UTN.BA

Teoría de Circuitos 1

Divertidas notas de clase
Diagramas de Bode

Diego Sebastián Sica
@SicaTc1
Versión 1.0

Apreciadas/os alumnas/os: El objetivo primordial de este documento, derivado de las notas de clases, es acercarles material que los referencie a los temas desarrollados durante nuestros encuentros. Está preparado con un enfoque basado en el alumno y realizado con mucha pasión, y si bien espero que lo consulten, los aliento fuertemente a que no dejen de leer la bibliografía. Destaco que las figuras y citas que eventualmente fueran empleadas tienen el único propósito de conformar el presente escrito y no pretenden obtener ningún beneficio adicional que pudiera afectar los derechos de los autores, a quienes se reconocen como fuente. Lejos del idealismo de la perfección, aceptaré agradecido sus sugerencias.

Diagramas de Bode

1. Introducción

Ya hemos hablado bastante en clase respecto a la importancia de poder estudiar el comportamiento de un sistema en el dominio de la frecuencia, y que una herramienta muy útil para representar ese comportamiento son los diagramas de Bode. Así que iré describiendo algunas cuestiones en forma compacta (porque ya le dedicamos tiempo suficiente en clase), y otras en forma más detallada (para apoyar lo trabajado). Vamos entonces!

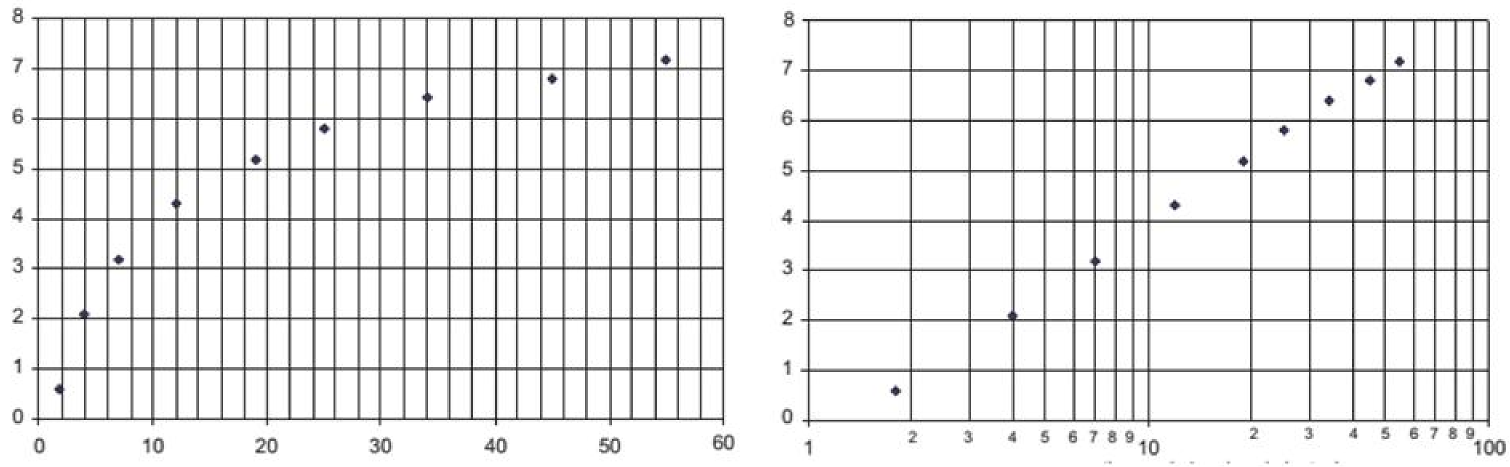
Una función de transferencia senoidal $G(j\cdot\omega)$ (o como también la llamamos, función de red) se caracteriza por su respuesta en magnitud y en fase. Los diagramas de Bode están formados por dos gráficos. En uno de ellos se grafica el logaritmo de la magnitud de la transferencia senoidal en función de la frecuencia angular, y en el otro se traza el ángulo de fase de dicha transferencia, también en función de la frecuencia angular.

En cuanto a las escalas, la magnitud se representa en una escala lineal en decibeles, y el ángulo de fase en una escala lineal en grados o en radianes. En ambos casos, el eje de la frecuencia se expresa en escala logarítmica. En ocasiones, se puede emplear también una escala de frecuencia normalizada. Ambas curvas se trazan en un gráfico semilogarítmico, con escala logarítmica para la frecuencia (eje horizontal, o variable independiente) y escala lineal para la magnitud (en decibeles) o el ángulo de fase (en grados).

La representación común de la magnitud logarítmica de $G(j\cdot\omega)$ es $20 \cdot \log \left| G(j\cdot\omega) \right|$, en donde la base del logaritmo es 10. La unidad que se usa en esta representación de magnitud es el decibel (recuerden por qué se usa 20 y no 10).

Las razones de frecuencias se expresan en términos de octavas o décadas. La octava de una frecuencia angular cualquiera ω_1 es $2\omega_1$ (el doble). La década de otra frecuencia cualquiera ω_2 es $10\omega_2$. En una escala logarítmica, cualquier razón de frecuencia se representa por la misma distancia horizontal. Por ejemplo, la distancia horizontal de $\omega = 1$ a $\omega = 10$ es igual a la distancia entre $\omega = 3$ y $\omega = 30$.

Miren como queda una representación de algunos puntos en escala lineal y en escala semilogarítmica (vertical lineal, horizontal logarítmica). Esta característica podría corresponder a la carga de un capacitor en función del tiempo.



La ventaja principal de usar los diagramas de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en adición (siempre asegurarse que se puede aceptar como válida tal multiplicación; recuerden el caso de los dos circuitos RC conectados en cascada sin un adaptador de impedancia no se pueden multiplicar). Además, cuenta con un método simple para trazar una curva aproximada de magnitud logarítmica, el cual se basa en aproximaciones asintóticas. Estas aproximaciones, mediante líneas rectas, son suficientes si sólo se necesita información general sobre la característica de respuesta en frecuencia. Sin embargo, si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas.

Se utiliza en el eje de las frecuencias una escala logarítmica para ampliar el rango a frecuencias bajas, dado que en los sistemas prácticos las características de las frecuencias bajas son más importantes. Obviamente no es posible graficar las curvas hasta una frecuencia cero en escala logarítmica, pero esto no representa una limitación seria.

2. Construcción de diagramas de Bode.

Para estudiar estos diagramas, consideraremos cuatro casos que corresponden a factores básicos que por lo general forman parte de una función transferencia arbitraria. La gracia de este enfoque, es que si logramos manejar estos cuatro casos, podremos realizar diagramas de Bode de casi cualquier transferencia que nos propongamos. Estos cuatro factores son:

1. Una constante *K*.
2. Factores de integral o derivada, $(j\omega)^{-1}$ y $j\omega$.
3. Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
4. Factores cuadráticos $[1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2]^{\pm 1}$

2.1. Factor de ganancia *K.*

Sabemos que un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibeles, en tanto que uno menor que 1 tendrá un valore negativo, ya que la referencia de 0 dB corresponde a una relación en veces igual a 1.

La curva de magnitud en función de la frecuencia será una recta horizontal de valor $20\log(K)$ en decibeles, y su ángulo de fase será cero. El efecto de cambiar el valor de *K* es el de subir o bajar la recta, pero no afecta su fase. Por ejemplo, sea que la constante *K* aumenta diez veces, tendremos:

$$K\ [dB] = 20\log(K)$$

$$Kx10\ [dB] = 20\log(Kx10) = 20\log(K) + 20\log(10) = 20\log(K) + 20$$

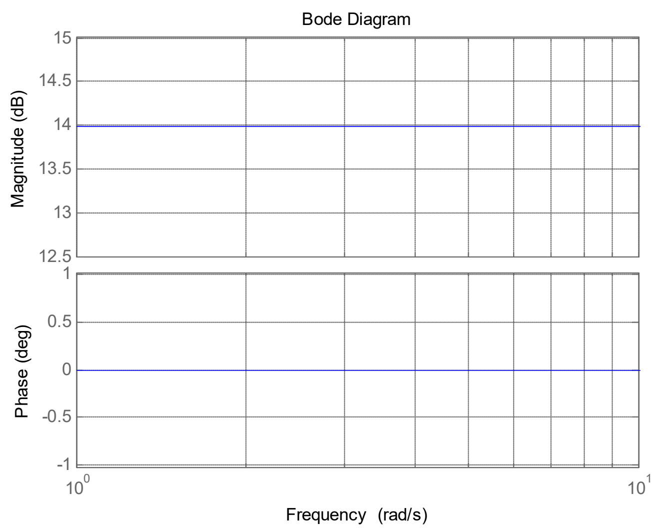
Obviamente, extendiendo la idea al caso que la constante *K* se multiplica por 10^n, tendremos:

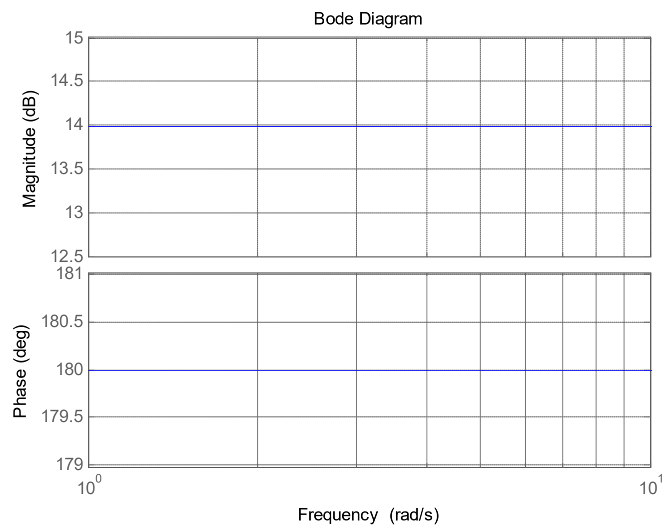
$$Kx10^n\ [dB] = 20\log(Kx10^n) = 20\log(K) + 20\log(10^n) = 20\log(K) + 20n$$

También observen que cuando trabajamos en decibeles, el recíproco de una constante es el mismo valor en decibeles pero con el signo opuesto:

$$K^{-1}\ [dB] = 20\log(K^{-1}) = -20\log(K)$$

Les muestro abajo ejemplos para un valor de *K = 5* y *K = - 5.*





2.2. Factor de integrales y derivadas $(j\omega)^{-1}$ y $j\omega$ (polos y ceros en el origen)

La magnitud logarítmica de una función transferencia representada por un polo en el origen será:

$$20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log(\omega)$$

y su ángulo de fase será -90° (fíjense que se corresponde a un polo sobre el eje $j\omega$ en el semiplano inferior.

Si graficáramos la magnitud $-20\log(\omega)$ en función de ω en una escala semilogarítmica, obtendríamos una recta. Para trazar esa recta, necesitamos identificar un punto, por ejemplo 0 dB y $\omega = 1$, y dado que:

$$-20\log(10x\omega) = -20\log(\omega) - 20$$

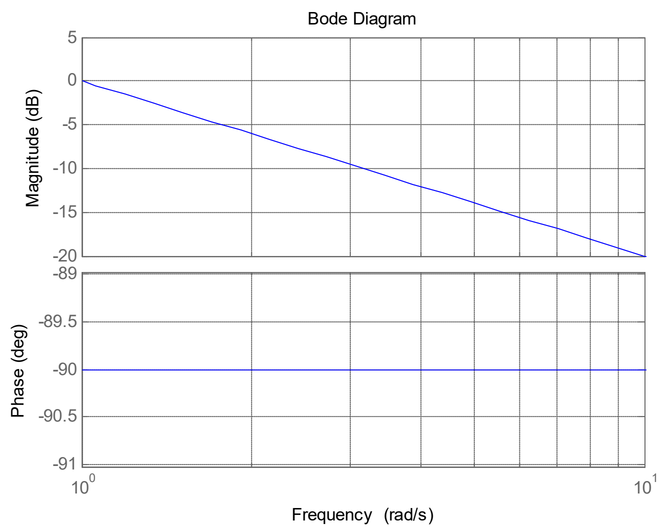
de donde advertimos que la pendiente de la recta es – 20 dB/década o – 6 dB por octava.

