

Guía para el cálculo de incertidumbres

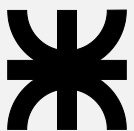
- Alcances – Objetivos – Definiciones
- Clasificación de las componentes de incertidumbre
- Modelo Matemático de una medición
- Incertidumbre Combinada
- Incertidumbre Expandida
- Información del resultado de una medición



- IRAM 35050 – Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de la medición – Argentina- 2001

Antecedentes

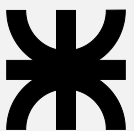
- Guide to the expression of Uncertainty in measurements – 1981 – BIPM – France
- Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results – 1994 – NIST – EE.UU



Objeto y campo de aplicación

Este procedimiento se aplica para la información del resultado de todas las mediciones.

- Comparaciones internacionales de patrones
- Investigación y Desarrollo
- Calibraciones y mediciones
- Certificación de materiales de referencia
- Generación de normas de referencia

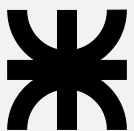


Importancia de la incertidumbre

- El **resultado de una medición** es solo una aproximación o estimación del valor de una cantidad específica de una magnitud.
- El resultado es **COMPLETO** cuando es asociado a un valor de incertidumbre.
- Da un grado de confianza de la medición
- Permite realizar comparación entre distintos resultados

0 INTRODUCCIÓN^(*)

0.1 Cuando se informa el resultado de una medición de una magnitud física, es obligatorio que se dé alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, de modo que quien lo utiliza pueda evaluar su confiabilidad. Sin esta indicación, los resultados de las mediciones no pueden compararse, ya sea entre ellos o respecto a valores de referencia dados por una especificación o por un patrón. Entonces, es necesario que sea implementado sin demora un procedimiento generalmente aceptado y fácilmente entendible, para caracterizar la calidad del resultado de una medición, esto es, para evaluar y expresar su incertidumbre.



Incertidumbre

Cuando se informa el resultado de una medición de una magnitud física, es obligatorio que se de alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, ...

2.26 (3.9)

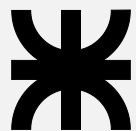
incertidumbre de medida, f

incertidumbre, f

parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los **valores** atribuidos a un **mensurando**, a partir de la información que se utiliza

NOTA 1 — La incertidumbre de medida incluye componentes procedentes de efectos sistemáticos, tales como componentes asociadas a **correcciones** y a valores asignados a patrones, así como la **incertidumbre debida a la definición**. Algunas veces no se corrigen los efectos sistemáticos estimados y en su lugar se tratan como componentes de incertidumbre.

NOTA 2 — El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica, en cuyo caso se denomina **incertidumbre típica de medida** (o un múltiplo de ella), o una semiamplitud con una **probabilidad de cobertura** determinada.



Clasificación de las componentes de incertidumbre

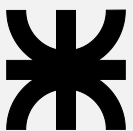
TIPO A

Aquellos que se evalúen por métodos estadísticos

TIPO B

Aquellos que se evalúen por otros métodos

- Datos de mediciones previas
- Experiencia, conocimiento de materiales de referencia o instrumentos
- Especificaciones del fabricante
- Datos obtenidos de reportes de calibración



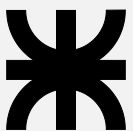
Clasificación de las componentes de incertidumbre

TIPO A Se caracterizan por:

- La ESTIMACION ESTADISTICA DEL DESVIO ESTANDAR s_i que es igual a raíz cuadrada de la varianza σ^2_i

$$s_i = u_i$$

- El número de grados de libertad ν_i .

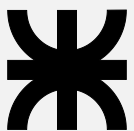


Clasificación de las componentes de incertidumbre

TIPO B

La componente de incertidumbre tipo B es representada por u_j .

Es una aproximación del desvío estándar igual a la raíz cuadrada de la varianza u_j que es obtenida de una función de distribución asumida de la información disponible

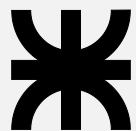


Asociación de las componentes de incertidumbre

Ley de propagación de las incertidumbres

Es obtenida combinando la u_i obtenida de la evaluación tipo A y la u_j de la evaluación tipo B

$$u^2(xi) = u^2_i(xi) + u^2_j(xi)$$

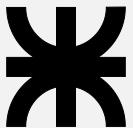


Modelo matemático de una medición

En la mayoría de los casos el mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N magnitudes de entrada $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N) \quad (1)$$

- $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ pueden a su vez depender de otras magnitudes, incluyendo factores de corrección por errores sistemáticos etc.
- f representa en sentido amplio la función que contiene a todas las variables de entrada.



