ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“
V ППМГ БУРГАС CHALLENGE

Състезание по физика, 24 юни 2023 г.

Решения на темата за 11-12 клас

Задача 1. Amuse-gueule.

1.1.1. С каква скорост v_2 е хвърлено от земята другото топче?	**3 т.**

Нека векторът на скоростта на топче 2 (за което търсим отговора) точно преди удара е $\mathbf{v}_2'$, а след удара векторите на скоростта са $\mathbf{v}_1''$ и $\mathbf{v}_2''$. Масите на топчетата m са еднакви, при което законът за запозване на импулса дава

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1'' + \mathbf{v}_2''.$$ **0.4**

Повдигаме на квадрат:

$$|\mathbf{v}_2'|^2 = |\mathbf{v}_1''|^2 + |\mathbf{v}_2''|^2 + 2\mathbf{v}_1'' \cdot \mathbf{v}_2''.$$

Ударът е еластичен, при което кинетичната енергия преди и след него е една и съща:

$$\frac{|\mathbf{v}_2'|^2}{2} = \frac{|\mathbf{v}_1''|^2}{2} + \frac{|\mathbf{v}_2''|^2}{2}.$$ **0.4**

Оттук $\mathbf{v}_1'' \cdot \mathbf{v}_2'' = 0$, тоест топчетата се разлитат под прав ъгъл едно спрямо друго. Сега да **0.5** преминем в “свободно падаща” отправна система, която се движи със земното ускорение g надолу спрямо земната повърхност. В тази отправна система топчетата не се ускоряват надолу, а се движат по прави линии с постоянни скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. След време τ разстоянието L между тях ще се определя от Питагоровата теорема:

$$L^2 = (|\mathbf{v}_1''|^2 + |\mathbf{v}_2''|^2)\tau^2.$$

Разбира се, това ще е валидно и във всяка друга отправна система. Така намираме $|\mathbf{v}_2'|^2 = \frac{L^2}{\tau^2}$. Ако нулевото ниво за потенциалната енергия е земната повърхност, то на мястото на удара **1.0** потенциалната енергия е точно $\frac{mv_1^2}{2}$, тъй като там топче 1 губи всичката си скорост. Сега остава да запишем ЗЗЕ за топче 2 при хвърлянето му и при удара:

$$\frac{v_2^2}{2} + 0 = \frac{L^2}{2\tau^2} + \frac{v_1^2}{2},$$

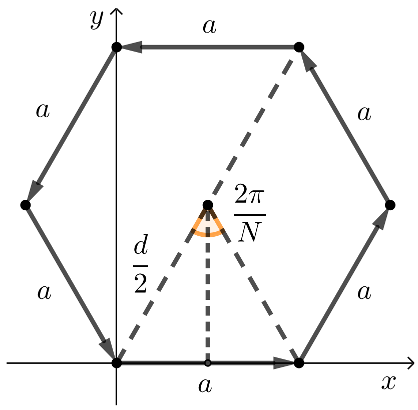
$$\boxed{v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{L^2}{\tau^2}} = 10\,\mathrm{m/s}.}$$ **0.7**

1.2.1. Изчислете N при $q = 0.1031$.	**2.5 т.**

Разглеждаме светлината, дифрактирала на ъгъл θ от нормалата на екрана. За два съседни процепа разликата в оптичните пътища на лъчите е $d\sin\theta$. Съответната фазова разлика е $\varphi = kd\sin\theta$, където $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ е вълновото число . За да намерим относителната амплитуда **0.4** при дадено θ, ще използваме векторни диагарами.

От всеки процеп идват вълни с еднаква амплитуда, която се променя хармонично с ъглова честота $\omega = ck$. Амплитудата върху точка от екрана поради даден процеп съответно може да се представи като проекцията по оста x на вектор, който се върти в равнината (xy) обратно на часовниковата стрелка с ъглова честота ω. Ако върху същата точка от друг процеп идват и вълни с фазова разлика φ, те се представят като вектор със същата амплитуда и честота на въртене, но отместен спрямо първия на ъгъл φ. Амплитудата върху тази точка тогава е сумата от проекциите по x на двата вектора, което е еквивалентно на проекцията по x на сбора на двата вектора. Методът ще работи по същия начин и за повече на брой процепи. Интензитетът зависи от амплитудата на вълните върху екрана на квадрат, тоест от големината на сбора по векторната диаграма на квадрат. **0.6**

На фигурата работим с шест процепа за илюстрация, но пресмятанията ни ще са верни за произволен четен брой процепи N. Минимумът от първи порядък се наблюдава при такова θ, че съответното му φ да е фазова разлика между отделните вектори по диаграмата, при която векторният сбор е нула. Това съответства на ситуация, при която векторите образуват правилен многоъгълник по диагарамата, защото φ е еднакво за всеки два съседни процепа. Когато премахнем едната половина процепи, оставяме само верижка от половината вектори. Векторният сбор тогава се явява главен диагонал по началния многоъгълник.



Ще намерим размера на главния диагонал d, означавайки големината на всеки вектор с a. От центъра на многоъгълник от N процепа, всеки вектор се вижда под ъгъл $\frac{2\pi}{N}$. Тогава следва, че

$$\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{a/2}{d/2}, \qquad d = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}.$$ **0.7**

Да сравним тази големина с амплитудата, съответстваща на I_0. Интензитетът е максимален, когато всички N начални вектори дават векторен сбор с максимална големина. Това се получава, когато те са колинеарни (например при $\theta = 0$, тоест в центъра на интерференчната картина). Тогава амплитудата е $d_0 = Na$. Сега знаем, че **0.3**

$$q = \frac{I}{I_0} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{N\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}\right)^2.$$

Търсеното от нас N е решение на уравнението

$$N\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{q}} = 3.114.$$

С няколко проби намираме, че най-доброто съответствие е $\boxed{N = 14.}$ **0.5**

1.2.2. Намерете стойността на q за дифракционна решетка с успоредни процепи. **0.5 т.**

Дифракционните решетки имат голямо N. Тогава $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \to \frac{\pi}{N}$. Затова $\boxed{q = \frac{1}{\pi^2} = 0.1013.}$ **0.5**

1.3.1. Изразете КПД η на двигателя в зависимост от γ и α. **3.3 т.**

Ако работата за един пълен цикъл е A, получената от газа топлина е Q_{in}, а отдадената от газа топлина е Q_{out}, КПД ще се задава с