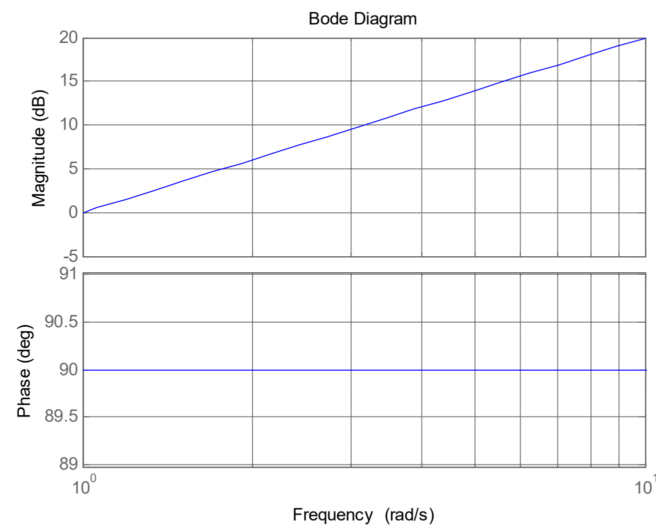
De la misma manera, la magnitud logarítmica de una transferencia $j\omega$ será:

$$20\log|j\omega| = 20\log(\omega)$$

lo cual nos arroja la gráfica de una recta con pendiente de + 20 dB/década o + 6 dB por octava. Su ángulo de fase será constante e igual a 90°.

Les copio los dos diagramas de Bode que se obtienen por MatLab.





Se observa que las diferencias entre ambos casos se manifiestan en los signos de las pendientes y en los signos de las fases. Noten que ambas magnitudes valen 0 dB para $\omega = 1$ rad/seg.

Si las funciones transferencias tuvieran un polo o un cero de orden *n*, las magnitudes logarítmicas se convertirían en:

$$20\log\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| = -n20\log(\omega)$$

para el caso del polo, y

$$20\log|(j\omega)^n| = n20\log(\omega)$$

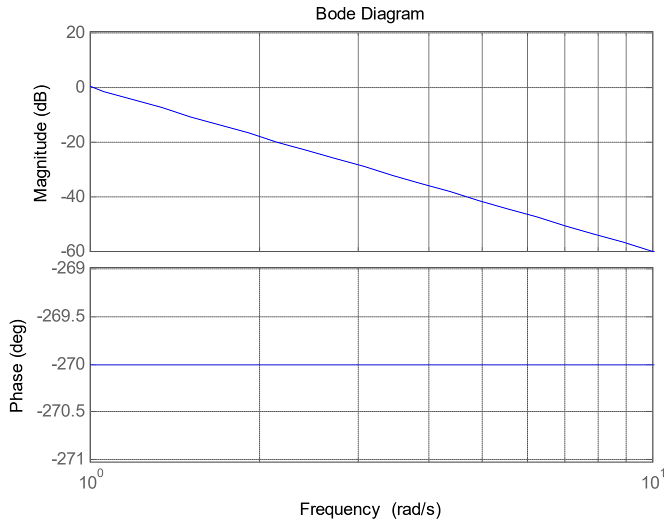
para el caso del cero.

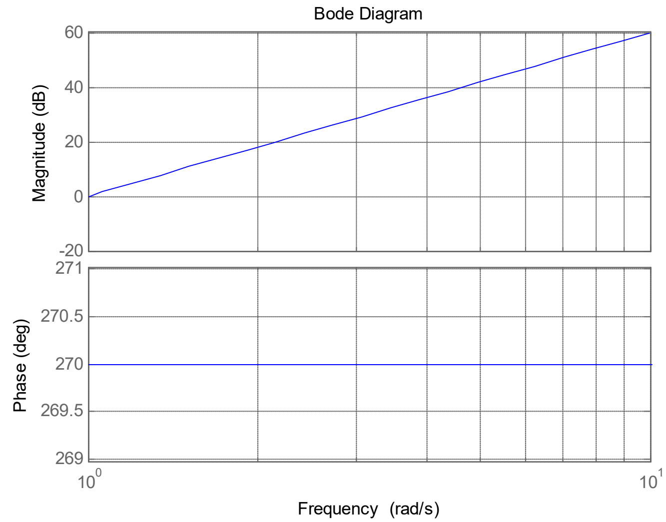
Los ángulos de fase se modifican a:

$$\emptyset\left[\frac{1}{(j\omega)^n}\right] = -n90°$$

$$\emptyset[(j\omega)^n] = +n90°$$

para el polo y para el cero de orden *n*, respectivamente. Las siguientes curvas muestran los diagramas de bode para el caso de polos y ceros en el origen, de orden *n* = 3.





2.3. Factor de integrales y derivadas (1+jωT)$^{\pm 1}$

La magnitud logarítmica de un factor de primer orden en el denominador, asociado a un polo simple, será:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}$$

Para frecuencias muy bajas comparadas con $\frac{1}{T}$, es decir para $\omega \ll \frac{1}{T}$, la amplitud logarítmica será:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\Bigg|_{\omega\ll\frac{1}{T}} \cong -20\log\sqrt{1} = 0\ dB$$

En el caso de frecuencias muy elevadas en relación a $\frac{1}{T}$, es decir para $\omega \gg \frac{1}{T}$ tendremos:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\Bigg|_{\omega\gg\frac{1}{T}} = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2} \cong -20\log\sqrt{\omega^2T^2} = -20\log\omega T$$

La pregunta que sigue es: Qué pasa cuando $\omega = \frac{1}{T}$? Reemplazo y sale con fritas:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\Bigg|_{\omega=\frac{1}{T}} = -20\log\sqrt{1+1} = -20\log\sqrt{2} = -3.03\ dB$$

Resumiendo:

- Tenemos dos asíntotas, una para frecuencias mucho más bajas que $\frac{1}{T}$, y otra asíntota para frecuencias mucho más altas que $\frac{1}{T}$.
- A la frecuencia tal que $\omega = \frac{1}{T}$, el módulo de la transferencia en decibeles vale -3.03 dB.
- Si hacemos las cuentas para frecuencias $\omega = nx10x\frac{1}{T}$, observamos que para frecuencias mayores que $\omega = 10\ \frac{1}{T}$, el valor calculado con la expresión general coincide en muy buen grado con la asíntota.
- Si hacemos las cuentas para frecuencias $\omega = \frac{1}{nx10}\frac{1}{T}$, observamos que para frecuencias menores que $\omega = \frac{1}{10}\frac{1}{T}$, el valor calculado con la expresión general coincide en muy buen grado con la asíntota.
- La asíntota para frecuencias mucho mayores que $\omega = \frac{1}{T}$, presenta una característica lineal de pendiente – 20 dB por década:

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\Bigg|_{\omega=\frac{10}{T}} = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{10}{T}\right)^2 T^2} \cong -20\log\sqrt{101} = -20\text{ dB}$$

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\Bigg|_{\omega=\frac{100}{T}} = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{100}{T}\right)^2 T^2} \cong -20\log\sqrt{10001} = -40\text{ dB}$$

- La frecuencia a la cual las dos asíntotas se cruzan, se denomina frecuencia de esquina o frecuencia de corte. En el entorno de esa frecuencia, los diagramas asintóticos y reales no son equivalentes, ya que presentan diferencias.
- Esta frecuencia de corte divide el diagrama en dos regiones claramente diferenciadas.

El ángulo de fase para el factor $\frac{1}{1+j\omega T}$ es:

$$\emptyset\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right] = \emptyset[1] - \emptyset[1+j\omega T] = 0 - \emptyset[1+j\omega T] = -Arctg\left[\frac{\omega T}{1}\right] = -Arctg(\omega T) = -tg^{-1}(\omega T)$$

Para frecuencias muy bajas comparadas con $\frac{1}{T}$, es decir para $\omega \ll \frac{1}{T}$ (caso límite para frecuencia igual a cero), el ángulo de fase será:

$$\emptyset\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right]\Bigg|_{\omega\ll\frac{1}{T}} \cong 0°$$

En el caso de frecuencias muy elevadas en relación a $\frac{1}{T}$, es decir para $\omega \gg \frac{1}{T}$, (caso límite para frecuencia tendiendo a infinito):

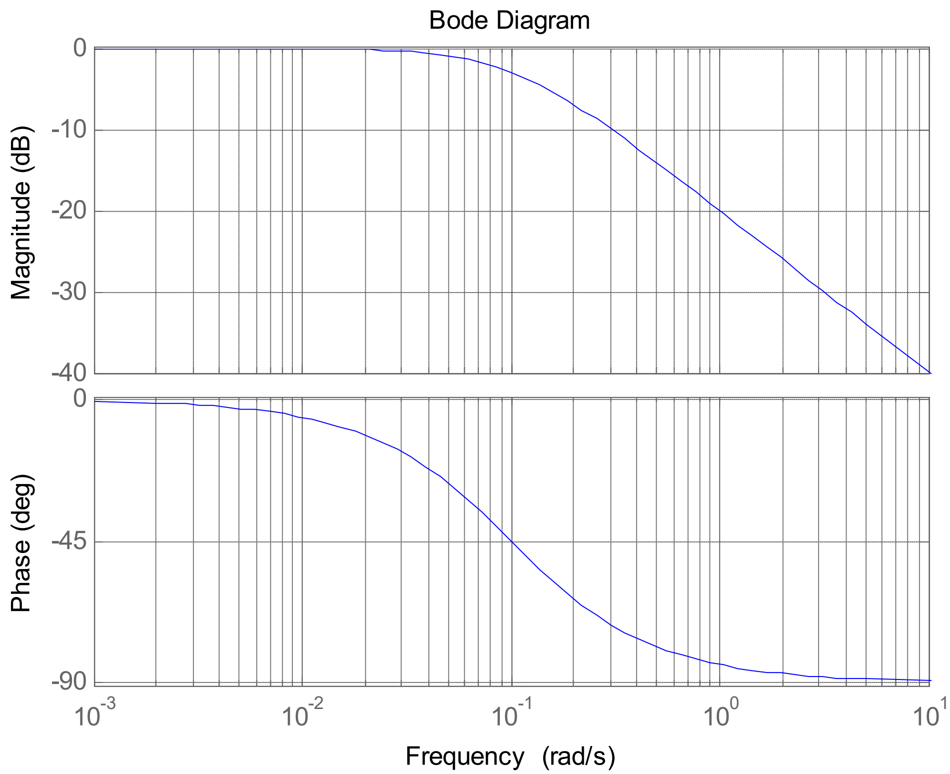
$$\emptyset\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right]\Bigg|_{\omega\gg\frac{1}{T}} = -tg^{-1}(\omega T) \cong -90°$$

Para $\omega = \frac{1}{T}$

$$\emptyset\left[\frac{1}{1+j\omega T}\right]\Bigg|_{\omega=\frac{1}{T}} = -tg^{-1}(\omega T) = -tg^{-1}(1) = -45°$$

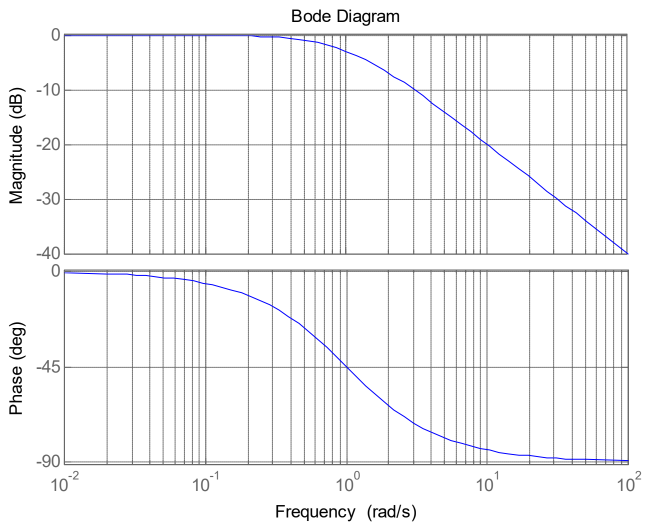
Tendremos así dos asíntotas, una para frecuencias bajas respecto $\frac{1}{T}$ que será $0°$, y otra para frecuencias altas que será $-90°$.

