Generowanie liczb pseudolosowych o zadanym rozk'adzie w jednym wymiarze

Filip Brodacz

2025-03-26

1 Wstęp

Celem zajęć jest zapoznanie się z generowaniem dwuwymiarowych rozkładów losowych oraz transformacjami, które umożliwiają zmianę kształtu rozkładu z koła do elipsy, w tym także zrozumienie wpływu korelacji między zmiennymi. Poniżej przedstawiamy główne wzory użyte w procesie generacji wyników:

1.1 Generacja rozkładu normalnego 2D (rozwiązanie Boxa-Mullera)

Aby wygenerować dwuwymiarowy rozkład normalny $N_2(0,1)$, stosujemy metodę Boxa-Mullera. Z dwóch zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$, U_1 i U_2, obliczamy zmienne X i Y z rozkładu normalnego:

$$X = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$

$$Y = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

Powyższe wzory generują dwie zmienne losowe X i Y, które mają rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1, a punkty (X,Y) tworzą rozkład sferycznie konturowany.

1.2 Rozkład jednorodny w kole $K_2(0,1)$

Aby uzyskać rozkład jednorodny w kole, zaczynamy od wylosowania punktów na obwodzie okręgu jednostkowego, normalizując współrzędne X i Y:

$$X' = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad Y' = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Następnie skalujemy je zmienną losową R z rozkładu o funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$h(r) = kr^{k-1}, \quad r \in [0,1], \quad k = 2.$$

Przyjmujemy dystrybuantę $F(R) = R^2 = U_1$, skąd obliczamy $R = \sqrt{U_1}$. Ostatecznie, współrzędne (X'', Y'') uzyskujemy przez skalowanie:

$$X'' = RX', \quad Y'' = RY'.$$

Wektory (X'', Y'') mają rozkład jednorodny w kole o promieniu jednostkowym.

1.3 Transformacja afiniczna (koło → elipsa)

Rozkład jednorodny w kole możemy przekształcić do rozkładu skorelowanego w elipsie za pomocą transformacji afinicznej. Wzór ogólny transformacji w przypadku przekształcenia z koła do elipsy jest następujący:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gdzie A to macierz transformacji, która wykonuje rotację i skalowanie:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \cdot R(\alpha)$$

gdzie $R(\alpha)$ to macierz rotacji:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Wartości b_1 i b_2 są współczynnikami skalującymi, które kontrolują wielkość półosi elipsy, a α jest kątem rotacji.

1.4 Kowariancja i współczynnik korelacji

Macierz kowariancji ma postać:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}.$$

Elementy macierzy kowariancji obliczamy jako:

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \sigma_{xy} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle.$$

Dla próby:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

obliczamy:

$$\sigma_x^2 = \bar{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \sigma_{xy} = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Współczynnik korelacji zmiennych wyznaczamy jako:

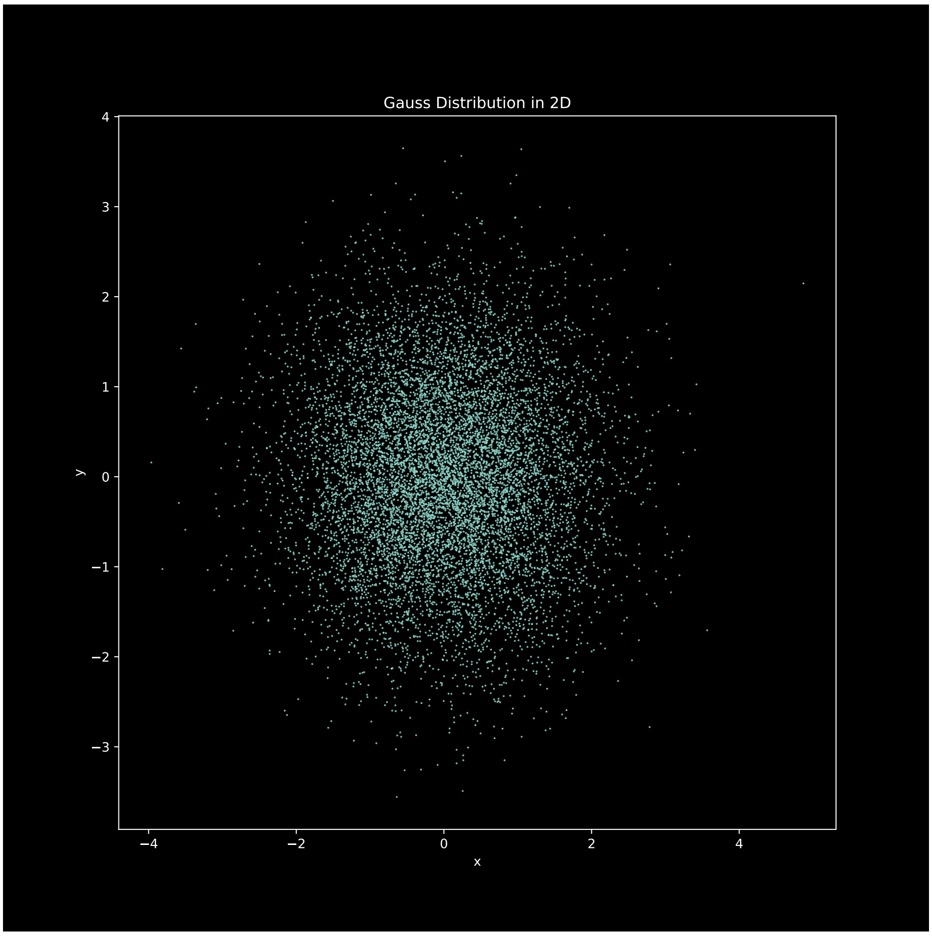
$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}, \quad r \in [-1, 1].$$

