UTN.BA

Teoría de Circuitos 1

Divertidas notas de clase
Diagramas de impedancia y admitancia

Diego Sebastián Sica
@SicaTc1

Versión 1.0

Apreciadas/os alumnas/os: El objetivo primordial de este documento, derivado de las notas de clases, es acercarles material que los referencie a los temas desarrollados durante nuestros encuentros. Está preparado con un enfoque basado en el alumno y realizado con mucha pasión, y si bien espero que lo consulten, los aliento fuertemente a que no dejen de leer la bibliografía. Destaco que las figuras y citas que eventualmente fueran empleadas tienen el único propósito de conformar el presente escrito y no pretenden obtener ningún beneficio adicional que pudiera afectar los derechos de los autores, a quienes se reconocen como fuente. Lejos del idealismo de la perfección, aceptaré agradecido sus sugerencias.

Diagramas de impedancia y admitancia

Hasta el momento, cuando estudiamos circuitos en régimen senoidal permanente, asumimos que el único parámetro que podía variar era la frecuencia. De hecho estudiamos la respuesta en frecuencia caracterizando al circuito de acuerdo a su comportamiento (pasa altos, pasa bajos, pasa banda), definiendo conceptos como ancho de banda, frecuencia de resonancia, y factor de selectividad. Así, nos parece natural hacer un barrido en frecuencia imaginario que nos proporcione información acerca del comportamiento de la red circuital. La variación de la frecuencia, como ya sabemos, implica un cambio en las impedancias, por lo que es de esperar que también se produzcan cambios en los fasores de sus variables asociadas.

Se puede ampliar un poco más el estudio del comportamiento de un circuito si además de pensar en que puede variar la frecuencia de la señal que lo excita, nos damos la posibilidad de asumir que también puede cambiar algún parámetro intrínseco del circuito, como podrían ser los valores de resistores, capacitores o inductores. Si bien el resultado del estudio que haremos y que se presentará en forma gráfica puede ser el mismo cuando se analiza un cambio de frecuencia o de algún parámetro, es importante tener presente la distinción entre ambas posibilidades: una representa la variación de la señal que estimula al circuito, mientras que el hecho de alterar algún valor de sus componentes hace que la red deje de ser invariante en el tiempo.

Ahora bien, ¿por qué resultaría de interés caracterizar la variación de una impedancia o admitancia? Supongamos por ejemplo un circuito alimentado por un generador de tensión (una situación muy habitual por cierto). Dado que el fasor que representa al generador de ha de mantener constante, si deseáramos conocer su corriente asociada, podríamos hacerlo a través de:

$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$$

Es así que la variación de la admitancia se traduce directamente a la variación de la corriente.

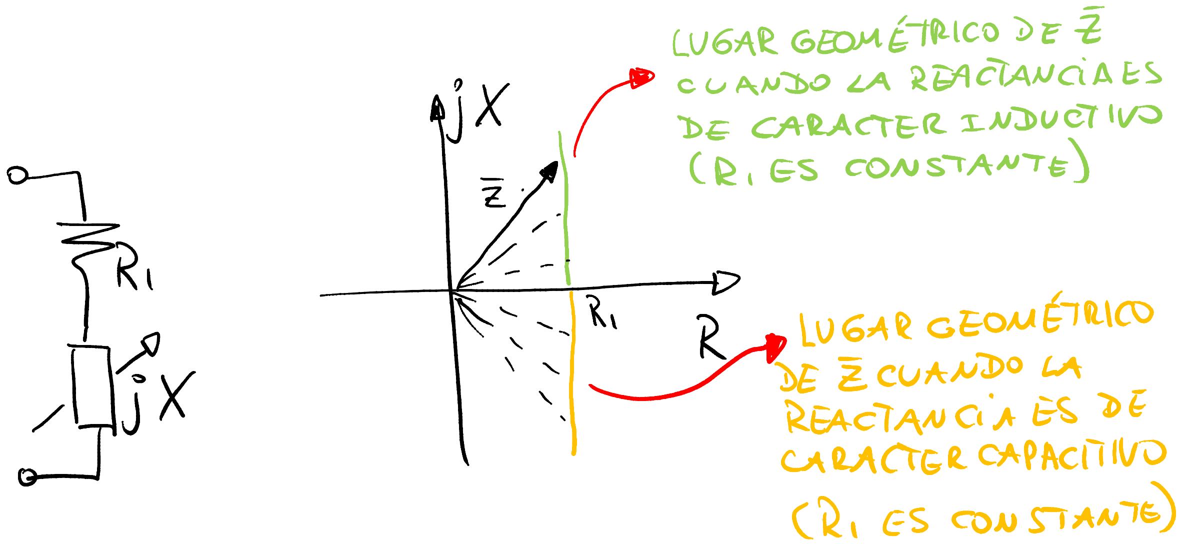
Naturalmente, este estudio puede hacerse tal cual lo veníamos haciendo, planteando ecuaciones de Kirchhoff y aplicando ley de Ohm en el dominio fasorial, llegando a expresiones en el campo de los números complejos. Los diagramas de impedancia/admitancia nos traen la buena noticia que en ciertas ocasiones, podemos hacer un análisis mayormente cualitativo (pero efectivo) en el plano complejo, sin la necesidad de desarrollar todo el potencial del método fasorial.