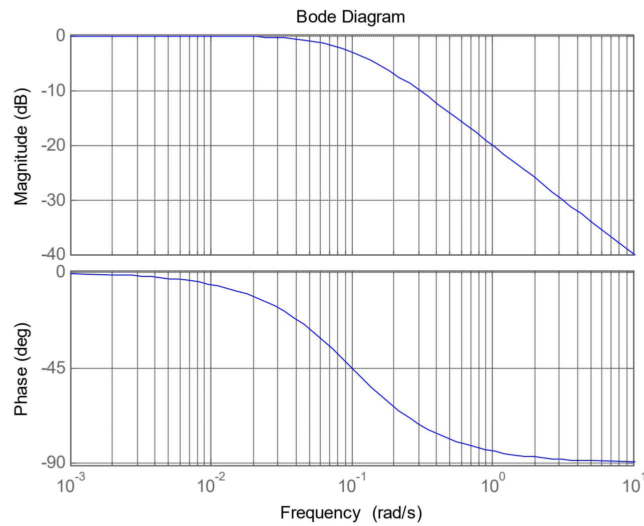
A continuación podrán ver un ejemplo para T = 10 seg.



Dado que las asíntotas son fáciles de dibujar tanto para el módulo como para la fase, y están muy cerca de la curva real en todo el rango de frecuencias excepto en el entorno de $\frac{1}{T}$ (una década antes y una década después), los diagramas de Bode son muy prácticos para que con un mínimo de cuentas, podamos darnos cuenta cuáles son la características generales de la respuesta en frecuencia. Si se requiere exactitud, no quedará otra que realizar lo cálculos con más detenimiento.

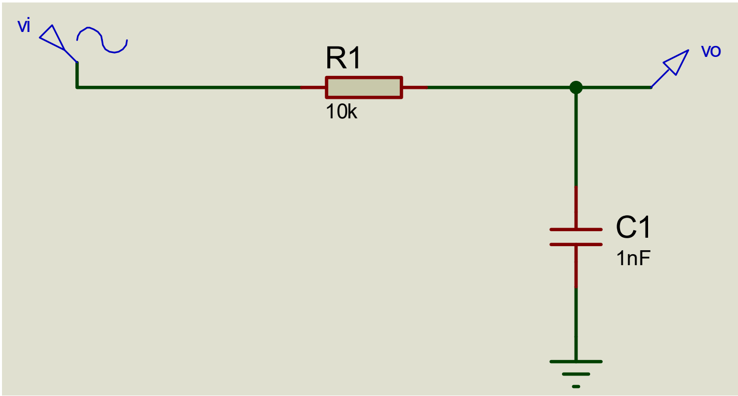
Es de notar que si se cambia el valor de la constante de tiempo T, la forma del gráfico no cambia, sino que lo hacen los valores de referencia en el eje de las frecuencias. Comparen las figuras de los diagramas de Bode para dos constantes de tiempo distintas (una igual a 10 seg, y otra igual a 1 seg):



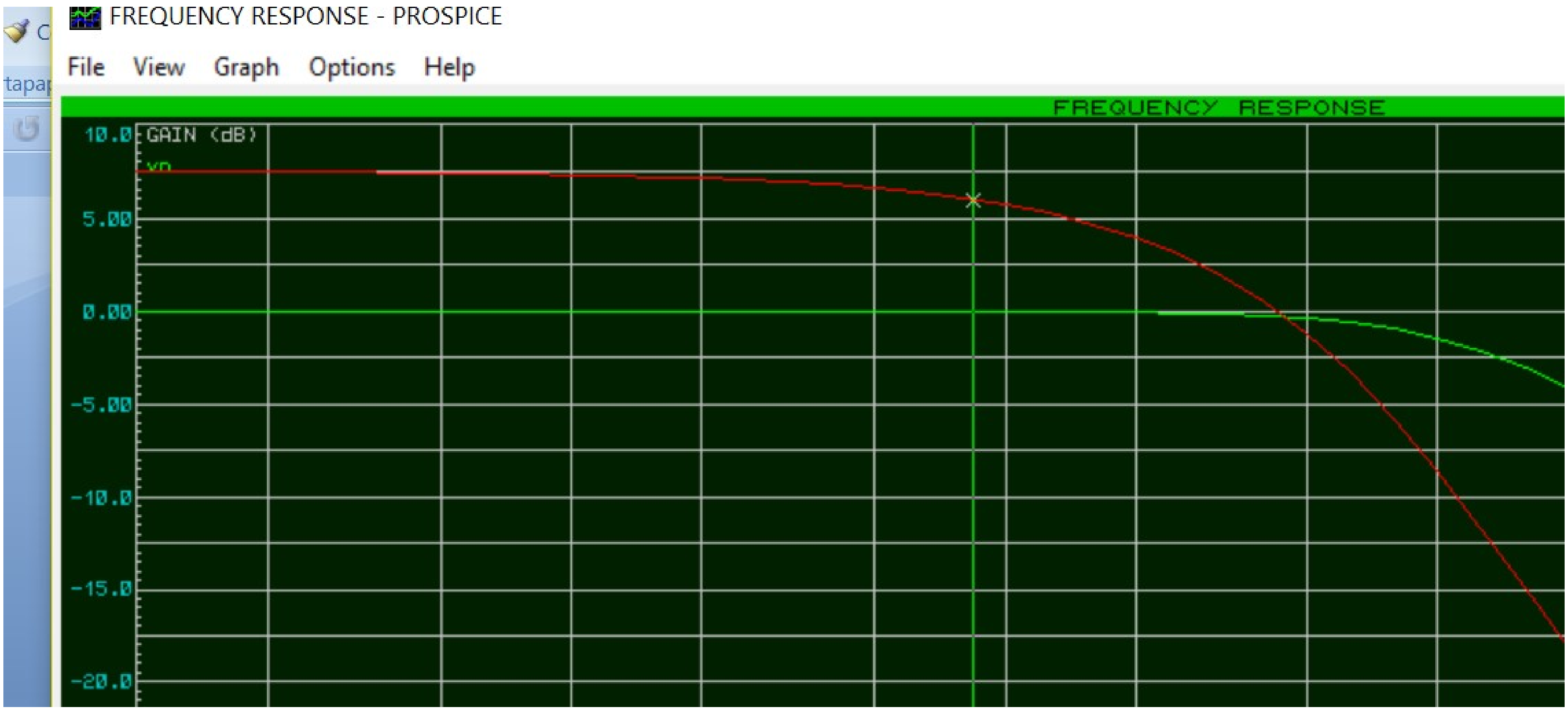


El factor $\frac{1}{1+j\omega T}$ tiene una característica de respuesta pasa bajos, ya que para frecuencias por encima de $\frac{1}{T}$ la magnitud logarítmica disminuye monotónicamente. Este efecto se debe a la presencia de la constante de tiempo. Si por ejemplo trabajáramos con una señal senoidal, a frecuencias bajas respecto a $\frac{1}{T}$, la salida seguiría fielmente a la entrada. Pero a medida que aumentamos la frecuencia, la salida no podrá seguir a la entrada ya que su tiempo de respuesta será mucho mayor que el período en el que se producen las variaciones. Si la señal de entrada tuviera varios armónicos, las componentes de baja frecuencia no se verían tan afectadas, mientras que las altas frecuencias serían atenuadas y desfasadas.

Les comparto un ejemplo de un filtro pasa bajos RC, hecho con un simulador:



cuya respuesta en frecuencia es:



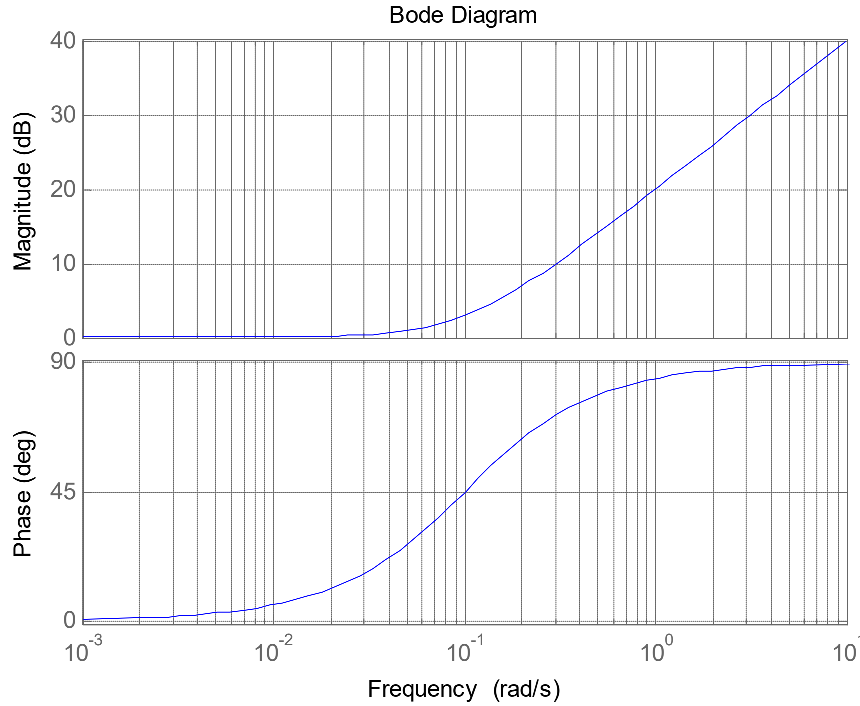
Verifiquen el valor del módulo (en verde) y fase (en rojo) a la frecuencia de corte, y la pendiente a las frecuencias altas.

