Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт по лабораторной работе №1
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил:
Максимов Егор Евгеньевич
группа:
5030102/00201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана вещественная матрица (1.1)

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

и неотрицательное число

$$\Delta \in \left[0, \min\{a_{ij},\ i,j=\overline{1,2}\}\right] \tag{1.2}$$

Рассмотрим две матрицы радиусов:

$$\mathrm{rad}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{rad}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Построим интервальную матрицу следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} [a_{11} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,1)},\ a_{11} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,1)}] & [a_{12} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,2)},\ a_{12} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(1,2)}] \\ [a_{21} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,1)},\ a_{21} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,1)}] & [a_{22} - \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,2)},\ a_{22} + \Delta \cdot \mathrm{rad}A_i^{(2,2)}] \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$i = \overline{1,2}$.
Необходимо найти $\min\{\Delta | 0 \in \det A\}$.
В целях конкретизации и возможности проверки решения будем использовать следующую матрицу

$$\mathrm{mid}A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

2 Теория

Укажем основные арифметические операции для интервалов:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d] \tag{2.1}$$

$$[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c] \tag{2.2}$$

$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)] \tag{2.3}$$

$$\frac{[a,b]}{[c,d]} = \left[\min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$\mathrm{mid}[a,b] = \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.5}$$

$$\mathrm{wid}[a,b] = (b-a) \tag{2.6}$$

$$\mathrm{rad}[a,b] = \frac{1}{2}(b-a) \tag{2.7}$$

Пусть $\mathrm{mid}A = \{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ – точечная вещественная матрица середин, $\mathrm{rad}A = \{r_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ – точечная вещественная матрица радиусов. Операцией midrad назовем следующую функцию:

$$\mathrm{midrad}(\mathrm{mid}A,\ \mathrm{rad}A) = \{[\mathrm{mid}A_{ij} - \mathrm{rad}A_{ij}],\ [\mathrm{mid}A_{ij} + \mathrm{rad}A_{ij}]\}_{i,j\in\mathbb{N}} \tag{2.8}$$

Результатом операции является интервальная матрица.

3 Реализация

Для решения данной задачи была написана программа на языке Python. Дополнительно был реализован класс Interval, описывающий интервальную арифметику для удобства написания кода.

3.1 Описание алгоритма

1. Проверим вхождение нуля в интервал $\det A$ при максимально допустимом значении.
2. Если $0 \notin \det A$, то данная задача не имеет решения. Иначе переходим к шагу 3.
3. Если $\det A$ является симметричным интервалом, то минимальное значение Δ равно 0, так как $0 = \mathrm{mid}[a, b]$.
4. Рассмотрим весь допустимый интервал возможных значений Δ. Методом половинного деления будем сужать его до тех пор, пока не достигнем точности $\varepsilon = 10^{-14}$.

4 Результат

4.1 Первый случай матрицы радиусов

Действуя согласно описанному алгоритму, мы получаем начальное приближение $\Delta = 0.95$. Далее применяем операцию midrad к матрицам $\mathrm{mid}A$ и $\mathrm{rad}A_1$, получаем интервальную матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & [0.05, 1.95] \\ [0, 1.9] & [0.05, 1.95] \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_1$:

$$\det A_1 = [-3.7, 3.9] \tag{4.2}$$

Отсюда видно, что $0 \in \det A_1$, а также $\mathrm{mid}A_1 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 описанного алгоритма. В результате получаем $\min \Delta \approx 0.025$. В таком случае $\det A_1 = [2.220 \cdot 10^{-16},\ 0.2]$. Левый конец $\det A_1$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.
Для $\Delta = 0.025$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [1.025, 1.075] & [0.975, 1.025] \\ [0.925, 0.975] & [0.975, 1.025] \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

4.2 Второй случай матрицы радиусов

Применим операцию midrad теперь к матрицам $\mathrm{mid}A$ и $\mathrm{rad}A_2$ и получим

$$A_2 = \begin{pmatrix} [0.1, 2] & 1 \\ [0, 1.9] & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Проверим вхождение нуля в $\det A_2$:

$$\det A_2 = [-1.8, 2] \tag{4.5}$$

Вновь видим, что $0 \in \det A_2$, а также $\mathrm{mid}A_2 \neq 0$, значит, переходим к пункту 4 алгоритма.
В результате получаем $\min \Delta \approx 0.05$. В таком случае $\det A_2 = [1.110 \cdot 10^{-16},\ 0.2]$. Левый конец $\det A_2$ с точностью до машинного эпсилон равен нулю.
Для $\Delta = 0.05$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} [1, 1.1] & 1 \\ [0.9, 1] & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

5 Вывод

В ходе работы мы выяснили, что матрицы A_1 и A_2 становятся неособенными, когда их радиусы достигают значений $\Delta_1 = 0.025$ и $\Delta_2 = 0.05$ соответственно. Заметим, что $\Delta_1 < \Delta_2$. Такой результат мы получаем, потому что матрица A_1 имеет больше интервальных элементов.