Modelo matemático de una medición

Valor medio

Una estimación del mensurando Y denominado y se obtiene de
(1) usando como magnitudes de entrada $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
para los valores de las N magnitudes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$

$$y = Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, X_{3,k}, \dots, X_{N,k}) \quad (1)$$

y se toma como media aritmética de n determinaciones de independientes de Y

$$y = f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \dots, \overline{X_N}) \quad (2)$$



Modelo matemático de una medición Incertidumbre

Para $y = f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \dots, \overline{X_N})$

La incertidumbre típica de y (siendo y la estimación del mensurando Y) es decir, el resultado de medida, se obtiene componiendo apropiadamente las incertidumbres típicas de las estimaciones de entrada x_1, x_2, \dots, x_N . Esta **incertidumbre típica combinada** de la estimación y se nota como $u_c(y)$.

Incertidumbre típica

$$u_c(y) = f[u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)]$$

Incertidumbre típica combinada



Modelo matemático de una medición

Incertidumbre

Para componer las incertidumbres se utiliza la serie de Taylor de 1er orden:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

Magnitudes de entrada no correlacionadas
Tipo A - Tipo B

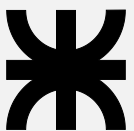
Magnitudes de entrada correlacionadas



Evaluación de Tipo A de la incertidumbre estándar

El mejor estimador disponible de la esperanza o valor esperado de una magnitud X_i que varía aleatoriamente para la cual se toman n observaciones independientes, bajo las mismas condiciones es la MEDIA ARITMETICA o PROMEDIO

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k} \quad (3)$$

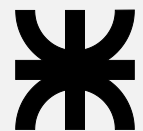


Evaluación de Tipo A de la incertidumbre estándar

Las observaciones individuales X_i difieren en valor debido a variaciones aleatorias.

La varianza experimental de las observaciones, que estima la varianza de la distribución de probabilidad de X_i esta dada por:

$$s^2(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \overline{X_i})^2$$



Evaluación de Tipo A de la incertidumbre estándar

$$s^2(\bar{X}_i) = \frac{s^2(X_i)}{n}$$

La varianza experimental de la media $s^2(\bar{X}_i)$ cuantifica que bien \bar{X}_i estima la esperanza de X_i y puede ser usada como una medida de la incertidumbre de \bar{X}_i

$$u(\bar{X}_i) = s(\bar{X}_i)$$

Grados de libertad

$$v = n - 1$$

donde n es el numero de observaciones independientes



Evaluación de Tipo A

Medición de la corriente de anillo

Medición de corriente de anillo

Valores medidos

Nº de mediciones	Valores tomados[mA]
1	11,331
2	11,352
3	11,352
4	11,341
5	11,353
6	11,337
7	11,342
8	11,343
9	11,334
10	11,338

I

Promedio

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k$$

11,3423 [mA]

s(I_k)

Desvio Estandar

$$s(I_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (I_k - \bar{I})^2}$$

0,0078 [mA]

u(I)

incertidumbre Estandar

$$s(\bar{I}) = \frac{s(I_k)}{\sqrt{n}}$$

0,0025 [mA]

$\nu=9$



Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

- Especificaciones del fabricante
- Resultado de calibraciones



Especificaciones

Cuadro 8: Características de corriente de CC

Características	Descripción
Voltaje de carga	5 mA a 5 A: 0,3 V máx. 10 A: 0,5 V máx.
Porcentaje de 4-20 mA (calculado en un rango de 50 mA)	4 mA = 0% 20 mA = 100%
Tiempo de establecimiento	4 lecturas (habitual)
Frecuencia de lectura	5.000 ct.: 4 lecturas por segundo 50.000 ct.: 1 lectura por segundo

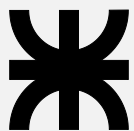
Cuadro 9: Rango, resolución y precisión de corriente de CC

Rango	Resolución		Precisión	
	5.000 conteos	50.000 conteos	TX1	TX3
500 µA	100 nA	10 nA	± (0,2% + 4 conteos)	
5 mA	1 µA	100 nA	± (0,2% + 2 conteos)	
50 mA	10 µA	1 µA		
500 mA	100 µA	10 µA		
5 A	1 mA	100 µA	± (0,4% + 2 conteos)	
10 A para 3 minutos (15 A para 30 seg.)	10 mA	1 mA	± (0,5% + 2 conteos)	
Coeficiente de temperatura		Se suma (0,05% + 0,1 ct.)/°C al exceso del rango de temperatura estimada.		