Otra de las ventajas de los diagramas de Bode es que para los factores $1 + j\omega T$, no es necesario que repensemos todo de nuevo, dado que las curvas solamente necesitan cambiarse de signo, dado que:

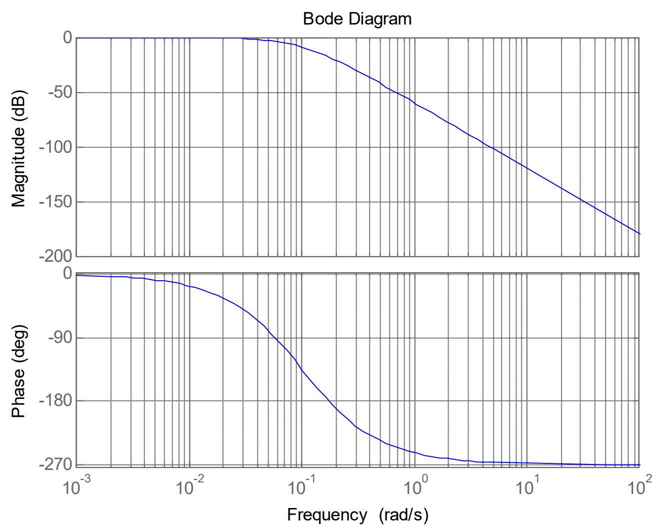
$$20\log|1 + j\omega T| = -20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$

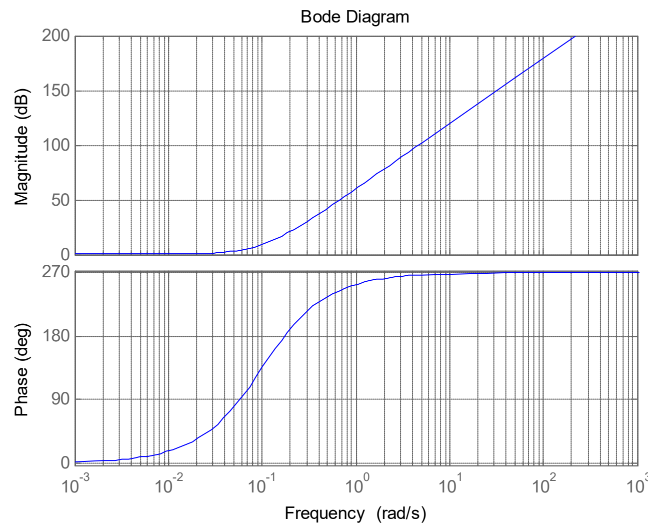
$$\emptyset[1 + j\omega T] = \emptyset[1 + j\omega T] - \emptyset[1] = \emptyset[1 + j\omega T] - 0 = Arctg\left[\frac{\omega T}{1}\right] = Arctg(\omega T) = -\emptyset\left[\frac{1}{1 + j\omega T}\right]$$

La frecuencia de corte será igual para ambos casos, y la pendiente de la asíntota para frecuencias mayores a la frecuencia de codo será de +20 dB/dec. Dos gráficos hablan más que mil palabras:



Para el caso en que una dada función transferencia tenga términos $(1 + j\omega T)^{\pm n}$, se hace una construcción similar cambiando las pendientes a *±n x 20 dB* por década, y se multiplican las fases por *±n*. Vean dos ejemplos para *T = 10 seg y y n = ±3*.





2.4. Factores cuadráticos $\left[\mathbf{1}+\mathbf{2}\xi\frac{\boldsymbol{j\omega}}{\boldsymbol{\omega_n}}+\left(\frac{\boldsymbol{j\omega}}{\boldsymbol{\omega_n}}\right)^{\mathbf{2}}\right]^{\pm\mathbf{1}}$:

Muchos sistemas electrónicos lineales tendrán factores de la forma:

$$\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Ya de ASyS y de lo que hemos trabajado en clase sabemos interpretar qué representan ξ y ω_n en un factor $\mathbf{1}+\mathbf{2}\xi\frac{\boldsymbol{j\omega}}{\boldsymbol{\omega_n}}+\left(\frac{\boldsymbol{j\omega}}{\boldsymbol{\omega_n}}\right)^{\mathbf{2}}$**.** Si ξ>1, sabemos que el factor cuadrático tiene raíces reales. Si 0 < ξ < 1, tendremos dos raíces complejas conjugadas.

Para el caso de un factor cuadrático en el denominador, los diagramas asintóticos de magnitud se obtienen analizando frecuencias muy por debajo y muy por encima de ω_n. Entonces:

$$20log\left|\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para frecuencias $\omega \ll \omega_n$

$$20log\left|\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|\Bigg|_{\omega\ll\omega_n} \cong -20log\sqrt{(1-0)^2+(0)^2} = 0\ dB$$

y para $\omega \gg \omega_n$

$$20log\left|\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right|\Bigg|_{\omega\gg\omega_n} \cong -20log\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+0} = -40log\frac{\omega}{\omega_n}$$

Esta última relación lo que nos dice es que por cada década que aumenta ω, el módulo de la transferencia cae 40 dB.

Las dos asíntotas de bajas y altas frecuencias se cruzan en $\omega = \omega_n$, que es la frecuencia de corte. Peeeeeero, nos damos cuenta que en ninguna de las asíntotas aparece el invitado de lujo: ξ. Entonces, no quedará otra que hacer algunos cálculos del módulo de la transferencia para valores de frecuencia cercanos a ω_n, teniendo en cuenta ξ . Como ya hemos discutido, se aprecian dos comportamientos distintos: uno cuando $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ y otro cuando $\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$. De esta manera descubrimos que para el caso $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, aparecen picos en la característica, que son más pronunciados mientras más bajo es ξ. La verdad es que para el entorno de ω_n, debe recurrirse a un poco más de esfuerzo para obtener las curvas exactas.

El ángulo de fase del factor cuadrático $\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$ es:

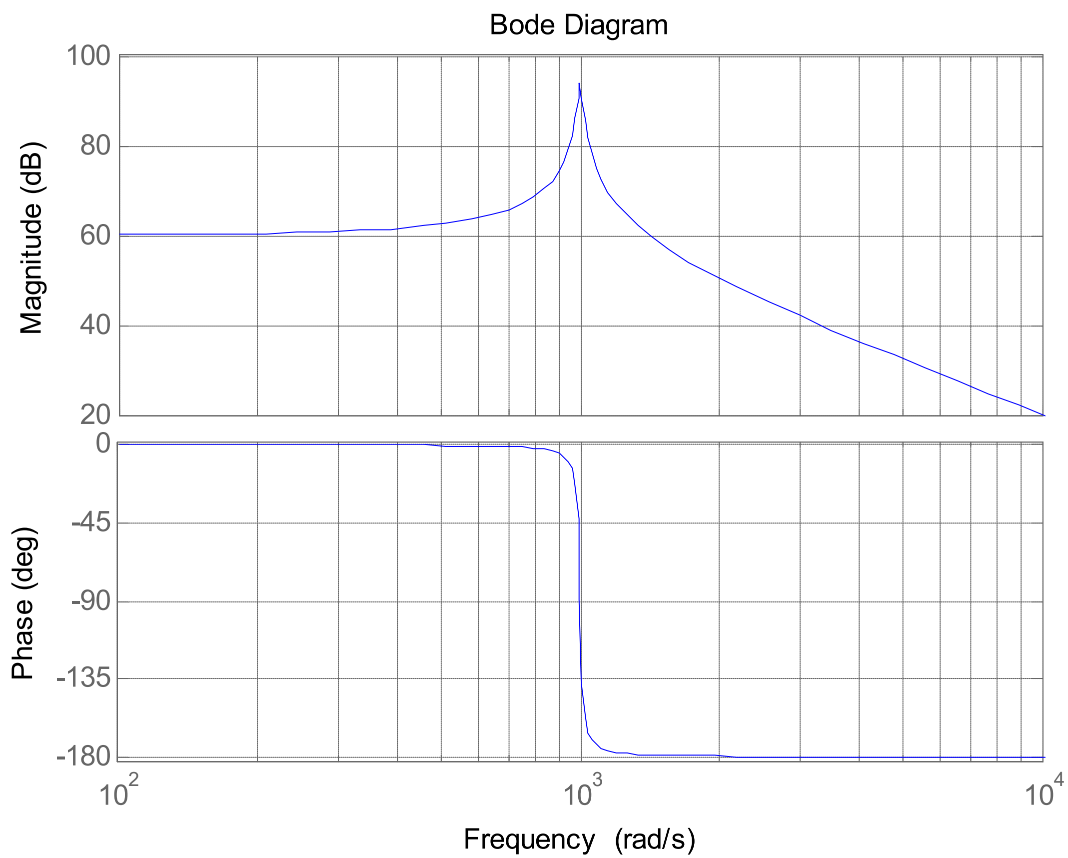
$$\emptyset\left[\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] = 0° - Arctg\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Naturalmente, el ángulo de fase del factor cuadrático dependerá de ξ y de ω_n. Noten también, que cuando $\omega = 0\ \frac{1}{seg}$, la fase es 0°. Para $\omega = \omega_n$, se observa que el ángulo de fase es -90° independientemente del valor de ξ. Finalmente, cuando $\omega \to \infty$, la fase tiende a -180°.

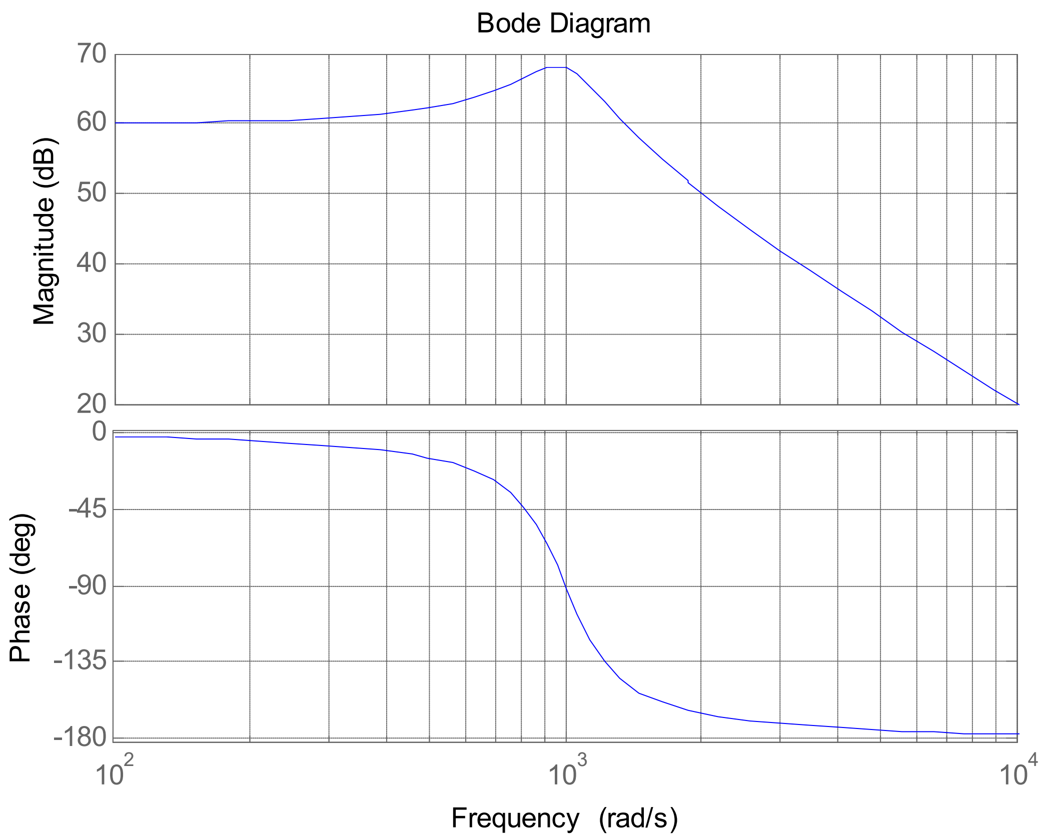
Las curvas para el factor cuadrático en el numerador, $1 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$, pueden obtenerse a partir de las correspondientes al factor $\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$ pero invirtiendo el signo.