Dzięki tym wzorom możemy ocenić stopień korelacji pomiędzy zmiennymi X i Y, które po transformacjach afinicznych mogą przyjmować różne kształty (np. elipsy).

2 Wyniki

2.1 1. Wygenerowanie $n = 10,000$ punktów z rozkładu normalnego $N_2(0,1)$ metodą Boxa-Mullera

Za pomocą algorytmu Boxa-Mullera wylosowano 10,000 punktów z dwuwymiarowego rozkładu normalnego. Rysunek przedstawia położenie punktów w przestrzeni 2D.

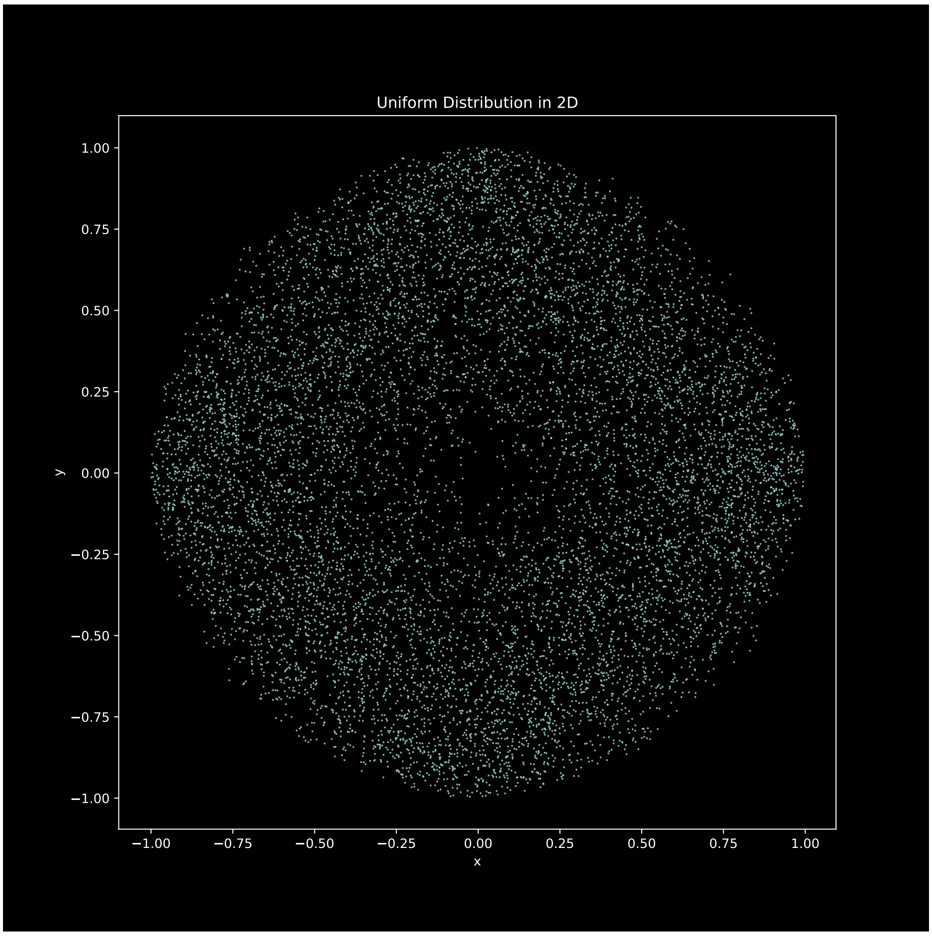


Rysunek 1: Rozkład normalny w 2D

Punkty w rozkładzie normalnym tworzą charakterystyczny skupiony układ wokół punktu $(0,0)$, gdzie gęstość punktów jest największa w pobliżu środka, a stopniowo maleje w kierunku brzegu. Rozkład jest symetryczny względem obu osi.