El manejo de variables en el plano complejo no es tan intuitivo como desearíamos, por lo que vamos a requerir de algunas herramientas prácticas, que usaremos a modo de receta, pero que obviamente están sustentadas en bases teóricas.

Definimos, sin excesivo rigor, al lugar geométrico de impedancias o admitancias como aquella curva en el plano complejo que describe el fasor de la función impedancia/admitancia cuando varía alguno de los parámetros que la compone. La idea de lugar geométrico tiene entonces incorporada la noción de variación.

La técnica de estudiar variaciones paramétricas en el plano complejo no se restringe solamente al caso de admitancias o impedancias, sino que se emplea también en otros campos. Por ejemplo, en teoría de control clásico, se utiliza mucho la técnica de lugar geométrico de raícespara analizar la estabilidad del sistema frente al cambio de uno de sus parámetros. Lo que se hace es variar el parámetro en cuestión, y analizar la posición de las raíces del polinomio denominador de la función transferencia (los polos, en criollo). Si para algún valor del parámetro, los polos pasan al semiplano derecho, significa que el circuito puede volverse inestable para algún valor del parámetro.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos para ir comprendiendo la idea. Imaginemos un circuito en en configuración serie formado por una resistencia y una reactancia variable, que podemos suponer que toma valores positivos y negativos (puede ser inductiva o capacitiva). Su lugar geométrico de impedancia será:



Cómo les parece que va a quedar el lugar geométrico de admitancia para este mismo circuito? Para saberlo, recordemos que:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} \Rightarrow |\bar{Z}| e^{j\varphi} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{1}{|\bar{Z}|} e^{-j\varphi}$$

Trabajando en coordenadas rectangulares (es lo conveniente para analizar el gráfico en el plano complejo G-B:

$$R_1 + jX = \frac{1}{G+jB} \quad \nearrow \; R_1 = \frac{G}{G^2+B^2} \qquad \searrow \; X = \frac{-B}{G^2+B^2}$$

Dado que R_1 es constante:

$$R_1 = \frac{G}{G^2+B^2} \Rightarrow G^2 - \frac{G}{R_1} + B^2 = 0$$

Sumando a ambos lados de la igualdad $\left(\frac{1}{2R_1}\right)^2$ queda

$$G^2 - \frac{G}{R_1} + B^2 + \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2$$