**Multímetros digitales de
RMS verdadero
TX-DMM™
TX1 y TX3**

070-9884-00

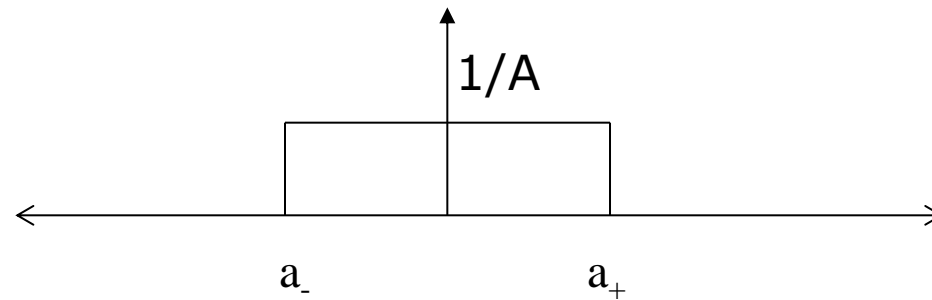
Todas las especificaciones están garantizadas, a no ser que se indique de la forma acostumbrada, para una temperatura de $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$, a menos de un 80% de humedad relativa.



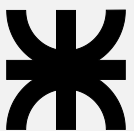
Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

Definiciones de probabilidad y estadística:

Distribución rectangular



$$A = a_+ - a_-$$



Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

Especificación: $\pm(0,2\% + 2 \text{ cuenta})$

$$I = 11.342 \text{ mA}$$

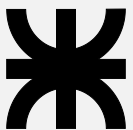
$$2 \text{ cuentas} = \left(\frac{2}{11324} \times 100 \right) = 0,017\%$$

$$Total = \pm(0,2\% + 0,017\%)$$

$$Total = \pm 0,217\%$$

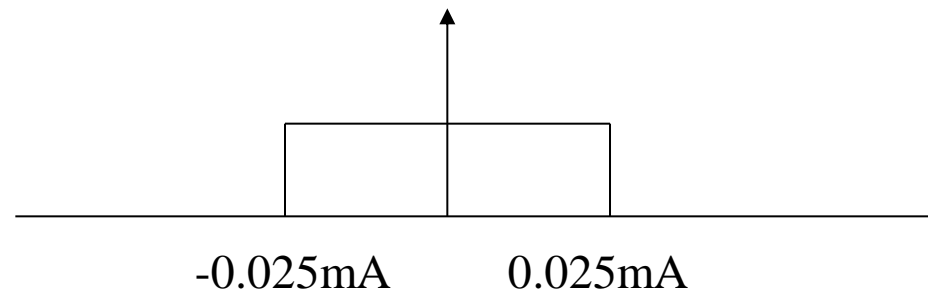
$$Precisión = \frac{\Delta I}{I} = \pm 0,22\% \quad \Delta I = \pm 0,025 \text{ mA}$$

Las especificaciones se asumen de distribución rectangular si el manual del fabricante no explicita lo contrario.



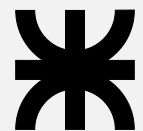
Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

Precisión = $\pm 0.025 \text{ mA}$



$$u_j = s_j = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$u_j = \frac{0.025}{\sqrt{3}} \text{ mA} = 0.014 \text{ mA}$$



Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

La incertidumbre estándar queda definida por la precisión de la variable de entrada dividido un número asociado a la función de distribución asumida.

Distribución	divisor
Normal	1
Normal (k=2)	2
Rectangular	$\sqrt{3}$
Triangular	$\sqrt{6}$
U	$\sqrt{2}$



Incertidumbre combinada

Volviendo a nuestra fórmula

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j).$$

Diagram illustrating the formula for combined uncertainty $u_c^2(y)$. The first term is a sum over i from 1 to N of the square of the sensitivity coefficient $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ multiplied by the uncertainty $u^2(x_i)$. The second term is a double sum over i and j from 1 to N of the product of the sensitivity coefficients $\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ multiplied by the covariance $u(x_i, x_j)$. A circle highlights the term $u^2(x_i)$ in the first sum, with an arrow pointing to the equation $u^2(x_i) = u^2_i(x_i) + u^2_j(x_i)$. Another arrow points from the double sum term to the same equation.

Coeficiente de sensibilidad.

En el caso de mediciones directas: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$



Incertidumbre combinada de nuestro ejemplo

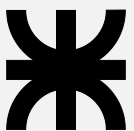
$$u_c^2(xi) = u_i^2(xi) + u_j^2(xi)$$

En nuestro Ejemplo:

$$u_c^2(I) = 0.0025^2 + 0.014^2 \text{ mA}^2$$

$$u_c^2(I) = 0.00017 \text{ mA}^2$$

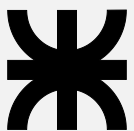
$$u_c(I) = 0.013 \text{ mA}$$



Incertidumbre Expandida

6.1.2 Aunque $u_c(y)$ puede ser utilizada universalmente para expresar la incertidumbre de un resultado de medición, frecuentemente es necesario, en ciertas aplicaciones comerciales, industriales o reglamentarias, o en los campos de la salud o la seguridad, dar una medida de la incertidumbre que defina, alrededor del resultado de la medición, un intervalo en el interior del cual pueda esperarse encontrar gran parte de la distribución de valores que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando. El Grupo de trabajo ha reconocido la existencia de esta exigencia y el punto 5 de la Recomendación INC-1 (1980) así lo manifiesta. La Recomendación 1 (CI-1986) del CIPM lo refleja igualmente.

