**ППМГ „АКАД. НИКОЛА ОБРЕШКОВ“**
**V ППМГ БУРГАС CHALLENGE**

*Състезание по математика, 10-11 юни 2023 г.*

*Решения на задачите*

**Задача 5.1.** Да се реши ребусът

$$9\ .\ \text{PAMO} = \text{OMAP}\ ,$$

където буквите Р и О съответстват на ненулеви цифри и на различните букви съответстват различни цифри.

**Отговор.** Р = 1, А = 0, М = 8 и О = 9.

**Решение.** Неизвестният множител и произведението са четирицифрени числа, значи при умножение по 9 не трябва да има пренос в цифрите на хилядните. Оттук Р = 1. Така 9.О завършва на 1, откъдето О = 9. Вече имаме ребуса 9 . 1АМ9 = 9МА1.

Лявата страна е равна на 9.(9+10.М+100.А+1000) = 9081+90.М+900.А, а дясната е равна на 9001 + 100.М + 10.А. Оттук 890.А = 10.М + 80, съответно 89.А = М + 8. Понеже А и М са цифри, единствената възможност е А = 0 с М = 8. Окончателно ребусът има единствено решение: Р = 1, А = 0, М = 8 и О = 9.

**Оценяване.** (6 точки) 1 т. за намиране на Р, 1 т. за намиране на О, 2 т. за получаване на 89.А = М + 8 или подобно помощно уравнение, 1 т. за намиране на А и 1 т. за намиране на М. Верен отговор носи 2 точки, ако в решението няма други съществени приноси.

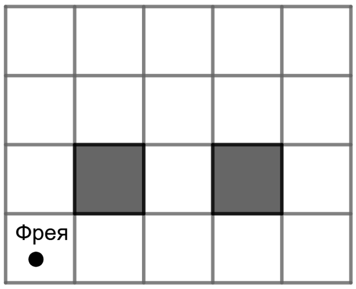
**Задача 5.2.** В триъгълник $ABC$ точките $A_1$ и $B_1$ са съответно върху страните $BC$ и $AC$, така че $A_1B = 2.A_1C$ и $2.B_1C = 3.B_1A$. Върху отсечката $A_1B_1$ е избрана точка $C_1$ по такъв начин, че $6.A_1C_1 = 5.C_1B_1$. Колко пъти лицето на $\triangle BC_1C$ е по-голямо от лицето на $\triangle AC_1C$? Запишете отговора като несъкратима дроб.

**Отговор.** $\frac{3}{2}$.

**Решение.** Тъй като $6.A_1C_1 = 5.C_1B_1$, ще означим лицето на $\triangle A_1C_1C$ с $5S$, а това на $\triangle B_1C_1C$ с $6S$. Предвид $\frac{S_{CB_1C_1}}{S_{B_1AC_1}} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{3}{2}$, получаваме $S_{B_1C_1A} = 4S$. Аналогично от $\frac{S_{CA_1C_1}}{S_{A_1BC_1}} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{1}{2}$ следва $S_{A_1C_1B} = 10S$. Така $S_{ACC_1} = S_{CB_1C_1} + S_{B_1AC_1} = 6S + 4S = 10S$ и $S_{BCC_1} = S_{CA_1C_1} + S_{A_1BC_1} = 5S + 10S = 15S$, следователно $\frac{S_{BC_1C}}{S_{AC_1C}} = \frac{15S}{10S} = \frac{3}{2}$.

**Оценяване**. (6 точки) 1 т. за верен отговор, по 1 т. за пресмятане на всяко от $\frac{S_{A_1C_1C}}{S_{B_1C_1C}}$, $\frac{S_{AC_1C}}{S_{B_1C_1C}}$, $\frac{S_{BCC_1}}{S_{A_1C_1C}}$, 2 т. за завършване.

**Задача 5.3.** На картинката е показана таблица $4 \times 5$. Котката Фрея се намира в долния ляв ъгъл и иска да стигне до горния десен ъгъл за не повече от 8 секунди. За една секунда тя може да се придвижи с едно квадратче наляво, надясно, нагоре или надолу. Освен това, тя не може да минава през което и да е от двете оцветени квадратчета. По колко начина Фрея може да постигне целта си?




**Отговор.** 9.

**Решение.** Придвижването изисква поне 3 вертикални и поне 5 хоризонтални стъпки и предвид че Фрея има 8 секунди, тя няма възможност да се движи наляво или надолу. Оттук с попълване на квадратчетата на таблицата едно по едно надясно и нагоре, получаваме търсения брой за всяко квадратче. Броят начини да достигане на определено квадратче е равен на сбора от броя начини да се достигне левия му съсед (ако има такъв) и броя начини да се достигне долния му съсед (ако има такъв). Попълването е показано на картинката.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 6 | 9 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 1 | | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за верен отговор, 1 т. за отхвърлянето на ходове наляво и надолу, 2 т. за ясна стратегия за пресмятане на броя начини в квадратчетата, 3 т. за реализиране на стратегията.

**Задача 5.4.** Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 2$ са изпълнени неравенствата:

$$\text{а) } \frac{1}{n\cdot(n-1)} > \frac{1}{n\cdot n}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot n} < 2.$$

$$\text{в) } \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot n} < \frac{17}{10}.$$

**Решение.**

**а)** Числото $n\cdot(n-1)$ е по-малко от $n\cdot n$, значи дробта $\frac{1}{n\cdot(n-1)}$ е по-голяма от $\frac{1}{n\cdot n}$, понеже има по-малък знаменател и имат равни числители.

За б) и в) ще е важен следният извод от а): $\frac{1}{n\cdot n} < \frac{1}{n\cdot(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

**б)** Прилагаме извода от а) за всички дроби без първата. С това разглежданата сума е по-малка от (след унищожавания на дроби, които се прибавят и изваждат)

$$1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

**в)** Прилагаме извода от а) за всички дроби без първите три. С това разглежданата сума е по-малка от (след унищожавания на дроби, които се прибавят и изваждат)

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}<\frac{61}{36}=\frac{610}{360}<\frac{612}{360}=\frac{17}{10}.$$

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за а); 4 т. за б), от които 1 т. за $\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, 1 т. за прилагане на помощното $\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ и 2 т. за довършване; 2 т. за в).

**Задача 6.1.**
**а)** Колко са естествените числа, по-малки или равни на 2023, които имат точно 18 естествени делителя и се делят на 36?
**б)** По случаен начин е избран един от естествените делители на най-малкото число със свойството от а). Каква е вероятността този делител да е точен квадрат на естествено число?