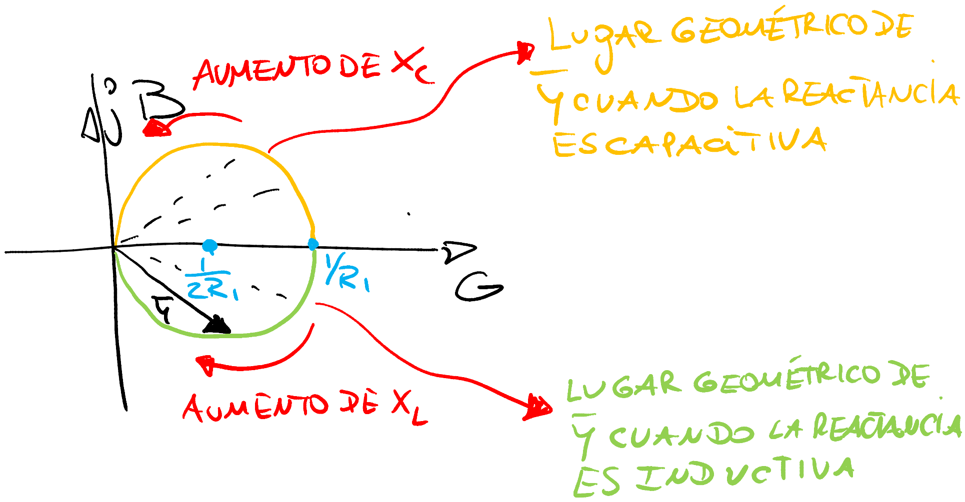
$$\left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2$$

Que en el plano G-B representa una circunferencia de radio:

$$r = \frac{1}{2R_1}$$

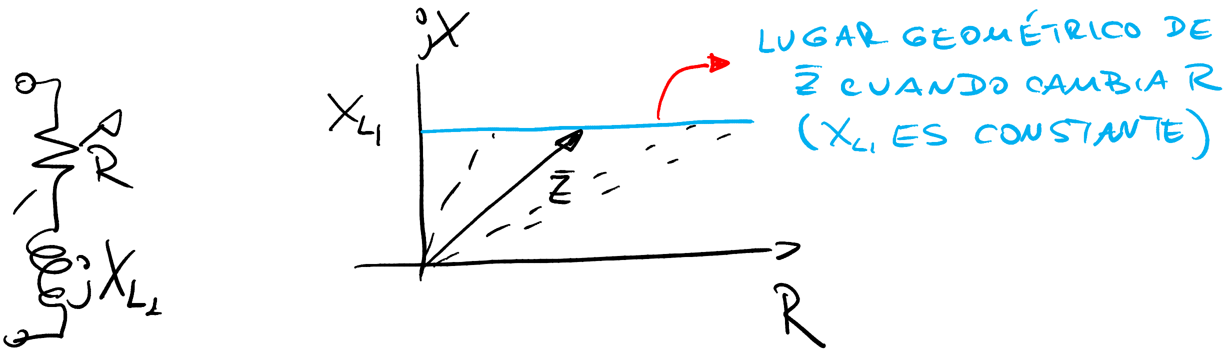
centrada en el punto:

$$C = \left(\frac{1}{2R_1}, 0\right)$$



Resumiendo en un párrafo: A cada punto del lugar geométrico de impedancia le corresponde un punto en el lugar geométrico de admitancia. Los puntos del lugar geométrico de impedancia por encima del eje R se corresponden con los puntos de la semicircunferencia qu está por debajo del eje G en el plano impedancia. Al punto +∞ del lugar geométrico de impedancia le corresponde el origen en el plano admitancia. Análogamente, los puntos del lugar geométrico de impedancia que se encuentra por debajo del eje R, se corresponden con los puntos de la semicircunferencia que están por encima del eje G en el plano admitancia. Al punto -∞ del lugar geométrico de impedancia le corresponde el origen en el plano admitancia.

Ahora pensemos en el caso de una configuración serie como la anterior, pero en lugar de variar la reactancia ahora asumida inductiva, veamos qué pasa si variamos la resistencia.



Con el mismo razonamiento que antes, es posible llegar a:

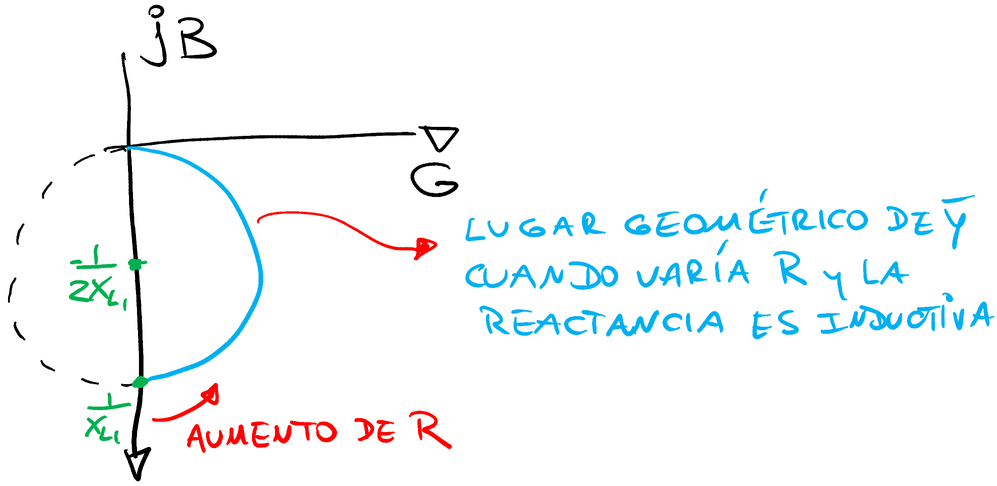
$$G^2 + \left(B + \frac{1}{2X_{L1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2X_{L1}}\right)^2$$

Que es la ecuación del lugar geométrico de admitancia, y que representa una circunferencia de radio:

$$r = \frac{1}{2X_{L1}}$$

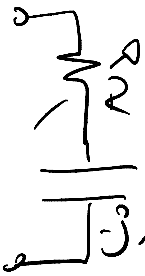
Con su centro en:

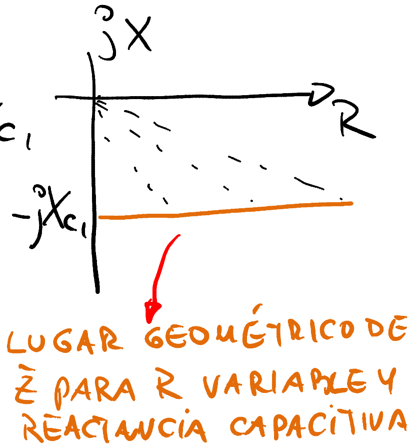
$$c = \left(0, -\frac{1}{2X_{L1}}\right)$$

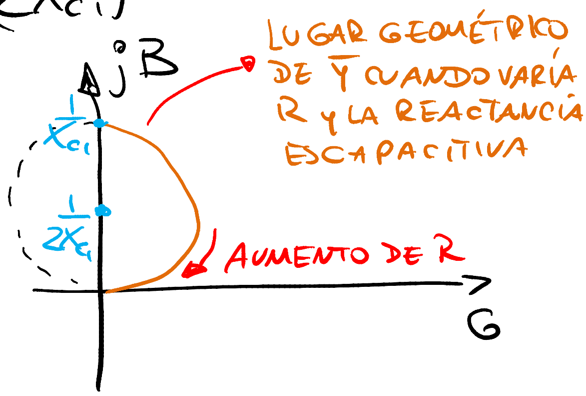


Para el caso de una reactancia capacitiva en serie con una resistencia variable, se obtendría la siguiente expresión:

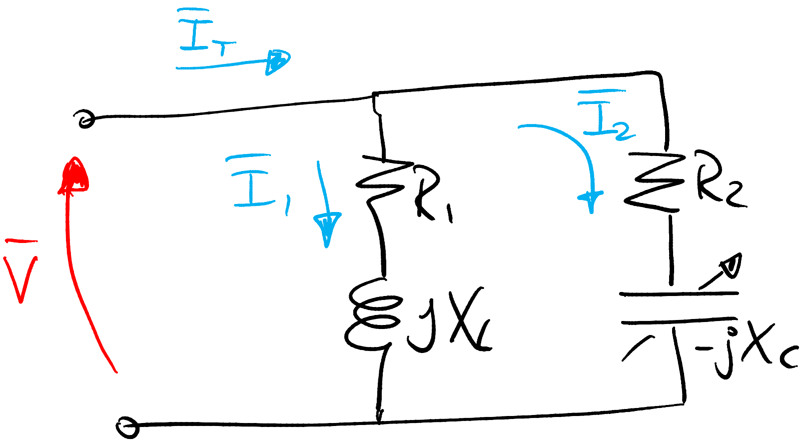
$$G^2 + \left(B - \frac{1}{2X_{C1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2X_{C1}}\right)^2$$