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}.$$ **0.3**

По адиабатата газът не получава или отдава топлина, а по правата линия ще трябва в някои моменти да получава, а в други да отдава – иначе формулата за КПД дава противоречие. Сега да намерим как получаването и отдаването на топлина зависят от мястото по правата. По първия принцип на термодинамиката

$$\Delta Q = \Delta A + \Delta U,$$ **0.3**

където ΔU е малка промяна във вътрешната енергия. Нека газът има i степени на свобода. Тъй като $U = \frac{i}{2}pV$, $\Delta U = \frac{i}{2}p\Delta V + \frac{i}{2}V\Delta p$. Също така, $\Delta A = p\Delta V$. Линейната зависимост на налягането от обема може да представим като **0.2**

$$p = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}(V - V_1) \equiv p_1 + k(V - V_1), \tag{1}$$

откъдето $\Delta p = k\Delta V$. Моларните топлинни капацитети на газа при постоянен обем и при постоянно налягане са съответно $C_V = \frac{i}{2}R$ и $C_p = \frac{i+2}{2}R$, където R е газовата константа. Използвайки всички тези резултати, получаваме **0.2**

$$\Delta Q = \frac{i+2}{2}p\Delta V + \frac{i}{2}V\Delta p = \frac{1}{R}(C_p p\Delta V + C_V V k\Delta V).$$

Показателят на адиабатата на газа е $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, така че

$$\Delta Q = \Delta V \frac{C_V}{R}(\gamma p + Vk).$$ **0.5**

Вътре в скобата зависимостта от V е линейна, което означава, че някъде по отсечката 1-2 има точно една точка, която разделя етап на получаване на топлина от етап на отдаване на топлина. Нека тази точка съответства на обем V_0 и налягане p_0. При тези стойности е изпълнено $\Delta Q = 0$, тоест **0.3**

$$\gamma p_0 = -V_0 k. \tag{2}$$

Може да представим налягането чрез

$$p = p_0 + k(V - V_0),$$

при което изразът за ΔQ придобива по-прост вид:

$$\Delta Q = \Delta V \frac{C_V}{R}(\gamma p + Vk) = \Delta V \frac{C_V}{R}(\gamma p_0 + \gamma kV - \gamma kV_0 + Vk) = \Delta V \frac{C_V}{R}(-V_0 k + \gamma kV - \gamma kV_0 + Vk),$$

$$\Delta Q = (\gamma + 1)k\frac{C_V}{R}(V - V_0)\Delta V.$$

След като получихме този израз, може да намерим

$$Q_{\text{in}} = -(\gamma + 1)k\frac{C_V}{R}\frac{(V_1 - V_0)^2}{2},$$

$$Q_{\text{in}} = -(\gamma+1)k\frac{C_V}{R}\frac{(V_2-V_0)^2}{2}, \qquad \mathbf{0.6}$$

където сумирахме площи по графиката, подобно на **2.1.3** от 2022, 11-12 клас. Следва, че

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2-V_0}{V_1-V_0}\right)^2.$$

Остава да намерим израз за V_0. Приравняваме (1) и (2):

$$p_1 + k(V_0 - V_1) = -\frac{kV_0}{\gamma},$$

$$V_0 = \frac{\gamma}{\gamma+1}\left(-\frac{p_1}{k} + V_1\right) = \frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{-p_1}{p_2-p_1}(V_2-V_1) + V_1\right).$$

Занапред ползваме $V_1 = \alpha V_2$ и $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma \Rightarrow p_2 = p_1\alpha^\gamma$, което води до **0.2**

$$V_0 = \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{1-\alpha^{\gamma+1}}{1-\alpha^\gamma}V_2. \qquad \mathbf{0.4}$$

С това достигаме до израза

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{1-\alpha^{\gamma+1}}{1-\alpha^\gamma}}{\alpha-\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{1-\alpha^{\gamma+1}}{1-\alpha^\gamma}}\right)^2.} \qquad \mathbf{0.3}$$

1.3.2. Изчислете η за едноатомен газ при $\alpha \to 0$. Изчислете η за многоатомен газ при $\alpha = \frac{1}{2}$. Вибрационните степени на свобода на молекулите не са активни. **0.7 т.**

В първия случай изразът се свежда до

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma^2}.$$

За едноатомен газ $i = 3$ и $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$, така че **0.2**

$$\boxed{\eta = \frac{16}{25} = 0.64.} \qquad \mathbf{0.1}$$

Във втория случай имаме многоатомен газ с $i = 6$ и $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{4}{3}$. Пресмятането дава **0.2**

$$\boxed{\eta = 0.14.} \qquad \mathbf{0.2}$$

Задача 2. Тесла, волт, кулон.

2.1.1. Намерете разтягането Δx_0 на пружините, когато средната пръчка е в равновесно положение, ако масите на пръчките са $m_0 = 200\,\mathrm{g}$. **1 т.**

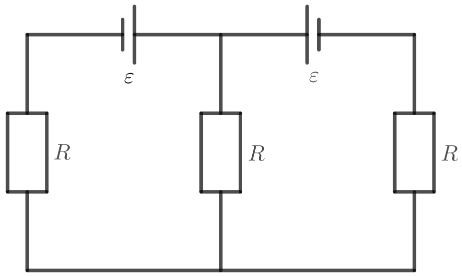
Работим с положителна посока надясно. Означаваме с x отместването на средната пръчка от позицията, в която пружините не са разтегнати. Тогава пружините оказват сила $-2kx$, а от **0.2**
нишките идва хоризонтална сила $\frac{mg}{L}(l_1 - (l_0 + x))$. Резултантната сила в равновесие е нула, при **0.3**
което

$$\left(2k + \frac{mg}{L}\right)\Delta x_0 = \frac{mg}{L}(l_1 - l_0),$$

$$\boxed{\Delta x_0 = \frac{l_1 - l_0}{1 + \frac{2kL}{mg}} = 1\,\mathrm{cm}.} \qquad \mathbf{0.5}$$

2.1.2. За какви стойности на масите m средната пръчка ще прави затихващи трептения около равновесното си положение? **2.5 т.**

Нека средната пръчка в някакъв момент има скорост v. По закона на Фарадей в контура между лявата и средната пръчка, чието сечение спрямо B нараства, се индуцира напрежение $\varepsilon = -bBv$. Аналогично, в контура между средната и дясната пръчка, чието сечение намалява, се индуцира **0.5**
обратното напрежение $-\varepsilon$. Това води до следната еквивалентна схема: **0.5**