**Отговор. а)** 16. **б)** $\frac{2}{9}$.

**Решение.**
**а)** Припомняме, че броят на естествените делители на число с разлагане $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ е $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$. Всички възможни представяния на 18 като произведение на множители, по-големи от 1, са $18=9.2=6.3=3.3.2$, откъдето търсеното число е от един от следните видове: $p^{17}$, $p^8q$, $p^5q^2$, $p^2q^2r$, където $p$, $q$ и $r$ са различни прости числа. Понеже $2^2$ и $3^2$ делят даденото число, то $p$ и $q$ са 2 и 3 в някакъв ред.

Първият вид е невъзможен, понеже има само един прост делител. Вторият вид изисква $p=2$ поради $3^8>2023$, с което получаваме решението $2^8.3=768$, което не се дели на 36. На третия вид съответстват числата $3^5.2^2=972$ и $2^5.3^2=288$. В последния случай имаме $36r$ за $5\le r\le 53$ (понеже $36.59>2023>36.53$), т.е. 14 възможности. Общо има 16 числа с желаното свойство.
**б)** Най-малкото число от а) е $180=2^2.3^2.5$. Има точно 4 делителя, които са точни квадрати, а именно 1, $2^2$, $3^2$, $2^2.3^2$. Търсената вероятност е $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$.

**Оценяване.** (6 точки) 4 т. за а), по 1 т. за всеки от четирите случая; 2 т. за б).

**Задача 6.2.** Произведението на три последователни цели числа, средното от които се дели на 3, е три пъти по-голямо от точен квадрат на някое цяло число. Кои са всички възможности за числата?

**Отговор**. Единствената възможност е $-1$, 0 и 1.

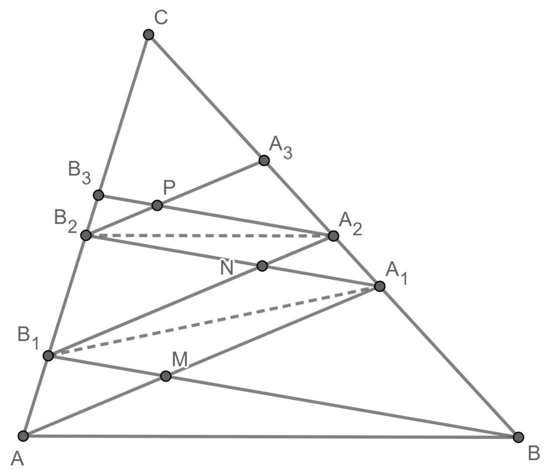
**Решение**. Нека числата са $3k-1$, $3k$ и $3k+1$ за някакво цяло $k$. Ако $k<0$, то трите числа са отрицателни и няма как произведението им няма как да е (неотрицателен) точен квадрат. При $k=0$ исканото е изпълнено, нека $k>0$. Произведението, разделено на 3, е равно на $k(3k-1)(3k+1)=k(9k^2-1)$. Двата множителя са положителни и са взаимнопрости – ако $d>0$ дели $k$ и $9k^2-1$ едновременно, то $d$ дели 1, значи $d=1$. Единственият начин произведението на две взаимнопрости числа да е точен квадрат е и двете да са точни квадрати. Така непременно $9k^2-1=m^2$ за някое $m>0$, което е невъзможно, понеже няма два положителни точни квадрата с разлика 1.

**Оценяване**. (6 точки) 1 т. за верен отговор, 1 т. за отхвърляне на отрицателните числа, 1 т. за разглеждане на $k(9k^2-1)$, 1 т. за доказване, че двата множителя са взаимнопрости, 2 т. за отхвърляне на възможността $9k^2-1$ да е точен квадрат

**Задача 6.3.** Върху страната $BC$ на $\triangle ABC$ е избрана точка $A_1$, такава че $BA_1 : A_1C = 3 : 5$, а върху страната $AC$ е избрана точка $B_1$, такава че $AB_1 : B_1C = 1 : 4$. Точките $A_2$ и $A_3$ върху страната $BC$ и точките $B_2$ и $B_3$ върху страната $AC$ са такива, че $AA_1 \parallel B_1A_2 \parallel B_2A_3$ и $BB_1 \parallel A_1B_2 \parallel A_2B_3$. Нека $AA_1 \cap BB_1 = M$, $B_1A_2 \cap A_1B_2 = N$ и $B_2A_3 \cap A_2B_3 = P$. Ако $S_{MA_1NB_1} + S_{NA_2PB_2} = 9$ см$^2$, да се намери лицето на $\triangle ABC$.

**Отговор.** 40 см$^2$.

**Решение.** От теоремата на Талес имаме $A_1A_2 : A_2C = AB_1 : B_1C = 1 : 4$ и $A_2A_3 : A_3C = B_1B_2 : B_2C = BA_1 : A_1C = 3 : 5$, следователно $BA_1 : A_1A_2 : A_2A_3 : A_3C = 6 : 2 : 3 : 5$. Аналогично получаваме $B_1B_2 : B_2C = BA_1 : A_1C = 3 : 5$ и $B_2B_3 : B_3C = A_1A_2 : A_2C = AB_1 : B_1C = 1 : 4$, следователно $AB_1 : B_1B_2 : B_2B_3 : B_3C = 2 : 3 : 1 : 4$. Сега теоремата на Менелай за $\triangle A_2B_3C$ и правата $B_2PA_3$ дава $B_3P : PA_2 = \frac{B_3B_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_3}{A_3A_2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1 : 3$. Тъй като $B_2NA_2P$ е успоредник ($A_1B_2 \parallel A_2B_3$ и $A_2B_1 \parallel A_3B_2$), то $S_{B_2NA_2P} = 2 \cdot S_{A_2PB_2} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{B_3B_2A_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_{B_2CA_2} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{40} \cdot S_{ABC}$. От теоремата на Менелай за $\triangle A_1B_2C$ и правата $B_1NA_2$ имаме $B_2N : NA_1 = \frac{B_2B_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_2}{A_2A_1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{1} = 3 : 2$. Тъй като $B_1MA_1N$ е успоредник ($AA_1 \parallel A_2B_2$ и $BB_1 \parallel A_1B_2$), то $S_{B_1MA_1N} = 2 \cdot S_{A_1NB_1} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot S_{B_2B_1A_1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot S_{A_1B_1C} = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{20} \cdot S_{ABC}$. Следователно 9 см$^2 = S_{MA_1NB_1} + S_{NA_2PB_2} = \frac{3}{20} \cdot S_{ABC} + \frac{3}{40} \cdot S_{ABC} = \frac{9}{40} \cdot S_{ABC}$, откъдето $S_{ABC} = 40$ см$^2$.




**Оценяване**. (7 точки) По 1 т. за теоремите на Талес при страните $AC$ и $BC$, по 1 т. за двете теореми на Менелай, по 1 т. за намирането на лицата на двата успоредника като част от лицето на $\triangle ABC$ и 1 т. за довършване и достигане до отговора.