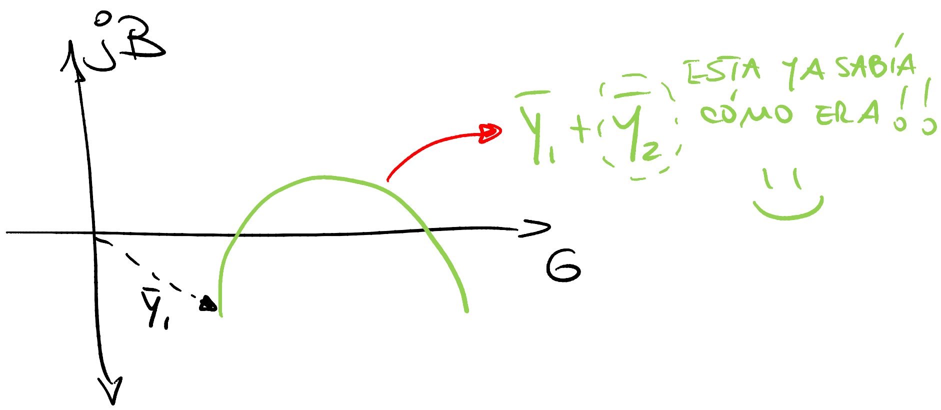
Cómo podríamos proceder para topologías circuitales más complejas, como por ejemplo:



Se procede de la misma manera, solamente que hay que elegir cómo asociar los elementos para que nos quede un escenario más sencillo. En este caso, lo conveniente es trabajar en el plano admitancia, ya que:

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$$

y entonces:



Si luego se nos pidiera el lugar geométrico de impedancia, deberíamos llevar a cabo la operación inversión.

A continuación seremos un poquito más formales y redundantes (a propósito) para fijar ideas.

Comencemos reiterando que en general, tanto la componente resistiva (la parte real de la impedancia, que NO es la suma de las resistencias del circuito) como la componente reactiva de un circuito, pueden depender de uno o varios parámetros. Estos parámetros pueden ser propios del sistema, o pueden variar por el cambio de la frecuencia de la señal de excitación. Esto podría expresarse como:

$$|\bar{Z}| = f_Z(R;L;C;\omega)$$

$$\varphi_Z = f_\varphi(R;L;C;\omega)$$

$$\mathbb{R}e[\bar{Z}] = f_{\mathbb{R}e_Z}(R;L;C;\omega)$$

$$\mathbb{I}m[\bar{Z}] = f_{\mathbb{I}m_Z}(R;L;C;\omega)$$

Se aprecia entonces que el punto en el plano complejo que determina el extremo del fasor impedancia será función de los valores R, L, C y ω. Si para el mismo circuito se varía alguno de estos valores, el extremo del fasor se desplazará siguiendo alguna trayectoria que dependerá del parámetro que cambie.

Llamaremos diagrama de impedancia o lugar geométrico de impedancia a la trayectoria en el plano complejo R – jX descripta por las sucesivas posiciones que adopta el extremo del fasor impedancia al modificarse el valor del parámetro independiente que puede ser indistintamente R, L, C , u ω. El lugar geométrico de admitancia se define en forma análoga, pero en el plano G - jB.

Para analizar el lugar geométrico de admitancia, es importante comprender bien la transformación inversión, dado que si disponemos del diagrama de impedancia es posible hallar el de admitancia en virtud que:

$$\bar{Z} = Z\, e^{j\varphi_Z}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi_Z}$$

NOTA: $|\bar{Z}| = Z$

Existen procedimientos gráficos para pasar del diagrama impedancia al diagrama admitancia, pero son bastante demandantes en términos de tiempo (y en mi caso en paciencia), y por eso nos dirigiremos a otro enfoque.