Les comparto unas figuras para el caso de un factor cuadrático en el denominador:

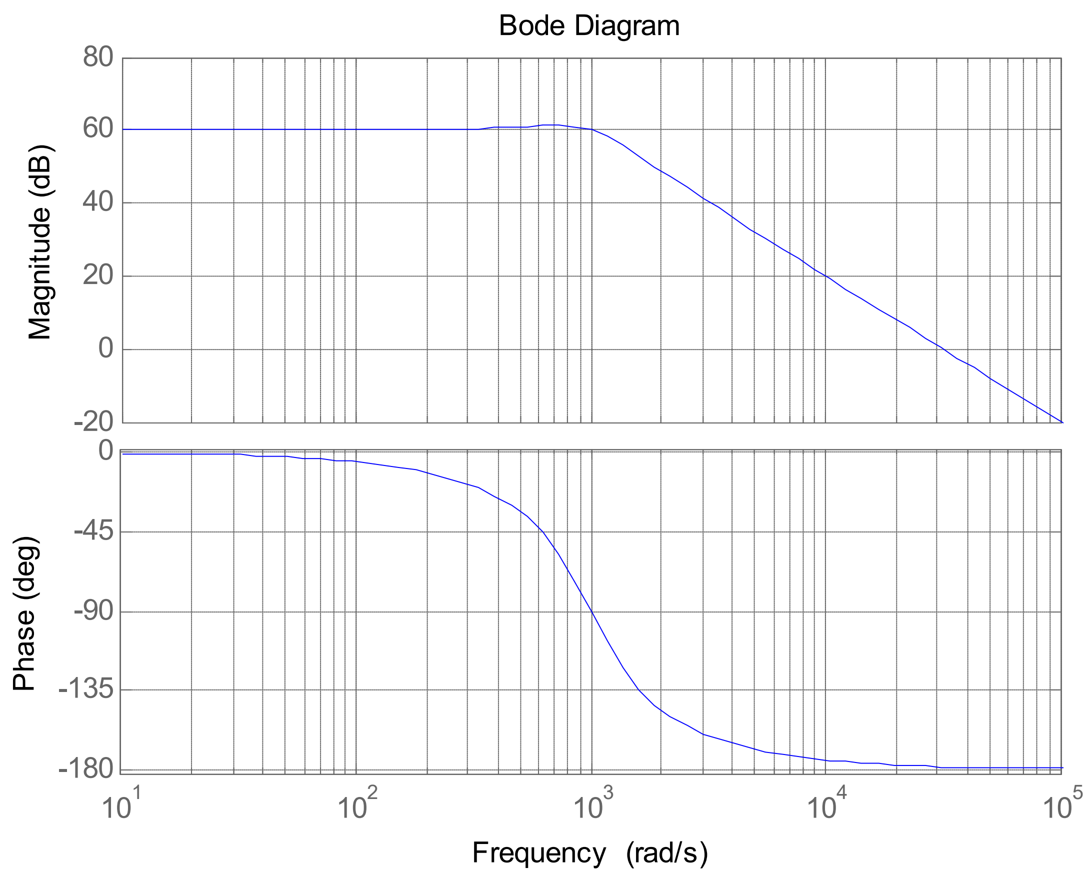
Para $\xi = 0.01$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:


Bode Diagram
Magnitude (dB)
100
80
60
40
20
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/s)

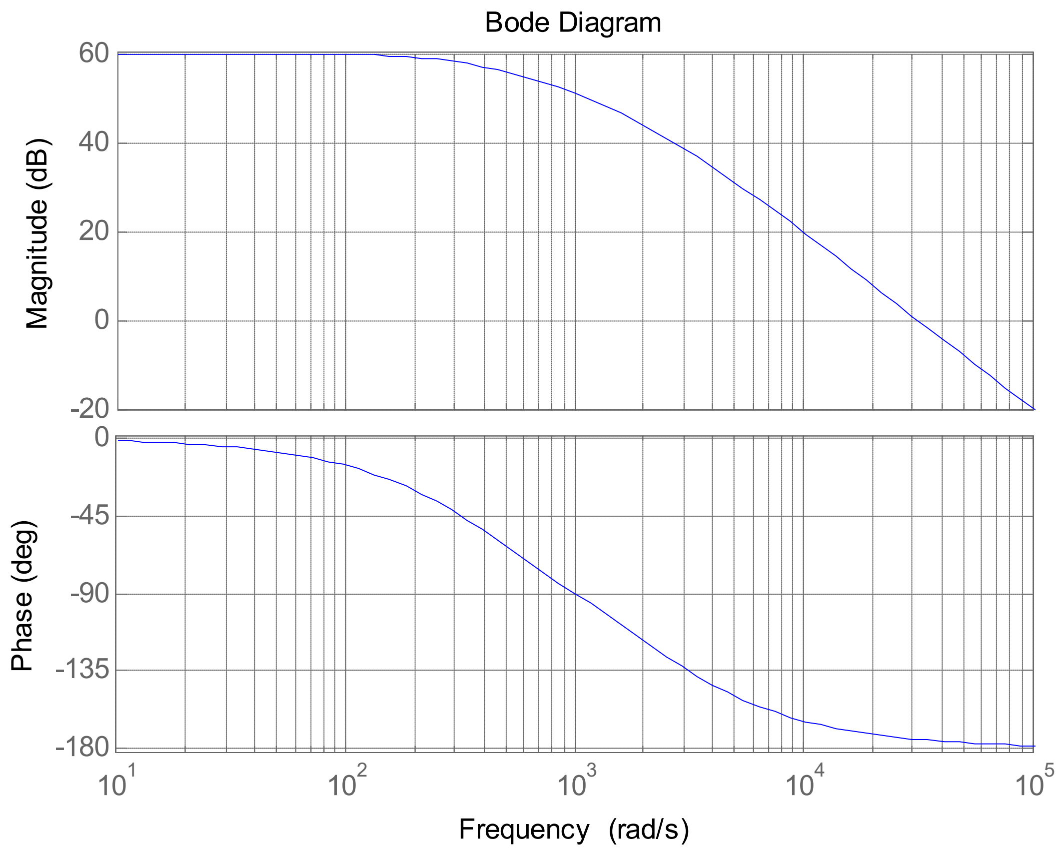
Para $\xi = 0.2$ y $\omega_n = 1000 \frac{1}{seg}$:



Para $\xi = 0.5$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:

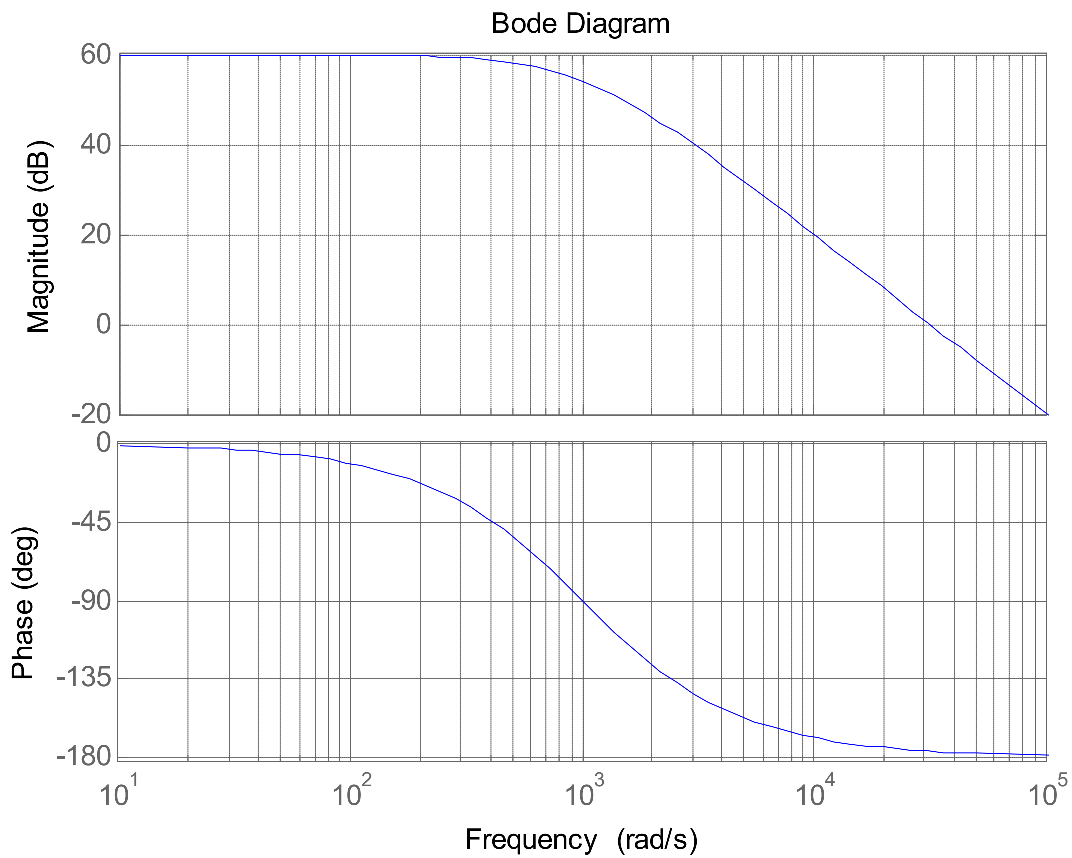


Para $\xi = 0.707$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:



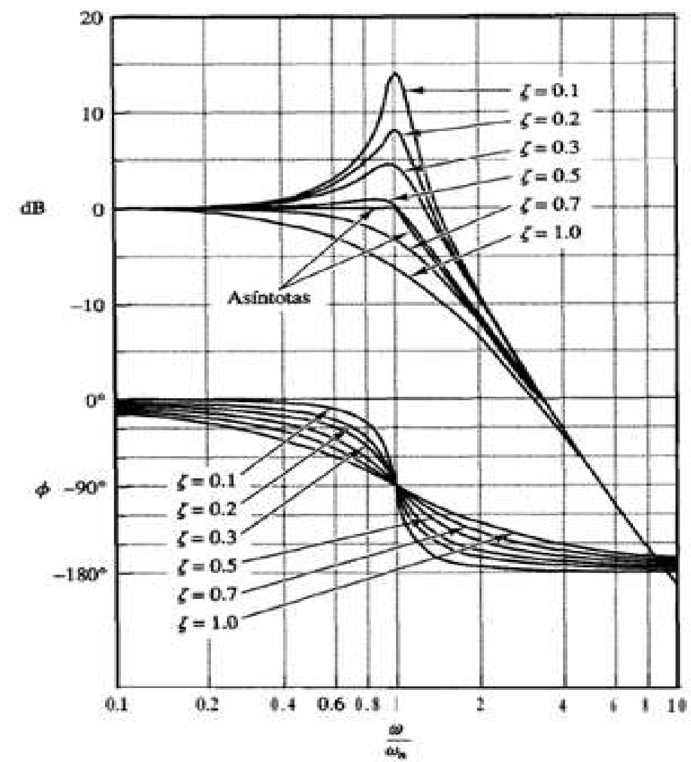
Fíjense cómo desapareció el sobrepico!