Ако токът през средната пръчка е I, по симетрия токът през другите две пръчки е $I/2$. С втория закон на Кирхоф получаваме

$$\varepsilon - IR - \frac{I}{2}R = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{R}.$$ **0.3**

Средната пръчка изпитва сила от магнитното поле $F_{\text{mag}} = IbB = -\frac{2}{3}\frac{(bB)^2}{R}v$. Записваме съответното уравнение на движението за пръчката:

$$ma = -\frac{2}{3}\frac{(bB)^2}{R}v - \left(2k + \frac{mg}{L}\right)(x - \Delta x_0),$$ **0.5**

където $x' \equiv x - \Delta x_0$ е отклонението от равновесното положение. Тогава, съгласно указанието, за да имаме затихващи трептения, трябва

$$4m\left(2k + \frac{mg}{L}\right) > \frac{4}{9}\frac{(bB)^4}{R^2},$$

$$\left(\frac{g}{L}\right)m^2 + 2km - \frac{1}{9}\frac{(bB)^4}{R^2} > 0.$$

Решението на квадратното неравенство е

$$m \in \left(-\infty; \left(-k - \sqrt{k^2 + \frac{(bB)^4}{9R^2}\frac{g}{L}}\right)\frac{L}{g}\right) \cup \left(\left(-k + \sqrt{k^2 + \frac{(bB)^4}{9R^2}\frac{g}{L}}\right)\frac{L}{g}; +\infty\right),$$

като физичният отговор е

$$\boxed{m > \left(\sqrt{k^2 + \frac{b^4B^4g}{9R^2L}} - k\right)\frac{L}{g} \approx \frac{b^4B^4}{18R^2k} = 35\,\text{g}.}$$ **0.7**

2.2.1. Нарисувайте схемата в черната кутия. Обосновете се. **1.7 т.**

Когато опростяваме вериги, при последователно свързване за даден ток се събират напреженията върху отделните елементи. Аналогично, при успоредно свързване за дадено напрежение се събират токовете върху отделните елементи.

Това означава, че еквивалентната ВАХ на два последователно свързани елемента се получава като съберем графично отделните им ВАХ хоризонтално (по оста на напрежението). Аналогично, еквивалентната ВАХ на успоредно свързани елементи се получава от събиране на отделните ВАХ вертикално (по оста на тока). За да се убедим в това, може да съберем по двата начина ВАХ на два резистора (прави линии през координатното начало), получавайки правилните еквивалентни съпротивления.

При три елемента на веригата A, B и C, възможните свързвания са

$$A - B - C, \quad (1)$$
$$A \parallel B \parallel C, \quad (2)$$
$$(A - B) \parallel C, \quad (3)$$
$$(A \parallel B) - C. \quad (4)$$

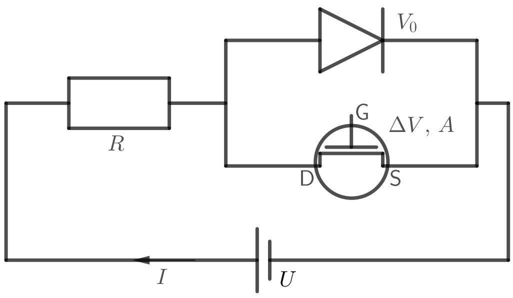
0.4

Първо ще отбележим, че токът тече в посока, при която диодът и транзисторът са отпушени, защото във ВАХ се наблюдават промени, които могат да съответстват само на тези два елемента.

При получаване на еквивалентната ВАХ последната стъпка не трябва да е събиране с последователно свързан диод. Това внася хоризонтално отместване с V_0, при което $I = 0$ за напрежения между 0 и V_0. Това не се наблюдава на нашата ВАХ, където токът веднага започва да расте с напрежението. Така може да изключим случай (1). **0.2**

Последната стъпка също не може да бъде събиране с успоредно свързан диод. Това ще доведе до присъствие на вертикалния клон в крайната ВАХ, което не се наблюдава. Това изключва случай (2). **0.2**

Последната стъпка не може да е и събиране с последователно свързан транзистор, защото хоризонталният клон в неговата ВАХ би се пренесъл директно в крайната ВАХ. Тя не може да бъде и събиране с успоредно свързан резистор, защото това не би позволило в крайната ВАХ да има хоризонтален участък. След тези наблюдения от случай (3) остава единствено вариантът $(D - R) \parallel T$, а от случай (4) остава вариантът $(D \parallel T) - R$. Проверяваме, че когато $V_0 > \Delta V$, и двата случая дават поведение, подобно на наблюдаваната ВАХ. **0.4**
Разликата е, че при случай (3) кривият участък съответства на квадратна функция, а при случай (4) – не (по-точно, тогава той представлява наслагване на квадратна функция и права по хоризонталата). Измерваме по графиката, че кривият участък не е квадратна функция, така че остава случай (4). Съответната схема изглежда така: **0.3**



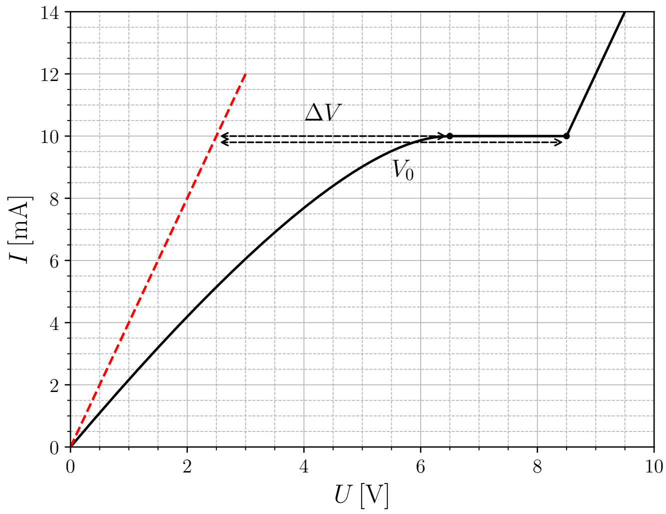
Ориентацията на диода и транзистора спрямо източника трябва да се означи изрично. **0.2**

2.2.2. Определете параметрите R, V_0, ΔV и A. **1 т.**

Най-десният клон на ВАХ носи информация само за резистора. Измерваме наклона му и определяме съпротивлението

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \boxed{250\,\Omega.} \qquad \textbf{0.3}$$

Сега изваждаме графично приноса на резистора към ВАХ. Начертаваме линия през координатното начало, съответстваща на ВАХ на разистора. Разликите спрямо нея по хоризонталата съответстват на ВАХ на комбинацията диод-транзистор.

