

Monte Carlo: całkowanie metodą warstwową

Filip Brodacz

9 kwietnia 2025

1 Wstęp teoretyczny

Metoda Monte Carlo (MC) jest techniką numeryczną służącą do przybliżonego obliczania wartości całek i rozwiązywania problemów statystycznych. Zasada jej działania polega na losowym próbkowaniu funkcji i obliczaniu wartości średniej z próby. Całki które obliczaliśmy to:

$$C_1 = \int_{-3}^3 (1 + \tanh(x)) dx = 6$$

$$C_2 = \int_0^{10} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(10) - \arctan(0)$$

$$C_3 = \int_0^1 \cos^{10}(\pi x) dx = 0.24609375$$

Do oszacowania wartości całek będziemy wykorzystywać trzy metody:

1.1 Metoda podstawowa

Dla całki w postaci:

$$C = \int_a^b g(x) dx$$

metoda podstawowa przyjmuje funkcję wagową $f(x) = 1$, co prowadzi do uśrednionej wartości:

$$C \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i), \quad x_i \sim U(a, b)$$

gdzie x_i to próby losowe z rozkładu jednorodnego $U(a, b)$.

1.2 Metoda losowania systematycznego (warstwowa nieoptymalna)

W tej metodzie dzielimy przedział całkowania na M podprzedziałów o równej szerokości $\Delta x = (b - a)/M$. Prawdopodobieństwo wylosowania zmiennej w m -tej warstwie jest równe $p_m = 1/M$. Wartość całki szacujemy jako:

$$C \approx \sum_{m=1}^M p_m \overline{g}_m$$

gdzie \overline{g}_m to średnia z próby w m -tej warstwie.

1.3 Metoda losowania warstwowego (optymalna)

W metodzie tej liczba losowań w każdym podprzedziale jest optymalizowana na podstawie prognozowanego odchylenia standardowego:

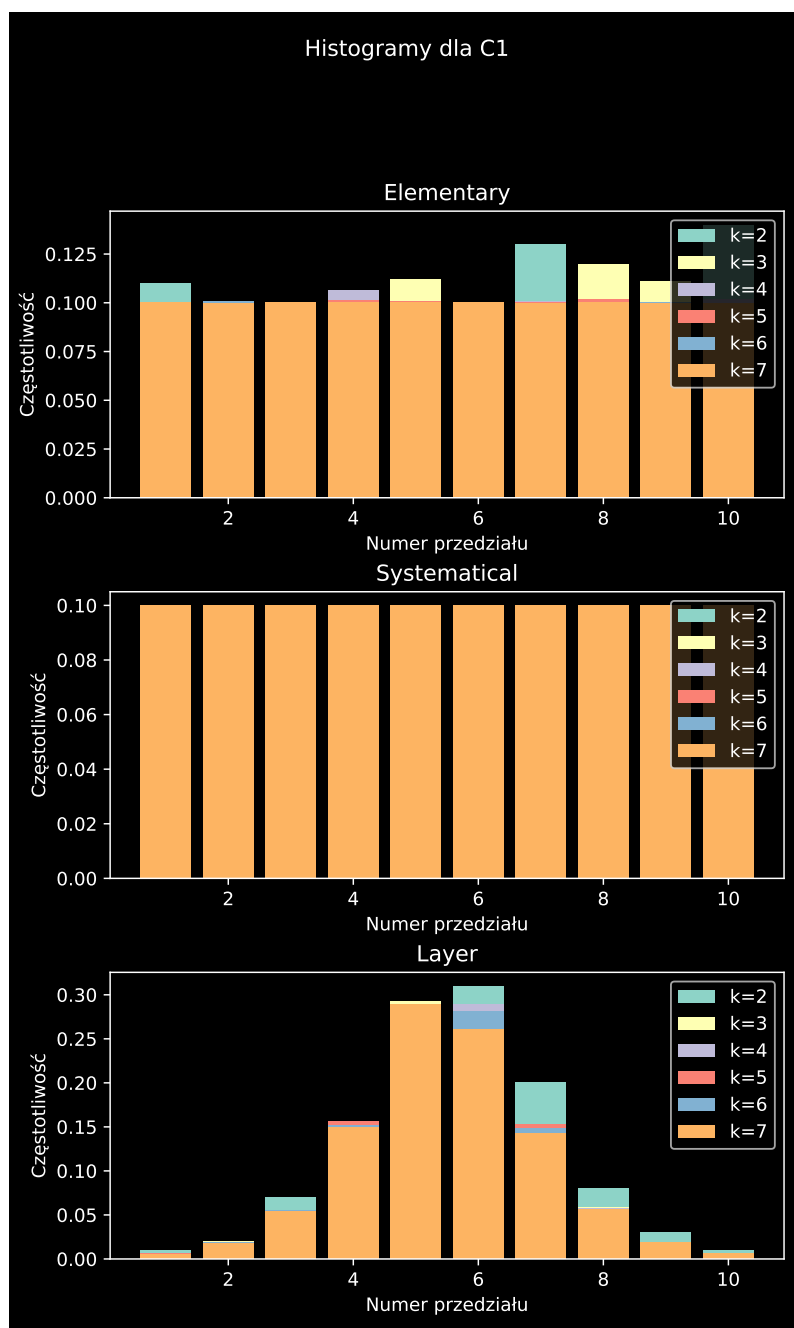
$$N_m = \frac{p_m \sigma_{b_m}}{\sum_{j=1}^M p_j \sigma_{b_j}} N$$

