

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Отчёт по курсовой работе  
по дисциплине «Интервальный анализ»  
Тема: Субдифференциальный метод Ньютона

Выполнил:  
Максимов Егор Евгеньевич  
группа:  
5030102/00201

Проверил:  
к.ф.-м.н., доцент  
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2024 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Формулировка задачи . . . . .	2
2.2	Алгоритм субдифференциального метода Ньютона . . . . .	3
2.3	Алгоритм вычисления субдифференциала . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
3.1	Тестовый пример 1 . . . . .	4
3.2	Тестовый пример 2 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>4</b>

# 1 Постановка задачи

Вычислить формальное решение ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона.

## 2 Теория

### 2.1 Формулировка задачи

Требуется найти формальное решение интервального уравнения вида:

$$x = Cx + d \quad (2.1)$$

В полной интервальной арифметике Каухера  $\mathbb{KR}$  уравнение равносильно следующему:

$$Cx \ominus x + d = 0. \quad (2.2)$$

Для упрощения вычислений и анализа результатов перенесем рассмотрения из нелинейного пространства  $\mathbb{KR}^n$  в линейное пространство  $U$ , построив биективное отображение, называемое **вложением**  $\mathbb{KR}^n$  в  $U$ :

$$i : \mathbb{KR}^n \rightarrow U, \quad (2.3)$$

Всякая биекция  $i : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$  порождает также биекцию из множества всех отображений  $\mathbb{KR}^n$  в себя на множество всех отображений  $U$  в себя:

$$\forall \phi : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n \exists ! i \circ \phi \circ i^{-1} : U \rightarrow U \quad (2.4)$$

Связь свойств отображений  $\phi$  и  $i \circ \phi \circ i^{-1}$  позволяет заменить исходную задачу решения уравнения

$$f(x) = 0 \mid f(x) = Cx \ominus x + d \quad (2.5)$$

в  $\mathbb{KR}$  на задачу решения уравнения

$$\mathcal{F}(y) = i(0), \quad (2.6)$$

в линейном пространстве  $U$  с индуцированным отображением

$$\mathcal{F} = i \circ f \circ i^{-1} : U \rightarrow U, \quad (2.7)$$

определяемым как

$$\mathcal{F}(y) = i(Ci^{-1}(y) \ominus i^{-1}(y) + d), \quad (2.8)$$

и однозначно восстановить формальное интервальное решение  $x^*$  по  $y^*$  из соотношения  $x^* = i^{-1}(y^*)$ .

**Определение.** Погружениями интервального пространства  $\mathbb{K}^n$  в линейное пространство  $U$  будем называть биективные вложения  $i : \mathbb{K}^n \rightarrow U$ , которые:

- сохраняют аддитивную алгебраическую структуру  $\mathbb{KR}^n$ :  $i(u + v) = i(u) + i(v) \forall u, v \in \mathbb{K}^n$ ,
- сохраняют топологическую структуру  $\mathbb{KR}^n$ :  $i : \mathbb{KR}^n \rightarrow U$  и его обратное  $i^{-1} : U \rightarrow \mathbb{KR}^n$  являются непрерывными.

Из свойств погружения можно вывести два важных следствия:

1. Погружение однозначно задает линейное пространство:  $U$  должно быть евклидовым пространством  $\mathbb{R}^{2n}$ .
2. Любые два погружения  $\mathbb{K}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  одинаковы с точностью до неособенного линейного преобразования  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Определение.** Стандартным погружением интервального пространства  $\mathbb{KR}^n$  в  $\mathbb{R}^{2n}$  будем называть погружение  $\text{sti}: \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , действующее по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-\underline{x}_1, -\underline{x}_2, \dots, -\underline{x}_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n), \quad (2.9)$$

т.е. при котором взятые с противоположным знаком левые концы интервалов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  становятся, соответственно, 1-ой, 2-ой, ...,  $n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора, а правые концы этих же интервалов становятся соответственно  $(n+1)$ -ой,  $(n+2)$ -ой, ...,  $2n$ -ой компонентами точечного  $2n$ -вектора.

## 2.2 Алгоритм субдифференциального метода Ньютона

Алгоритм субдифференциального метода Ньютона для решения ИСЛАУ имеет следующий вид:

1. Выбираем некоторое начальное приближение  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{2n}$ .
2. Если  $k - 1$ -е приближение  $x^{(k-1)} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k-1)}$  отображение  $\mathcal{F}$  в точке  $x^{(k-1)}$  и полагаем:

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1} \mathcal{F}(x^{(k-1)}), \quad (2.10)$$

где  $\tau \in [0, 1]$  - некоторая константа

## 2.3 Алгоритм вычисления субдифференциала

Обозначая через  $e_i$  вектор, имеющий  $i$ -ой компонентой 1, а остальные нули, получим:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F}_i(x) &= \partial \left( (\text{sti}(C \text{sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(d))_i \right) \\ &= \partial \left( - \sum_{j=1}^n \underline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] - x_i + (\text{sti}(d))_i \right) \\ &= -\partial \sum_{j=1}^n \underline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] - e_i \\ &= - \sum_{j=1}^n \partial \left( \underline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] \right) - e_i \end{aligned}$$

для  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , и

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F}_i(x) &= \partial \left( (\text{sti}(C \text{sti}^{-1}(x)))_i - x_i + (\text{sti}(d))_i \right) \\ &= \partial \left( \sum_{j=1}^n \overline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] - x_i + (\text{sti}(d))_i \right) \\ &= \partial \sum_{j=1}^n \overline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] - e_i \\ &= \sum_{j=1}^n \partial \left( \overline{c_{ij}} [-x_j, x_{j+n}] \right) - e_i \end{aligned}$$

для  $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$ .

## 3 Результаты

### 3.1 Тестовый пример 1

С помощью субдифференциального метода Ньютона вычислим решение системы интервальных линейных уравнений вида  $x = Cx + d$ , где

$$C = \begin{pmatrix} [4, 6] & [-9, 0] & [0, 12] \\ [0, 1] & [6, 10] & [-1, 1] \\ [0, 3] & [-20, -9] & [12, 77] \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} [-10, 95] \\ [35, 14] \\ [-6, 2] \end{pmatrix}$$

При значении  $\tau = 1$  алгоритм находит формальное решение за 3 итерации:

$$\begin{pmatrix} [-1.57, 15.56] \\ [6.12, -0.28] \\ [-0.05, 0.13] \end{pmatrix},$$

### 3.2 Тестовый пример 2

С помощью субдифференциального метода Ньютона вычислим решение системы интервальных линейных уравнений вида  $x = Cx + d$ , где

$$C = \begin{pmatrix} [8, 14] & [-6, 1] & [10, 17] \\ [0, 2] & [3, 5] & [-2, 1] \\ [-5, 10] & [2, 7] & [6, 82] \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} [4, 95] \\ [-6, 46] \\ [-2, 65] \end{pmatrix}$$

При значении  $\tau = 1$  алгоритм находит формальное решение за 2 итерации:

$$\begin{pmatrix} [63.21, -32.45] \\ [-26.48, 22.18] \\ [-74.79, 39.05] \end{pmatrix},$$

## 4 Вывод

1. Реализован субдифференциальный метод Ньютона на языке программирования Python.
2. Результаты тестов свидетельствуют о высокой скорости сходимости метода.