

## Лабораторная работа №4. Изучение цифрового фильтра на основе метода наименьших квадратов

**Цель работы.** Изучить метод цифровой обработки сигналов с использованием фильтра на основе метода наименьших квадратов (МНК-фильтра).

### Краткие теоретические сведения

Задача фильтрации сигналов с целью исключения помеховых составляющих имеет множество разновидностей постановок в зависимости от свойств сигналов и помех. Фильтрация на основе метода наименьших квадратов по существу использует принцип аппроксимации. В рамках лабораторной работы №3 был изучен метод цифровой фильтрации на основе аппроксимации для случая постановки задачи, когда обработке подлежит выборка фиксированной длины – информационный массив  $\{x_n\}$ . Изучаемый в данной лабораторной работе МНК-фильтр предназначен для решения задачи фильтрации в реальном масштабе времени, когда вычисления выходного сигнала фильтра производятся по мере поступления новых отсчетов входного дискретизируемого процесса и предварительная фиксация всей выборки в виде массива не требуется.

Общая идея работы цифрового МНК-фильтра заключается в последовательном применении метода аппроксимации на скользящем временном окне длины  $L$  отсчетов и формировании каждого нового отсчета выходного сигнала по формуле:

$$y_n = \sum_{m=0}^{M-1} a_{m,\{n\}} \varphi_{\frac{L}{2},m}, \quad (1)$$

где, в отличие от метода, изученного в рамках лабораторной работы №3, коэффициенты разложения не являются постоянными, а обновляются для каждого нового  $n$ -го отсчета входного сигнала, что отражено дополнительным индексом  $n$ . Здесь коэффициенты разложения  $a_{m,\{n\}}$  вычисляются по выборке длиной  $L$  отсчетов в окрестности каждого  $n$ -го отсчета входного сигнала  $\{x_{n-(L/2)}, x_{n-(L/2)+1}, \dots, x_{n+L/2-1}, x_{n+L/2}\}$ , для выполнения сглаживающей фильтрации необходимо выполнение условия  $M < L$  (обычно  $M \ll L$ ).

Обычно при применении МНК-фильтра используют базисные функции, соответствующие компонентам степенного полинома:  $\varphi_{k,m} = \left(\frac{k}{\sqrt{L}}\right)^m$ ,  $k = 0, 1, \dots, L-1$ . При  $M=1$  принцип работы МНК-фильтра заключается в формировании  $n$ -го отсчета выходного сигнала равным ординате средней точки регрессионной прямой, построенной по  $L$  отсчетам обрабатываемого дискретизированного сигнала, такая разновидность называется МНК-фильтр 1-го порядка; при  $M=2$  производится параболическая аппроксимация данных, и отсчет выходного сигнала, опять же, является значением аппроксимирующей функции в середине окна данных длиной  $L$  отсчетов  $\{x_{n-(L/2)}, x_{n-(L/2)+1}, \dots, x_{n+L/2-1}, x_{n+L/2}\}$ , – это уже МНК-фильтр 2-го порядка, и т.д. Начальные  $L$  отсчетов выходного сигнала (для  $n < L$ , когда еще не накоплена “предыстория”) рассчитываются по методу полиномиальной аппроксимации по фиксированной выборке из первых  $L$  отсчетов. В принципе, для реализации МНК-фильтра в принципе можно использовать и любые системы базисных функций, по аналогии с примененными в лабораторной работе №3.

Коэффициенты разложения  $a_{m,\{n\}}$  рассчитываются заново для каждого нового положения скользящего окна по общеизвестной векторно-матричной формуле МНК-оценок параметров:

$$\vec{a}_{\{n\}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \vec{x}_{\{n\}} \quad (2)$$

где  $\vec{a}_{\{n\}} = \{a_{0,n}, a_{1,n}, a_{2,n} \dots a_{M-1,n}\}^T$ , матрица  $\Phi$  имеет  $L$  строк и  $M$  столбцов, каждый столбец образован значениями отсчетов степенной базисной функции  $\varphi_{k,m} = \left(\frac{k}{\sqrt{L}}\right)^m$ ,  $k = 0, 1, \dots, L-1$ ,

$m=0,1...M-1$ , а  $L$ -мерный вектор-столбец  $\tilde{x}^{[n]}$  содержит отсчеты обрабатываемого фрагмента сигнала на скользящем окне, т. е. образован как  $\{x_{n-(L/2)}, x_{n-(L/2)+1}, \dots, x_{n+L/2-1}, x_{n+L/2}\}^T$ .