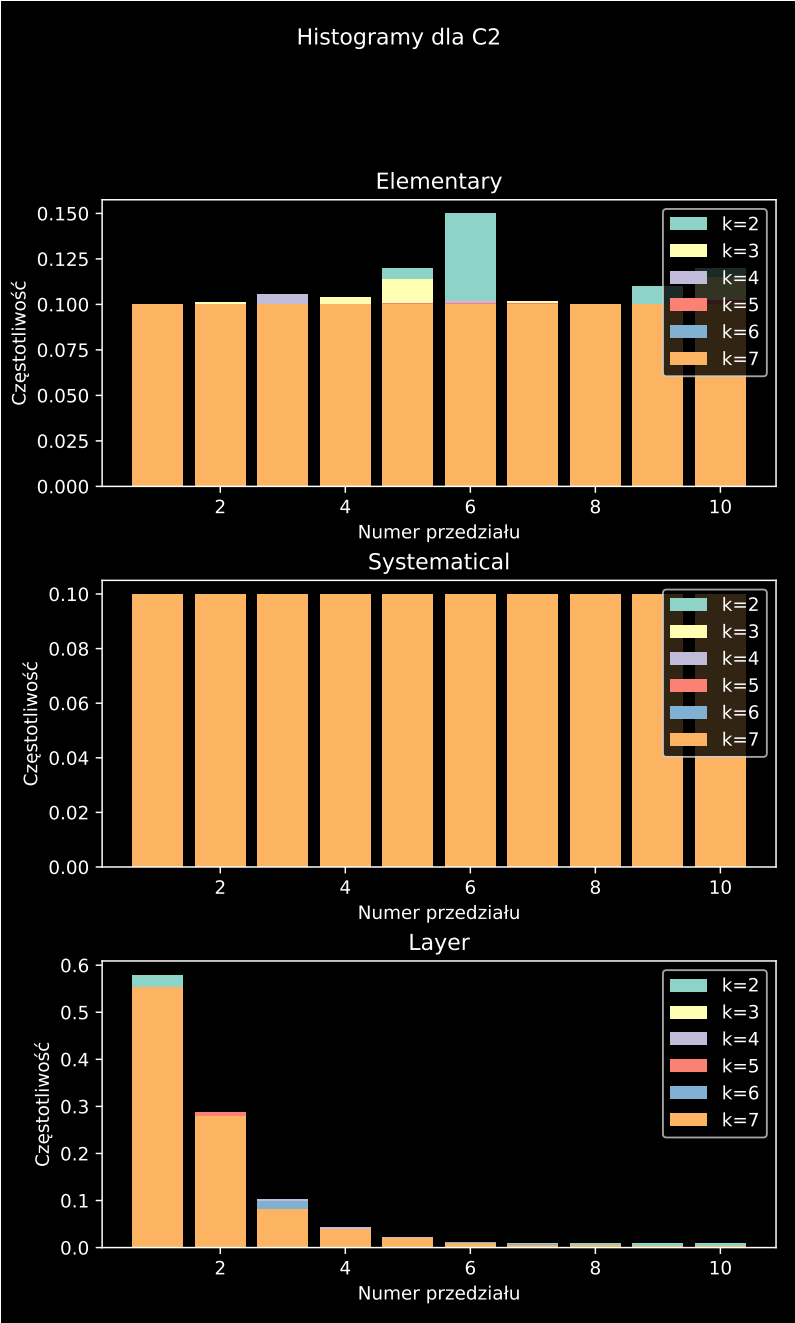
gdzie σ_{b_m} to prognozowane odchylenie standardowe obliczone przy użyciu metody podstawowej dla małej liczby prób.

