UTN.BA

Teoría de Circuitos 1

Divertidas notas de clase - Variables de estado

Diego Sebastián Sica
@SicaTc1
Versión 1.0

Apreciadas/os alumnas/os: El objetivo primordial de este documento, derivado de las notas de clases, es acercarles material que los referencie a los temas desarrollados durante nuestros encuentros. Está preparado con un enfoque basado en el alumno y realizado con mucha pasión, y si bien espero que lo consulten, los aliento fuertemente a que no dejen de leer la bibliografía. Destaco que las figuras y citas que eventualmente fueran empleadas tienen el único propósito de conformar el presente escrito y no pretenden obtener ningún beneficio adicional que pudiera afectar los derechos de los autores, a quienes se reconocen como fuente. Lejos del idealismo de la perfección, aceptaré agradecido sus sugerencias.

Introducción a las variables de estado

Los sistemas electrónicos son complejos y en muchas ocasiones no se pueden modelizar como un sistema de una sola entrada y una sola salida, lineal e invariante en el tiempo. Ojo que esto no quiere decir que todo lo que estudiamos en ASyS no es útil! Solamente destaco que hay escenarios en los que el análisis de sistemas LTI SISO (Single Input, Single Output) pueden tener una aplicación limitada.

Para el caso de sistemas que no son lineales, son variantes en el tiempo y que tienen múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), podemos recurrir a un nuevo enfoque llamado análisis en el espacio de los estados.

Si llevamos esta discusión al terreno de la teoría de control (ya llegará el momento de estudiarla en otras materias), podemos dividirla en dos enfoques: teoría de control clásica, y teoría de control moderna.

En la teoría de control clásica se suele trabajar con:

- Sistemas de una entrada y una salida, asumidos lineales (o linealizados), e invariantes en el tiempo.
- Análisis en el dominio de la frecuencia.

Los sistemas analizados en el marco de la teoría de control clásica, son del estilo de los estudiados en ASyS. Conocemos bien que por ejemplo el análisis en el dominio de la frecuencia compleja (Laplace), la posición de los polos de la función transferencia puede decirnos mucho acerca de las propiedades del sistema. En particular, una de las cuestiones que más interesa es definir la estabilidad del sistema.

En la teoría de control moderna, podemos trabajar con:

- Sistemas lineales y no lineales!
- Múltiples entradas, múltiples salidas!

Y como si esto fuera poco, podemos hacerlo en el dominio del tiempo!

Para comenzar, y atentos al nombre del tema, vamos a mencionar nociones relacionadas con el concepto de estado[1]:

[1] El concepto de estado se aplica no sólo a sistemas electrónicos o físicos, sino que puede emplearse para sistemas biológicos, económicos, sociales, entre otros.

El estado de un sistema dinámico puede especificarse en términos del conjunto más pequeño de variables (de ahora en más denominadas variables de estado) de modo que el conocimiento de estas variables en un instante $t = t_0$ nos permite conocer el comportamiento completo del sistema para cualquier instante $t \geq t_0$. Naturalmente, también será necesario conocer las funciones de entrada para $t \geq t_0$. Cuando destaco "el conjunto más pequeño" lo que quiero decir es que en un sistema se pueden definir muchas variables, algunas de las cuales no aportarán la información necesaria para conocer cómo se portará el sistema.

Vamos a refrasearlo: Sea un sistema dinámico que tiene m variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots x_m$. Si se necesitan al menos n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para describir por completo su comportamiento dinámico, tales variables son un conjunto de variables de estado. Desmenucemos un poco esto.

Cuando digo "un conjunto", quiero decir que no hay sólo un grupo de variables de estado. Esto es, puede haber más de una combinación de variables que puedan constituirse en variables de estado. Esto hará que debamos aplicar algo de inteligencia para, de entre todos los conjuntos posibles, elegir el que sea más conveniente para nuestros propósitos. Igualmente, hay métodos de selección de variables que podrían evitarnos este trabajo intelectual (estos métodos son como recetas, aplicables sobre todo cuando tenemos cierto poderío computacional).