**Задача 6.4.** Даден е бял квадрат със страна $2^n$, където $n$ е цяло неотрицателно число. На всеки ход можем или да разделим бял квадрат на четири бели части чрез двете прави през средите, успоредни на страните му (стига обаче белият квадрат да е с дължина на страната поне 2), или да оцветим бял квадрат в един от цветовете синьо, зелено, червено и жълто. Накрая не може да има бяла част. Нека $A_n$ е броят на всички различни таблици, които можем да получим (таблиците, които могат да се получат една от друга чрез завъртане или обръщане, се считат за различни). Да се намерят всички естествени числа $n$, за които $A_n$ е число от вида $420180420180\ldots420180$, т.е. няколко копия на 420180, записани едно след друго.

**Отговор.** Няма такива $n$.

**Решение**. Да забележим, че в началото можем да оцветим квадрата в някои от четирите цвята или да го разделим на 4 квадрата със страна $2^{n-1}$. Ако го разделим, получаваме 4 квадрата със страна $2^{n-1}$ и всеки един от тях можем да разделим по точно $A_{n-1}$ начина. Оттук следва, че $A_n = A_{n-1}^4 + 4$ за всяко $n \geq 1$. Освен това, $A_0 = 4$.

Оттук получаваме, че никое от числата $A_1, A_2, \ldots$ не се дели на 3, тъй като $t^4 + 4$ дава остатък 1, когато $t$ се дели на 3, и остатък 2 в противен случай. От друга страна, числото 420180 се дели на 3, а оттук и всяко число, съставено от долепяне на копия на 420180. Следователно $n$ с исканото свойство не съществува.

**Оценяване**. (7 точки) 3 т. за явна връзка между $A_n$ и $A_{n-1}$, 2 т. за фокусиране върху остатъци при деление на 3 (или друго подходящо число) и 2 т. за достигане до противоречие.

**Задача 7-8.1.** Даден е изразът $A = x^2 + 5x + 15$, където $x$ е реално число.

**а)** Да се реши неравенството $A < (x + 4)^2$.

**б)** За кои естествени числа $x$ изразът $A$ е точен квадрат?

**Отговор. а)** $x \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$. **б)** $x = 6$.

**Решение.**
**а)** От $(x + 4)^2 - (x^2 + 5x + 15) = 3x + 1$ следва, че решенията са $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$.
**б)** От а) следва, че $A < (x+4)^2$ за всяко естествено $x$. Тъй като $(x^2+5x+15)-(x+2)^2 = x + 11 > 0$, то $A$ е точен квадрат тогава и само тогава, когато $A = (x + 3)^2$. Предвид $(x^2 + 5x + 15) - (x + 3)^2 = 6 - x$, получаваме единственото решение $x = 6$.

**Оценяване.** (10 точки) 3 т. за а), от които 2 т. за опростяване на разликата на двата израза и 1 т. за окончателен отговор; 7 т. за б), от които 1 т. за $A < (x + 4)^2$ за всяко естествено $x$, 2 т. за $A > (x + 2)^2$ за всяко естествено $x$, 2 т. за съображението, че остава само $A = (x + 3)^2$ и 2 т. за решаване на това уравнение.

**Задача 7-8.2.** На територия има 2022 града. Някои от градовете са свързани с двупосочни международни пътища, като всеки международен път е между точно два града и има най-много един международен път между всеки два града. Всеки от градовете принадлежи на една държава, като във всяка държава има поне един град и няма международен път между два града от една и съща държава. Ако държавите са 3 на брой, какъв е най-големият възможен брой на всички международни пътища?

**Отговор.** $3.674^2 = 1362828$.

**Решение.** Нека в държавите има съответно $a$, $b$, $c$ града, явно $a+b+c = 2022$. Между държавата с $a$ града и тази с $b$ града има най-много $ab$ международни пътища. С аналогично разсъждение за другите две двойки държави заключаваме, че общият брой международни пътища е $ab+bc+ca$. Имаме неравенството $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$, еквивалентно на $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Равенство се достига само при

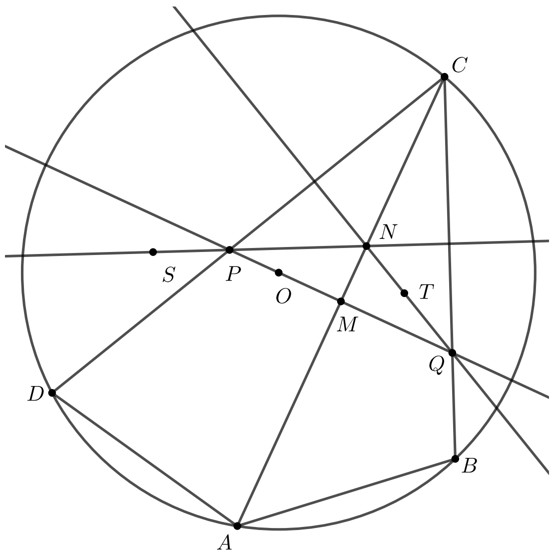
$a = b = c = 674$ и в такъв случай $ab + bc + ca = 3a^2 = 3.674^2$.

**Оценяване.** (10 точки) 3 т. за израза $ab + bc + ca$ за общия брой пътища, 3 т. за цитиране (може и без доказателство) на $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$, 2 т. за правилно прилагане на неравенството, 2 т. за верен отговор и пример за разпределение на градовете.

**Задача 7-8.3.** Четириъгълникът $ABCD$ с $AB = AD$ е вписан в окръжност с център $O$. Точката $M$ е средата на диагонала $AC$ и правата $OM$ пресича страните $CD$ и $CB$ съответно в точките $P$ и $Q$. Отсечките $AS$ и $AT$ са диаметри съответно в окръжностите, описани около триъгълниците $AOD$ и $AOB$. Да се докаже, че правите $PS$ и $QT$ се пресичат върху правата $AC$.

**Решение 1.** *(Стефан Иванов)* Правата $OM$ е симетрала на отсечката $AC$, така че $AP = CP$, $AQ = CQ$. Точката $A$ е върху симетралата на $BD$ и същевременно върху описаната окръжност на $\triangle BCD$, тоест $AC$ е ъглополовяща на $\angle DCB$. Тогава $\triangle MQC \cong \triangle MPC$ и $CP = CQ$. Заключаваме, че $AQCP$ е ромб, при което $AQ \parallel PC$, $AP \parallel QC$.

Сега от $AQ = QC$ имаме $\angle AQB = 2\angle ACB = \angle AOB$, тоест $Q$ лежи на описаната около $ABTO$ окръжност. Тъй като $AT$ е диаметър, то $QT \perp AQ$, а тогава $QT \perp PC$. Аналогично, $PS \perp QC$. Тогава $N = PS \cap QT$ е ортоцентърът на $\triangle PQC$, а той лежи върху правата $AC$, понеже $CP = CQ$.




**Оценяване.** (10 точки) 5 т. за $AQ \parallel PC$ и $AP \parallel QC$, 3 т. за $QT \perp PC$ и $PS \perp QC$, 2 т. за довършване.