La ecuación cartesiana general de una circunferencia es:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$$

Para relacionar el mundo cartesiano x-y con el plano complejo R-JX, recuramos a la siguiente notación:

$$\bar{Z}=x+jy \qquad \bar{Z}^*=x-jy$$

Como

$$\bar{Z}\bar{Z}^*=x^2+y^2 \; ; \; \bar{Z}+\bar{Z}^*=2x \; ; \; \bar{Z}-\bar{Z}^*=2jy$$

Expresamos

$$x=\frac{\bar{Z}+\bar{Z}^*}{2} \quad ; \quad y=\frac{\bar{Z}-\bar{Z}^*}{2}$$

Y reemplazando en la ecuación cartesiana obtenemos:

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO $\bar{Z}$

$$a\,\bar{Z}\bar{Z}^*+b\,\frac{\bar{Z}+\bar{Z}^*}{2}+c\,\frac{\bar{Z}-\bar{Z}^*}{2j}+d=0$$

Para pasar al mundo complejo dela admitancia, recordamos que:

$$\bar{Z}=\frac{1}{\bar{Y}} \quad ; \quad \bar{Z}^*=\frac{1}{\bar{Y}^*}$$

Multiplicando por $\bar{y}\bar{y}^*$ y ordenando queda:

$$a\,\frac{1}{\bar{y}\bar{y}^*} + b\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{y}} + \frac{1}{\bar{y}^*}\right) + c\,\frac{1}{2j}\left(\bar{y} - \bar{y}^*\right) + d = 0$$

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO $\bar{Y}$

$$d\;\bar{y}\bar{y}^* + b\,\frac{\bar{y}+\bar{y}^*}{2} - c\,\frac{\bar{y}-\bar{y}^*}{2j} + a = 0$$

Para comparar, escribamos de nuevo la representación para el plano impedancia:

$$a\,\bar{z}\bar{z}^* + b\,\frac{\bar{z}+\bar{z}^*}{2} + c\,\frac{\bar{z}-\bar{z}^*}{2j} + d = 0$$

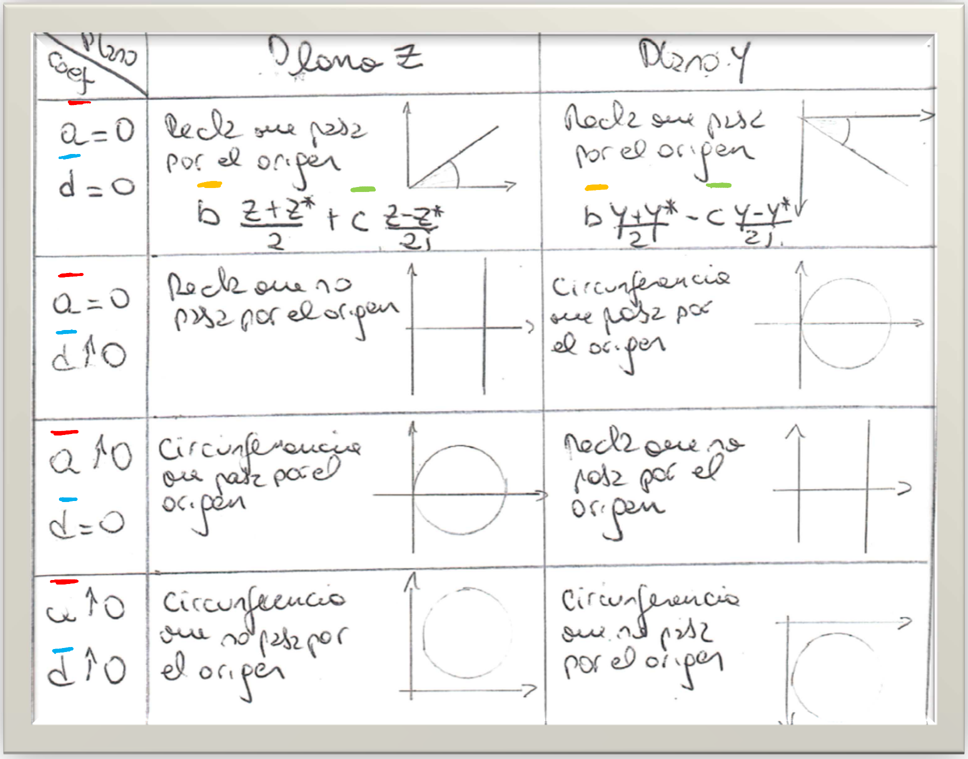
Vemos así que si en el plano complejo impedancia se aplica la transformación inversión a una circunferencia (o como caso particular a una recta), se obtiene una circunferencia (o como caso particular una recta) en el plano admitancia. Esta conclusión será bautizada como primera propiedad de la transformación inversión.

