Generowanie liczb pseudolosowych o zadanym rozk'adzie w jednym wymiarze

Filip Brodacz

2025-03-26

1 Wstęp

Generowanie liczb pseudolosowych o określonym rozkładzie jest kluczowe w wielu zastosowaniach obliczeniowych, w tym w symulacjach Monte Carlo i analizie statystycznej. W tym raporcie rozważamy trzy metody generowania liczb zgodnych z funkcją gęstości prawdopodobieństwa (PDF):

$$f(x) = \frac{4}{5}(1 + x - x^3), \quad x \in [0, 1] \tag{1}$$

oraz odpowiadającą jej dystrybuantę (CDF):

$$F(x) = \frac{4}{5}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right), \quad x \in [0, 1] \tag{2}$$

W analizie porównano trzy metody generacji:

1.1 Metoda rozkładu złożonego

Opiera się na dekompozycji dystrybuanty na sumie składowych:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i H_i(x), \tag{3}$$

gdzie g_i to współczynniki, a $H_i(x)$ to funkcje dystrybuant składowych. W tym przypadku:

$$g_1 = \frac{4}{5}, \quad H_1(x) = x \tag{4}$$

$$g_2 = \frac{1}{5}, \quad H_2(x) = 2x^2 - x^4 \tag{5}$$

1.2 Metoda łancucha Markowa

Bazuje na generowaniu ciągu zgodnie z algorytmem Metropolisa-Hastingsa:

$$X_{i+1} = \begin{cases} x_{new}, \text{ jeśli } U_2 \leqslant p_{acc} \text{ oraz } x_{new} \in [0, 1] \\ X_i, \text{ w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{6}$$

gdzie p_{acc} prawdopodobieństwo akceptacji:

$$p_{acc} = \min\left(\frac{f(X_{i+1})}{f(X_i)}, 1\right) \tag{7}$$

1.3 Metoda eliminacji

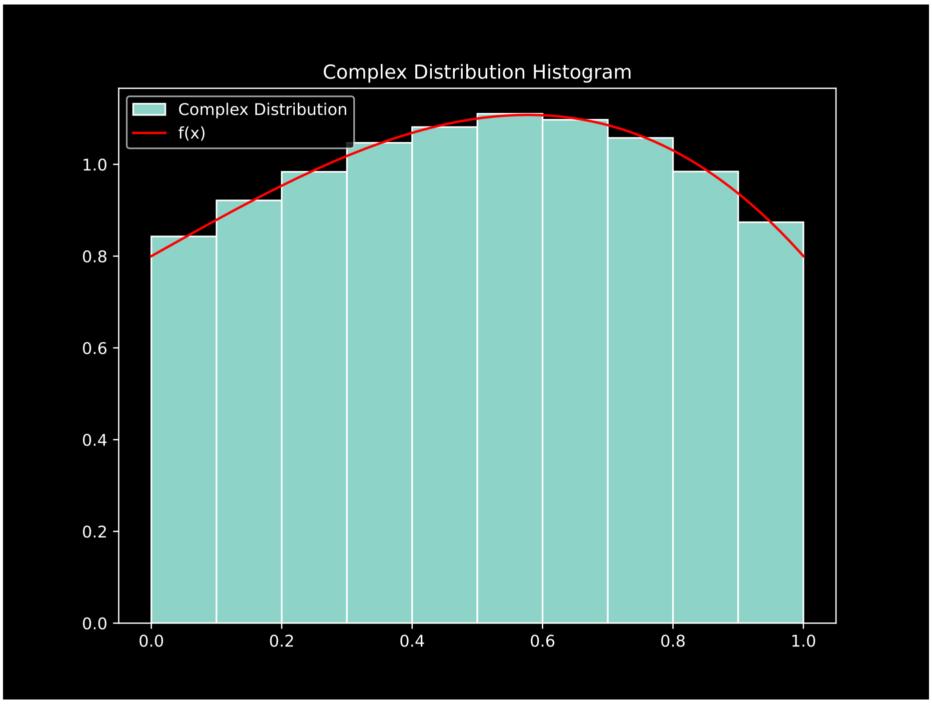
Polega na losowaniu wartości oraz pomocniczej wartości i zaakceptowaniu liczby, gdy spełniona jest nierówność:

$$G_2 \leqslant f(U_1) \tag{8}$$

, gdzie $G_2 = 1.15 \cdot U(0, 1)$

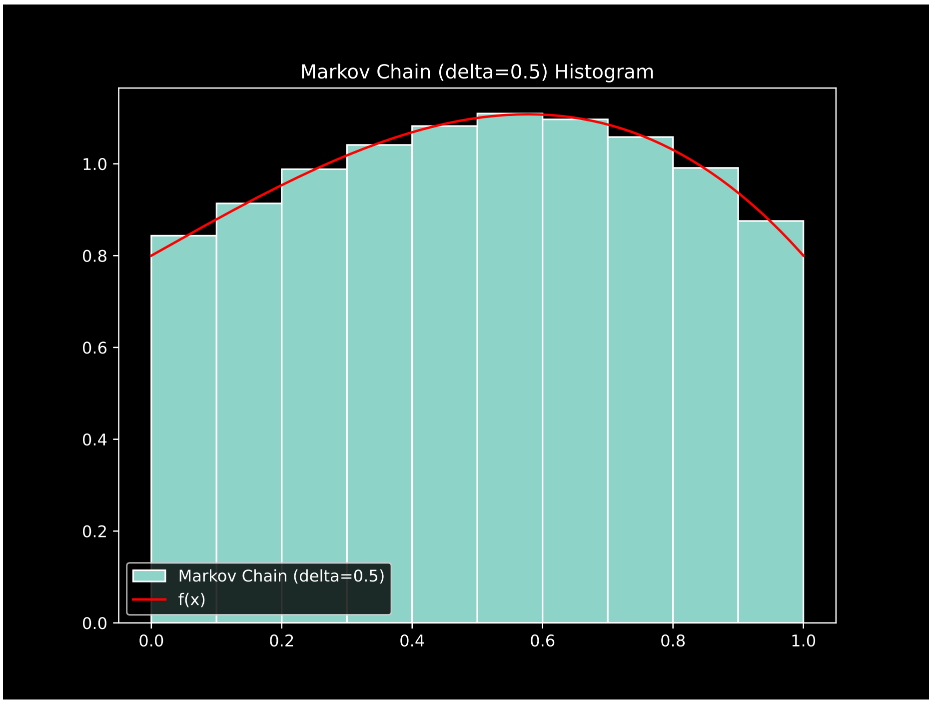
2 Wyniki

2.1 Histogram dla metody rozkładu złożonego

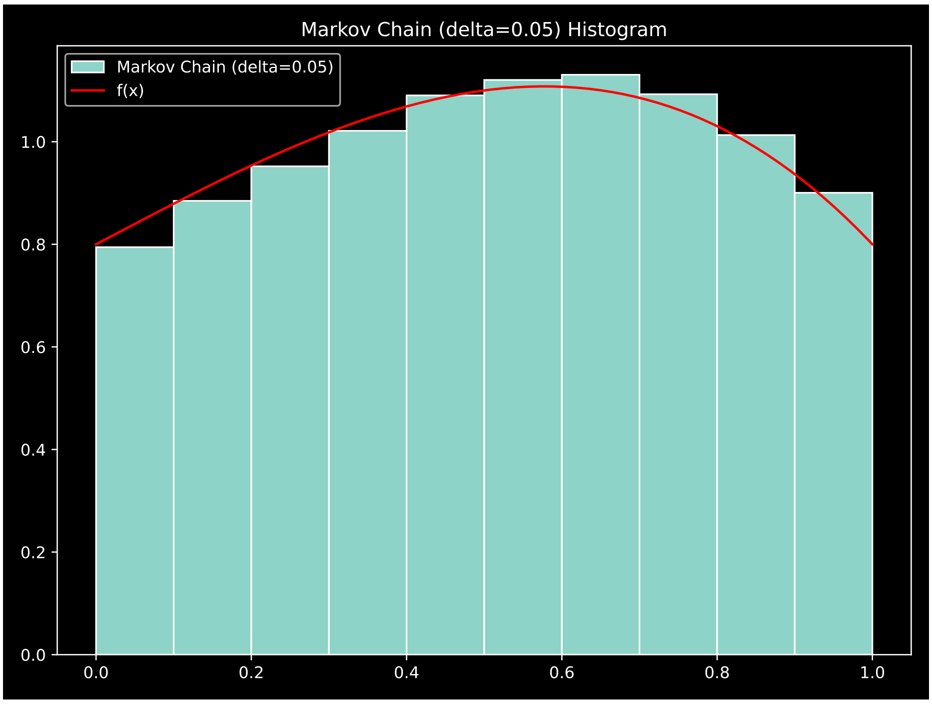


Rysunek 1: Histogram wygenerowanego ciągu liczb metod rozkładu złożonego

2.2 Histogram dla metody łancucha Markowa

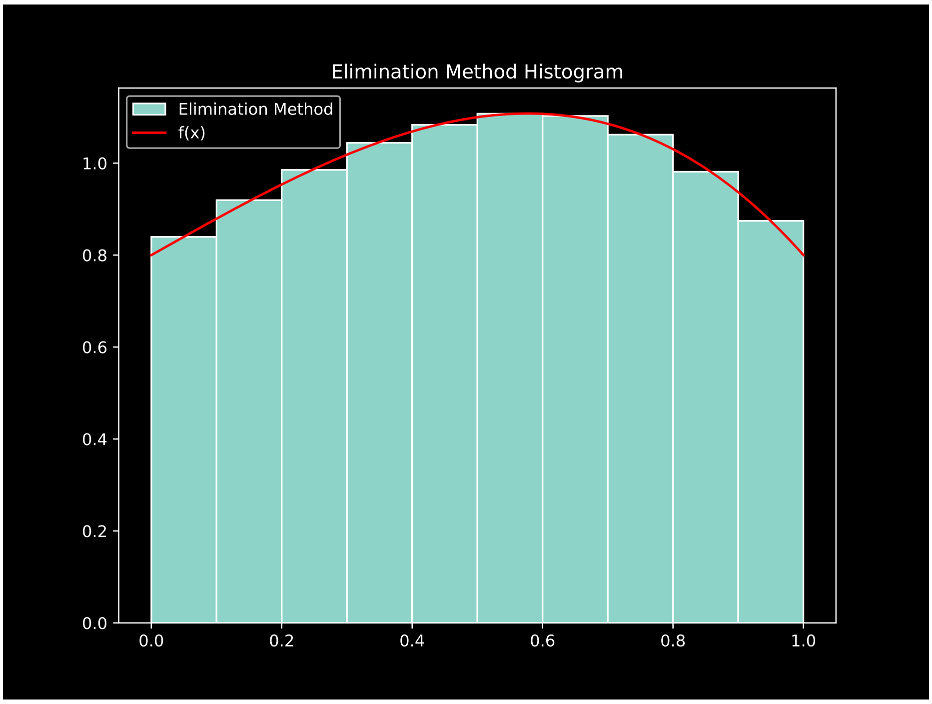


Rysunek 2: Histogram liczb losowych generowanych metodą łancucha Markowa dla $\Delta = 0.5$



Rysunek 3: Histogram liczb losowych generowanych metodą łancucha Markowa dla $\Delta = 0.05$

2.3 Histogram dla metody eliminacji



Rysunek 4: Histogram liczbowy uzyskany metodą eliminacji

2.4 Wyniki testu χ^2 dla $\alpha = 0.05$

Metoda	Wartość testu	p-wartość	Hipoteza
Rozkład złożony	11.15	0.26561	Przyjęta
Eliminacja	7.24	0.61214	Przyjęta
Łańcuch Markowa ($\Delta = 0.5$)	11.10	0.26863	Przyjęta
Łańcuch Markowa ($\Delta = 0.05$)	901.90	0.00000	Odrzucona

Tabela 1: Wyniki testu χ^2 dla każdej z metod.

3 Podsumowanie

W pracy przeanalizowano trzy metody generowania liczb losowych zgodnych z określoną dystrybuantą. Test wykazał, że metody rozkładu złożonego, eliminacji oraz łańcucha Markowa generują dane zgodne z teoretycznym rozkładem. Natomiast dla łańcucha Markowa ($\Delta = 0.05$) hipoteza zgodności została odrzucona, co sugeruje istotne odchylenia danych oczekiwanych od obserwowanych.