подусловие –* ***1 т****.*

За правилни математически преобразования, от които следва изразът за скоростта на предмета спрямо огледалото, и краен израз и стойност на относителната скорост – ***1 т****.*

Задача 2. Електрическа мощност.

Първо ще изведем общо условие за еквивалентното съпротивление на резисторите 1, 2 и 3, при което общата им мощност не би се променила, ако ключът се затвори. Нека преди затварянето на ключа тези три резистора да имат еквивалентно съпротивление R', а след затварянето му – R''.

Оттук следва, че докато ключът е отворен, пълното съпротивление на веригата е

$$R_{\text{отв}}\ =\ R_0\ +\ R',$$

а след затварянето:

$$R_{\text{затв}}\ =\ R_0+R''.$$

Токовете, които протичат във веригата в двата случая са:

$$I_{\text{ОТВ}}=\frac{U}{R_0+R'},$$

$$I_{\text{ЗАТВ}}=\frac{U}{R_0+R''}.$$

Сумарните мощности, които се отделят във резисторите 1, 2 и 3, в двата случая са:

$$P_{\text{ОТВ}}=I_{\text{ОТВ}}^2R_{\text{ОТВ}}=\frac{U^2R'}{(R_0+R')^2},$$

$$P_{\text{ЗАТВ}}=I_{\text{ЗАТВ}}^2R_{\text{ЗАТВ}}=\frac{U^2R''}{(R_0+R'')^2}.$$

Съгласно условието на задачата, двете мощности са равни, следователно

$$\frac{U^2R'}{(R_0+R')^2} = \frac{U^2R''}{(R_0+R'')^2}.$$

Това уравнение има едно съвсем тривиално решение, а именно $R' = R''$.
Ако това е изпълнено, то следва, че еквивалентното съпротивление на резистори 1, 2 и 3 не се променя при затваряне на ключа. По принцип това е възможно решение само ако $R_1 = 0$ във верига А) и $R_1 = \infty$ за вериги Б) и В).
Нека да проверим дали задачата няма и друго възможно решение. От равенството на мощностите следва:

$$\frac{R'}{(R_0+R')^2} = \frac{R''}{(R_0+R'')^2}.$$

След извършване на изцяло математически преобразования (умножаване на кръст, степенуване на сумите и съкращаване на еднаквите членове от двете страни на равенството), получаваме следното уравнение:

$$R_0^2(R'-R'') = R'R''(R'-R'').$$

Понеже разглеждаме случая, в който R' и R'' не са равни, то имаме прави да съкратим тяхната разлика от двете страни на равенството. Получаваме

$$R_0^2 = R'R''.$$

Това е общото условие, на което трябва да отговарят еквивалентните съпротивления на резистори 1, 2 и 3, за да не се променя отделящата се в тях мощност, при превключване на ключа.
Нека сега да изразим R' и R'' за всяка една от веригите и всяко положение на ключа и да приложим полученото условие.

А) При отворен ключ имаме три последователно свързани резистора. Това означава, че в този случай

$$R' = R_1 + R_2 + R_3.$$

Когато ключът се затвори, през резистор 1 не тече ток, защото токът изцяло преминава през проводника, на който се намира ключът и който се оказва успоредно свързан на резистора.
Оттук следва, че за тази верига

$$R'' = R_2 + R_3.$$

Използвайки общото условие, което изведохме,

$$R_0^2 = (R_1+R_2+R_3)(R_2+R_3).$$

Оттук намираме

$$R_1 = \frac{R_0^2}{R_2+R_3} - (R_2+R_3).$$

Б) Когато ключът е затворен, имаме три успоредно свързани резистора. Следователно, изпълнено е следното равенство:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Когато ключът се отвори, през резистор 1 не преминава ток. Тогава вече имаме само два успоредни резистора – 2 и 3. За тяхното еквивалентно съпротивление можем да запишем

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Следователно

$$R'' = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}.$$

Отново, използвайки изведеното по-рано общо условие, получаваме

$$R' = \frac{R_0^2}{R''}.$$

Откъдето

$$\frac{1}{R'} = \frac{R''}{R_0^2},$$

или

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)R_0^2}.$$

Оттук за R_1 получаваме

$$R_1 = \frac{1}{\frac{R_2 R_3}{(R_2 + R_3)R_0^2} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}.$$

В) При затворен ключ, резисторите 1 и 2 са свързани последователно. Тяхното еквивалентно съпротивление е $R_1 + R_2$. Те са успоредно свързани на резистор 3, което означава, че

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Ако отворим ключа, ток ще преминава само през резистор 3. Тогава съвсем очевидно еквивалентното съпротивление е $R'' = R_3$.