Qué significa describir por completo su comportamiento? Significa simplemente que si conozco las señales de entrada a mi sistema para $t \geq t_0$, y especifico el estado inicial para las variables en $t = t_0$, puedo determinar por completo el estado futuro del sistema.

Para ir poniéndonos más concretos: En un circuito RLC, digamos serie y excitado por una fuente de tensión senoidal:

1. cuántas variables se pueden definir?
2. Cuántas piensan que serán las necesarias para que se constituyan en variables de estado?
3. Cuáles elegirían?
4. Qué interpretarían como estado inicial?
5. Qué representaría el estado futuro?

Bien, vamos a respondernos (encadenando las argumentaciones).

1. Podrían definirse por ejemplo al menos seis variables: tensión en el capacitor, tensión en la resistencia, tensión en el inductor, corriente en el capacitor, corriente en el inductor, corriente en el resistor (aunque las corrientes sean iguales, se las puede definir como variables igualmente). Son las únicas? No. Podríamos definir combinaciones de estas seis variables (por ejemplo la tensión en la resistencia sumada a la tensión en el capacitor).

2. En base a lo que hemos discutido, asumiendo que conocemos la tensión de entrada, parecería ser que con conocer la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor alcanza. Así que con dos variables de estado podríamos tener resuelto el problema.
3. Dado que sabemos de lo estudiado hasta el momento en el curso, que tanto al capacitor y al inductor les podemos asignar condiciones iniciales, podríamos pensar que es una buena idea elegirlas como variables de estado. (no tienen que ser necesariamente estas dos, pero por qué no elegirlas?)
4. El estado inicial del sistema sería entonces aquel dado por las condiciones iniciales de la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor.
5. El estado futuro sería poder conocer la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor para todo instante posterior al inicial (ya sabemos que habrá un transitorio y un régimen permanente).

Circuitalmente, se aprecia que conociendo la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor podemos conocer cualquier otra variable que se nos ocurra definir para este circuito. Se ve entonces que con esas dos variables de estado tenemos toda la información que deseemos del sistema?

Notemos además que no hemos en ningún momento restringido la definición de variables de estado a cantidades medibles u observables. Pueden ser seleccionadas variables que no sean medibles u observables, siempre que cumplan su función. No obstante, de ser posible en TC1 preferiremos elegir cantidades que puedan observarse con facilidad y a las que podamos darles un sentido físico. Entre nosotros: siempre podremos optar por elegir tensiones en capacitores, y corrientes en inductores[2].

Se imaginan que si trabajamos con muchas variables de estado a la vez, lo conveniente va a ser ordenarnos de alguna manera para saber quién es quién. Es por eso que vamos a definir un vector de estado, que no es otra cosa que un vector que tiene en sus componentes a las variables de estado. Además de ordenarnos, de seguro esperaran que la definición de vector de estado nos lleve a tener que definir un espacio de estados, y que tarde o temprano en todo esto aparecerán matrices.

Entonces, definimos al vector de los estados como aquel cuyas componentes son las *n* variables de estado. El espacio *n*-dimensional cuyos ejes coordenados son las variables de estado $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se denomina espacio de los estados, y cualquier estado puede representarse como un punto en dicho espacio. En términos más algebraicos, las variables de estado serían la base del espacio vectorial[3] del espacio de los estados.

---

[2]Notaron que si elegimos las tensiones en los capacitores, y las corrientes en los inductores, estamos seleccionando variables que se expresan en términos de integrales? Mis apreciados/as, esto no es mera casualidad…….

[3] No se ofusquen porque cito conceptos de álgebra, es necesario que integremos vertical y horizontalmente todo lo que han aprendido y lo que aprenderán en otras materias.

