Monte Carlo: Proste Całkowanie z Szacowaniem Wariancji

Filip Brodacz

04-04-2025

1 Wstęp

1.1 Definicje i założenia

Rozważane są dwa koła na płaszczyźnie:

$$K_A = \{(x, y) : (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leqslant R_A^2\}$$

$$K_B = \{(x, y) : (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \leqslant R_B^2\}$$

o promieniach $R_B > R_A$. Zadaniem jest oszacowanie pola powierzchni części wspólnej tych kół metodą Monte Carlo.

1.2 Generowanie punktów w kole

Do generowania punktów w kole K_α (gdzie $\alpha = A, B$) stosujemy rozkład sferycznie konturowany, co prowadzi do rozkładu jednorodnego w kole:

1. Generujemy liczby losowe $u_1, u_2 \sim U(0, 1)$.
2. Współrzędne w układzie biegunowym:
$$x = \sqrt{-2\ln(u_1)}\sin(2\pi u_2), \quad y = \sqrt{-2\ln(u_1)}\cos(2\pi u_2)$$
3. Normalizacja:
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \leftarrow \frac{x}{r}, \quad y \leftarrow \frac{y}{r}$$
4. Skalowanie i translacja:
$$x \leftarrow q \cdot x \cdot R_\alpha + x_\alpha, \quad y \leftarrow q \cdot y \cdot R_\alpha + y_\alpha$$

1.3 Szacowanie pola powierzchni

Pole powierzchni koła K_α wynosi:

$$S_\alpha = \pi R_\alpha^2$$

Pole powierzchni części wspólnej kół:

$$S_{\alpha,\beta} = \pi R_\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \theta_{\alpha,\beta}(x, y)$$

gdzie θ jest funkcją wskaźnikową:

$$\theta_{\alpha,\beta}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } (x, y) \in K_\alpha \text{ i } (x, y) \in K_\beta \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Metoda Monte Carlo pozwala oszacować wartość $S_{\alpha,\beta}$:

$$\mu^{(1)} = \bar{S}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \pi R_\alpha^2 \theta_{\alpha,\beta}(x_i, y_i)$$

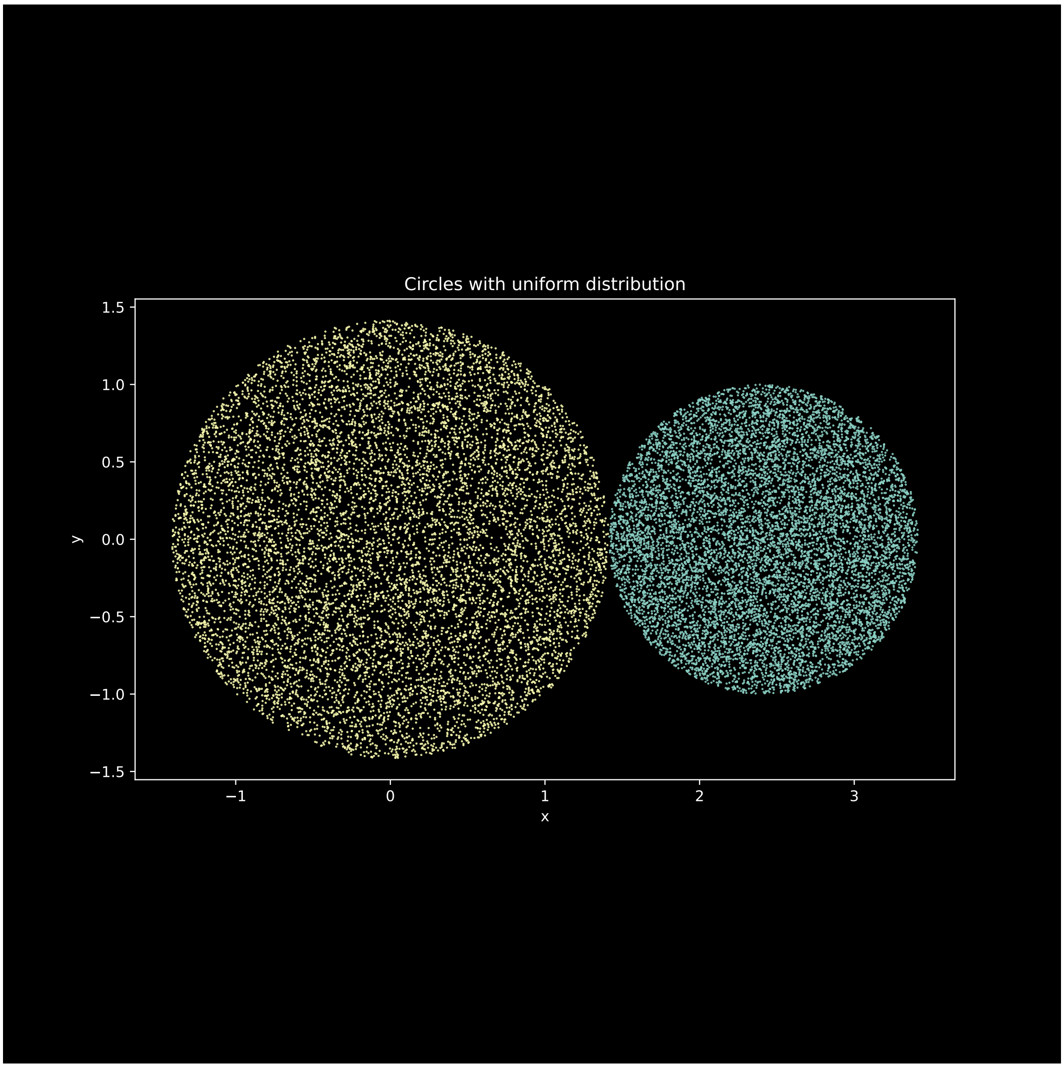
Oraz odchylenie standardowe:

$$\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)} - (\mu^{(1)})^2}{N}}$$