2.2 2. Wygenerowanie $n = 10,000$ punktów wewnątrz koła o promieniu jednostkowym

Na podstawie rozkładu sferycznie konturowanego wygenerowano punkty wewnątrz koła jednostkowego. Po wykonaniu transformacji, punkty rozkładają się równomiernie w całym kole.

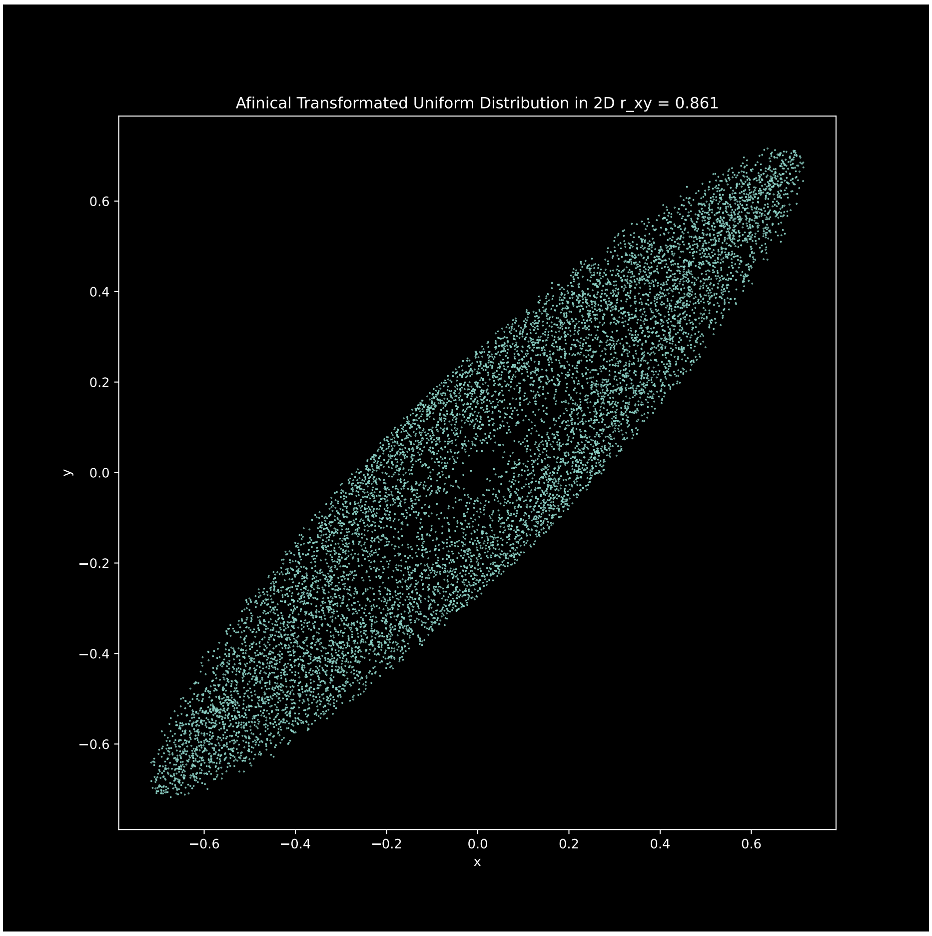


Rysunek 2: Rozkład jednorodny wewnątrz koła 2D

Punkty są rozmieszczone równomiernie, co wskazuje na jednorodność rozkładu wewnątrz koła. Obraz pokazuje, że rozkład jest jednolity, a gęstość punktów nie zmienia się w zależności od odległości od środka koła.

2.3 3. Transformacja afiniczna: koło → elipsa

Dla kąta $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oraz współczynników skalujących $b_1 = 1$ i $b_2 = 0.2$, wykonano transformację rozkładu jednorodnego w kole do rozkładu skorelowanego w elipsie. Nowa macierz kowariancji po transformacji wykazuje korelację między zmiennymi X i Y.

