Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по курсовой работе
по дисциплине «Интервальный анализ»
Тема: Субдифференциальный метод Ньютона

Выполнил:
Максимов Егор Евгеньевич
группа:
5030102/00201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Вычислить формальное решение ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона.

2 Теория

2.1 Формулировка задачи

Требуется найти формальное решение интервального уравнения вида:

$$x = Cx + d \tag{2.1}$$

В полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{KR}$ уравнение равносильно следующему:

$$Cx \ominus x + d = 0. \tag{2.2}$$

Для упрощения вычислений и анализа результатов перенесем рассмотрения из нелинейного пространства $\mathbb{KR}^n$ в линейное пространство U, построив биективное отображение, называемое **вложением** $\mathbb{KR}^n$ в U:

$$i : \mathbb{KR}^n \to U, \tag{2.3}$$

Всякая биекция $i : \mathbb{KR}^n \to U$ порождает также биекцию из множества всех отображений $\mathbb{KR}^n$ в себя на множество всех отображений U в себя:

$$\forall\ \phi : \mathbb{KR}^n \to \mathbb{KR}^n\ \exists!\ i \circ \phi \circ i^{-1} : U \to U \tag{2.4}$$

Связь свойств отображений ϕ и $i \circ \phi \circ i^{-1}$ позволяет заменить исходную задачу решения уравнения

$$f(x) = 0 \mid f(x) = Cx \ominus x + d \tag{2.5}$$

в $\mathbb{KR}$ на задачу решения уравнения

$$\mathcal{F}(y) = i(0), \tag{2.6}$$

в линейном пространстве U с индуцированным отображением

$$\mathcal{F} = i \circ f \circ i^{-1} : U \to U, \tag{2.7}$$

определяемым как

$$\mathcal{F}(y) = i(Ci^{-1}(y) \ominus i^{-1}(y) + d), \tag{2.8}$$

и однозначно восстановить формальное интервальное решение x^* по y^* из соотношения $x^* = i^{-1}(y^*)$.

Определение. Погружениями интервального пространства $\mathbb{K}^n$ в линейное пространство U будем называть биективные вложения $i : \mathbb{K}^n \to U$, которые:

- сохраняют аддитивную алгебраическую структуру $\mathbb{KR}^n$: $i(u + v) = i(u) + i(v)\ \forall\ u, v \in \mathbb{K}^n$,
- сохраняют топологическую структуру $\mathbb{KR}^n$: $i : \mathbb{KR}^n \to U$ и его обратное $i^{-1} : U \to \mathbb{KR}^n$ являются непрерывными.

Из свойств погружения можно вывести два важных следствия:

1. Погружение однозначно задает линейное пространство: U должно быть евклидовым пространством $\mathbb{R}^{2n}$.
2. Любые два погружения $\mathbb{K}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$ одинаковы с точностью до неособенного линейного преобразования $\mathbb{R}^{2n}$.

Определение. Стандартным погружением интервального пространства $\mathbb{KR}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$ будем называть погружение sti: $\mathbb{KR}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, действующее по правилу

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (-\underline{x_1}, -\underline{x_2}, ..., -\underline{x_n}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}), \tag{2.9}$$

т.е. при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов $x_1, x_2, ..., x_n$ становятся, соответственно, 1-ой, 2-ой, ..., n-ой компонентами точечного $2n$-вектора, а правые концы этих же интервалов становятся соответственно $(n+1)$-ой, $(n+2)$-ой, ..., $2n$-ой компонентами точечного $2n$-вектора.

2.2 Алгоритм субдифференциального метода Ньютона

Алгоритм субдифференциального метода Ньютона для решения ИСЛАУ имеет следующий вид:

1. Выбираем некоторое начальное приближение $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$.
2. Если $k-1$-е приближение $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n},\ k = 1, 2, ...$, уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображение $\mathcal{F}$ в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем:

   $$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)}), \tag{2.10}$$

   где $\tau \in [0, 1]$ - некоторая константа

2.3 Алгоритм вычисления субдифференциала

Обозначая через e_i вектор, имеющий i-ой компонентой 1, а остальные нули, получим:

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{F}_i(x) &= \partial\left(\left(\operatorname{sti}\left(\boldsymbol{C}\operatorname{sti}^{-1}(x)\right)\right)_i - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i\right) \\
&= \partial\left(-\sum_{j=1}^{n}\underline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i\right) \\
&= -\partial\sum_{j=1}^{n}\underline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - e_i \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\partial\left(\underline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]}\right) - e_i
\end{aligned}$$

для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{F}_i(x) &= \partial\left(\left(\operatorname{sti}\left(\boldsymbol{C}\operatorname{sti}^{-1}(x)\right)\right)_i - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i\right) \\
&= \partial\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - x_i + (\operatorname{sti}(\boldsymbol{d}))_i\right) \\
&= \partial\sum_{j=1}^{n}\overline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]} - e_i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\partial\left(\overline{\boldsymbol{c}_{ij}\left[-x_j, x_{j+n}\right]}\right) - e_i
\end{aligned}$$

для $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$.

3 Результаты

3.1 Тестовый пример 1

С помощью субдифференциального метода Ньютона вычислим решение системы интервальных линейных уравнений вида $x = Cx + d$, где

$$C = \begin{pmatrix} [4,6] & [-9,0] & [0,12] \\ [0,1] & [6,10] & [-1,1] \\ [0,3] & [-20,-9] & [12,77] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} [-10,95] \\ [35,14] \\ [-6,2] \end{pmatrix}$$

При значении $\tau = 1$ алгоритм находит формальное решение за 3 итерации:

$$x = \begin{pmatrix} [-1.57, 15.56] \\ [6.12, -0.28] \\ [-0.05, 0.13] \end{pmatrix}$$

3.2 Тестовый пример 2

С помощью субдифференциального метода Ньютона вычислим решение системы интервальных линейных уравнений вида $x = Cx + d$, где

$$C = \begin{pmatrix} [8,14] & [-6,1] & [10,17] \\ [0,2] & [3,5] & [-2,1] \\ [-5,10] & [2,-7] & [6,82] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} [4,95] \\ [-6,46] \\ [-2,65] \end{pmatrix}$$

При значении $\tau = 1$ алгоритм находит формальное решение за 4 итерации:

$$x = \begin{pmatrix} [-0.35, 6.27] \\ [-1.05, 6.68] \\ [4.89, 0.03] \end{pmatrix}$$

3.3 Тестовый пример 3

С помощью субдифференциального метода Ньютона вычислим решение системы интервальных линейных уравнений вида $x = Cx + d$, аналогичное первому, за исключением второй компоненты d:

$$C = \begin{pmatrix} [4,6] & [-9,0] & [0,12] \\ [0,1] & [6,10] & [-1,1] \\ [0,3] & [-20,-9] & [12,77] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} [-10,95] \\ [14,35] \\ [-6,2] \end{pmatrix}$$

При значении $\tau = 1$ алгоритм находит формальное решение за 4 итерации:

$$x = \begin{pmatrix} [1.81, 15.83] \\ [2.33, 1.92] \\ [2.69, -2.04] \end{pmatrix}$$

4 Вывод

1. Реализован субдифференциальный метод Ньютона на языке программирования Python.
2. Результаты тестов свидетельствуют о высокой скорости сходимости метода.