También se observa que luego de realizar la inversión, no cambia el signo de la parte real, cosa que puede apreciarse comparando los términos de b Se establece así que si en el plano de impedancia la componente real está en el semiplano positivo, en el plano admitancia la componente real correspondiente al punto inverso también estará en el semiplano positivo, y viceversa. Esta característica de la inversión será denominada segunda propiedad. Comentario al margen: Por el momento, todas nuestras impedancias y admitancias tendrán parte real positiva.

Si ahora ponemos atención al coeficiente, c se ve que a través de la inversión se cambia el signo de la componente imaginaria. Si en el plano impedancia la parte imaginaria es positiva, en el plano admitancia será negativa, y viceversa. Cómo se llamará esta particularidad? Si! Tercera propiedad!

En base a la segunda y a la tercera propiedad, se deduce (como sabíamos) que se cambia el signo dela fase.

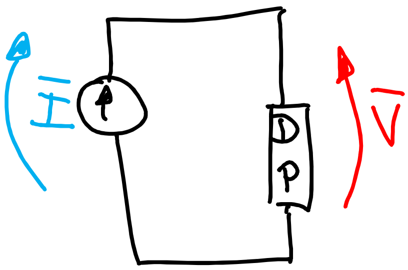
Resumimos estas consideraciones a través de la siguiente tabla, tomada del libro Circuitos eléctricos: análisis de modelos circuitales (Pueyo, H. O., & Marco, C. 2004. Alfaomega Grupo Editor).



Coef \ Plano	Plano Z	Plano Y
$\bar{a} = 0$, $\bar{d} = 0$	Recta que pasa por el origen $b\frac{Z+Z^*}{2} + c\frac{Z-Z^*}{2j}$	Recta que pasa por el origen $b\frac{Y+Y^*}{2} - c\frac{Y-Y^*}{2j}$
$\bar{a} = 0$, $\bar{d} \neq 0$	Recta que no pasa por el origen	Circunferencia que pasa por el origen
$\bar{a} \neq 0$, $\bar{d} = 0$	Circunferencia que pasa por el origen	Recta que no pasa por el origen
$\bar{a} \neq 0$, $\bar{d} \neq 0$	Circunferencia que no pasa por el origen	Circunferencia que no pasa por el origen

Diagramas tensión, corriente y potencia

Sea un dipolo pasivo excitado por un generador de corriente. Vemos que bajo ciertas condiciones bastantes generales, toda variación en la impedancia se traducirá en una variación de la tensión sobre sí misma, dado que la corriente no se modificará porque la impone el generador (supuesto ideal). En consecuencia, el diagrama de impedancia podrá transformarse fácilmente en un diagrama de tensiones, siempre teniendo en cuenta las escalas y unidades.

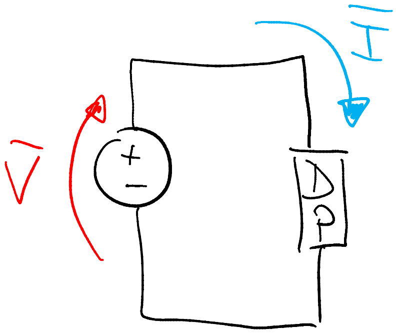


Dado que la potencia aparente es:

$$\bar{P}_s = \bar{V}\bar{I}^* = \bar{Z}\bar{I}\bar{I}^* = \bar{Z}I^2$$

el diagrama de impedancia también sirve para representar un diagrama de potencia (nuevamente con la obvia consideración de las escalas y unidades)

Si ahora el dipolo se excita con un generador de tensión (supongamos ideal), cualquier variación de la admitancia será reflejado en una variación en su corriente, dado que la tensión es impuesta por el generador. Así el diagrama de admitancia puede convertirse en uno de corriente y en uno de potencia (con los ajustes de escalas y unidades).