Todo muy lindo, pero tenemos que ir a cocinar los bifes porque si no se pasa la hora de la cena….. Vamos a ir concretando.

Ecuaciones en el espacio de los estados

Como no hay una única representación en el espacio de los estados (como no hay una única base de un espacio vectorial) para un sistema determinado, lo único que podemos garantizar al momento es que la cantidad de variables de estado será el mismo para cualquiera de las posibles representaciones (es como la dimensión del espacio vectorial).

Cuando estudiamos al sistema, podemos identificar tres tipos de variables:

- Variables de entrada (o sea, las variables independientes).
- Variables de estado (las que estuvimos discutiendo)
- Variables de salida (las que a mí me interesan; pueden definirse arbitrariamente)

Un sistema puede definirse en términos de ecuaciones integro-diferenciales que relacionan sus distintas variables. Estas ecuaciones pueden ser bastante generales, pero si tenemos un poco de suerte serán ordinarias (ya no pretendo que sean lineales ni invariantes en el tiempo, porque estamos en el espacio de los estados). La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica de un sistema, es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema. Deberán creerlo.

Si bien no les doy una demostración, les pregunto…… Es plausible? Y sip. Por qué? Porque las variables de estado son aquellas, que entre otras cosas, tienen que tener definido un estado inicial. Y justamente, para los integradores, deben especificarse condiciones iniciales, o lo que es lo mismo, tienen información del sistema en el instante previo a la aplicación de los estímulos (es lo que a veces se expresa diciendo que tienen "memoria"). Fijaos:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt + i(0^-)$$

CONDICIONES INICIALES

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + \boxed{v(0^-)}$$

HISTORIA PREVIA!!
MEMORIA!!

Continuemos entonces. Sea un sistema MIMO que contiene *n* integradores. Supongamos que existen *r* entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$,……, $u_r(t)$, y *m* salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$,……, $y_m(t)$. Las variables de estado serán entonces las salidas de los n integradores, es decir: $x_1(t)$, $x_2(t)$,……, $x_n(t)$.

El sistema puede describirse por:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t)$$

……………………………………………………………………

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t)$$

que en notación vectorial sería:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

Las salidas pueden expresarse como:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots \dots, x_n; u_1, u_2, \dots \dots, u_r; t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots \dots, x_n; u_1, u_2, \dots \dots, u_r; t)$$

…………………………………………………………………

$$y_m(t) = g_n(x_1, x_2, \dots \dots, x_n; u_1, u_2, \dots \dots, u_r; t)$$

que más compactamente será:

$$\bar{y} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

De nuevo? Si!

$$\overline{x(t)} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \overline{y(t)} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad \overline{u(t)} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{u},t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t) \end{bmatrix} \qquad \bar{g}(\bar{x},\bar{u},t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots\dots, x_n; u_1, u_2, \dots\dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$\bar{y} = \bar{g}(\bar{x},\bar{u},t)$ Ecuación de Estado

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},\bar{u},t)$ Ecuación de Salida

En principio, estas ecuaciones no tienen por qué ser lineales, y podrían depender explícitamente del tiempo. Si linealizáramos las ecuaciones (recuerden que se puede hacer a través del polinomio de Taylor, quedándose con el término lineal), podemos escribir:

$$\dot{\overline{x(t)}} = A(t) \cdot \overline{x(t)} + B(t) \cdot \overline{u(t)}$$

$$\overline{y(t)} = C(t) \cdot \overline{x(t)} + D(t) \cdot \overline{u(t)}$$

en donde A(t), B(t), C(t) y D(t) son matrices que surgen de linealizar a las ecuaciones. Estas matrices son importantes así que las vamos a bautizar:

A(t): Matriz de estado.

B(t): Matriz de entrada.

C(t): Matriz de salida.

