

Лабораторная работа №3. Изучение методов сглаживающей фильтрации на основе аппроксимации

Цель работы. Изучить основы метода сглаживающей фильтрации зашумленных сигналов на основе методов аппроксимации.

Краткие теоретические сведения

Задача аппроксимации является типовой в цифровой обработке сигналов и данных. С помощью аппроксимации решаются задачи идентификации функциональных зависимостей, мультимедиа-сжатия данных и ряд других. Решение задачи сглаживающей фильтрации зашумленных дискретизированных сигналов при помощи аппроксимации, в случае, когда обрабатывается уже зарегистрированная выборка из N отсчетов (информационный массив $\{x_n\}$, $n=0,1,\dots,N-1$), обеспечивается расчетом коэффициентов разложения полученного N -мерного вектора по системе базисных векторов (каждый вектор представлен дискретизированной базисной функцией), и формированием выходного сигнала фильтра как линейной комбинации некоторого количества базисных функций (обобщенный ряд Фурье):

$$y_n = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \varphi_{n,m}, n=0,1,\dots,N-1 \quad (1)$$

где a_m – коэффициенты разложения, $\varphi_{n,m}$ – n -й отсчет m -й базисной функции, для выполнения сглаживающей фильтрации необходимо выполнение условия $M < N$ (обычно $M \ll N$).

Коэффициенты разложения $\{a_m\}$ выборки $\{x_n\}$ в обобщенный ряд Фурье (1) в случае, если дискретизированные базисные функции $\{\varphi_{n,m}\}$ попарно ортогональны с весом $\{w_n\}$, рассчитываются по общей формуле

$$a_m = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w_n x_n \varphi_{n,m}}{\sum_{n=0}^{N-1} w_n \varphi_{n,m}^2}, m=0,1,\dots,M-1 \quad (2)$$

Для некоторых базисов (Фурье, Лежандра) весовая функция равна единице, т. е. $w_n=1$, что упрощает вычисления по (2). Если же, дополнительно, используемая система базисных функций является ортонормированной, когда для всех базисных функций справедливо $\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_{n,m}^2 = 1$, вычисления, очевидно, становятся еще проще.

Эффект сглаживающей фильтрации обеспечивается за счет отсутствия в сумме (1) слагаемых, соответствующим наиболее быстро осциллирующим базисным функциям. При необходимости обработки записанных реализаций сигналов, с фиксированным объемом выборки в качестве системы базисных функций выбирают полную систему ортогональных функций, которые ортогональны на некотором конечном интервале времени. Рассмотренный принцип цифровой обработки сигналов известен также как метод фильтрации на основе ортогональных разложений.

Чаще всего для решения задачи аппроксимации в этом случае используются:

- тригонометрический базис (базис Фурье),
- базис функций (многочленов) Чебышева 1-го и 2-го рода,
- базис функций (многочленов) Лежандра,
- базис Уолша,
- многочлены Гегенбауэра.

Для работы с дискретизированными сигналами разработаны ортогональные полиномы дискретной переменной: полиномы (функции) Хана и Кравчука. Для решения задачи фильтрации возможно также построение “обычного” аппроксимирующего полинома $y_n = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \left(\frac{n}{\sqrt{N}}\right)^m$, (в варианте заданий №6, см. таблицу) хотя используемый базис функций в данном случае не является ортогональным, поэтому формулу (2) использовать нельзя. Методика расчета аппроксимирующего полинома подробно рассмотрена в [7].

Следует заметить, что многие системы базисных функций заложены в MathCAD как стандартные функции, например, полиномы Лагранжа рассчитываются при вызове стандартной

функции $\text{Lag}(m,t)$, полиномы Чебышева 1-го рода – функции $\text{Tcheb}(m,t)$, где m – номер базисной функции, а t – вещественный аргумент, который в контексте обработки сигналов соответствует времени. Чтобы привести диапазон изменения аргумента t , который для базисов полиномов Лагранжа и Чебышева соответствует интервалу $[-1, +1]$, к интервалу изменения дискретного индекса n (от 0 до $N-1$), следует осуществить замену переменной вида

$$t = \frac{2n}{N-1} - 1, \quad (3)$$

анализируя которую, нетрудно видеть, что при $n=0$ получится $t=-1$, а значению $n=N-1$ соответствует $t=+1$.