La incertidumbre expandida se obtiene de multiplicar la incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura k (6.1.3)



Incertidumbre Expandida

Se obtienen directamente del área bajo la curva normal

k	grados de cobertura
---	---------------------

1	68.26%
---	--------

2	95.44%
---	--------

3	99.74%
---	--------

$$U = k \cdot u_c(xi)$$



Grados efectivos de libertad

Estimar el valor del factor de cobertura k nos obliga tener en cuenta que tan bien estimamos la desviación estándar asociada a u_c asociada con el resultado de la medición. Para una estimación de la desviación estándar de una distribución normal, los grados de libertad de la estimación, que dependen del tamaño de la muestra.

Para obtener los grados de libertad efectivos V_{eff} de u_c utilizamos la formula de Welch-Satterthwaite:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}}$$



Grados efectivos de libertad

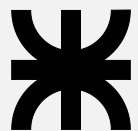
$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}},$$

con $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$,

y $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$

$$= \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2 \right)^{1/2}.$$

- Es aceptable asumir como infinito los grados de libertad obtenidos de una evaluación TIPO B.
- Típicamente, v_{eff} no es un entero, se debe asumir el entero menor al valor calculado.



Grados efectivos de libertad en nuestro ejemplo

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$$

$$u_c(I) = 0.013 \text{ mA}$$

$$u_c^4(I) = 2.85 \cdot 10^{-8} \text{ mA}^2$$

$$u_i^4(x_i) = 0.0025^4 = 3.90 \cdot 10^{-11}$$

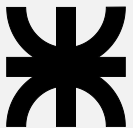
$$c_i = 1$$

$$v_i = 9$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{v_i}}$$

$$V_{\text{eff}} > 6500$$

La distribución de u_c es prácticamente la normal

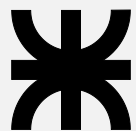


Con el valor de V_{eff} ingresamos a la tabla de la distribución t-student para extraer el valor del coeficiente k de cobertura. Cada columna indica el grado de confianza.

Tabla G.2 – Valor de $t_p(v)$ de la distribución t , para v grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(v)$ a $+t_p(v)$, que incluye la fracción p de la distribución

Número de grados de libertad v	Fracción p , en porcentaje					
	68,27 ^(a)	90	95	95,45 ^(a)	99	99,73 ^(a)
Valor de $t_p(v)$						
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

^(a) Para una magnitud z descrita por una distribución normal de esperanza matemática μ_z y desviación estándar σ , el intervalo $\mu_z \pm k\sigma$ incluye respectivamente las fracciones $p = 68,27\%$, $95,45\%$ y $99,73\%$ de la distribución, para los valores $k = 1, 2$ y 3 .



Incertidumbre Expandida de nuestro ejemplo

$$u_c^2(xi) = u_i^2(xi) + u_j^2(xi)$$

En nuestro Ejemplo

$$u_c^2(I) = 0.0025^2 + 0.013^2 \text{ mA}^2$$

$$u_c^2(I) = 0.00017 \text{ mA}^2$$

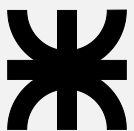
$$u_c(I) = 0.013 \text{ mA}$$

$$U(I) = k \cdot u_c(I)$$

$$U(I) = 2 \cdot 0.013 \text{ mA}$$

$$U(I) = 0.026 \text{ mA}$$

Para calibraciones eléctricas y electrónicas que no incluyan aviónica y electromedicina $k=2$
(10.1 Guía para estimar la incertidumbre del CENAM)



Información del resultado

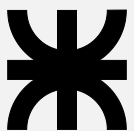
El valor de la corriente de anillo es de

11.342 mA \pm 0.026 mA

Con un grado de confianza de aproximadamente 95%

1) La incertidumbre expandida debe ser informada con no más de **2 cifras significativas**. La incertidumbre se redondea para arriba.

2) El valor numérico del resultado debe ser redondeado para que tenga la misma cantidad de decimales que la incertidumbre informada. Se redondea al número más próximo.



Información del resultado

Cifras significativas:

- Son significativos todos los dígitos distintos de cero.
- Los ceros situados entre dos cifras significativas son significativos.
- Los ceros a la izquierda de la primera cifra significativa no lo son.
- Para números mayores que 1, los ceros a la derecha de la coma son significativos.
- Para números sin coma decimal, los ceros posteriores a la última cifra distinta de cero pueden o no considerarse significativos.