**Решение 2.** *(Мирослав Маринов)* Нека $\angle ACB = \angle ACD = \gamma$. Тогава $CP = CQ$ и целта ни е да изразим $\angle CQZ$ чрез $\gamma$, където $Z = AC \cap TQ$.

Явно $AOTB$ е вписан четириъгълник. Понеже $\angle OQB = 180^\circ - \angle CQM = 90^\circ + \gamma$ и $\angle OAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \gamma$, то $AOQB$ е вписан. Следователно $AOQTB$ е вписан в окръжност. Оттук $\angle CQZ = \angle BQT = \angle BAT = 90^\circ - \angle ATB = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 2\gamma$. Аналогично ако $PS \cap AC = Y$, то $\angle CPY = 90^\circ - 2\gamma$. Предвид $CP = CQ$, получаваме $\triangle CQZ \cong \triangle CPY$, откъдето окончателно $CZ = CY$ и $Y \equiv Z$, с което задачата е решена.

**Оценяване.** (10 точки) 2 т. за въвеждането на $Z$ и ясна цел да се изрази $\angle CQZ$ чрез основен елемент на $ABCD$, 2 т. за вписаността на $AOQB$, 3 т. за $\angle CQZ = 90^\circ - 2\gamma$ (или аналогичен израз чрез ъгли на $ABCD$), 1 т. за формулиране на аналогичния резултат за $Y$, 2 т. за довършване.

**Задача 7-8.4.** Даден е бял квадрат със страна $2^n$, където $n$ е цяло неотрицателно число. На всеки ход можем или да разделим бял квадрат на четири бели части чрез двете прави през средите, успоредни на страните му (стига обаче белият квадрат да е с дължина на страната поне 2), или да оцветим бял квадрат в един от цветовете синьо, зелено, червено и жълто. Накрая не може да има бяла част. Нека $A_n$ е броя на всички различни таблици, които можем да получим (таблиците, които могат да се получат една от друга чрез завъртане или обръщане, са различни). Да се намерят всички $n$, за които $A_n$ може да се представи във вида $p^a \cdot q^b$, където $p$ и $q$ са прости числа, не непременно различни, а $a$ и $b$ са естествени числа.

**Отговор.** $n = 0$.

**Решение.** (*Галин Тотев, Мирослав Маринов*) Да забележим, че в началото можем да оцветим квадрата в някои от четирите цвята или да го разделим на 4 квадрата със страна $2^{n-1}$. Ако го разделим, получаваме 4 квадрата със страна $2^{n-1}$ и всеки един от тях можем да разделим по точно $A_{n-1}$ начина. Оттук следва, че $A_n = A_{n-1}^4 + 4$ за всяко $n \geq 1$. Освен това, $A_0 = 4$.

Сега от рекурентната връзка лесно се вижда, че $A_n$ винаги е четно. Така поне едно от $p$ и $q$ е четно, без ограничение $q = 2$. Свеждаме до уравнението $A_n = A_{n-1}^4 + 4 = p^a \cdot 2^b$. Освен това, за $n \geq 2$ имаме, че 8 дели $A_{n-1}^4$ и значи $A_n$ се дели на 4, но не и на 8 – следователно $b = 2$ при различни $p$ и $q$. Виждаме, че $A_0 = 4$ е решение за $(p, q, a, b) = (2, 2, 1, 1)$. При $p = q = 2$ получаваме $A_{n-1}^4 + 4 = 2^{a+b}$, което няма решение (заради делимост на 8). Занапред ще считаме, че $p \geq 3$, $q = 2$ и $n \geq 1$.

Остава да решим $A_{n-1}^4 + 4 = 4p^a$. Да положим $A_{n-1} = x$. Имаме

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 4p^a.$$

Понеже трябва $x^2 - 2x + 2$ и $x^2 + 2x + 2$ да са четни и произведението им е $4p^a$, то по-малкото от двете дели по-голямото. Оттук

$$x^2 - 2x + 2 \mid x^2 + 2x + 2,$$

$$x^2 - 2x + 2 \mid 4x,$$
$$x^2 - 2x + 2 \leq 4x,$$
$$x^2 - 6x + 2 \leq 0,$$
$$(x - 3)^2 - 7 \leq 0,$$
$$x \leq 6.$$

Тъй като $A_1 > 6$, то никое $n \geq 2$ не е решение, а също $A_1 = 4^4 + 4 = 260 = 4 \cdot 5 \cdot 13$ не е от желания вид.

**Оценяване.** (10 точки) 4 т. за рекурентната връзка, общо 1 т. за $q = 2$ и $b = 2$, 2 т. за разлагане на $x^4 + 4$, 1 т. за извод, че $x^2 - 2x + 2$ дели $x^2 + 2x + 2$, 2 т. за довършване.

**Задача 9-12.1.** Да се намерят всички функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такива че:

$$f(f(x+f(x))+y+f(y))=2x+2f(y)$$

за всички реални числа $x$ и $y$.

**Отговор.** Единственото решение е $f(x)=x$ за всяко реално число $x$.

**Решение.** Директно се проверява, че $f(x)=x$ изпълнява уравнението. Функцията е сюрективна, понеже за фиксирано $y$ изразът $2x+2f(y)$ пробягва всички реални числа, когато $x$ се мени. Така съществува $t$, за което $f(t)=0$. При $x=y=t$ следва $2t=f(t)=0$, т.е. $t=0$, съответно $f(0)=0$. Оттук $x=0$ в даденото дава $f(y+f(y))=2f(y)$. Замествайки това в началното, достигаме до уравнението

$$f(2f(x)+y+f(y))=2x+2f(y). \tag{1}$$

Освен това, при $x=y$ началното уравнение дава $f(f(x+f(x))+x+f(x))=2x+2f(x)$, а от преди имаме и $f(x+f(x))=2f(x)$. Оттук ще покажем два начина за завършване.

*(Първи начин, Галин Тотев)* Вече имаме, че $f$ е инективна – ако $f(x_1)=f(x_2)$, то лявата страна на (1) не се променя и дясната дава $2x_1=2x_2$, т.е. $x_1=x_2$. Достигнали сме до $f(3x+f(x))=2x+2f(x)$. Сега при замяна на $x$ с $f(x)$ следва

$$f(3f(x)+f(f(x)))=2f(x)+2f(f(x)). \tag{2}$$

От друга страна, замествайки $x$ и $y$ с $f(x)$ в (1), получаваме

$$f(3f(f(x))+f(x))=2f(x)+2f(f(x)). \tag{3}$$

Оттук чрез (2) и (3) следва $f(3f(x)+f(f(x)))=f(3f(f(x))+f(x))$ и понеже $f$ е инективна, следва $3f(x)+f(f(x))=3f(f(x))+f(x)$, т.е. $f(f(x))=f(x)$. Отново чрез инективността заключаваме, че $f(x)=x$ за всяко $x$.