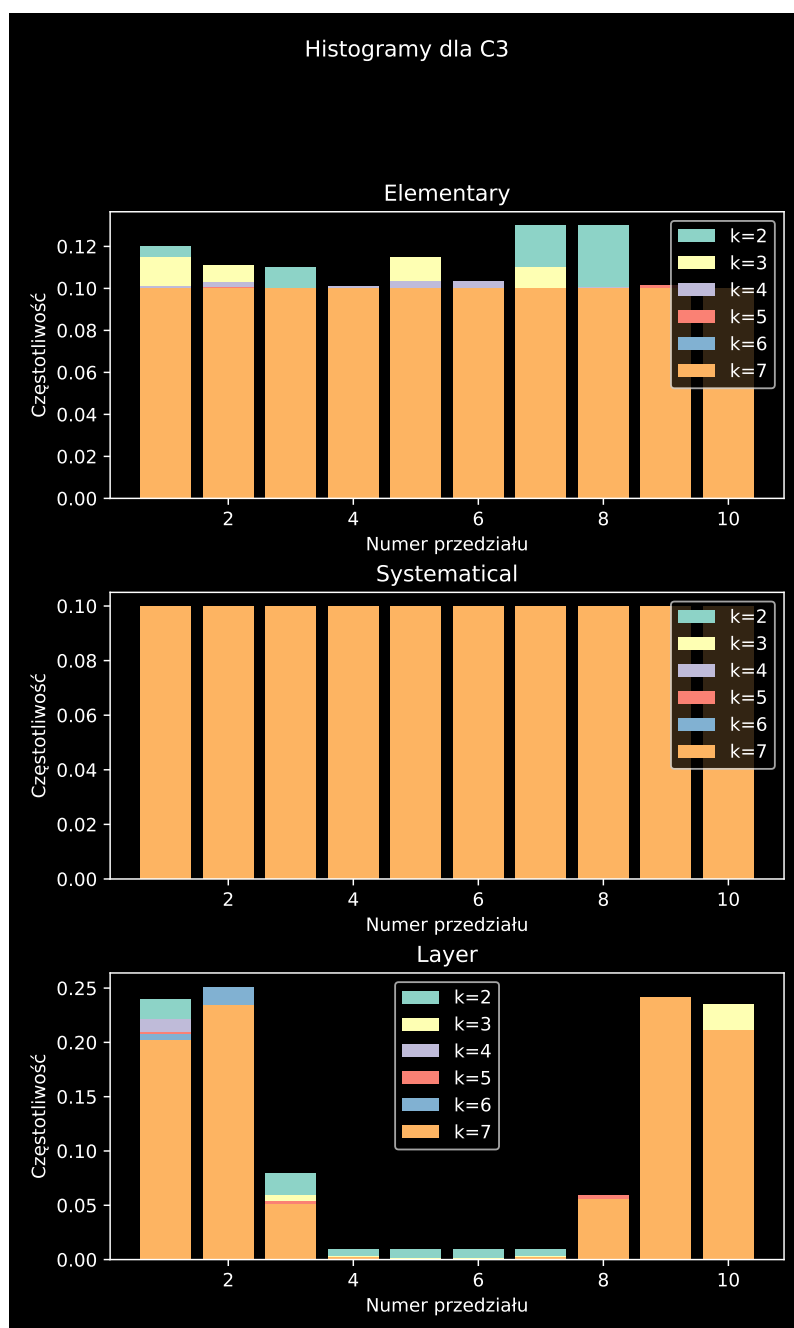
2 Wyniki

2.1 Histogramy rozkładu liczby losowań

Wykonano obliczenia dla trzech metod przy różnych liczbach losowań N i dla trzech całek C_1 , C_2 , oraz C_3 . Przykładowe histogramy dla liczby losowań w poszczególnych podprzedziałach pokazują zróżnicowanie w rozkładzie liczby prób dla każdej metody. Dla każdej całki histogram dla metody podstawowej zbiega do rozkładu jednorodnego wraz ze zwiększającą się wartością k . Natomiast dla metody losowania systematycznego już z jej założeń możemy stwierdzić, że rozkład jest jednorodny niezależnie od ilości losowań. Najciekawsze zależności widzimy dla metody losowania warstwowego, mamy więcej zliczeń w przedziałach gdzie zmiany wartości funkcji całkowanej są największe (proporcjonalne do $|\frac{d}{dx}f(x)|$).