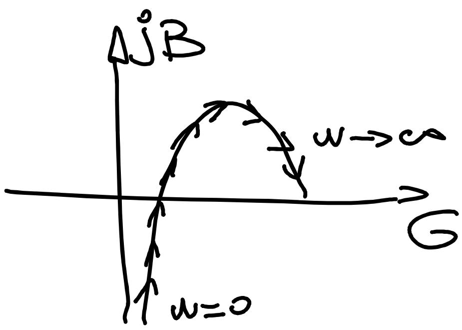


$$\bar{P}_s = \bar{V}\bar{I}^* = \bar{V}\bar{V}^*\bar{Y}^* = \bar{Y}^* V^2$$

Comentarios finales

Ahora resta hacer la guía y algunos ejemplos para develar el misterio de los lugares geométricos de impedancias y admitancias. Les recomiendo algunas cositas (pónganlas en contexto):

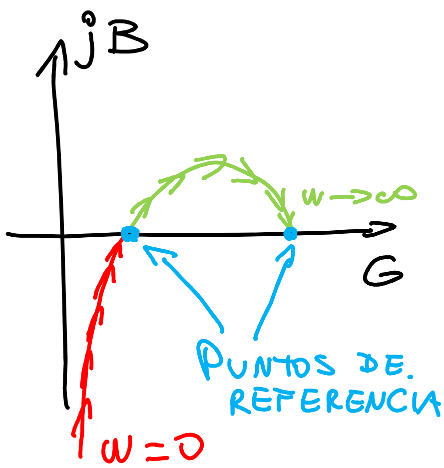
1. Siempre (**pero siempre**) indiquen la relación entre el parámetro que varía y la evolución de la curva. Si no lo hacen, cuando intenten combinar diagramas, pueden cometer errores. . Por ejemplo, para el caso de un diagrama de admitancia cuyo parámetro variable es la frecuencia:

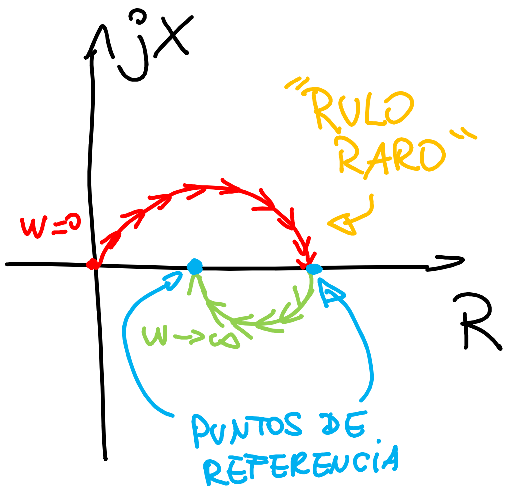


2. Recuerden las propiedades en la inversión:
    a. Lo que está abajo, pasa arriba.
    b. Lo que está a derecha queda en la derecha.
    c. Una recta se transforma en una circunferencia, y una circunferencia en una recta.
3. Ayúdense pensando qué pasa con los diagramas cuando:
    a. El parámetro vale cero.
    b. El parámetro vale infinito.

    (En criollo: a dónde va a parar el punto cuando el parámetro vale cero o infinito)
4. Identifiquen los puntos de referencia importantes: Por ejemplo aquel que cruza al eje real, que representa la frecuencia de resonancia en el caso, bastante frecuente por cierto, en el que el parámetro que varíe sea la frecuencia.
5. Si tiene que llegar de una región del lugar geométrico a otra, piensen en las propiedades, y en que a veces habrá casos en el que el diagrama hace "rulos raros".

Apreciemos estos comentarios en la siguiente figura:





Observen que en el diagrama admitancia, lo que es "como una recta" debajo del eje real (**la parte que está en rojo**) para a ser "algo parecido" a una circunferencia encima del eje real. Y lo que era "similar" a una circunferencia encima del eje real (**la parte en verde**), pasa a ser "como si fuera" a una circunferencia debajo del eje real.