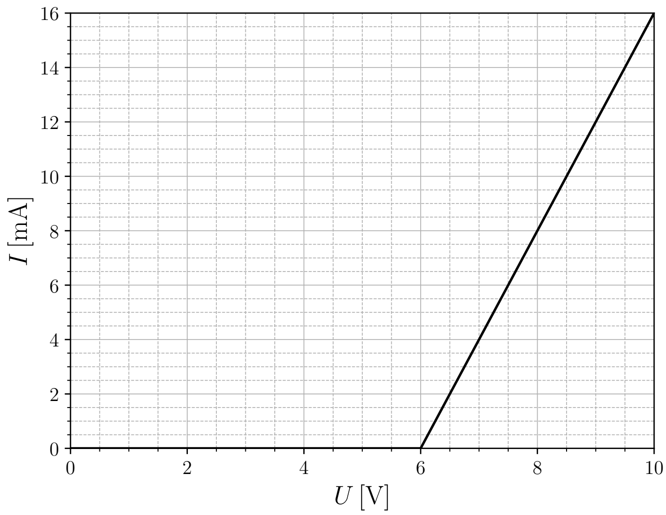


Намираме, че насищането на транзистора става при напрежение $\boxed{\Delta V = 4\,\text{V}}$. Диодът се отпушва **0.2**
при $\boxed{V_0 = 6\,\text{V}}$. Параметърът A намираме от тока на насищане $I_0 = 10\,\text{mA}$, както следва: **0.2**

$$A = \frac{2I_0}{\Delta V^2} = \boxed{1.25\,\text{mA/V}^2.} \qquad \textbf{0.3}$$

2.2.3. Постройте графика за волт-амперната характеристика на веригата при запушен MOSFET в диапазон между 0 и 10 V. **0.8 т.**

В този случай във веригата участват само диодът и резисторът. Събираме техните ВАХ и получаваме показания резултат:



- За означаване на величини и мерни единици по осите: **0.2**
- За оразмеряване на осите: **0.2**
- За правилен качествен характер на графиката: **0.2**
- За правилен количествен характер на графиката: **0.2**

> **2.2.4.** Намерете отношението η на мощностите, отделени във веригата при напрежение на източника $U = 7\,\mathrm{V}$, съответно за запушен и отпушен MOSFET. **0.5 т.**

Пълната мощност във веригата се задава с напрежението на източника и тока през него съгласно $P = UI$. При запушен транзистор $P = 28\,\mathrm{mW}$ (от ВАХ в предишната подточка), а при **0.3**
запушен транзистор $P = 70\,\mathrm{mW}$. Съпоставяме ги и получаваме $\boxed{\eta = 0.4}$. **0.2**

> **2.3.1.** Намерете силата на взаимодействие F_1 между заряда и пластината. **1.6 т.**

Първо ще потвърдим, че зарядът q_0 съвпада с центъра на тетраедър, една от стените на който се явява пластината. Четвъртият връх на тетраедъра се намира над центъра на пластината, тъй като е равноотдалечен от другите три. Вертикалното му отстояние от пластината се явява един от катетите на правоъгълен триъгълник с хипотенуза a (ръб) и катет $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$ (разстояние между връх и център на основа). Това отстояние е $\sqrt{\frac{2}{3}} a$.

Центърът на тетраедъра е равноотдалечен от четвъртия връх и другите три. Нека той се намира на разстояние h над центъра на пластината. Приравняваме разстоянията от центъра до върховете:

$$h^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a - h\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2\sqrt{6}} a.$$ **0.4**

Потокът на електричното поле на заряда е еднакъв за всяка от четирите стени на тетраедъра. Пълният поток през затворена повърхност, съгласно закона на Гаус, е q_0/ε_0, така че потокът през пластината е $\Phi = q_0/4\varepsilon_0$. **0.3**

Потокът през всяка малка площ ΔA_i от пластината може да се представи като произведение на площта и перпендикулярната на пластината компонента на интензитета от q_0. Общият поток тогава е

$$\Phi = \sum_i E_{i\perp} \Delta A_i.$$

Резултантната сила F_1, с която зарядът действа на пластината, е насочена перпендикулярно на самата пластина. За нея ще допринасят само перпендикулярните компоненти на силите върху малките парченца ΔA_i. Тя се изразява чрез

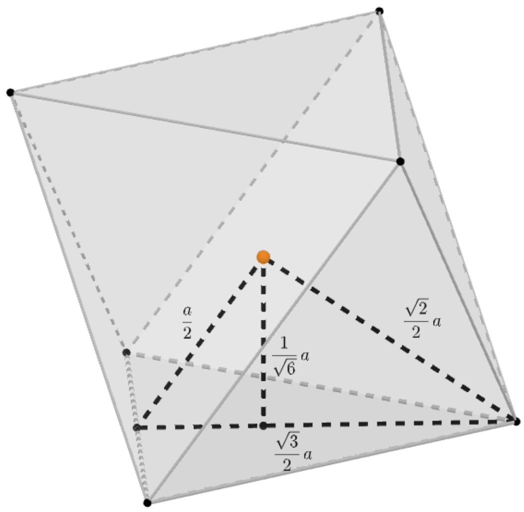
$$F_1 = \sum_i E_{i\perp} \Delta q_i = \frac{q}{A} \sum_i E_{i\perp} \Delta A_i,$$ **0.7**

където $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ е площта на пластината. Така правим връзката

$$F_1 = \frac{q}{A} \Phi = \frac{q q_0}{4\varepsilon_0 A} = \boxed{\frac{q q_0}{\sqrt{3} \varepsilon_0 a^2}.}$$ **0.2**

> **2.3.2.** Намерете силата на взаимодействие F_2 между заряда и пластината. **0.9 т.**

Сега ще потвърдим, че зарядът q_0 съвпада с центъра на октаедър, една от стените на който се явява пластината. Проектираме центъра на октаедъра върху пластината, както е показано. С размерите върху фигурата определяме, че проекцията се намира на $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ от всеки от върховете на пластината, тоест тя съвпада с центъра на пластината. Също намираме, че разстоянието от центъра на октаедъра до проекцията е $\frac{1}{\sqrt{6}}a$. Това доказва търсеното. **0.5**



От съображения за симетрия потокът от заряда през пластината тогава е $\Phi = q/8\varepsilon_0$. Повтаряйки разсъжденията от предишната подточка, получаваме **0.2**

$$F_2 = \frac{q}{A}\Phi = \frac{qq_0}{8\varepsilon_0 A} = \boxed{\frac{qq_0}{2\sqrt{3}\varepsilon_0 a^2}}. \qquad \mathbf{0.2}$$

Задача 3. Пиранометрия.