Para $\xi = 1$ y $\omega_n = 1000 \frac{1}{seg}$:



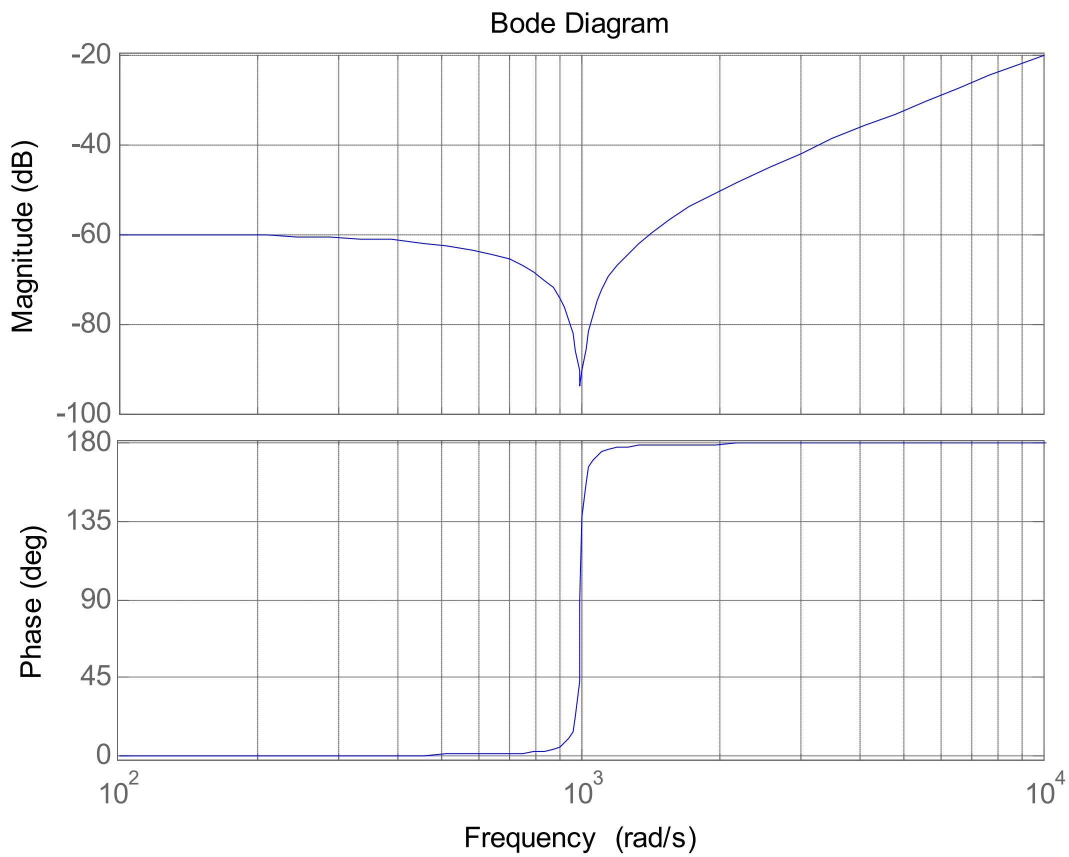
Ven que se parece a un sistema de primer orden, pero con una caída de 40 dB/década (en lugar de 20 dB/década), un cambio de fase de -180° (en lugar de -90°) y un valor de -6 dB respecto al valor de la asíntota horizontal en ω_n (en lugar de -3 dB)?

Les comparto una curva que presenta estas ideas, que les puede servir como referencia. Fíjense que el eje de la frecuencia está normalizado (referido a la frecuencia ω_n):

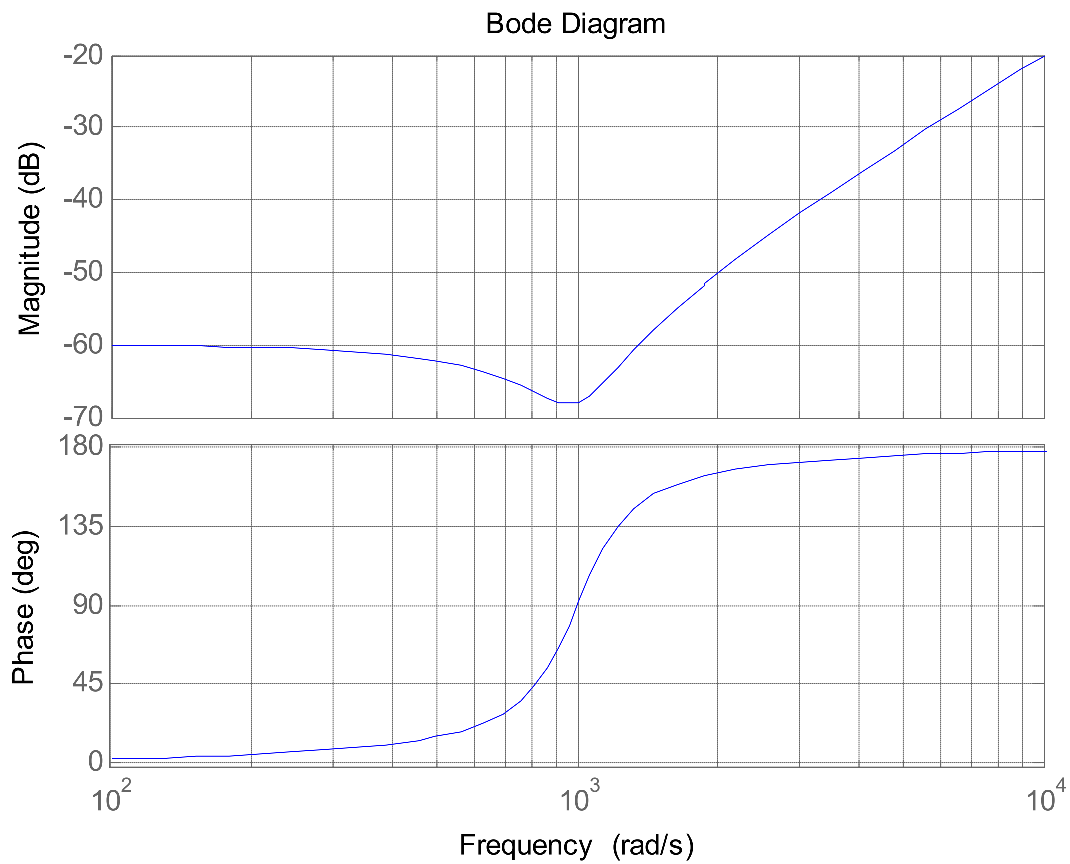


Vamos ahora a ver los diagramas de Bode para un factor cuadrático en el numerador:

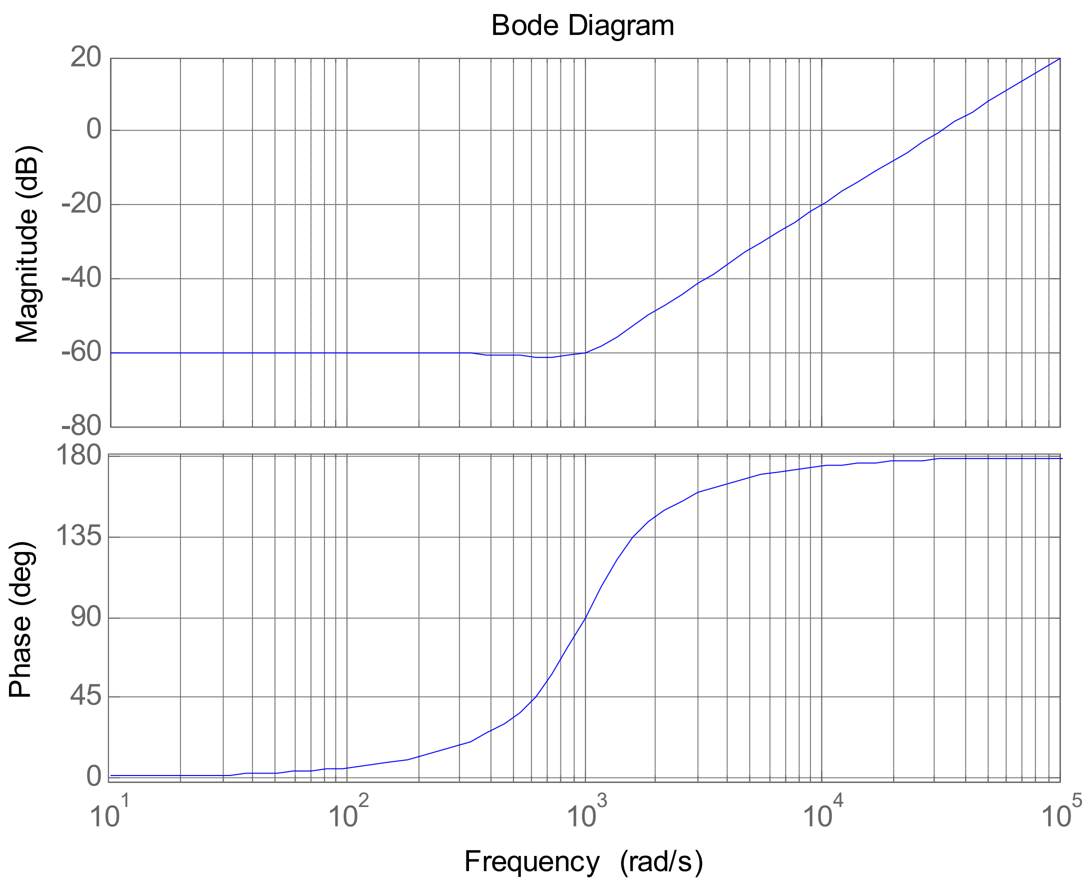
Para $\xi = 0.01$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:



Para $\xi = 0.2$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:

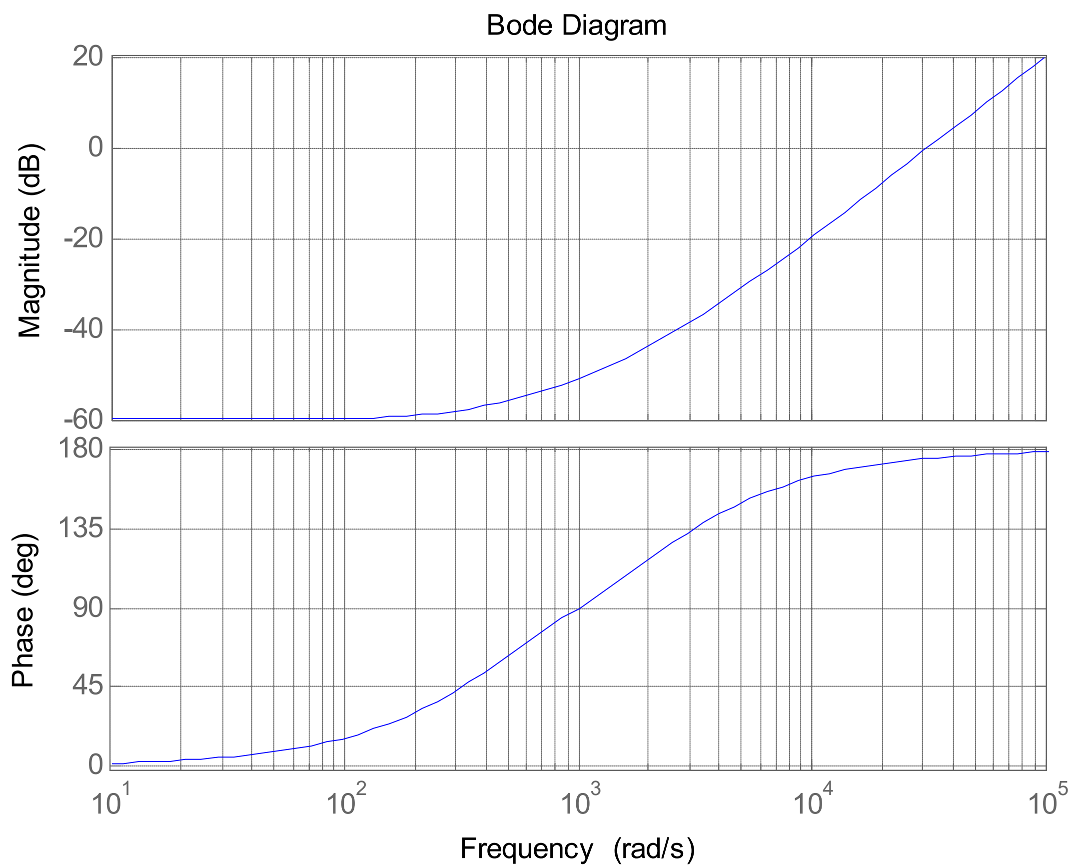


Para $\xi = 0.5$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:



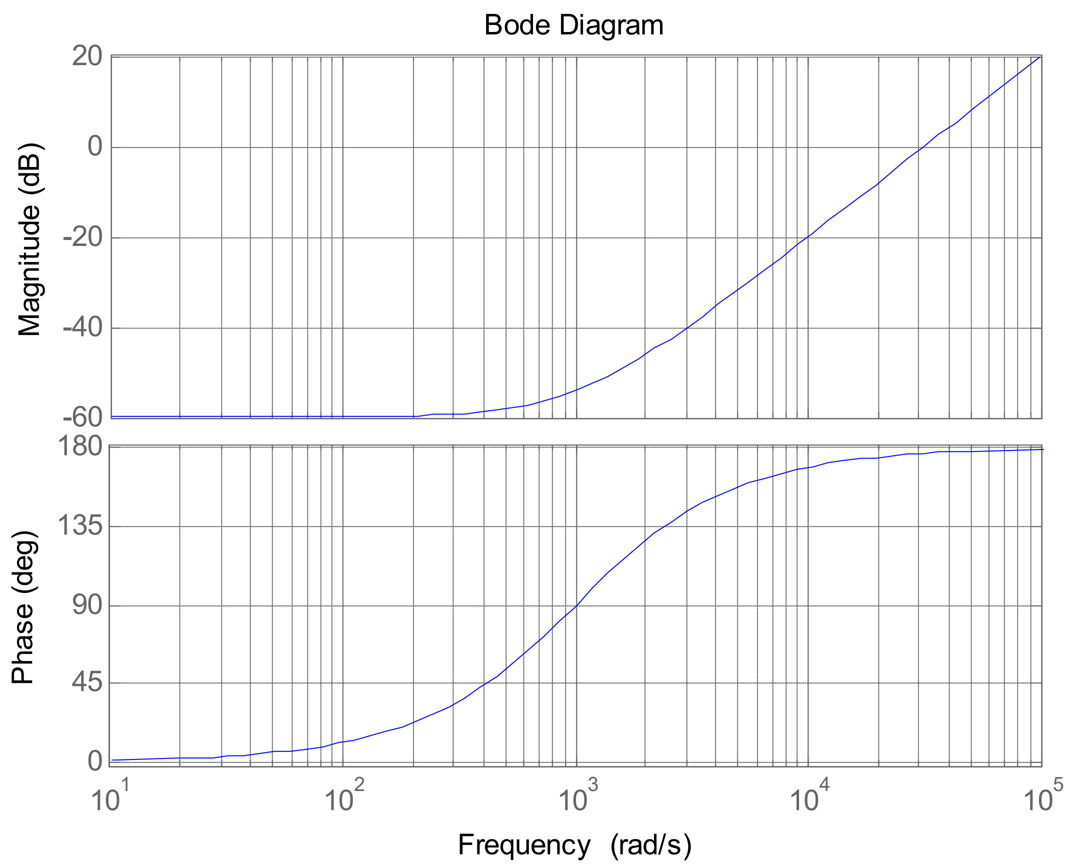
Noten cómo empieza a desaparecer el sobre pico!

Para $\xi = 0.707$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:



Esta es la situación en la que $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ya no hay más frecuencia de resonancia!

Para $\xi = 1$ y $\omega_n = 1000\frac{1}{seg}$:



Ven que se parece a un sistema de primer orden, pero con una subida de 40 dB/década (en lugar de 20 dB/década) , un cambio de fase de 180° (en lugar de 90°) y un valor de 6 dB respecto al valor de la asíntota horizontal en ω_n (en lugar de 3 dB)?

Como ya les conté en otro documento, podemos apreciar la presencia de un pico en la característica de magnitud. Derivando la expresión del módulo respecto a ω e igualando a cero, obtenemos que la frecuencia a la cual se produce el extremo local es:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

ES BUENO RECORDARLA Y MEJOR ENTENDERLA

cuando $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.. Recuerden que para $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi \leq 1$, aun existen oscilaciones temporales pero están mu amortiguadas.

O sea que la frecuencia de resonancia ω_r (así se la denomina), es menor que la frecuencia natural ω_n.

También saben que en los sistemas de segundo orden también existe otra frecuencia, denominada frecuencia amortiguada, que valía:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

que era la frecuencia de las oscilaciones temporales de por ejemplo, una respuesta al impulso. ω_d era la frecuencia asociada a las oscilaciones transitorias.

O sea que ordenando las cosas, tenemos:

$$\omega_r < \omega_d < \omega_n$$

Para conocer cuánto vale la magnitud del factor cuadrático cuando $\omega = \omega_r$, simplemente reemplazamos para obtener:

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

para $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ entonces $M_r = 1$.

A la frecuencia de resonancia, la fase valdrá:

$$\emptyset\left[\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]\Bigg|_{\omega=\omega_r} = -Arctg\left[\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right]$$

2.5. Procedimiento general para construir los diagramas de Bode.

Bueno, hemos llegado al momento! Cuando tenemos una función transferencia general y queremos obtener su diagrama de Bode, es conveniente seguir la siguiente receta:

1. Expresamos la función trasferencia como el producto de los factores básicos que hemos analizado, sin olvidar normalizar.
2. Identificamos y exteriorizamos las frecuencias características de dichos factores.
3. Graficamos los diagramas asintóticos para cada uno de los factores.
4. Sumamos punto a punto los diagramas asintóticos.
5. Aplicamos las correcciones necesarias y posibles para poder llegar a los diagramas reales.
6. Chan chan.

Les muestro un ejemplo (practiquen con la guía!). Sea la siguiente función transferencia:

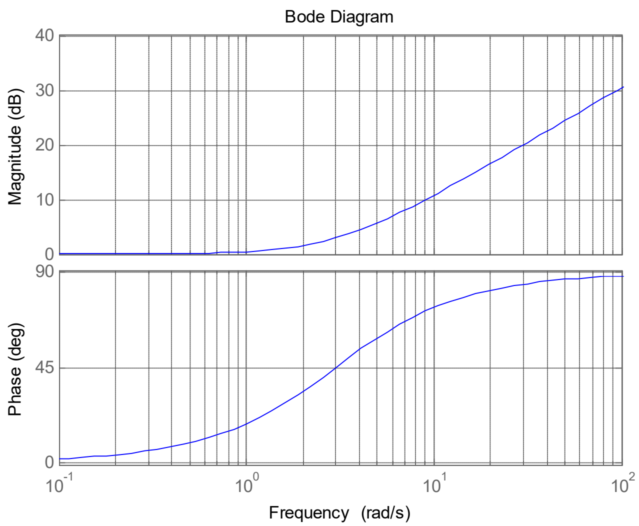
$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

Primero normalizamos:

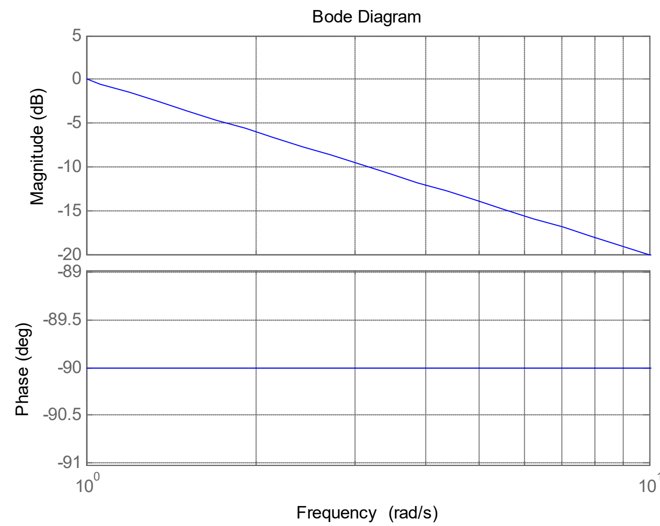
$$G(s) = \frac{10 \cdot 3(\frac{s}{3}+1)}{s \cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)2(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)} = 7.5\frac{(\frac{s}{3}+1)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)}$$

Tenemos un cero en $s = -3$, un polo en $s = 0$, otro polo en $s = -2$, y un par de polos complejos conjugados en -0.5000 + 1.3229i y -0.5000 - 1.3229i . Esto se traduce en que las frecuencias de corte de cada una de estas singularidades son $\omega = 0\frac{1}{seg}$, $\omega = 3\frac{1}{seg}$, $\omega = 2\frac{1}{seg}$, y $\omega_n = \sqrt{2}\frac{1}{seg}$. El coeficiente de amortiguamiento es $\xi = \frac{\sqrt{2}}{4}$

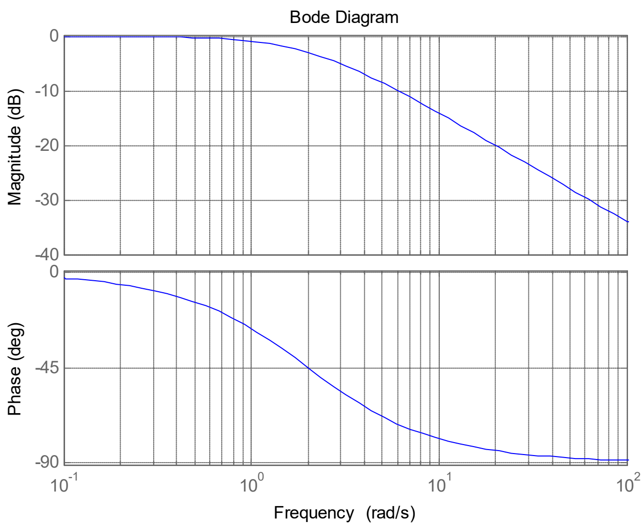
Les voy mostrando a continuación los bodes de cada uno de los términos en los que descomponemos la función transferencia para poder hacer el diagrama de Bode.