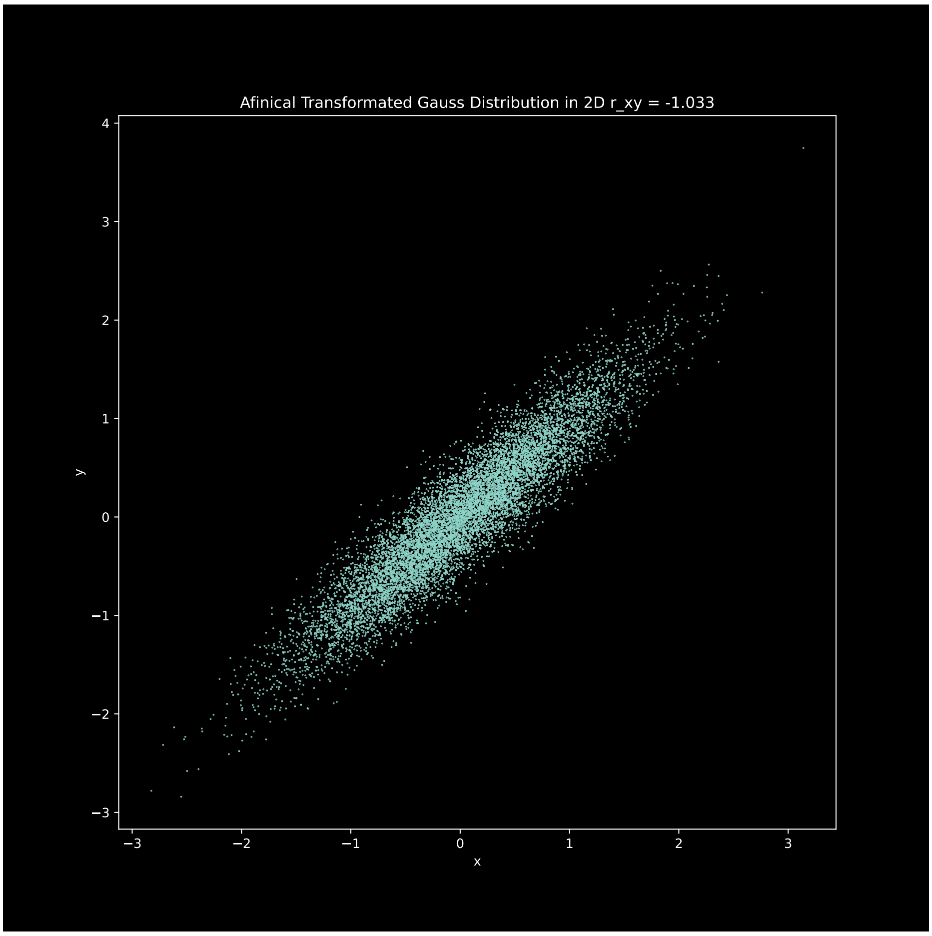


Rysunek 3: Transformacja rozkładu jednorodnego w kole do rozkładu skorelowanego w elipsie

W wyniku transformacji, punkty układają się w kształt elipsy. Współczynniki skalujące wzdłuż głównych półosi elipsy oraz kąt rotacji wpływają na kształt i orientację elipsy.

2.4 4. Transformacja afiniczna dla rozkładu normalnego $N_2(0,1)$

Na podstawie tej samej macierzy transformacji A, przeprowadzono transformację rozkładu normalnego $N_2(0,1)$. Punkty po transformacji również układają się w kształt elipsy.



Rysunek 4: Transformacja rozkładu normalnego $N_2(0,1)$ do rozkładu skorelowanego w elipsie

Rozkład punktów po transformacji jest zbliżony do tego z poprzedniego przypadku, gdzie punkty układają się w elipsie, ale w tym przypadku mamy do czynienia z rozkładem normalnym.

2.5 5. Wyznaczenie macierzy kowariancji i współczynnika korelacji

Dla każdego z wygenerowanych rozkładów uzyskanych po transformacji afinicznej (rozkład normalny w 2D / jednorodny w kole) obliczono macierz kowariancji oraz współczynnik korelacji r_{xy}, który przedstawia stopień skorelowania zmiennych X i Y. Współczynnik korelacji po transformacji w elipsę wykazuje silną korelację, wskazując na wpływ macierzy transformacji na zależności między zmiennymi.

Macierz kowariancji dla rozkładu jednorodnego:

$$\Sigma_{\text{uniform}} = \begin{pmatrix} 1125.35 & 1026.21 \\ 1026.21 & 1261.39 \end{pmatrix}$$

$r_{xy-\text{uniform}} = 0.861$ Macierz kowariancji dla rozkładu normalnego:

$$\Sigma_{\text{gauss}} = \begin{pmatrix} -660.385 & -1088.5 \\ -1088.5 & -1681.03 \end{pmatrix}$$

$r_{xy-\text{gauss}} = -1.033$

2.6 Podsumowanie

Podczas generacji wyników wykorzystano powyższe wzory matematyczne, które pozwalają na uzyskanie różnych rodzajów rozkładów losowych w przestrzeni 2D. Kluczową rolę odgrywały tu transformacje afiniczne i obliczenia związane z kowariancją oraz współczynnikiem korelacji, które umożliwiły uzyskanie rozkładów skorelowanych w elipsach.