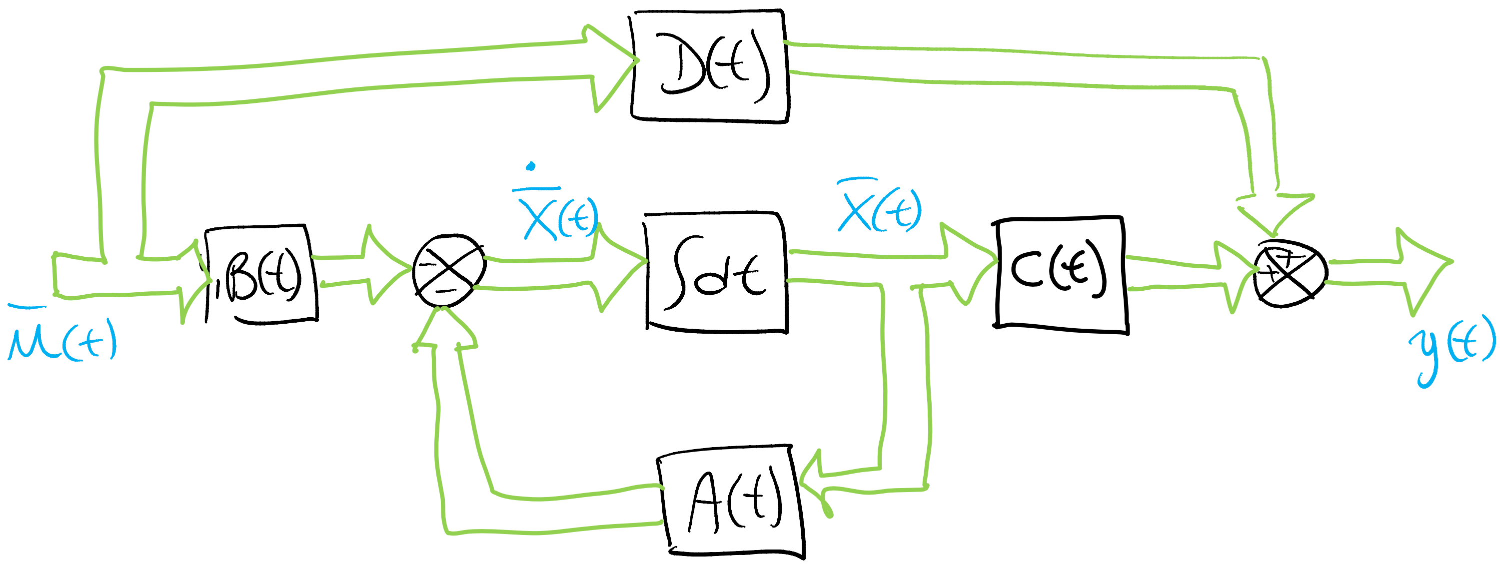
D(t): Matriz de transmisión directa.

Si el sistema es invariante en el tiempo, A, B, C y D no dependerá de t, por lo que quedará:

$$\overline{\dot{x}(t)} = A \cdot \overline{x(t)} + B \cdot \overline{u(t)}$$

$$\overline{y(t)} = C \cdot \overline{x(t)} + D \cdot \overline{u(t)}$$

En términos gráficos, la cuestión será:



Así dadas las cosas, si contamos con un ayudante como MatLab (con su función ODE45), si somos capaces de obtener las matrices A(t), B(t), C(t) y D(t), podemos conocer cuánto vale cada una de las *y(t)*, es decir, resolver el problema.

Nota importante: aquí no hay magia! Lo que hicimos fue resolver un sistema caracterizado por una ecuación diferencial de orden *n*, por *n* ecuaciones de orden 1.

Relación entre las ecuaciones en el espacio de los estados y la función transferencia

Seguramente algunos/as de ustedes están cursando (o han cursado ASyS[4]). Entonces es muy probable que se estén preguntando si hay alguna equivalencia o relación entre "resolver" un sistema en el espacio de los estados o a través de su función transferencia. La respuesta es que efectivamente se puede encontrar tal relación, restringiendo el caso a un sistema lineal, invariante en el tiempo, con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas in English).