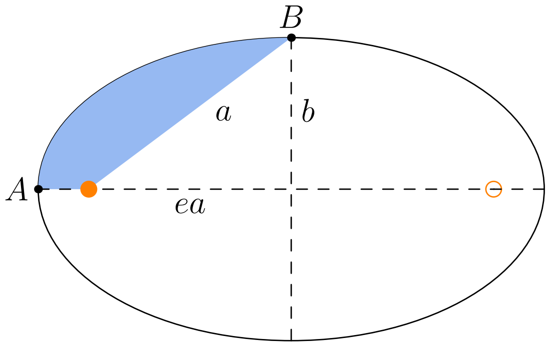
3.1. Определете голямата полуос a и ексцентрицитета e на орбитата на станцията. **3 т.**

Намираме светимостта на Слънцето със закона на Стефан-Болцман,

$$L_\odot = \sigma T_\odot^4 4\pi R_\odot^2 = 3.83 \times 10^{26}\,\mathrm{W}. \qquad \mathbf{0.3}$$

Когато станцията е на разстояние r от Слънцето, осветеността върху панела е $E = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$. Перихелий ще наричаме точката от орбитата, в която станцията е най-близо до Слънцето и съответно осветеността е най-голяма. От диаграмата на елипса в условието виждаме, че разстоянието в перихелий е $r_\mathrm{p} = a(1-e)$. **0.5**

Лема. Ако орбиталният период на станцията е τ, то времето за придвижване от перихелия до точка по орбитата, намираща се на разстояние a от Слънцето, е равно на $\left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}\right)\tau$.
Доказателство. За всяка точка от елипсата сборът от разстоянията до двата фокуса е равен на $2a$. За точка B, намираща се там, където малката ос пресича елипсата, въпросните две разстояния са равни, така че всяко от двете е точно a. Да вземем дъгата от елипсата между B и перихелия A. Свързвайки двата нейни края с централното тяло, ще получим сектор от елипсата с площ $\frac{\pi ab}{4} - \frac{eab}{2}$, където b е малката полуос.



$$\boxed{S = \frac{1}{4}(\pi ab) - \frac{1}{2}(ea)b}$$

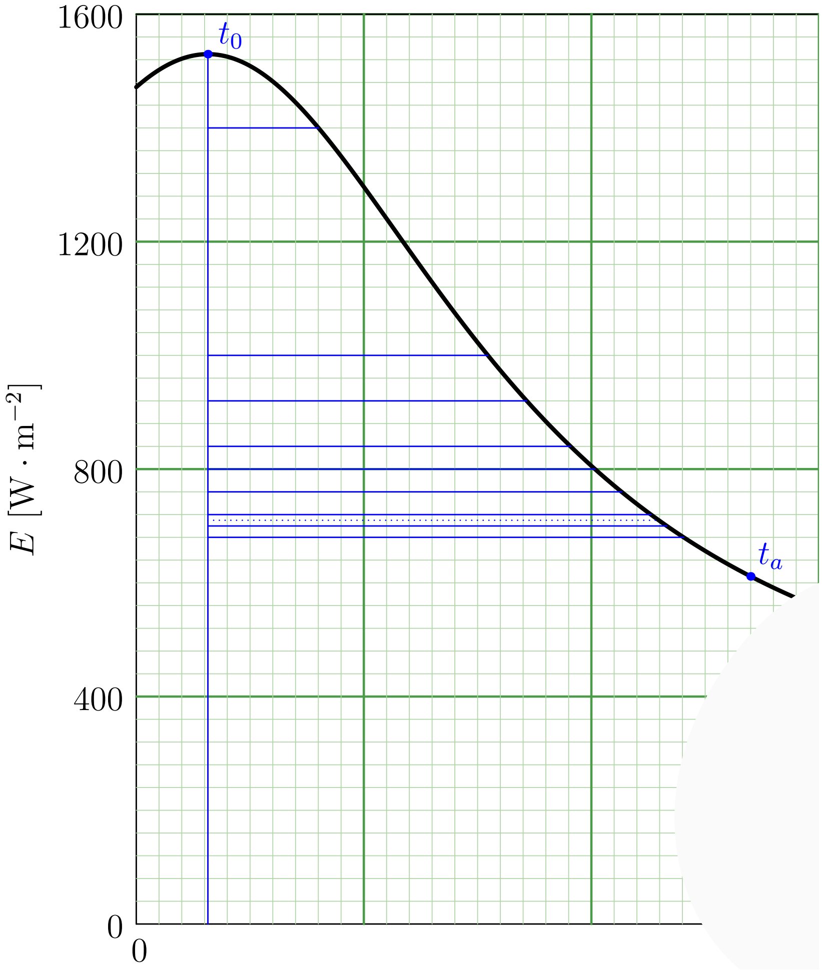
По втория закон на Кеплер отношението на тази площ към общата площ на елипсата πab е равно на τ_{AB}/τ, където τ_{AB} е времето за придвижване от A до B. Затова $\tau_{AB} = \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}\right)\tau$. ■ **0.7**

Означаваме по графиката с $t = t_0$ първия момент, в който панелът е в перихелий. Ще се опитаме да намерим мястото по графиката, съответстващо на първия момент след t_0, в който разстоянието от панела до Слънцето е a. Съгласно лемата, този момент трябва да е разделен от t_0 с времеви интервал $\tau_{AB} = \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi}\right)\tau$. Да построим хоризонтална отсечка например на ниво $1400\,\mathrm{W/m^2}$, започваща от правата $t = t_0$ и достигаща до графиката. Да приемем, че търсеният от нас момент е именно там, където отсечката опира в графиката. Отсечката обхваща 5 квадратчета, а τ съответства на 100 квадратчета, тоест по лемата ексцентрицитетът на орбитата е $e = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{100}\right) \approx 1.26 > 1$. Противоречието показва, че начертаната от нас отсечка не съответства на търсеното място от графиката.