*(Втори начин, Константин Гаров)* В уравнението $f(x+f(x))=2f(x)$ заместваме $x$ с $x+f(x)$ и получаваме

$$2f(x+f(x))=f(x+f(x)+f(x+f(x)))=2x+2f(x)$$

и понеже $f(x+f(x))=2f(x)$, то $4f(x)=2x+2f(x)$, съответно $f(x)=x$ за всяко $x$.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за верен отговор и ясна проверка, 1 т. за сюрективност, 1 т. за $f(0)=0$, 4 т. за останалата част, от които: при първото решение 1 т. за инективност, 1 т. за (2), 1 т. за (3) и 1 т. за довършване; при второто решение 2 т. за заместване на $x$ с $x+f(x)$ и 2 т. за довършване. Всяка от точките може да бъде получена само когато всички точки преди нея са получени.

**Задача 9-12.2.** Вписаната в триъгълника $ABC$ окръжност $\omega$ с център $I$ допира страните $AB$, $BC$ и $AC$ съответно в точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Нека $X,Y,Z$ и $T$ са средите съответно на отсечките $AB_1, AC_1, BC_1$ и $BA_1$. Правите $XY$ и $ZT$ се пресичат в точка $K$. Да се докаже, че описаната около триъгълника $ABK$ окръжност се допира до $\omega$.

**Решение 1.** *(Цветелина Илиева)* Нека $I_C$ е центърът на външновписаната окръжност срещу $C$, а $K'$ е средата на $C_1I_C$ – ще докажем, че $K' \equiv K$. Тъй като $YK'$ и $YX$ се явяват средни отсечки за $\triangle AC_1I_C$ и $\triangle C_1AB_1$ съответно, то $YK' \parallel AI_C$ и $YX \parallel C_1B_1$. Обаче $AI_C$ е външна ъглополовяща на $\angle CAB$, т.е. $\angle I_CAC_1 = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = \angle AC_1B_1$. Следователно $AI_C \parallel C_1B_1$, откъдето $YK' \parallel YX$, т.е. $K' \in XY$. Аналогично $K' \in ZT$, следователно $XY \cap ZT = K' \equiv K$.

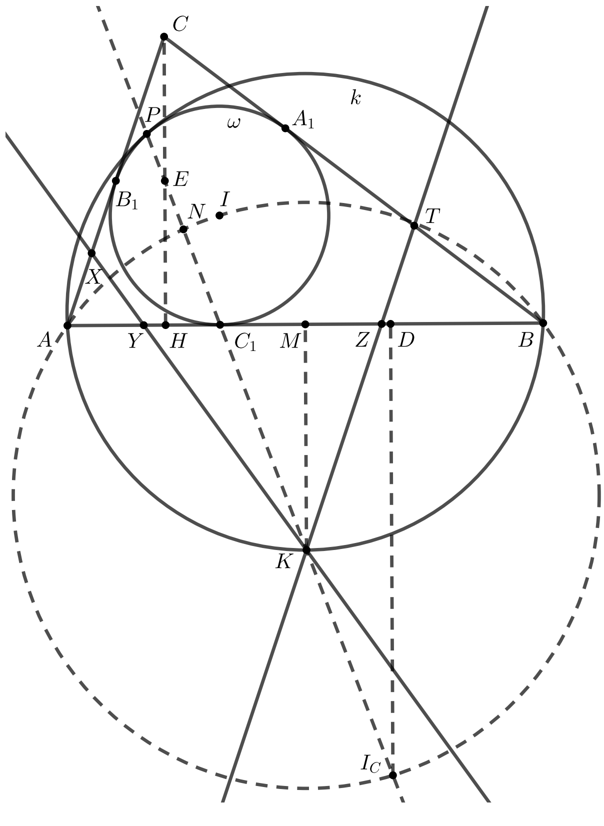
Нека $M$ е средата на $AB$, $H$ е петата на височината от $C$ към $AB$, а $E$ е средата на $CH$. Нека $P$ е втората пресечна точка на $EC_1$ и вписаната окръжност. Ще докажем, че $P$ е допирната точка на двете окръжности.

Първо ще докажем, че точките $E$, $C_1$ и $I_C$ лежат на една права. Нека $D$ е допирната точка на външновписаната окръжност със страната $AB$ и $D'$ е диаметрално противоположната на $D$ точка във външновписаната окръжност. От хомотетията, изпращаща вписаната във външновписаната окръжност, получаваме, че $C$, $C_1$ и $D'$ лежат на една права. Обаче $E$ е среда на $CH$, а $I_C$ е среда на $D'D$, следователно $E$, $C_1$ и $I_C$ наистина лежат на една права.

Нататък, нека $N$ е втората пресечна точка на правата $EC_1I_C$ с описаната около триъгълника $AIB$ окръжност (в която $II_C$ е диаметър, понеже $\angle IAI_C = \angle IBI_C = 90^\circ$). Явно $\angle INI_C = 90^\circ$, но $PC_1$ се явява хорда във вписаната окръжност, следователно $N$ е среда на $PC_1$. От степен на точка в окръжността около $AIBI_C$ имаме

$$AC_1 \cdot C_1B = I_CC_1 \cdot C_1N = 2KC_1 \cdot \frac{C_1P}{2} = KC_1 \cdot C_1P.$$

Следователно точките $A$, $B$, $K$ и $P$ лежат на една окръжност. Обаче $P$, $C_1$ и $K$ лежат на една права, а $C_1$ и $K$ са съответни в хомотетията (понеже допирателните към съответните окръжности в тези точки са успоредни), което означава, че вписаната окръжност и окръжността, описана около $ABK$, се допират в $P$.



**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за доказване, че $K$ е средата на $C_1I_C$, 1 т. за доказване, че $E$, $C_1$, $I_C$ лежат на една права, 1 т. за въвеждането на $N$ и $NP = NC_1$, 1 т. за вписаността на $APBK$, 2 т. за довършване.

**Решение 2.** *(Мирослав Маринов)* Първо ще отбележим, че правата $XY$ се явява радикална ос на окръжността с център $A$ и радиус 0 и вписаната окръжност, както и че правата $ZT$ се явява радикална ос на окръжността с център $B$ и радиус 0 и вписаната окръжност. Оттук $K$ лежи на радикалната ос на окръжностите с центрове $A$ и $B$ и нулеви радиуси.