Sea entonces que trabajamos con un sistema LTI SISO, y los estudiamos con condiciones iniciales nulas. En ese caso, podemos definir la función transferencia como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Las ecuaciones de estado, quedarán:

ES UNA ÚNICA ENTRADA, POR ESO NO ES MÁS UN VECTOR

$$\dot{\overline{x(t)}} = A \cdot \overline{x(t)} + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot \overline{x(t)} + D \cdot u(t)$$

ES UNA ÚNICA SALIDA, POR ESO NO ES MÁS UN VECTOR

[4] Si no están cursando ASyS, no os preocupéis que definiremos el concepto de función transferencia más adelante en el curso.

Si les realizamos la transformada de Laplace[5] a las ecuaciones de estado, quedarán:

$$s \cdot \overline{X(s)} - \overline{X(0)} = A \cdot \overline{X(s)} + B \cdot U(s)$$

$$Y(s) = C \cdot \overline{X(s)} + D \cdot U(s)$$

Vamos a suponer, como habíamos sugerido, que $\overline{X(0)}$ es cero para asociar las ecuaciones de estado en el dominio transformado a la función transferencia (que se define para un sistema sin condiciones iniciales). Vamos entonces a trabajar un poquito con álgebra matricial:

$$s \cdot \overline{X(s)} = A \cdot \overline{X(s)} + B \cdot U(s)$$

$$s \cdot \overline{X(s)} - A \cdot \overline{X(s)} = B \cdot U(s)$$

$$(s \cdot I - A) \cdot \overline{X(s)} = B \cdot U(s)$$

$$\overline{X(s)} = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

Reemplazando en la expresión de Y(s):

$Y(s) = G(s)\, U(s)$

$$Y(s) = [(s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) + D] \cdot U(s)$$

[5] Vale lo mismo que en la nota 4. También veremos más adelante la Transformada de Laplace.

de donde tenemos la feliz noticia que:

$$G(s) = (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B \cdot +D$$

Recuerden que para calcular la inversa de una matriz había que calcular la matriz adjunta y dividirla por el determinante (ejemplo para caso de 2x2):

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Así es que la función transferencia podrá expresarse como:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{\det(s \cdot I - A)}$$

Se ve entonces que el determinante de la matriz $s \cdot I - A$ es el polinomio característico de la función transferencia (iuju, tiene la información de los polos!)

Casos generales[6]

Para sistemas complejos, y para variables que pueden no ser observables, puede dificultarse la definición de las variables de estado, y la obtención de las matrices A, B, C y D. No será lo habitual para los problemas que se nos planteen, en el sentido que por lo general nos veremos inducidos a elegir a las tensiones en los capacitores y a las corrientes en los inductores como nuestras variables de estado. Pero por si la cosa se pone espesa, les cuento estos secretitos.

Sea un sistema dinámico formado por una cantidad finita de elementos de parámetros concentrados, el cual se describe por una serie de ecuaciones diferenciales con el tiempo como su variable independiente. En términos generales, podremos llegar a una única ecuación diferencial con dos alternativas posibles: la ecuación diferencial no contiene derivadas de la función excitación (Caso I), o sí lo hace (Caso II). Veamos ambas posibilidades, arrancando por el Caso I.

Caso 1:

El Caso 1 estará caracterizado por una ecuación diferencial así:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_n \cdot \dot{y} = u$$

Considerando matemáticamente que si se conocen las condiciones iniciales $y(0), \dot{y}(0), \ldots . y^{(n-1)}(0)$ y la señal de excitación *u(t)* para *t ≥ 0*, podemos determinar totalmente el comportamiento del sistema, podemos tomar a $y(t), \dot{y}(t), \ldots . y^{(n-1)}(t)$ como un conjunto de *n* variables de estado[7].

