Monte Carlo: propagacja sygnału elektrycznego w linii transmisyjnej, problem zależny od czasu

Filip Brodacz

31 maja 2025

1 Wstęp teoretyczny

Propagację sygnału elektrycznego w jednowymiarowej linii transmisyjnej opisuje układ równań telegrafistów:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} - Ri, \tag{1}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t} - Gu, \tag{2}$$

gdzie:

- $u(x,t)$ — napięcie,
- $i(x,t)$ — prąd,
- L, C, R, G — odpowiednio: indukcyjność, pojemność, opór i konduktancja na jednostkę długości.

W celu uproszczenia obliczeń stosujemy transformację:

$$f(x,t) = \frac{1}{2}(u + R_0 i), \tag{3}$$

$$b(x,t) = \frac{1}{2}(u - R_0 i), \tag{4}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{5}$$

gdzie $f(x,t)$ i $b(x,t)$ reprezentują sygnały propagujące się odpowiednio w prawo i lewo. Otrzymujemy układ:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda b - (\lambda + \mu) f, \tag{6}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c\frac{\partial b}{\partial x} + \lambda f - (\lambda + \mu) b, \tag{7}$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{8}$$

$$\mu = \frac{G}{C}, \tag{9}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right). \tag{10}$$

Z postaci całkowej otrzymujemy możliwość aproksymacji rozwiązań metodą Monte Carlo. Losujemy czas s z rozkładu wykładniczego:

$$s = \frac{-\ln U_1}{\lambda + \mu}, \quad U_1 \sim U(0,1). \tag{11}$$

Dalsze rekurencyjne obliczenia uwzględniają warunki brzegowe przy krańcach linii transmisyjnej:

$$\Gamma_g = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}, \tag{12}$$

$$\Gamma_l = \frac{R_l - R_0}{R_l + R_0}, \tag{13}$$

$$\zeta = \frac{R_0}{R_0 + R_g}. \tag{14}$$

Końcowe napięcie w danym punkcie i czasie wyznaczamy jako:

$$u(x,t) = f(x,t) + b(x,t). \tag{15}$$

2 Wyniki

Symulacje wykonano dla parametrów:

- $L = 0.25\,\mu H$, $C = 100\,pF$, $R = 12.5\,\Omega$, $G = 0.5\,mS$,
- długość linii: $l = 2\,m$,
- $R_g = 75\,\Omega$, $R_l = 12.5\,\Omega$.

Źródło napięcia opisano jako:

$$V_g(t) = \sin(2\pi\nu t) \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{16}$$

gdzie $\nu = 1\,GHz$, $t_0 = 7.5\,ns$, $\sigma = 0.75\,ns$.

Obliczono napięcie $u(x,t)$ dla chwil $t = 10,\ 15,\ 25,\ 35,\ 50\,ns$ oraz dla liczby ścieżek Monte Carlo: $n = 10^3, 10^4, 10^5$. Wyniki porównano z rozwiązaniem dokładnym wyznaczonym przy użyciu procedury numerycznej.

2.1 Wnioski z wyników:

- Dla $n = 10$ rozwiązania cechują się bardzo dużym poziomem szumu.
  Animacja dla $n_{path} = 10$
- Dla $n = 10^2$ nadal obserwuje się znaczące zakłócenia w wynikach.
  Animacja dla $n_{path} = 10^2$
- Dla $n = 10^3$ rozwiązania są wyraźnie wygładzone, choć wciąż obecne są pewne zakłócenia.
  Animacja dla $n_{path} = 10^3$
- Dla $n = 10^4$ uzyskane wyniki są już bliskie rozwiązaniu analitycznemu.
  Animacja dla $n_{path} = 10^4$
- Dla $n = 10^5$ osiągnięto bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniem dokładnym.
  Animacja dla $n_{path} = 10^5$

3 Podsumowanie

Metoda Monte Carlo pozwala skutecznie rozwiązywać równania telegrafistów, uwzględniając złożone warunki brzegowe. Choć jej wydajność obliczeniowa może być niska przy małej liczbie prób, dla dużych n umożliwia bardzo dokładne odwzorowanie rzeczywistej propagacji sygnału. Jest to podejście szczególnie przydatne w sytuacjach, gdzie trudno zastosować metody deterministyczne.