Symulacja Monte Carlo: Centralne Twierdzenie Graniczne i Rozkład Bernoulliego

Filip Brodacz

2025-03-12

1 Wstęp

Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) głosi, że suma niezależnych zmiennych losowych (po odpowiedniej normalizacji) dąży do rozkładu normalnego, niezależnie od ich pierwotnych rozkładów. W niniejszej pracy sprawdzono to zjawisko na przykładzie rozkładu Bernoulliego, gdzie zmienna przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem p oraz 0 z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. Teoretycznie, wartość oczekiwana wynosi $E[X] = p$, a wariancja $\sigma_X^2 = p(1-p)$.

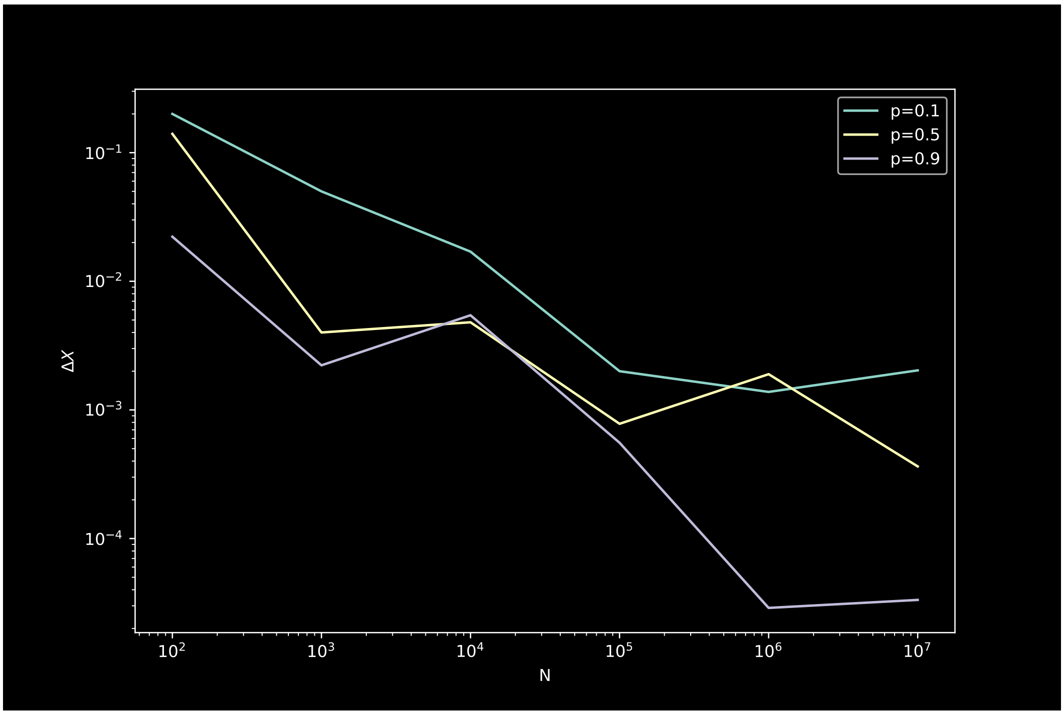
W symulacji użyto metody Monte Carlo do generowania zmiennych losowych. Dla każdej próbki:

1. Losujemy $U \sim U(0, 1)$.
2. Jeśli $U < p$, przyjmujemy $X = 1$; w przeciwnym razie $X = 0$.

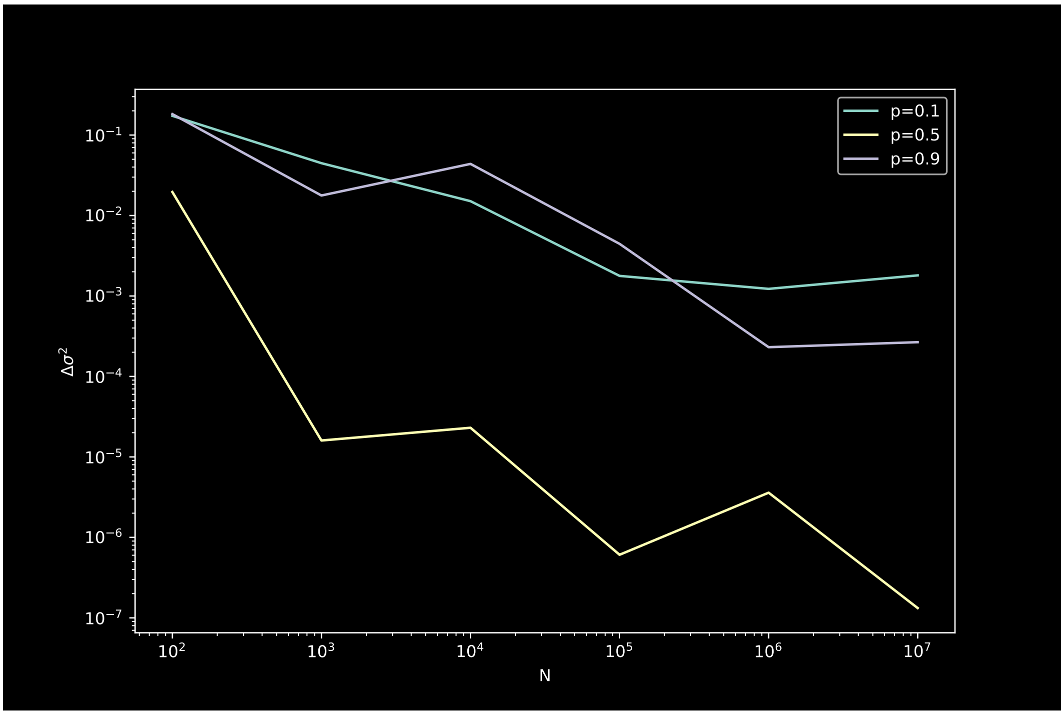
Symulacje wykonano dla $N = 10^7$ oraz dla trzech wartości p (0.1, 0.5, 0.9). Obliczano wartości oczekiwane, wariancje i błędy względne przy różnych N $(10^2, 10^3, \ldots, 10^7)$.

2 Wyniki

Poniższe wykresy przedstawiają błędy względne wartości oczekiwanej oraz wariancji w funkcji liczby losowań N w skali logarytmicznej.



Rysunek 1: Wykres błędu względnego wartości oczekiwanej w funkcji liczby losowań N dla różnych wartości p. Na wykresie widzimy, że błąd maleje wraz ze wzrostem N, co jest zgodne z przewidywaniami CTG.



Rysunek 2: Wykres błędu względnego wariancji w funkcji liczby losowań N dla różnych wartości p. Podobnie jak w przypadku wartości oczekiwanej, błąd względny maleje wraz ze wzrostem N, choć warto zauważyć, że wartości te są nieco większe z uwagi na dodatkowe operacje na wartościach kwadratowych.

3 Podsumowanie

Przeprowadzone symulacje potwierdzają słuszność Centralnego Twierdzenia Granicznego. Wraz ze wzrostem liczby losowań N wartości empiryczne dążą do wyników teoretycznych, a błędy względne maleją. Rozkład Bernoulliego, mimo swojej dyskretnej natury, spełnia założenia CTG, co prowadzi do normalizacji sumy zmiennych przy bardzo dużych N.

Wyniki te mają praktyczne znaczenie w analizie statystycznej oraz w zastosowaniach metod Monte Carlo w fizyce i inżynierii.