

Лабораторная работа №1. Изучение методов интерполяции

Цель работы. Изучить основы методов интерполяции. Осуществить сравнение двух методов интерполяции: метод полиномиальной интерполяции и метод кубической сплайн-интерполяции.

Краткие теоретические сведения

Задача интерполяции является типовой в цифровой обработке сигналов и данных. С помощью интерполяции решаются задачи расчета графиков, восстановления пропущенных данных, фильтрация сигналов, мультимедиа-сжатие данных и ряд других. Существуют различные подходы к расчету интерполирующей функции по заданному множеству узловых точек. Исторически первым методом был метод построения глобального интерполяционного полинома. Его недостатком является неустойчивость к ошибкам округления, неизбежным при расчете на вычислительных машинах. Поэтому в большинстве практических приложений используется та или иная разновидность кусочно-полиномиальной интерполяции. Наиболее употребительным методом этого типа является метод кубической сплайн-интерполяции [1]. В настоящее время в большинстве математических пакетов прикладных программ заложены стандартные функции, реализующие различные методы интерполяции. В частности, в среде MathCAD метод кубической сплайн-интерполяции реализуется при совместном применении двух встроенных функций – *interp* и *cspline*.

Варианты заданий*

Задание на выполнение работы включает получение обучающимся функции $y(t)$, в соответствии с номером варианта задания, с последующим формированием на каждой из функций некоторого количества узловых точек на равномерной сетке по аргументу времени t (первый и последний узел совпадают с начальным и конечным значением функции) и построением двух видов интерполянтов: по методу полиномиальной интерполяции и по методу кубической сплайн-интерполяции. Параметры дискретизации функции $y(t)$ по времени (в результате которой будет получен массив отсчетов $\{y_n\}$, $n=0,1,...,N-1$) обучающийся производит самостоятельно.

Таблица – Варианты заданий

Вар.	функция $y(t)$	ε_y	Вар.	функция $y(t)$	ε_y
1	$\sin(2\pi \cdot 3t); t \in [0,1]$	0.01	11	$\cos^2(2\pi \cdot 3t + \pi/4) - 0.5; t \in [0,1]$	0.01
2	$\sin(2\pi \cdot \sin(\pi t)); t \in [0,1]$	0.01	12	$64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t - 1; t \in [0,1]$	0.02
3	$16t^5 - 20t^3 + 4t; t \in [0,1]$	0.02	13	$\cos(2\pi \cdot t) - \cos(6\pi \cdot t); t \in [0,3]$	0.02
4	$\text{tg}(\sin(2\pi \cdot 5t)); t \in [0,1]$	0.02	14	$\sin^2(2\pi \cdot 5t + \pi/4) - 0.5; t \in [0,1]$	0.01
5	$20t^3 - 30t^2 + 12t - 2; t \in [0,1]$	0.02	15	$\sqrt[3]{\sin(2\pi t)}; t \in [0,3]$	0.02
6	$\exp(\sin(2\pi \cdot 2t)) - 1; t \in [0,3]$	0.01	16	$\sin(2\pi \cdot 3t) - \sin(2\pi \cdot 9t); t \in [0,1]$	0.01
7	$\sin^3(2\pi t); t \in [0,5]$	0.01	17	$\cos(2\pi \cdot t) - 0.7\cos(4\pi \cdot t) - 0.3\cos(6\pi \cdot t); t \in [0,3]$	0.02
8	$\sin(2\pi \cdot t^2); t \in [0,2]$	0.02	18	$\exp(\cos(2\pi \cdot 5t)) - 1; t \in [0,1]$	0.01
9	$6t^2 - 5t - 1; t \in [0,1]$	0.01	19	$0.5t^4 - 2.25t^2 + 1; t \in [0,2]$	0.01
10	$\ln(2 - \cos(2\pi \cdot 3t)); t \in [0,2]$	0.01	20	$\text{tg}(\sin(2\pi \cdot 3t)); t \in [0,1]$	0.01

Примечания:

*При представлении отчета после указанной предельной даты выполнения работы максимальное количество баллов за работу снижается на **2 балла в неделю**. При желании

сохранить количество баллов обучающийся должен предварительно согласовать с преподавателем и выполнить одно из индивидуальных заданий:

- 1) решить задачу с применением метода интерполяции сплайнами Эрмита;
- 2) решить задачу с применением метода интерполяции сплайнами Безье;
- 3) Написать программу для расчета данных зависимости ошибки интерполяции при использовании сплайнов от количества узловых точек и построить график зависимости ε_y от M .

****Аргументы тригонометрических функций полагаются заданными в радианной мере.**

Для расчетов рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD.

Порядок выполнения работы

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Осуществить дискретизацию функции $y(t)$, выбрав самостоятельно период дискретизации T_Δ и объем выборки N , опираясь на требование теоремы Котельникова.
3. Сформировать массив, содержащий координаты узловых точек интерполяции (так, чтобы количество узлов M было значительно меньше N).
4. Построить график заданной функции $y(t)$, нанести на них на них узловые точки так, чтобы обеспечить наглядность представления.
5. Запрограммировать два изучаемых метода интерполирования: полиномиальной интерполяции (можно использовать форму Лагранжа или Ньютона) и кубической сплайн-интерполяции. При желании можно дополнительно осуществить построение интерполянта, используя ряд Котельникова. Построить графики интерполирующих функций, дискретизированных с теми же параметрами T_Δ и N . Оценить визуально качество интерполяции. Построить графики разностей
6. Построить графики разности между заданной функцией и каждым сформированным интерполянтом $\Delta y_n = y_n - s_n$. Определить величину относительной среднеквадратической ошибки интерполяции $\varepsilon_y = \sigma(\Delta y) / \sigma(y)$, где σ реализуется функцией `stdev` в MathCAD.
7. Повторить п. 2-6, существенно изменив параметры дискретизации и/или количество узлов интерполяции, найдя такое сочетание параметров, при котором ошибка максимальное по модулю значение ошибки интерполяции при использовании метода сплайн-интерполяции не будет превышать заданную по варианту величину ε_y .

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретические сведения об используемых методах интерполирования.
3. Программа, в которой представлена последовательности результаты обработки сигналов, с необходимыми комментариями.
4. Полученные графики: исходно заданной функции и двух интерполирующих функций – полиномиальной интерполяции и сплайн-интерполяции, а также графики соответствующих разностей Δu_n .
5. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов.
6. Список используемых источников.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО /С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцев; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Полиномиальная (алгебраическая) интерполяция.
URL: <https://studfiles.net/preview/6008218/page:12/>
4. Полиномиальная интерполяция.
URL: https://studopedia.ru/9_211033_polinomialnaya-interpolyatsiya.html