2 Wyniki

2.1 Implementacja i testy generatora

1. Wygenerowano $N = 10^4$ punktów w kołach K_A i K_B dla $x_A = R_A + R_B$.

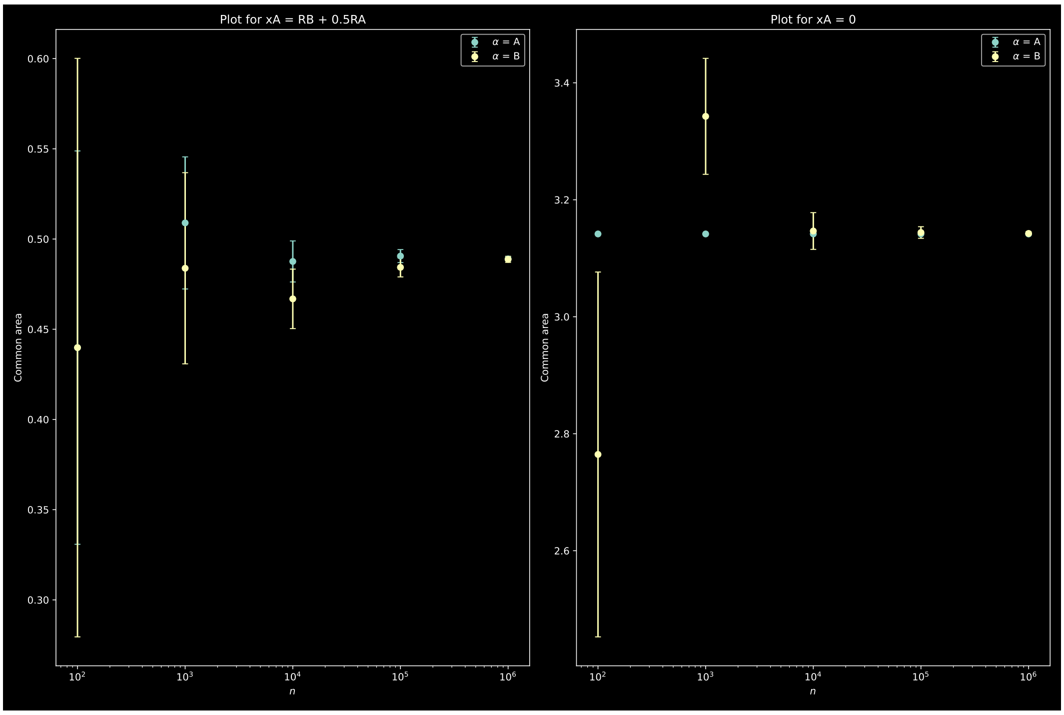


Rysunek 1: Wykres położeń punków w kołach o rozkładzie jednorodnym

Punkty rozmieszczone są równomiernie, co potwierdza poprawność generatora.

2.2 Obliczenia Monte Carlo

Dla $N = 10^6$ punktów obliczono $\bar{S}_{\alpha,\beta}$ i $\sigma_{\bar{S}_{\alpha,\beta}}$ dla: - $x_A = R_B + 0.5R_A$ oraz $x_A = 0$ przy $\alpha = A$ i $\alpha = B$.



Rysunek 2: Wykres obliczonej wartości wspólnej części kół wraz z ich niepewnością dla całkowitego oraz częściowego przekrywania się kół

- Wyniki przedstawiono na wykresach w funkcji liczby losowań n na skali logarytmicznej. - Wykresy pokazują, że pole powierzchni części wspólnej dla $x_A = R_B + 0.5R_A$ oscyluje w zakresie $0.35 - 0.55$, natomiast dla $x_A = 0$ wartości te wahają się od 2.6 do 3.4.

3 Podsumowanie

Metoda Monte Carlo pozwoliła na skuteczne oszacowanie pola powierzchni części wspólnej kół. Główne obserwacje:

- Wyniki dla $x_A = R_B + 0.5R_A$ są stabilne i konwergują do zakresu $0.35 - 0.55$, natomiast dla $x_A = 0$ stabilizują się w zakresie $2.6 - 3.4$.
- Błąd oszacowania maleje wraz ze wzrostem liczby losowań.
- Wartości uzyskane metodą Monte Carlo dobrze odzwierciedlają oczekiwane wyniki.

Monte Carlo jest efektywną metodą w przybliżonych obliczeniach obszarów geometrycznych, ale wymaga dużej liczby losowań dla dokładnych wyników.