Нататък, нека окръжността $k$ през $A$ и $B$, допираща вписаната $\omega$, я допира в точката $P$. От т.нар. *Shooting Lemma* (която се доказва чрез ъгли около общата допирателна на $\omega$ и $k$ или чрез хомотетия, изпращаща $\omega$ в $k$) следва, че $PC_1$ е ъглополовяща на $\angle APB$. Нека $PC_1$ пресича $k$ за втори път в точката $L$. Тогава $\angle APL = \angle BPL = \angle LAC_1$, откъдето $\triangle AC_1L \sim \triangle PAL$ и $LA^2 = LC_1 \cdot LP$. Оттук следва, че $L$ лежи на радикалната ос на окръжността с център $A$ и $\omega$; аналогично $L$ лежи на радикалната ос на окръжността с център $B$ и $\omega$, откъдето заключаваме, че $K \equiv L$. С това задачата е решена.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за ясно цитиране (може без доказателство) на Shooting лемата, 2 т. за $\triangle AC_1L \sim \triangle PAL$, 2 т. за разглеждане на радикални оси около окръжностите с центрове $A$ и $B$ и нулеви радиуси и 2 т. за довършване.

**Задача 9-12.3.** Даден е прост ориентиран граф с 1001 върха, първоначално без ребра. Галин и Марин играят следната игра. Първо Марин избира естествено число $A$ и го дава на Галин, след което Галин построява ориентирани ребра в графа, така че броят на подграфите с 1001 върха, в които всеки връх е от входяща степен 1, е поне $A$. Ако такъв граф е невъзможно да се построи, то Галин печели. След като Галин построи графа, Марин печели, ако в графа има Хамилтонов цикъл, а в противен случай печели Галин. Кой има печеливша стратегия?

(*В прост ориентиран граф между всеки два върха има най-много едно ребро. Входяща степен на връх $v$ в ориентиран граф е броят на ребрата от вида $\overrightarrow{uv}$, където $u$ е връх на графа. Цикъл в ориентиран граф е Хамилтонов, ако съдържа всеки връх точно по веднъж.*)

**Отговор.** Марин.

**Решение.** Да забележим, че броят на подграфите с всеки връх от входяща степен 1 е точно произведението от входящите степени на всеки връх. Наистина, за всеки връх можем да изберем точно едно от входящите му ребра и този избор е независим от съвкупността от изборите за другите върхове.

Сумата от входящите степени на всички върхове не надминава максималния възможен брой ребра, т.е. $\binom{1000}{2} = 1001 \cdot 500$. Ако Марин избере $A = 500^{1001}$, то от горното наблюдение за броя подграфи и неравенството между средноаритметично и средногеометрично следва, че сумата от всички входящи степени е поне колкото $1001 \cdot \sqrt[1001]{500^{1001}} = 1001 \cdot 500$. Така равенство се достига и с този избор на $A$ Марин форсира Галин да построи пълен ориентиран граф с 1001 върха, в който всеки връх е с входяща степен 500 и с изходяща степен 500. (Такъв граф наистина съществува – можем например да подредим 1001-те върхове в кръг и да изберем всеки връх да сочи с ребро към следващите 500 по кръга.)

Остава да докажем, че в такъв граф има Хамилтонов цикъл. Първо ще отбележим, че такъв граф е *силно свързан*, т.е. между всеки два върха $v_1$ и $v_2$ има път от ориентирани ребра от $v_1$ към $v_2$ и път от ориентирани ребра от $v_2$ към $v_1$. Понеже графът е пълен, можем без ограничение да считаме, че имаме ребро $\overrightarrow{v_2v_1}$. Тъй като $v_1$ е с изходяща степен 500, $v_2$ е с входяща степен 500, а освен $v_1$ и $v_2$ има 999 други върха, то от принципа на Дирихле има връх $u$, такъв че $\overrightarrow{v_1u}$ и $\overrightarrow{uv_2}$ са ребра. Съответно, всеки два върха или са свързани с ребро, или има път с дължина 2 от единия до другия.

Нататък, да забележим, че в графа със сигурност има поне един цикъл, тъй като всеки връх е с положителна изходяща степен (съществува крайна редица $c_1$, $c_2$, ... от върхове, в която $\overrightarrow{c_ic_{i+1}}$ е ребро и $c_{i-1} \neq c_{i+1}$ за всяко $i$, и има индекси $j$ и $k$ с $c_j = c_k$). Нека $c_1c_2 \cdots c_nc_1$ е цикъл с максимална дължина. Ако той е Хамилтонов, сме готови, затова нека допуснем, че има връх $v$ извън него. Не е възможно $\overrightarrow{c_iv}$ и $\overrightarrow{vc_{i+1}}$ едновременно да са ребра, в противен случай получаваме по-дългия цикъл $c_1c_2 \cdots c_ivc_{i+1}c_{i+2} \cdots c_n$, противоречие. Следователно или всички върхове от цикъла имат ребро към $v$ (тогава $v$ ще наричаме *предшественик*), или $v$ има ребро към всички върхове от цикъла (тогава $v$ ще наричаме *наследник*).

Предвид силната свързаност и това, че цикълът не е Хамилтонов, можем да считаме, че цикълът има поне един предшественик $w_1$ и поне един наследник $w_2$. Ако $w_2w_1$ или $w_2u_1w_1$ е път от $w_2$ до $w_1$ (като $u_1$ е различно от $c$-тата), то $w_1c_1 \cdots c_nw_2w_1$ (или $w_1c_1 \cdots c_nw_2u_1w_1$) е по-дълъг цикъл, противоречие. Окончателно, най-дълъг цикъл в графа трябва да е Хамилтонов и исканото следва.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за представяне на броя подграфи като произведение на входящите степени, 2 т. подходящ избор на $A$ и пълно описание на структурата (ребра и степени) на форсирания граф, 4 т. за доказателство, че във форсирания граф непременно има Хамилтонов цикъл, от които не повече от 1 т. за доказване на помощни свойства като например силна свързаност. Цитиране без доказателство на лема, че в силно свързан пълен граф има Хамилтонов цикъл, не носи точки. При коректно доказателство за съществуване на Хамилтонов цикъл чрез промени върху Хамилтонов път, се присъждат 2 точки, ако съществуването на Хамилтонов път не е доказано.

**Задача 9-12.4.** Дадени са просто число $p \geq 3$ и естествено число $n$, такива че $\frac{p}{3} < n < p$. Естественото число $m$ е такова, че съществуват $n$ различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, по-малки от $p$ и такива, че числата $a_1^m$, $a_2^m$, ..., $a_n^m$ дават един и същи остатък при деление на $p$. Да се намерят всички възможни стойности на $m$ в зависимост от $n$ и $p$.

**Отговор.** Всички кратни на $p-1$ за $\frac{p}{2} < n < p$; всички кратни на $\frac{p-1}{2}$ за $\frac{p}{3} < n \leq \frac{p-1}{2}$.