И за трети път, използвайки условието, което изведохме, записваме

$$\frac{1}{R'} = \frac{R''}{R_0^2}.$$

Оттук

$$\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3}{R_0^2}.$$

За търсеното съпротивление получаваме

$$R_1 = \frac{1}{\frac{R_3}{R_0^2} - \frac{1}{R_3}} - R_2.$$

<u>Критерии за оценяване:</u>

За извеждане на общото условие за равенството на двете мощности – ***4 т.***

За правилно изразяване на R' и R'' – ***1.5 т.*** *на подусловие.*

За правилен краен буквен израз за R_1 – ***0.5 т.*** *на подусловие.*

<u>Забележка:</u> Показаното решение е съвсем примерно. Решението на ученика може съществено да се различава от авторското. В този случаи, схемата за оценяване следва да бъде адаптирана така, че максимално обективно да оцени решението по достойнство.

Задача 3. Налягания, плътности и сили.

А) След като тялото плава, то Архимедовата сила F_A, която го изтласква нагоре, се уравновесява с гравитационната сила $G = mg$, която го дърпа надолу.

Ако ρ е плътността на тялото, а V е целият му обем, то:

$$G = \rho V g.$$

Нека ρ_0 да е плътността на водата, а V_0 да е обемът на потопената част от тялото. Архимедовата сила може да се изрази по следния начин:

$$F_A = \rho_0 V_0 g.$$

Понеже тялото плава, то $F_A = G$. Оттук следва, че $\rho V g = \rho_0 V_0 g$. Вижда се, че земното ускорение g се съкращава. Това означава, че потопеният обем не зависи от гравитационното ускорение на повърхността на космическото тяло, на което се намира съдът с водата, в която

тялото плава. Този обем зависи само от отношението на плътностите на тялото и водата. Това означава, че той няма да промени, ако кофата се пренесе на Луната, т.е. дълбочината на потапяне ще остане същата.
Казано обобщено: Дълбочината на потапяне няма да се промени, защото Архимедовата сила и силата на тежестта се променят еднакъв брой пъти ☺.

Б) Обемът на полукълбото е

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Неговата маса е

$$m = \rho V = \frac{2}{3}\pi\rho R^3.$$

Силата на тежестта, която действа на тялото (т.е. силата, с която то действа на хоризонталната повърхност, на която е поставено) е

$$G = mg = \frac{2}{3}\pi\rho g R^3.$$

Площта на сечението на полукълбото е $S = \pi R^2$**.** Това е и площта, върху която се упражнява силата G. Оттук следва, че *средното* налягане, което тялото оказва на тази повърхност е

$$P = \frac{G}{S} = \frac{2}{3}\rho g R.$$

Виждаме, че това налягане зависи от радиуса на полукълбото на първа степен и този радиус е умножен по константи. Следователно, ако R се увеличи двойно, налягането P също ще се нарасне два пъти.

В) Поставяйки камъка върху везната, измерваме неговата маса M.
След това, върху нея можем да поставим съда с вода. Нека показанието на везната да е M_1. Това очевидно сумата от масите на съда и на водата. На следващата стъпка, потапяме изцяло във водата завързания с връв камък, но без той да докосва стените на или дъното на съда. При това, показанието на везната се увеличава до M_2. Допълнителната маса, която се отчита е всъщност масата на вода, която има обем, равен на обема на камъка V. Това е така, защото съгласно III принцип на Нютон, допълнителната сила, която се оказва върху дъното надолу е числено равна на Архимедовата сила, с която водата изтласква камъка нагоре. Тази сила, обаче, е равна на теглото (силата на тежестта) на изместената от камъка вода. Разбира се, тази изместена вода има обем точно равен на V и плътност, колкото е плътността на водата $\rho_{\text{В}}$. Затова следва

$$M_2 - M_1 = \rho_{\text{В}} V.$$

Намираме, че

$$V = \frac{M_2 - M_1}{\rho_{\text{В}}}.$$

След като вече сме измерили масата на камъка, можем да пресметнем и плътността му:

$$\rho_{\text{К}} = \frac{M}{V} = \frac{M}{M_2 - M_1}\rho_{\text{В}}.$$

<u>Критерии за оценяване:</u>

А) – *3 т.*

- *За правилно изразяване на Архимедовата сила и силата на тежестта –* ***1 т.***

- *За правилно изразяване на обема на потопената част –* ***1 т.***

- *За правилен извод, че дълбочината на потапяне няма да се промени –* ***1 т.***

Б) – *3 т.*

- *За правилно изразяване на обема на полукълбото –* ***0.5 т.***
- *За правилно изразяване на масата –* ***0.5 т.***
- *За правилно изразяване на силата на тежестта –* ***0.5 т.***
- *За правилно изразяване налягането, което се оказва –* ***1 т.***
- *За правилен извод, че налягането ще се увеличи два пъти –* ***0.5 т.***

В) ***– 4 т.***
- *За измерване на масата на камъка –* ***0.5 т.***
- *За правилна и достатъчно добре аргументирана идея за намиране на обема на камъка –* ***2.5 т.***
- *За правилен израз за плътността на камъка –* ***1 т.***

Задачите от тази тема са предложени от Никола Каравасилев.