Нека сега повторим разсъжденията си за подобна отсечка на ниво $1000\,\mathrm{W/m^2}$ – приемаме, че тя опира в графиката при търсения момент. Новата отсечка обхваща 12.5 квадратчета, което сочи към ексцентрицитет $e = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{12.5}{100}\right) \approx 0.79 < 1$. Но когато разстоянието станция-Слънце е a, осветеността върху станцията трябва да е $\frac{L_\odot}{4\pi a^2} = E_\mathrm{p}(1-e)^2 \approx 70\,\mathrm{W/m^2}$, където $E_\mathrm{p} = 1530\,\mathrm{W/m^2}$ е осветеността в перихелий. Получената очаквана стойност не е близка до $1000\,\mathrm{W/m^2}$, тоест отсечката отново не съответства на търсеното място от графиката. Правилното положение на отсечката явно ще е при още по-ниско ниво на осветеността. Последователно проверяваме:

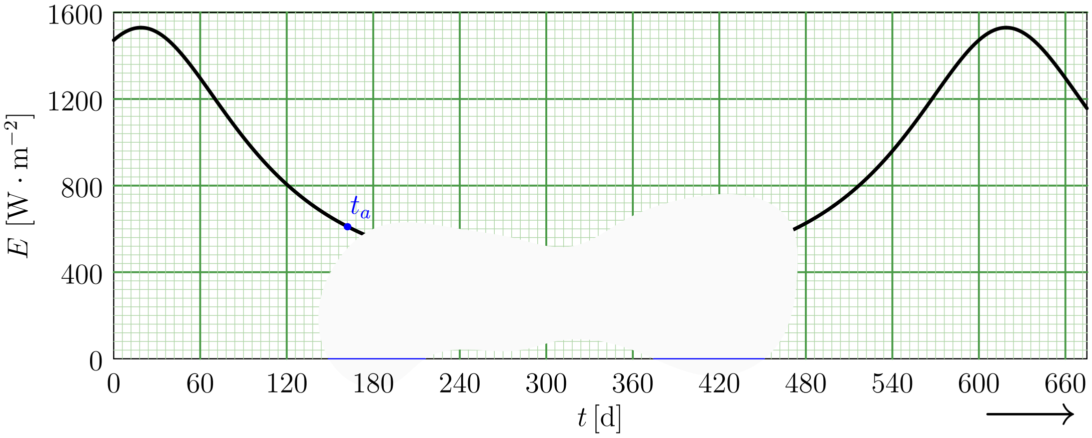
ниво осв. $[\mathrm{W/m^2}]$	квадр. $[\varnothing]$	e $[\varnothing]$	очаквана осв. $[\mathrm{W/m^2}]$
920	14.0	0.69	150
840	16.0	0.57	290
800	17.0	0.50	380
760	18.5	0.41	540
720	19.5	0.35	660
680	21.0	0.25	860
700	20.5	0.28	790
710	20.0	0.31	720

Стойностите в таблицата са закръглени и при ниво на осветеност $710\,\mathrm{W/m^2}$ ексцентрицитетът е по-точно 0.314. С увеличаването на нивото осветеност ексцентрицитетът расте и очакваната осветеност намалява. Двете осветености би трябвало да се срещат между $710\,\mathrm{W/m^2}$ и $720\,\mathrm{W/m^2}$. Стойността 0.314 съответно трябва да се коригира нагоре. С интерполация определяме, че корекцията трябва да е около 0.005. За ексцентрицитета тогава даваме отговор $\boxed{e = 0.32}$. Двете **1.1**
значещи цифри в отговора са съобразени с ограничението в точността на измерванията.
Голямата полуос сега определяме с равенството $E_\mathrm{p} = \frac{L_\odot}{4\pi a^2(1-e)^2}$. В резултат $\boxed{a = 2.08 \times 10^{11}\ \mathrm{m}.}$ **0.4**



3.2. Оразмерете оста на времето по графиката. **0.5 т.**

По третия закон на Кеплер $\tau = 1.63\,\mathrm{yr} = 597\,\mathrm{d}$. Това означава, че 10 квадратчета от графиката ще отговарят на време $59.7\,\mathrm{d} \approx 60\,\mathrm{d}$. Възстановената ос на времето в такъв случай ще изглежда така: **0.2** **0.3**

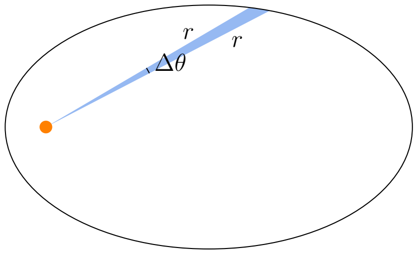


3.3. Намерете общата енергия на единица площ J (в [J/m^2]), която панелът събира за една пълна обиколка около Слънцето. **2.5 т.**

Да вземем времеви интервал от движението на панела, в който той се премества по орбитата си с много малък ъгъл $\Delta\theta$, гледано от Слънцето. Това преместване става за много малко време

Δt и можем да приемем, че в рамките на него разстоянието r до Слънцето остава едно и също. Тогава описаната от радиус-вектора площ за времето Δt е

$$\Delta S = \frac{1}{2}(r \cdot r \cdot \sin \Delta\theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}r^2\Delta\theta \text{ поради малкия ъгъл.}$$ **0.5**



Съгласно втория закон на Кеплер

$$\frac{\Delta S}{\pi ab} = \frac{\Delta t}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \frac{\tau r^2}{2\pi ab}\Delta\theta,$$ **0.5**

Осветеността в този интервал от време е постоянна и равна на $\frac{L_\odot}{4\pi r^2}$. Затова общата енергия на единица площ, която достига панела в интервала Δt, е

$$\Delta J = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\Delta t = \frac{\tau L_\odot}{8\pi^2 ab}\Delta\theta.$$ **0.5**

Стойността на ΔJ при зададено $\Delta\theta$ не зависи от моментното разстояние до Слънцето! Ако разделим цялата орбита на сектори с еднакви малки ъгли при Слънцето $\Delta\theta$, става ясно, че при обхождане на голям отрязък от орбитата, съответстващ на ъгъл θ, панелът получава обща енергия на единица площ $J_\theta = \frac{\tau L_\odot}{8\pi^2 ab}\theta$ (от лявата страна сумирахме всички ΔJ, а от дясната – всички $\Delta\theta$ в отрязъка). Така за една пълна обиколка по орбитата енергията на единица площ е

$$J = \frac{\tau L_\odot}{8\pi^2 ab}(2\pi) = \frac{\tau L_\odot}{4\pi ab}.$$ **0.4**