**Решение.** Нека $g$ е примитивен корен по модул $p$. Тогава редицата $a_1^m$, $a_2^m$, ..., $a_n^m$ може да се запише като

$$g^{b_1m}, g^{b_2m}, \ldots, g^{b_nm}.$$

Понеже $g^{b_im} \equiv g^{b_jm} \pmod p$, получаваме $g^{|b_i-b_j|m} \equiv 1 \pmod p$ за произволни $i$ и $j$. Показателят на $g$ по модул $p$ е $p-1$, значи $p-1$ дели $|b_i-b_j|m$ за произволни $i$ и $j$.

Да разгледаме първо $n > \frac{p}{2}$. Тогава във всяко множество от $n$ остатъка по модул $p-1$ ще има два с разлика 1, понеже от поне една от двойките $(0,1)$, $(2,3)$, ...,

$(p-2, p-1)$ ще се срещат и двата остатъка. Така непременно $p-1$ дели $m$. Обратно, от малката теорема на Ферма директно следва, че всички кратни на $p-1$ вършат работа без значение какво е множеството от $a_i$-та.

Нека сега $\frac{p}{3} < n \leq \frac{p-1}{2}$. Тогава във всяко множество от $n$ остатъка по модул $p-1$ ще има два с разлика 1 или 2, понеже от поне едно от множествата $(0, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $\ldots$ (последното множество е с 1 или 2 елемента, а не с 3) ще се срещат два остатъка. Така непременно $p-1$ дели $2m$, т.е. $m$ се дели на $\frac{p-1}{2}$. Обратно, при избор $a_i = x_i^2$, където $x_i \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}$ са различни, исканото е изпълнено за всяко кратно на $\frac{p-1}{2}$ от малката теорема на Ферма.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за напълно верен отговор, 1 т. за проверка на всички работещи $m$ в двата случая, 1 т. за въвеждане на примитивен корен и $p \mid (b_i - b_j)m$, по 2 т. за отхвърляне на неработещите $m$ във всеки от двата случая за $n$.

**Задача 9-12.5.** Дадени са 100 еднакви на външен вид монети. Знаем, че сред тях 30 са истински и 70 са фалшиви. Освен това, знаем, че истинските монети тежат еднакво, а фалшивите са с две по две различни тегла, но всяка от тях е по-тежка от истинските. Разполагаме с везна с две блюда и без тежести, на която за едно претегляне сравняваме теглата на две групи, състоящи се от еднакъв брой монети (едната група поставяме на едното блюдо, а другата на другото). С колко най-малко претегляния можем да си гарантираме, че ще открием поне една истинска монета?

**Отговор.** 70.

**Решение.** Първо ще покажем пример. Слагаме стоте монети в една купчина. При всяко теглене избираме 2 монети от купчината. Ако теглата им са равни, то тези монети са истински и сме готови. Ако не са, то по-тежката монета е със сигурност фалшива и можем да я премахнем от купчината. Чрез 70 такива измервания, ако равенство няма никога, то в купчината остават 30-те истински монети. По този начин 70 измервания са достатъчни.

Да предположим, че съществува алгоритъм, с който се намира истинска монета за не повече от 69 хода. Ще покажем, че е невъзможно – дори ако предположим, че разпределението на теглата на монетите е следното: теглото на истинските монети е по 1, а теглото $m_i$ на $i$-тата фалшива монета е $2^i + 1$. При такова предположение резултатът от всяко претегляне може да се определи по следния начин. Нека при някое от претеглянията има по $k$ монети на блюдо, сред които $d > 0$ са фалшиви, имащи номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_d$. Тогава на блюдото, на което не е поставена най-тежката от монетите, сумарното тегло ще бъде не повече от

$$k + \left(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{i_d - 1}\right) = k + 2^{i_d} - 2.$$

Следователно, ако на везната има поне една фалшива монета, то тогава блюдото с най-тежка фалшива монета ще е по тежкото. (Изобщо, всяко разпределение на теглата, в което най-тежката фалшива монета от избраните за теглене определя резултата от тегленето, върши работа тук.)

Нека страничен човек възпроизвежда алгоритъм с не повече от 69 хода. Ние ще играем ролята на везна: ще съобщаваме резултата от претеглянето и освен това ще си присвояваме тегло $m_i$ на някоя от монетите. По този начин след всяко претегляне ще бъдат присвоени тегла $m_{70}, m_{69}, \ldots, m_{70-i}$ за някое $i$. Ако съответните монети наистина имат такива тегла (а останалите тегла са разпределени по случаен начин), то резултатът от претеглянията ще бъде такъв, какъвто ние го съобщим.

При първото претегляне ще изберем по случаен начин монета от блюдата, ще ѝ присвоим маса $m_{70}$ и ще съобщим, че блюдото, върху което е тя, е по-тежкото. При всяко следващо претегляне, ако на везната има монета с вече присвоено тегло, то ще изберем най-тежката такава и ще съобщим, че блюдото с нея е по-тежко. Ако никоя монета на везната не е с присвоено тегло, то избираме по случаен начин монета на някое от блюдата, присвояваме ѝ най-голямата все още неприсвоена маса и определяме блюдото, върху което е тя, за по-тежкото. Лесно можем да видим, че по този начин условията са изпълнени. По този начин ние си гарантираме, че от нашия списък с тежести на фалшиви монети, ние можем да изхабим максимум една тежест на ход.

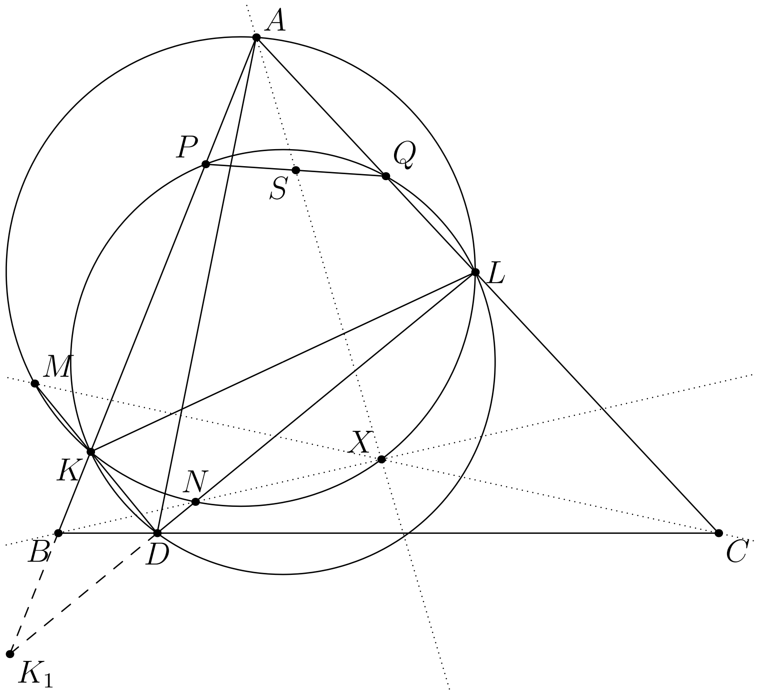
Ако са направени не повече от 69 претегляния, то не повече от 69 тегла ще бъдат присвоени. В частност, $m_1$ няма да бъде присвоено. Това означава, че тегло $m_1$ може да има произволна монета, чието тегло не е било вече определено, и по този начин всички резултати от претеглянията ще останат същите, които ние сме съобщили. Тоест ако някой ни каже, че е открил истинска монета ние спокойно можем да и дадем тегло $m_1$, да запазим резултатите от притеглянията и да я направим фалшива. Следователно, няма как да бъде посочена със сигурност истинска монета.