Entonces, quedará:

[6] Lean esto para ganar concepto. No habrá ejercicios en los que deba aplicarlo.
[7] Esta elección de variables de estado es muy conveniente desde el punto de vista matemático, pero en la práctica podría no ser adecuado debido a que los términos que contienen a las derivadas de orden superior no serán exactos por los efectos del ruido.

$$\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = y^2 \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_n \cdot x_1 - a_{n-1} \cdot x_2 - \cdots - a_1 \cdot x_n + u \end{matrix}$$

Y la ecuación matricial será tan linda como:

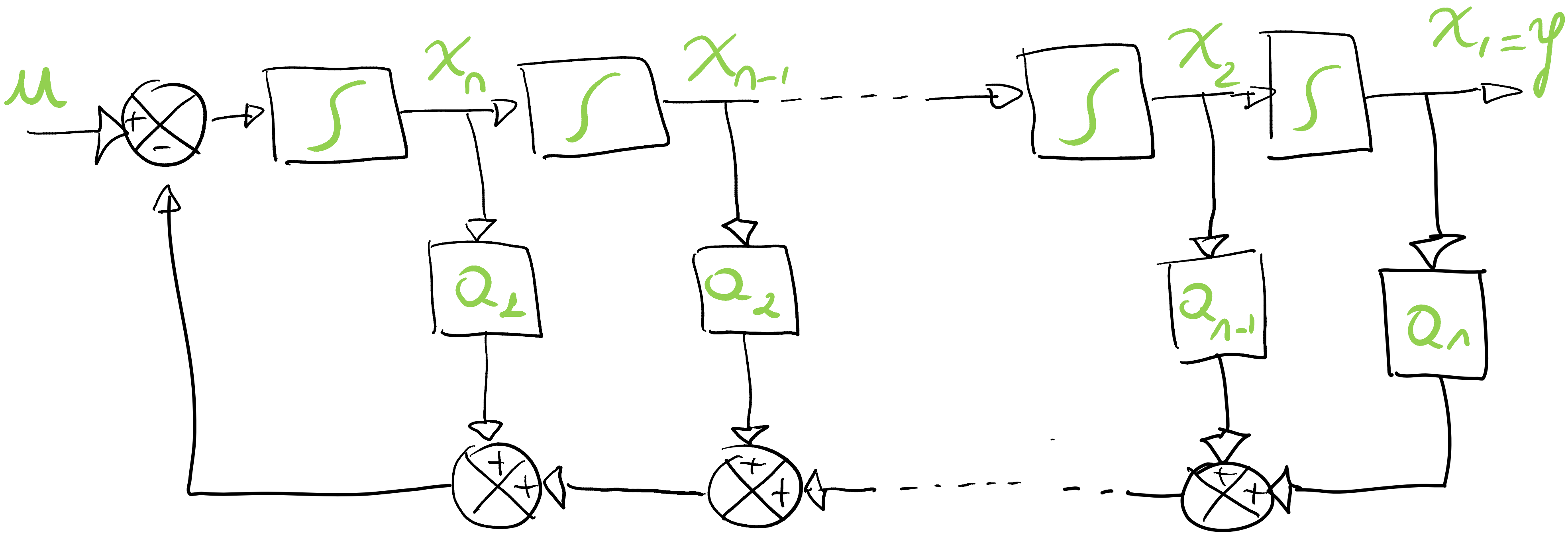
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

La salida será:

$$y = x_1 \rightarrow y = \overbrace{[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}^{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; ; D = 0$$

$$y = C \cdot \bar{X}; D = 0$$

En términos gráficos lo que hicimos fue:



Caso II

El Caso II estará caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_n \cdot \dot{y} = b_0 \cdot u^{(n)} + b_1 \cdot u^{(n-1)} + b_2 \cdot u^{(n-2)} + \cdots + b_n \cdot u$$

El conjunto de n variables $y(t), \dot{y}(t), \ldots . y^{(n-1)}(t)$ ya no califica como un conjunto de variables de estado, dado que las n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \dot{x}_3 = x_4\\ \vdots\\ \dot{x}_n = -a_n \cdot x_1 - a_{n-1} \cdot x_2 - \cdots - a_1 \cdot x_n + u\end{gathered}$$

en las que $x_1 = y$, ya no conducen a una única solución.