Както е видимо от диаграмата на елипсата в условието, $b^2 + (ea)^2 = a^2$, и преобразуваме до **0.3**

$$J = \frac{\tau L_\odot}{4\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = E_\mathrm{p}\tau(1-e)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \boxed{3.85 \times 10^{10}\ \mathrm{J/m^2}.}$$ **0.3**

3.4. На какъв ъгъл β спрямо Слънцето се завърта станцията между първия момент на максимална осветеност по графиката и момента t_a? **1 т.**

Най-лесният начин да намерим β е като използваме, че ъгълът на завъртане е пропорционален на събраната енергия, която има смисъл на площта под графиката $E(t)$. Намираме, че едно квадратче по графиката съответства на $2.06 \times 10^7\ \mathrm{J/m^2}$. В интервала от t_0 до t_a под графиката отброяваме около 630 квадратчета, което съответства на $1.30 \times 10^{10}\ \mathrm{J/m^2}$. Тогава **0.5**

$$\beta = \frac{1.30 \times 10^{10}\ \mathrm{J/m^2}}{3.85 \times 10^{10}\ \mathrm{J/m^2}} \cdot 360^\circ = \boxed{120^\circ.}$$ **0.5**

Алтернативно, от графиката може да намерим разстоянието r_a и да използваме уравнението на елипса в полярни координати, намирайки отклонението от перихелий β.

3.5. През какъв интервал от време T_r слънчевите лъчи ще падат перпендикулярно на равнината на този панел? **0.8 т.**

Ще намерим ъгловата скорост, с която панелът на Луната се върти спрямо линията, свързваща центровете на Слънцето и Луната. Поради малкия радиус на лунната орбита тя практически съвпада като ориентация с линията, свързваща центровете на Слънцето и Земята.

Търсената ъглова скорост се явява разлика на ъгловата скорост ω_L на околоосно въртене на Луната и ъгловата скорост ω_E на орбитално движение на Земята. Тъй като Луната се върти около оста си с период, равен на орбиталния, имаме $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$. Аналогично $\omega_E = \frac{2\pi}{T_E}$. Търсената ъглова скорост за панела е **0.3**

$$\omega = 2\pi\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_E}\right). \qquad \mathbf{0.2}$$

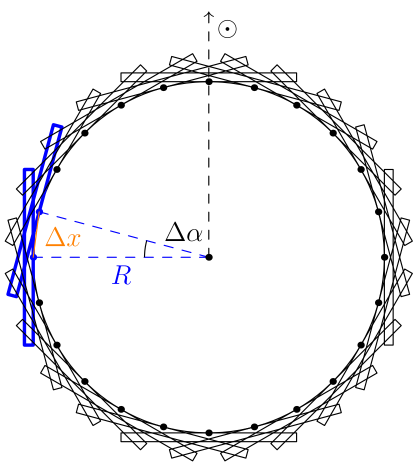
Едно пълно завъртане на панела спрямо линията, а съответно и връщане в положение, където лъчите падат перпендикулярно, става за време

$$T_\mathrm{r} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_L T_E}{T_E - T_L} = \boxed{29.53\,\mathrm{d.}} \qquad \mathbf{0.3}$$

3.6. Оценете общо каква енергия на единица площ J_0 (в $[\mathrm{J/m^2}]$) би попаднала върху повърхността на този панел за период $T_0 = 100\,\mathrm{yr}$. Ще дава ли този панел повече енергия за фиксиран дълъг период от време? **2.2 т.**

Ъгълът на падане на лъчите върху панела се задава с $\alpha = \omega t$, където t е времето след момент, в който лъчите идват перпендикулярно на равнината на панела. Осветеността върху панела ще се определя с $E_0 \cos\alpha$, като $E_0 = \frac{L_\odot}{4\pi r_E^2}$, където r_E е радиусът на земната орбита. Него намираме с

$$\frac{r_E^3}{T_E^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad r_E = 1.50\times 10^{11}\,\mathrm{m}. \qquad \mathbf{0.2}$$



До панела достига светлина само при $\alpha \in [-90°, 90°]$. Разглеждаме движението му по окръжността на лунната орбита (с радиус R) спрямо линията, свързваща Земята със Слънцето[1]. Много малко преместване на панела Δx става за много малко време $\Delta t = \frac{\Delta x T_\mathrm{r}}{2\pi R}$. Гледано от Земята, такова преместване се вижда под ъгъл $\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{R}$. Нека сега намерим J_r, пълното количество енергия на единица площ, което панелът ще получи за период T_r. Може да си представим,

[1]Реално трябва да отчитаме завъртане спрямо линията, свързваща Луната със Слънцето, но двете са еквивалентни, както обсъдихме.

че осветяването на панела става “на стъпки Δt”. Това означава, че той отначало се намира в някакво фиксирано положение, събира светлина в такова положение за време Δt неподвижен, след което внезапно се завърта на ъгъл $\Delta\alpha$. В това ново положение той отново се осветява неподвижен за време Δt, след което отново се премества внезапно и така до завършване на пълна обиколка.

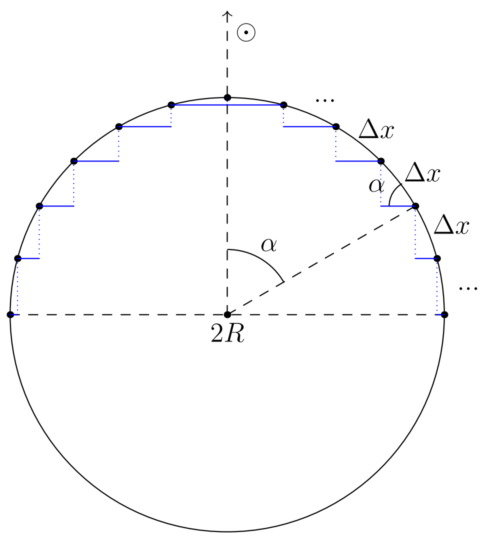
При всяка стъпка ъгълът на падане на лъчите има някаква характерна стойност α, при което получената енергия на единица площ за тази стъпка е $E_0 \cos\alpha \cdot \Delta t$. При всяка стъпка също така α се променя с $\Delta\alpha$. Така J_r ще се явява сумата на стойностите $E_0 \cos\alpha \cdot \Delta t$ за възможни стойности на α. Тогава

$$J_\mathrm{r} = \sum E_0 \cos\alpha \cdot \Delta t = \sum \frac{E_0 T}{2\pi R} \cdot \Delta x \cos\alpha = \frac{E_0 T}{2\pi R} \cdot \sum \Delta x \cos\alpha.$$