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за работещ алгоритъм със 70 измервания, 2 т. за предлагане на съвкупност от маси, която опровергава стратегиите с не повече от 69 измервания (това включва помощно характеристично свойство, като например че най-тежката монета определя резултата от тегленето), 3 т. за доказателство, че при предложената съвкупност 69 измервания не са достатъчни.

**Задача 9-12.6.** В остроъгълния триъгълник $ABC$ точка $D$ е произволна от страната $BC$. Нека $DK$ и $DL$ са вътрешните ъглополовящи при върха $D$ в триъгълниците $ABD$ и $ACD$, съответно, като $K$ лежи на страната $AB$, а $L$ лежи на страната $AC$. Описаната около триъгълника $AKL$ окръжност пресича правите $DK$ и $DL$ за втори път в точките $M$ и $N$ съответно, а описаната около триъгълника $DKL$ окръжност пресича правите $AB$ и $AC$ за втори път в точките $P$ и $Q$ съответно. Нека $S$ е средата на отсечката $PQ$. Да се докаже, че правите $AS$, $BN$ и $CM$ се пресичат в една точка.

**Решение.** (*Цветелина Илиева*) Понеже четириъгълникът $PQLK$ е вписан и $AS$ е медиана в триъгълника $APQ$, то $AS$ е симедиана в триъгълника $AKL$ – значи е достатъчно да докажем, че пресечната точка на $BN$ и $CM$ лежи върху симедианата през върха $A$ в триъгълника $AKL$.

Нека $BN$ пресича описаната около триъгълника $AKL$ окръжност за втори път в точката $X$ и нека правите $LD$ и $AB$ се пресичат в точката $K_1$. Тъй като $\angle ADK = \angle KDB$ и $\angle KDK_1 = 90°$ (ъглополовящите на два съседни ъгъла са перпендикулярни), то $(A, B; K, K_1) = -1$. Оттук с проектиране през точката $N$ получаваме, че $AKXL$ е хармоничен четириъгълник, съответно $AX$ е симедиана в триъгълника $AKL$. Аналогично ако $CM$ пресича описаната около триъгълника $AKL$ окръжност в точка $Y$ и $KM$ пресича $AC$ в точката $L_1$, то $(A, C; L, L_1) = -1$, $AKYL$ е хармоничен четириъгълник и $AY$ е симедиана в триъгълника $AKL$. Оттук $X \equiv Y$ е пресечната точка на $BN$ и $CM$ и исканото следва.




**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за обосновка, че $AS$ е симедианата в $AKL$ през $A$, 1 т. за $(A, B; K, K_1) = -1$ или $(A, C; L, L_1) = -1$, 2 т. за въвеждането на $X$ и $AKXL$ – хармоничен (или за $Y$), 3 т. за довършване.

**Задачите са съставени от:**

| | |
|---|---|
| 5.1 | Галин Тотев, Цветелина Илиева |
| 5.2 | Цветелина Илиева |
| 5.3 | Фолклор |
| 5.4 | Фолклор |
| 6.1 | Фолклор |
| 6.2 | Мирослав Маринов, Цветелина Илиева |
| 6.3 | Цветелина Илиева |
| 6.4 | Галин Тотев |
| 7-8.1 | Галин Тотев, Цветелина Илиева |
| 7-8.2 | Фолклор |
| 7-8.3 | Стефан Иванов |
| 7-8.4 | Галин Тотев |
| 9-12.1 | Галин Тотев |
| 9-12.2 | Галин Тотев, Стефан Иванов |
| 9-12.3 | Галин Тотев |
| 9-12.4 | Галин Тотев |
| 9-12.5 | Фолклор (Русия, 2015, зад. 10.8) |
| 9-12.6 | Стефан Иванов |

**Обща редакция:**

Мирослав Маринов, Стефан Иванов

*Коментар по задачите*

В *Темата за 5 клас* първата задача използва знания от 4 клас, като целяхме тя да е достъпна и за по-малките участници. Задачи 2 и 3 вече изискват максимално добро разбиране на учебния материал от 5 клас. Задача 4 е най-трудната в темата. Тя изследва редицата

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645,$$

която се изучава във всички висши училища. Задачата показва как само със знания за 5 клас можем да направим забележително добра оценка за стойността на редицата, а именно $< 1.7$.

В *Темата за 6 клас* Задачи 1 и 2 изискват добро разбиране на изучавания в клас материал, в частност делимост, намиране на брой делители, намиране на общи делители и вероятности. Задача 3 използва важни теореми по геометрия в състезателната математика за шести клас – теорема на Менелай и теорема на Талес. Изисква се тяхното съчетаване и многократно прилагане на правилните места. Задача 4 се явява преход към по-сложни теми – сравненията по модул и рекурентните връзки.

Целта ни тази година с *Темата за 7-8 клас* беше да предложим тренировка за Младежката балканска олимпиада по математика (МБОМ). Една от ключовите техники за МБОМ е заключването между степени. В тази връзка Задача 1 е комбинация от учебен материал и лесно приложение на този метод, като подточка а) служи като подсказка за идеята в б). Задача 2 има лек комбинаторен елемент, но по същество въвежда идеята за неравенства между средни, и как равенство обикновено се достига при равни променливи. Задача 3 е класическа геометрия с близка до МБОМ трудност. Такива задачи се падат почти всяка година на Малката балканиада, и е важно за всеки амбициран олимпиец да работи добре с окръжности и ъгли в тях. Задача 4 е обединение на комбинаторен елемент (търсенето на рекурентна връзка) и уравнение от теорията на числата. Такива уравнения са често срещани както на МБОМ, така и на националните състезания и контролни в тази възрастова група.

Крайната цел за всеки сериозен състезател е да се класира на Международната олимпиада по математика (МОМ) и да се представи добре на нея. За добро представяне на МОМ състезателите трябва успешно да се справят там със задачи 1, 2, 4 и 5. Поради тази причина избрахме *Темата за 9-12 клас* да има ниво на трудност като задачи 2 и 5 на МОМ. Това дава възможност на по-неопитните състезатели да се срещнат наведнъж с поредица достатъчно предизвикателни задачи. За по-опитните, такава тренировка би им помогнала да се справят по-бързо с 1, 2, 4 и 5 на МОМ, което ще остави повече време за работа върху 3 и 6.