Обработка на скользящем окне обеспечивает возможность работы фильтра по мере поступления новых отсчетов входного сигнала, без формального ограничения длины выборки. Впрочем, для реализации программы на компьютере такое ограничение формально ввести придется, задавая объем выборки  $N \gg M$ .

При практической реализации МНК-фильтра для уменьшения количества вычислительных операций нужно вычислить матрицу преобразования  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$ , используемую в (2), заранее, поскольку в рассматриваемом варианте реализации МНК-фильтра ее не требуется обновлять (вообще существует более сложная разновидность МНК-фильтра, когда коэффициенты фильтра автоматически настраиваются на оптимальные значения, такой фильтр известен как адаптивный МНК-фильтр, в данной работе задача его изучения не ставится). А при необходимости можно получить формулу для реализации МНК-фильтра в формате разностного уравнения КИХ-фильтра [4].

### Варианты заданий\*

Исходные данные о свойствах сигналов и помех заимствуются из лабораторной работы №3. Следует осуществить моделирование работы сглаживающего фильтра и проиллюстрировать полученные результаты для разных значений параметра  $L$  при фиксированном, заданном по варианту значении параметра  $M$ . Необходимо представить временные диаграммы входного и выходного сигналов. Рекомендуется сравнить результат фильтрации с полученным при выполнении лабораторных работ №2 и №3.

Таблица – Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6
$M$	1	2	3	4	5	6

#### \*Примечание:

После указанной предельной даты выполнения работы максимальное количество баллов за работу **снижается на 1 балл каждые 2 дня** после указанной предельной даты. При желании обучающегося сохранить максимально возможный балл, требуется выполнить одно из дополнительных заданий

1. Провести исследование методом статистического моделирования: провести многократное повторение работы МНК-фильтра при одном и том же сигнале и разных реализациях помех, на основе полученных данных нужно обосновать оптимальное значение параметров  $L$  и  $M$  (независимо от полученного варианта, соответствующего данным таблицы) при которых обеспечивается минимальная среднеквадратическая ошибка фильтрации.
2. Реализовать модель МНК-фильтра для своего варианта в среде Proteus в виде микропроцессорного фильтра.

Для расчетов рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD.

### Порядок выполнения работы.

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Осуществить моделирование смеси полезного сигнала с помехой.
3. Осуществить моделирование МНК-фильтра при разных значениях параметра  $L$  (задать несколько значений, отличающихся в разы), построить графики входного процесса и выходного сигнала фильтра при каждом значении  $L$ .
4. Оценить визуально качество фильтрации. Вычислить среднеквадратическую ошибку фильтрации при каждом значении  $L$ .

5. Ориентировочно определить оптимальное по критерию минимума СКО значение  $L$ , анализируя результаты для одной выборки.
6. По желанию или при необходимости (см. примечание к вариантам заданий), выполнить дополнительное исследование.
7. Сформулировать выводы.

### Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретические сведения методологии построения МНК-фильтров.
3. Программа, в которой представлена последовательности результаты обработки сигналов, с необходимыми комментариями. При необходимости (см. примечания к вариантам заданий) дополнительно приводится программа-функция, обеспечивающая определение оптимальных значений параметров  $M$  и  $L$  для изученного МНК-фильтра на основе метода статистических испытаний.
4. Полученные графики.
5. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов.
6. Список используемых источников.

### Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО / С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцив; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С.В. Умняшкин. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2014. - 304 с. [библиотечный шифр 519.6/8 У54]
4. Национальная библиотека им. Н. Э. Баумана. Bauman National Library. Фильтры, реализующие метод наименьших квадратов.  
// URL: [http://ru.bmstu.wiki/Фильтры\\_реализующие\\_метод\\_наименьших\\_квадратов](http://ru.bmstu.wiki/Фильтры_реализующие_метод_наименьших_квадратов)