ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
V ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по математика, 11 юни 2023 г.

Тема за 9-12 клас, втори ден

Задача 4. Дадени са просто число $p \geq 3$ и естествено число n, такива че $\frac{p}{3} < n < p$. Естественото число m е такова, че съществуват n различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, по-малки от p и такива, че числата a_1^m, a_2^m, $\ldots$, a_n^m дават един и същи остатък при деление на p. Да се намерят всички възможни стойности на m в зависимост от n и p.

Задача 5. Дадени са 100 еднакви на външен вид монети. Знаем, че сред тях 30 са истински и 70 са фалшиви. Освен това, знаем, че истинските монети тежат еднакво, а фалшивите са с две по две различни тегла, но всяка от тях е по-тежка от истинските. Разполагаме с везна с две блюда и без тежести, на която за едно претегляне сравняваме теглата на две групи, състоящи се от еднакъв брой монети (едната група поставяме на едното блюдо, а другата на другото). С колко най-малко претегляния можем да си гарантираме, че ще открием поне една истинска монета?

Задача 6. В остроъгълния триъгълник ABC точка D е произволна от страната BC. Нека DK и DL са вътрешните ъглополовящи при върха D в триъгълниците ABD и ACD, съответно, като K лежи на страната AB, а L лежи на страната AC. Описаната около триъгълника AKL окръжност пресича правите DK и DL за втори път в точките M и N съответно, а описаната около триъгълника DKL окръжност пресича правите AB и AC за втори път в точките P и Q съответно. Нека S е средата на отсечката PQ. Да се докаже, че правите AS, BN и CM се пресичат в една точка.

Време за работа – 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Журито Ви пожелава успех!