El problema principal al definir las variables de estado para este caso es darse cuenta de cómo eliminar a las derivadas de la función excitación u(t) en la ecuación de estado. Observad el truco (menos mal que hay gente que tiene este tipo de ideas):

$$\begin{gathered}x_1 = y - \beta_0 \cdot u\\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \cdot \dot{u} - \beta_1 \cdot u\\ x_3 = y^{(2)} - \dot{y} - \beta_0 \cdot u^{(2)} - \beta_1 \cdot \dot{u} - -\beta_2 \cdot u = \dot{x}_2 - \beta_2 \cdot u\\ \vdots\\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 \cdot u^{(n-1)} - \beta_1 \cdot u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \cdot \dot{u} - \beta_{n-1} \cdot u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} \cdot u\end{gathered}$$

en donde:

$$\begin{gathered}\beta_0 = b_0\\ \beta_1 = b_1 - a_1 \cdot \beta_0\\ \beta_2 = b_2 - a_1 \cdot \beta_1 - a_2 \cdot \beta_0\\ \beta_3 = b_3 - a_1 \cdot \beta_2 - a_2 \cdot \beta_1 - a_3 \cdot \beta_0\\ \vdots\\ \beta_n = b_n - a_1 \cdot \beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1} \cdot \beta_1 - a_n \cdot \beta_0\end{gathered}$$

Con esta elección está garantizada la existencia y unicidad de la solución, y obtendremos:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 \cdot u \\
\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 \cdot u \\
\dot{x}_3 = x_4 + \beta_3 \cdot u \\
\vdots \\
\dot{x}_n = -a_n \cdot x_1 - a_{n-1} \cdot x_2 - \cdots - a_1 \cdot x_n + \beta_n \cdot u
\end{gathered}$$