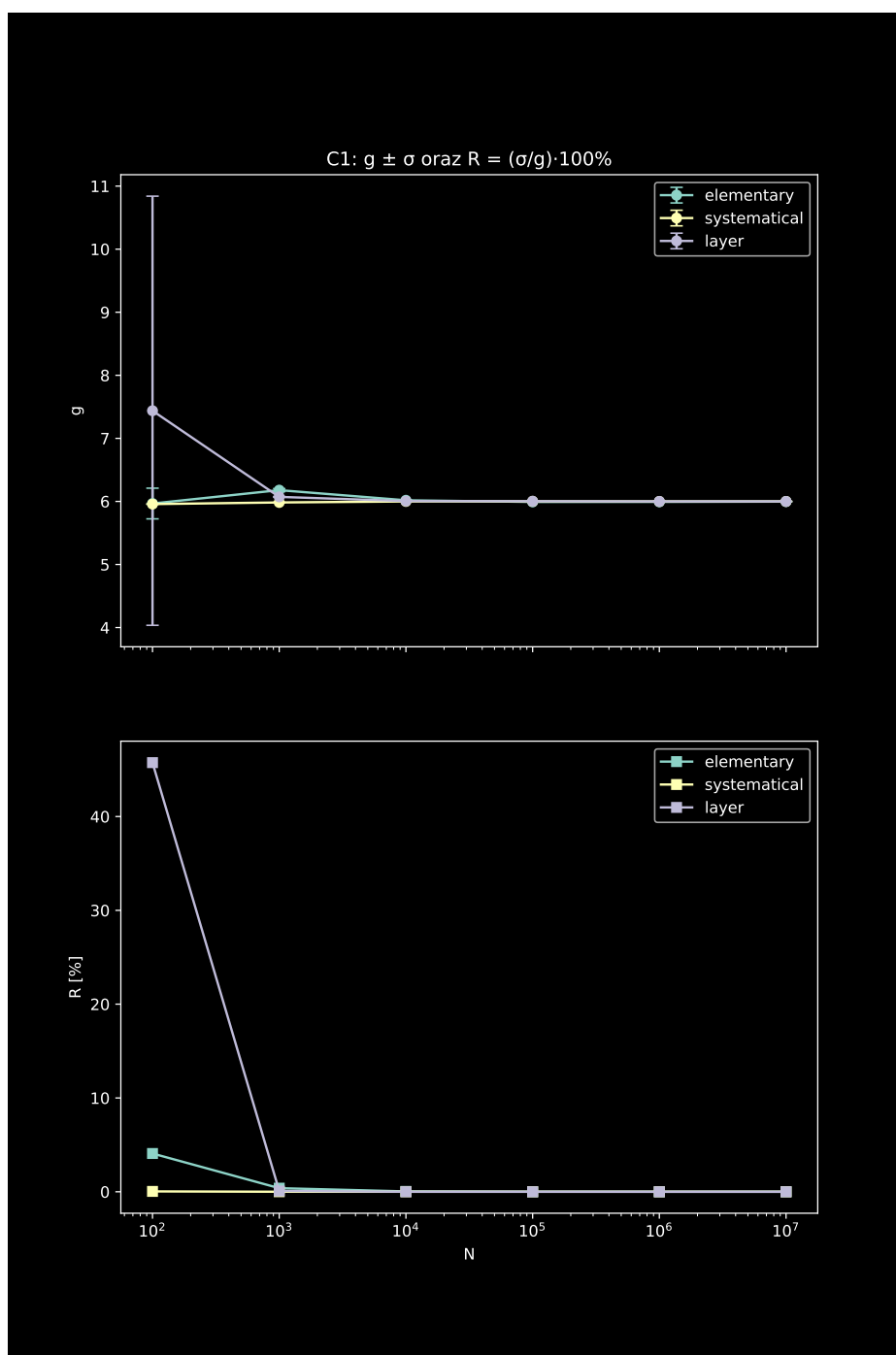


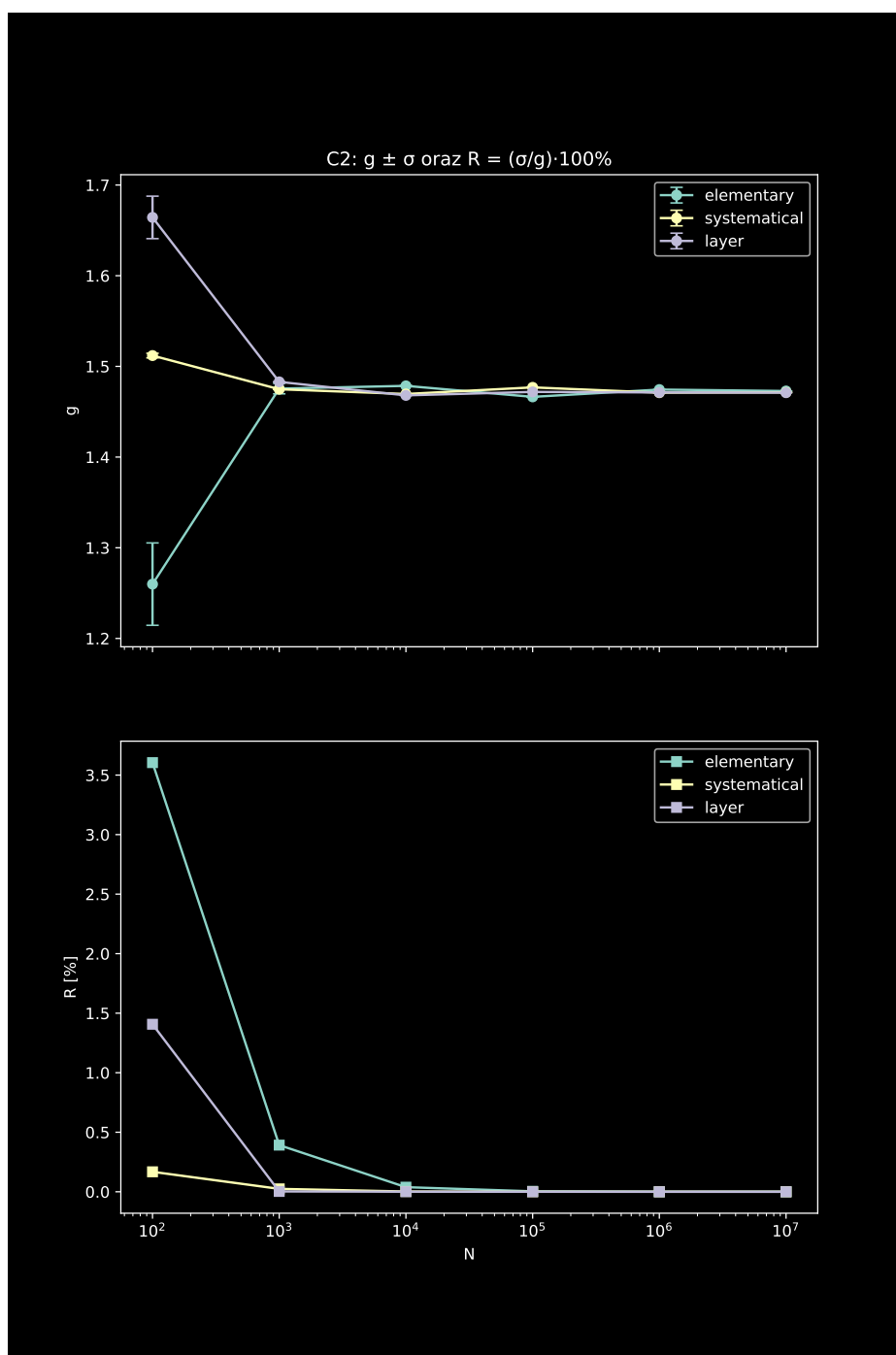


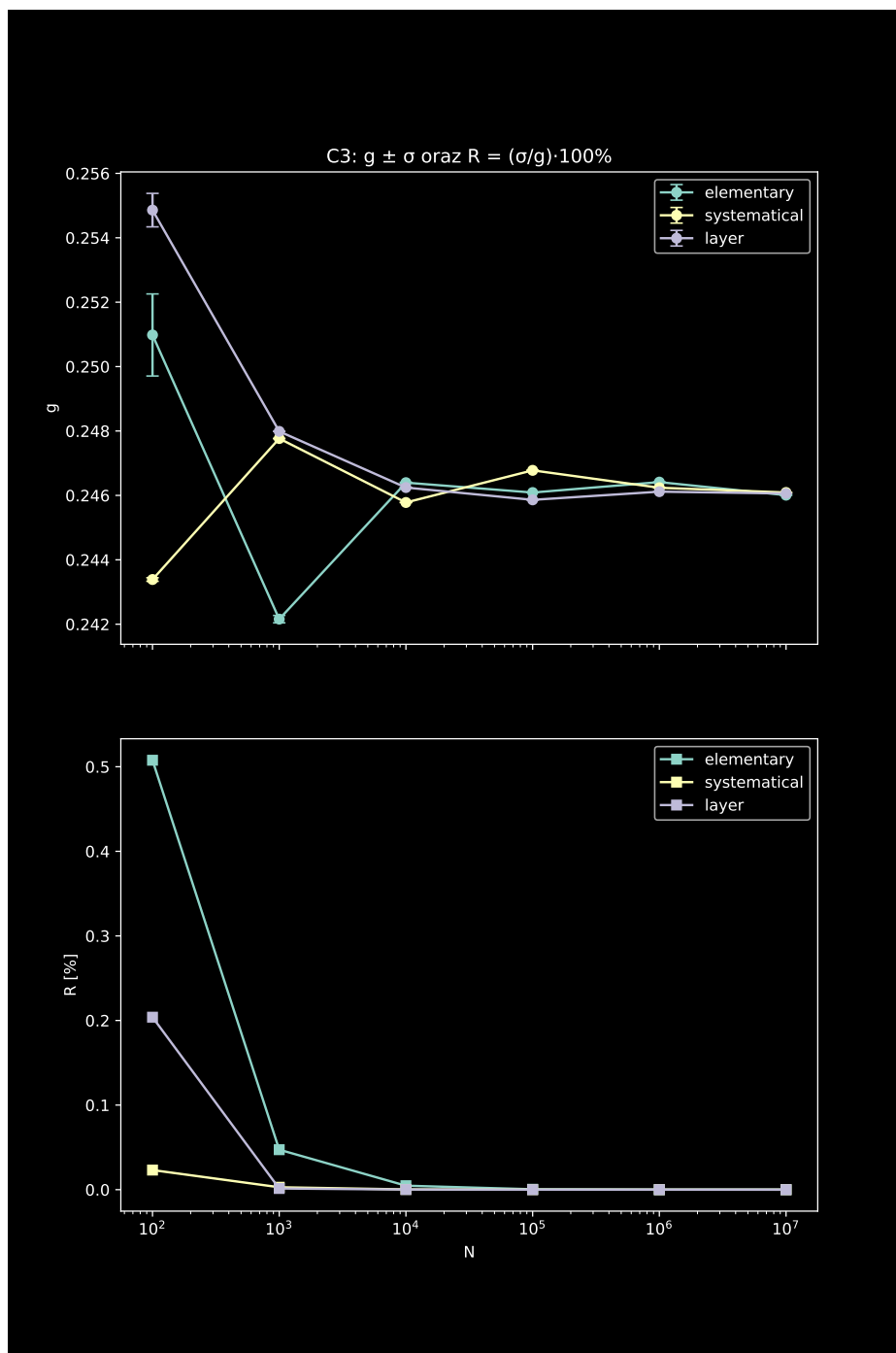


2.2 Wykresy funkcji $g(x)$ z błędami standardowymi

Na wykresie przedstawiono wartości funkcji $g(x)$ oraz błędy standardowe (σ) jako paski błędów dla różnych metod. Zauważalna jest większa precyzja dla przedziału powyżej 1000 iteracji w metodzie losowania warstwowego w porównaniu do pozostałych metod. Dodatkowo zgodnie z założeniami im więcej iteracji zostaje wykonanych tym bardziej wszystkie metody zbiegają do wartości analitycznej całki, a ich błąd względny się zmniejsza.







3 Podsumowanie

Metody Monte Carlo są efektywnym narzędziem do obliczania całek, a wyniki obliczeń wskazują, że metoda losowania warstwowego zapewnia największą dokładność. Zwiększenie liczby losowań poprawia wyniki, ale metoda warstwowa wykazuje mniejszą wariancję nawet przy mniejszej liczbie prób.