В случае, если интервал ортогональности для используемого базиса отличается от интервала $[-1, +1]$, следует использовать другую формулу замены переменной, линейно связывающую аргументы t и n , вывод которой осуществить нетрудно.

Варианты заданий*

Задание на выполнение работы предполагает осуществление фильтрации смеси полезного сигнала с помехой (рекомендуется использовать модель из лабораторной работы №1) с использованием технологии аппроксимации по заданной системе базисных функций. Количество используемых базисных функций в (1) определяется обучающимся самостоятельно по критерию минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Следует осуществить моделирование работы сглаживающего фильтра и проиллюстрировать полученные результаты для разных значений параметра M . Следует сравнить результаты фильтрации на основе аппроксимации с результатом, полученным в лабораторной работе №2.

Номера вариантов заданий приведены в таблице.

Таблица – Варианты заданий

№ вар.	1	2	3	4	5	6
Базисные функции	Фурье	Чебышева	Лежандра	Гегенбауэра	Уолша	полином
№ вар.	7	8	9	10	11	12
Базисные функции	Хартли	ДКП-1	ДКП-2	ДКП-3	ДКП-4	Якоби

*Примечание:

При нарушении указанного предельного срока представления работы, максимальное количество баллов за работу **снижается на 2 балла в неделю**. При желании обучающегося сохранить максимальный балл, требуется дополнительно предварительно согласовать с преподавателем и выполнить одно из дополнительных заданий:

- 1) написать вычислительную процедуру, позволяющую методом статистических испытаний найти оптимальное количество базисных функций разложения заданного сигнала при выполнении сглаживающей фильтрации по критерию минимума среднеквадратической ошибки: необходимо осуществить многократное повторение работы фильтра для одного и того же сигнала и разных реализаций шума, с вычислением среднеквадратической ошибки фильтрации;
- 2) использовать для решения задачи многочлены Кравчука;
- 3) Использовать для решения задачи многочлены Хана;
- 4) Использовать для решения задачи полиномы Эрмита.

Для расчетов рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD.

Порядок выполнения работы

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.

2. Осуществить моделирование смеси полезного сигнала с помехой.
3. Изучить теоретические сведения о заданном семействе базисных функций (уточнить весовую функцию, свойство ортонормированности, наличие встроенной функции в MathCAD, а при отсутствии таковой – найти явные формулы для расчета базисных функций).
4. Сформировать M дискретизированных базисных функций (кроме варианта №6). Построить графики нескольких базисных функций.
5. Осуществить моделирование сглаживающего фильтра, построить графики выходного сигнала $\{y_n\}$ при разных значениях параметра M . Вычислить среднеквадратическую ошибку фильтрации.
6. Ориентировочно определить оптимальное по критерию минимума СКО значение M , анализируя результаты для одной выборки при разных значениях M (по желанию или при необходимости данное значение точнее определяется методом статистических испытаний, см. примечание к вариантам заданий).
7. Построить графики разности между заданной функцией полезного сигнала и для результата фильтрации на основе исследованного метода. Оценить визуально качество фильтрации.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретические сведения методологии фильтрации сигналов с использованием методов аппроксимации.
3. Программа, в которой представлена последовательности результаты обработки сигналов, с необходимыми комментариями. При необходимости (см. примечания к вариантам заданий) приводится программа-функция, обеспечивающая определение оптимального значения параметра M на основе метода статистических испытаний.
4. Полученные графики.
5. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов.
6. Список используемых источников.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО / С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцив; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С.В. Умняшкин. - М.: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2014. - 304 с. [библиотечный шифр 519.6/8 У54]
4. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин, М.: Физматлит, 2005, 480 с. [Доступна онлайн: URL: <http://bookre.org/reader?file=443718>]
5. Ортогональные многочлены – Википедия.
URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Ортогональные_многочлены
6. Ортогональные полиномы и обобщенный ряд Фурье.
URL: <http://www.math24.ru/ортогональные-полиномы.html>
7. Аппроксимация функций, моделирующих сигналы. / Национальная библиотека им. Н.Э. Баумана
// URL: https://ru.bmstu.wiki/Аппроксимация_функций,_моделирующих_сигналы
8. Классические ортогональные базисы в задачах аналитического описания и обработки информационных сигналов. Учеб. пособие. / Дедус Ф.Ф., Куликова Л.И., Панкратов А.Н., Тетуев Р.К. М.: Изд-во Московского гос. ун-та им. М.В. Ломоносова, 2004. 141 с.