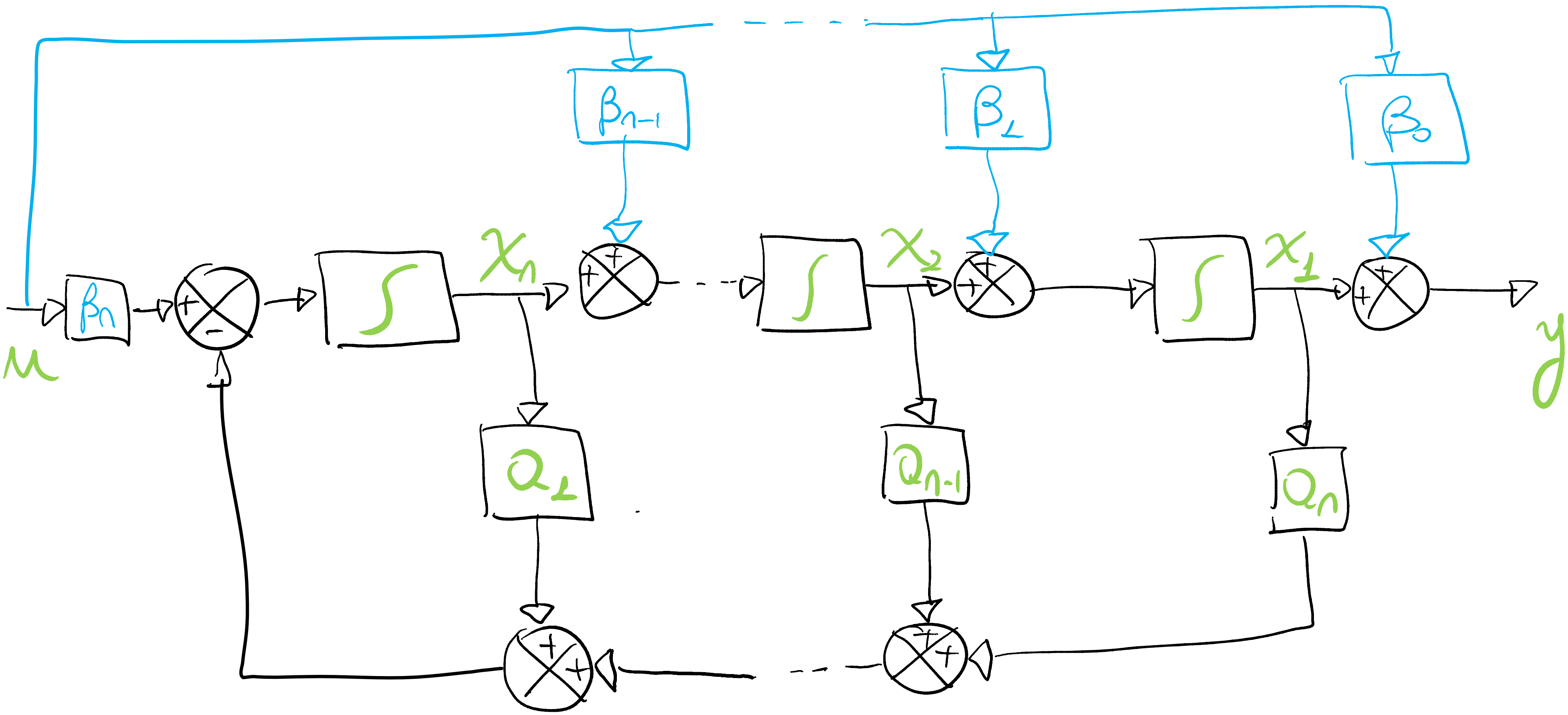
Con lo que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}^{B} \cdot u$$

y la salida será:

$$y = \overbrace{[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}^{C} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \overset{D}{\beta_0} \cdot u$$

Observamos pues que para el Caso II, las matrices A y C son exactamente iguales que las del Caso I. Las derivadas de la excitación sólo afectan los elementos de la matriz B. Gráficamente:



Noten la diferencia respecto al Caso I (lo que está en azul): Aparecen sumas de la excitación u multiplicada por los coeficientes β.

Comentarios finales

Ahora resta hacer la guía y algunos ejemplos para adquirir las mañas que requiere obtener las matrices A, B, C y D. Les recomiendo algunas cositas y les hago algunos comentarios (pongan todo en contexto):

1. Si bien pueden obtenerse las matrices tirando ecuaciones y tratando de llegar a lo que necesitamos, les sugiero planificar la resolución para no tener sorpresas ni perder tiempo en reemplazos que no conducen a nada (siempre podemos mandarnos alguno, pero no perdernos en ecuaciones).
2. Como tenemos que expresar la derivada de cada una de las variables de estado en términos de las otras variables de estado y de las entradas, y NUNCA en función de las derivadas de otras variables de estado, siempre conviene buscar las ecuaciones que permiten expresar las corrientes en los capacitores y las tensiones en los inductores, a través de las variables de estado. Es decir, hagan Kirchhoff de corriente para el capacitor, y Kirchhoff de tensión para el inductor (Uds. comprenderán esto a partir de los ejemplos discutidos en clase).
3. Entiendan bien que resolver en el espacio de los estados está en el grupo de técnicas en el dominio temporal.
4. Un poco el espíritu de todo esto es convertir una ecuación diferencial de orden *n*, e *n* ecuaciones diferenciales de orden 1.
5. Para obtener los resultados, no queda otra que ser asistidos por MatLab o equivalente, a través de una función como ODE45.
6. Ojo con las dimensiones de las matrices……..