Но както е видно от чертежа, перпендикулярните на слънчевите лъчи компоненти на премест-ванията на панела се допълват до диаметъра на орбитата, така че[2] $\sum \Delta x \cos\alpha = 2R$. Затова $J_\mathrm{r} = \frac{E_0 T_\mathrm{r}}{\pi}$. Тъй като J_r е общата енергия на единица площ, получена за време T_r, ефективната осветеност върху панела е $E_\mathrm{eff} = E_0/\pi \approx 430\,\mathrm{W/m^2}$. Периодът T_r е много по-малък от **1.5**
$T_0 = 100\,\mathrm{yr}$, което ни позволява да оценим получената енергия на квадратен метър за време T_0 чрез $J_0 = E_\mathrm{eff} T_0$. Така

$$J_0 = \frac{E_0 T_0}{\pi} = \boxed{1.4 \times 10^{12}\,\mathrm{J/m^2}.}$$ **0.2**

Двете значещи цифри са съобразени с многото приближения, зададени в условието на задачата.



Ефективната осветеност върху панела по орбита E'_eff се намира с данните от **2.3.** Сравняваме я със стойността за панела на Луната,

$$E'_\mathrm{eff} = J/\tau \approx 750\,\mathrm{W/m^2} > E_\mathrm{eff}.$$

Панелът на Луната $\boxed{\text{няма да дава повече енергия.}}$ **0.3**

Задачите от тази тема са съставени от Стефан Иванов.
Изказвам благодарности на Александър Проданов за коментарите по темата.

[2] Тук показахме, че $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = 2$:).

3.1. Определете голямата полуос a и ексцентрицитета e на орбитата на станцията. **3 т.**

II начин (Бойко Борисов). Осветеността E, получена от панела, когато е на разстояние r от Слънцето, се задава с $E = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$. Диференцирайки по времето,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi r^3} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

В този израз $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ е лъчевата скорост v_r на панела спрямо Слънцето при движението му по орбита около него. Полагаме $\frac{r}{r_\mathrm{p}} \equiv k$, където r_p е перихелийното разстояние. Видимо

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{2E_\mathrm{p}}{k^3 r_\mathrm{p}} v_r,$$

където E_p е осветеността в перихелий. Пълната орбитална скорост се явява питагоров сбор на лъчева и тангенциална компонента, $v = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2}$. Тангенциалната компонента при разстояние до Слънцето r може да се изрази чрез перихелийната скорост v_p с помощта на закона за запазване на момента на импулса, $v_\tau r = v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}$. Същевременно перихелийната и афелийната скорости се определят от масата на Слънцето $M_\odot$, голямата полуос a и ексцентрицитета e като решение на системата

$$\begin{aligned} \frac{v_\mathrm{p}^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_\mathrm{p}} &= \frac{v_\mathrm{a}^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r_\mathrm{a}}, && \text{(ЗЗЕ)} \\ v_\mathrm{p} r_\mathrm{p} &= v_\mathrm{a} r_\mathrm{a}. && \text{(ЗЗМИ)} \end{aligned}$$

Това дава $v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\frac{1+e}{1-e}}$ и $v_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\frac{1-e}{1+e}}$. Но по третия закон на Кеплер $GM_\odot = 4\pi^2 \frac{a^3}{\tau^2}$, където τ е орбиталният период за панела. Съответно

$$v_\tau = \frac{v_\mathrm{p}}{k} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{r_\mathrm{p}}{(1-e)} \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)k^2}}.$$

От друга страна, за пълната орбитална скорост в същия момент е вярно

$$v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

защото по закона за запазване

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{r} = -\frac{GM_\odot}{2a},$$

където дясната страна приема вида си от

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\frac{1+e}{1-e}}\right)^2}{2} - \frac{GM_\odot}{a(1-e)} = -\frac{GM_\odot}{2a}.$$

И така,

$$v = \frac{2\pi}{\tau} a \sqrt{\frac{2a}{r} - 1} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{r_\mathrm{p}}{(1-e)} \sqrt{\frac{2}{(1-e)k} - 1}.$$

Сега чрез $v_r = \sqrt{v^2 - v_\tau^2}$ имаме

$$v_r = \frac{2\pi}{\tau} \frac{r_\mathrm{p}}{(1-e)} \sqrt{\frac{2}{(1-e)k} - 1 - \frac{1+e}{(1-e)k^2}} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{r_\mathrm{p}}{(1-e)^2 k} \sqrt{e^2 - (k(1-e)-1)^2}.$$

Това означава, че

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{E_\mathrm{p}}{\tau}\frac{4\pi}{(1-e)^2k^4}\sqrt{e^2-(k(1-e)-1)^2}.$$

Ако в този израз $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ се представи в относителни единици [части от максималната осветеност / части от орбиталния период] вместо например в $\mathrm{W\,m^{-2}\,s^{-1}}$, ще е вярно

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi}{(1-e)^2k^4}\sqrt{e^2-(k(1-e)-1)^2}.$$

Сега използваме, че $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ представлява наклонът на допирателната към графиката в задачата. Построяваме допирателна на място по графиката без значителни промени в наклона, например при осветеност $1200\,\mathrm{W/m^2}$. Там разстоянието до Слънцето е такова, че $\frac{r}{r_\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{1530}{1200}}$, тоест $k = 1.129$. В избраните мерни единици наклонът на допирателната е -3.648. В резултат

$$\frac{\sqrt{e^2-(1.129(1-e)-1)^2}}{(1-e)^2} = 0.472.$$

Искаме ексцентрицитетът да е такъв, че лявата страна (Л) да е равна на дясната. Решаваме това уравнение числено, обхождайки целия интервал възможни e:

e	Л	e	Л
0	$\notin$ ДС	0.31	0.457
0.1	$\notin$ ДС	0.32	0.476
0.2	0.273	0.33	0.496
0.3	0.438	•	•
0.4	0.657	•	•
0.5	0.983	•	•
0.6	1.521	•	•
0.7	2.550	•	•
0.8	5.038	•	•

Получаваме $\boxed{e = 0.32,}$ където двете значещи цифри са съобразени с ограничението в точността при построяването на допирателната. За намирането на голямата полуос използваме $E_\mathrm{p} = \frac{L_\odot}{4\pi a^2(1-e)^2}$, което при намереното e дава $\boxed{a = 2.08\times10^{11}\,\mathrm{m}.}$