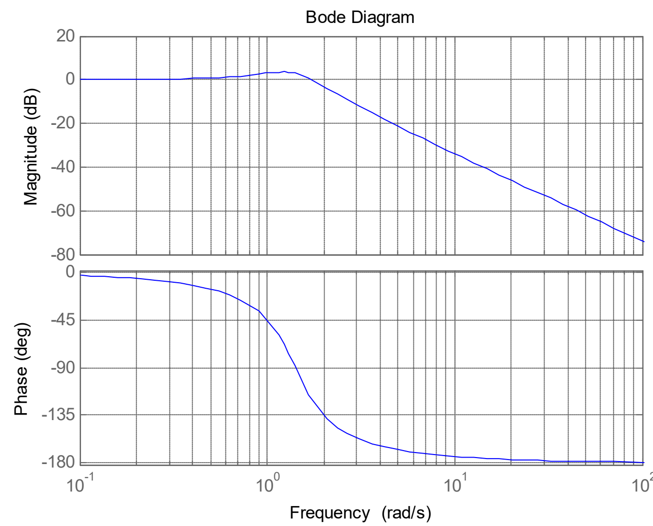
$(\frac{s}{3}+1)$



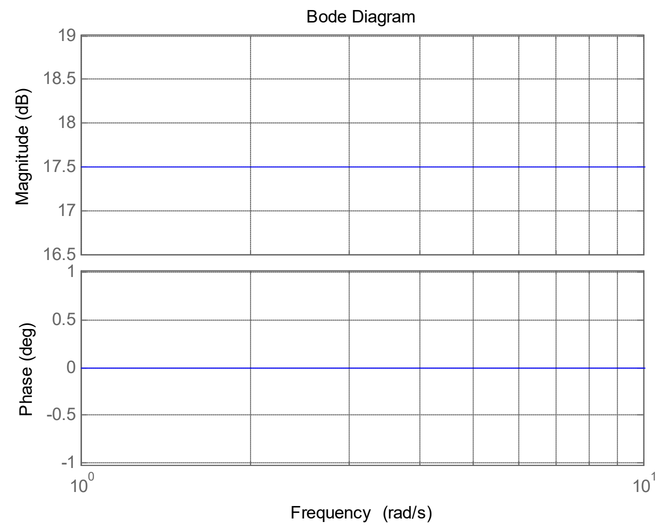
$\frac{1}{s}$



$\frac{1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)}$



$\frac{1}{(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)}$



7.5

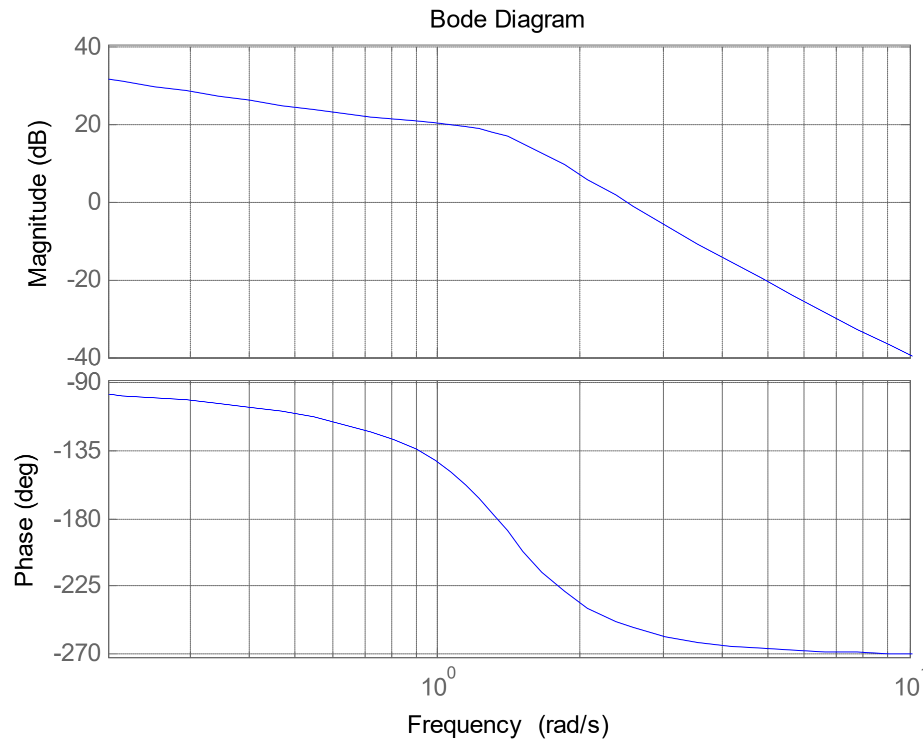
Luego de realizar las curvas asintóticas separadas para cada uno de los factores (yo les mostré las reales), tienen que obtener las curvas compuestas sumando algebraicamente las curvas individuales. Recuerden que cuando se suman las curvas asintóticas individuales, las pendientes son acumulativas.

Debajo de $\omega_n = \sqrt{2}\frac{1}{s}$, la gráfica tiene una pendiente de -20 dB/década (por culpa del polo en $\omega = 0\frac{1}{s}$. En la primera frecuencia de corte, que es justamente $\omega_n = \sqrt{2}\frac{1}{s}$, la pendiente pasa a ser -60 dB/década (por culpa del polo de segundo orden en $\omega_n = \sqrt{2}\frac{1}{s}$) En la siguiente frecuencia de corte, $\omega = 2\frac{1}{s}$ la pendiente pasa a ser $-$ 80 dB/década (por el cachetazo que recibe del polo situado en $\omega = 2\frac{1}{s}$. Finalmente, en la última frecuencia de corte ubicada en $\omega = 3\frac{1}{s}$ hace que la pendiente suba a -60 dB/década (por el optimismo del cero ubicado en $\omega = 3\frac{1}{s}$).

De lo anterior puede verse que los cambios en las pendientes se producen cuando se alcanzan las frecuencias de corte, por lo que en lugar de ir sumando las curvas individuales, lo que se puede hacer es partir de la pendiente asociada a la singularidad de frecuencia de corte más baja, mantener la pendiente hasta el próximo valor de frecuencia de corte, actualizar la pendiente convenientemente, y así siguiendo. Es como hacer un barrido en frecuencia imaginario.

No debería ser necesario aclarar cómo trabajar con las curvas de fase…….

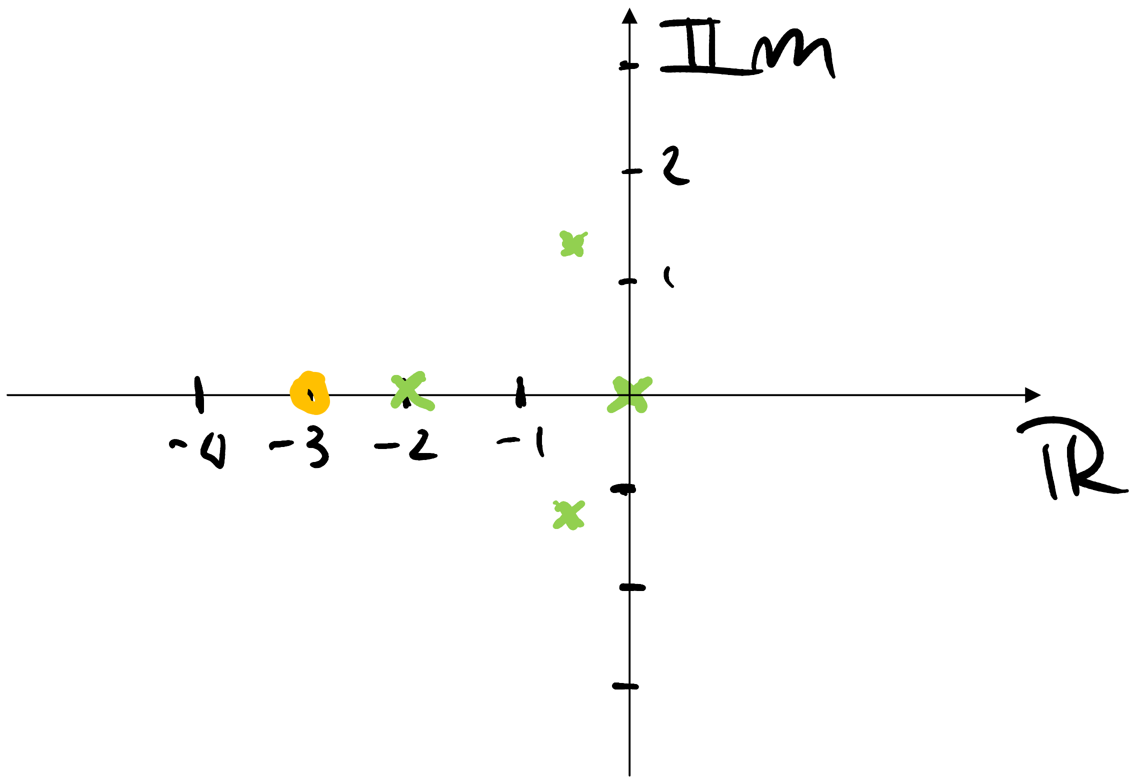
El diagrama de Bode completito será:



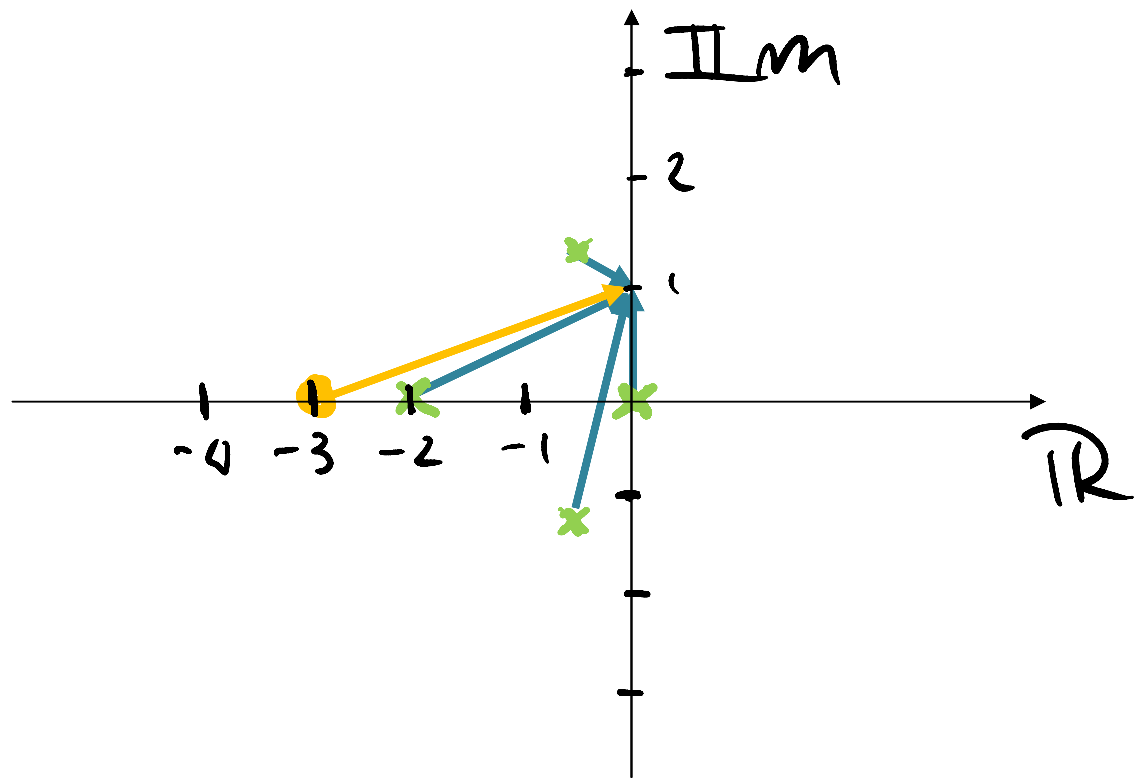
$$G(s) = \frac{10\cdot 3(\frac{s}{3}+1)}{s\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)2(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)} = 7.5\frac{(\frac{s}{3}+1)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)}$$

Comentarios adicionales

Comentario #0. Por favor no pierdan de vista qué es lo que estamos haciendo cuando graficamos un diagrama de Bode! Representamos cuánto vale el módulo y la fase de una función transferencia compleja, cuando la frecuencia compleja s vale $j\omega$, es decir, cuando restringimos su valor al eje imaginario. Respecto al ejemplo anterior, observen cómo quedarían las singularidades:



Entonces, lo que hacemos para cada frecuencia es calcular el módulo y la fase asociados a los polos y a los ceros. Por ejemplo, para la frecuencia $\omega = 1\frac{1}{s}$:



Hay que multiplicar 7.5 por el módulo de la diferencia entre $j\omega$ y el cero, y dividirlo por el producto de los módulos de las diferencias entre $j\omega$ y polos. Así para cada valor de frecuencia. La gracias del diagrama de Bode es que permite hacerlo, pero de una manera muy sencilla (bueno, no exageremos tampoco, de una manera no tan demandante) y recetada.