Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Rechenregeln auf Ringen)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und seien $a, b, c \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln gelten:

(i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(ii) Falls ein Einselement $1 \in R$ existiert, dann gilt:

$$-a = (-1) \cdot a = 1 \cdot (-a)$$

(iii) Falls R nullteilerfrei ist, also falls $\forall a, b \in R : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, dann gilt:

$$(c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow a = b \quad \text{und} \quad (c \neq 0 \wedge c \cdot a = c \cdot b) \Rightarrow a = b$$

Lösung Let 0 be the neutral element of the (commutative) group $(R, +)$ and let $-\,a$ denote the inverse of any $a \in R$ such that $a + 0 = a$ (definition of neutral element) and $a + (-\,a) = 0$ (definition of inverse element). In the lecture, we have proven the following identities (Satz 3.2.2)

1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

2) $-\,(a \cdot b) = (-\,a) \cdot b = a \cdot (-\,b)$

(i) We have, $\forall\, a, b \in R$,

$$\begin{aligned}
(-\,a) \cdot (-\,b) &= (-\,a) \cdot (-\,b) + 0 \overset{\text{Satz 3.2.2 1)}}{=} (-\,a) \cdot (-\,b) + a \cdot 0 \\
&= (-\,a) \cdot (-\,b) + a \cdot ((-\,b) + b) \\
&\overset{\text{Def. 3.2.1 3)}}{=} (-\,a) \cdot (-\,b) + \Big(a \cdot (-\,b) + a \cdot b\Big) \\
&= \Big((-\,a) \cdot (-\,b) + a \cdot (-\,b)\Big) + a \cdot b \qquad \text{(Associativity of } (R, +)) \\
&\overset{\text{Def. 3.2.1 3)}}{=} (a + (-\,a)) \cdot (-\,b) + a \cdot b = 0 \cdot (-\,b) + a \cdot b \\
&\overset{\text{Satz 3.2.2 1)}}{=} 0 + a \cdot b = a \cdot b.
\end{aligned}$$

(ii) Put $a = 1$ and $b = -\,a \Rightarrow -\,b = a$ in (i) to get $(-\,1) \cdot a = 1 \cdot (-\,a) = -\,a$ (1 is the neutral element of $(R, \cdot)$). Similarly, setting $b = a$ and $a = -\,1$ in (ii) implies $-\,a = (-\,1) \cdot a$.

(iii) Assume $c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a \cdot c + -(b \cdot c) = 0 \overset{\text{Satz 3.2.2 2)}}{\Rightarrow} a \cdot c + (-\,b) \cdot c = 0 \overset{\text{Def. 3.2.1 3)}}{\Rightarrow} (a + (-\,b)) \cdot c = 0 \\
&\overset{\text{Def. 3.2.3}}{\Rightarrow} a + (-\,b) = 0 \Rightarrow a + (-\,b) + b = 0 + b \Rightarrow a + 0 = b \Rightarrow a = b.
\end{aligned}$$

The other identity follows analogously.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

Betrachten Sie die komplexe Zahlenebene.

(i) Seien $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Veranschaulichen Sie sich anhand einer Skizze die Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zahlen $(z_1, z_2) \to z_1 \pm z_2$ sowie die komplexe Konjugation $z \to \bar{z}$.

(ii) Betrachten Sie nun die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Auf welche Kurven bildet f Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, auf welche Geraden durch den Ursprung ab? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei Ursprungsgeraden, wie der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden?

Hinweis: Nutzen Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen.

Lösing

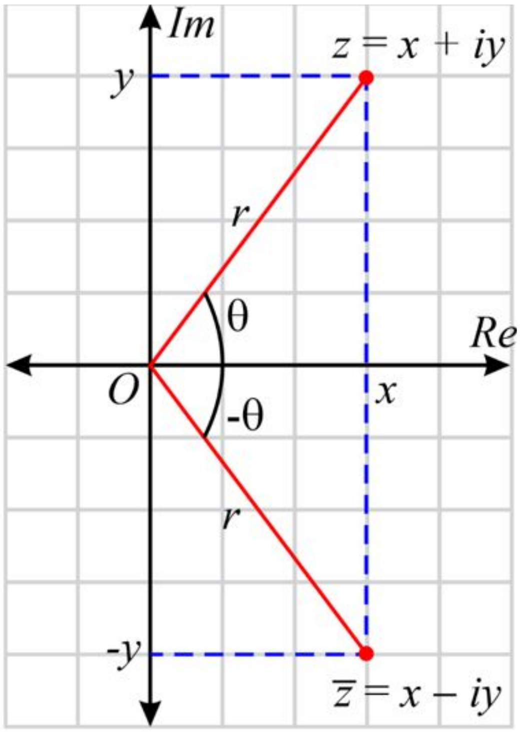

Abbildung 1: Geometric depiction of complex conjugation of a complex number $z = x + iy = r\, e^{i\theta}$.

(i)

(ii) First, note that the set of points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ forming a circle centred at $(0, 0)$ with radius $r > 0$, i.e., the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^2$ is in a one to one correspondence with the set of complex numbers $S(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| := \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} = r\} \subset \mathbb{C}$ with the usual identification $x = \text{Re } z$ and $y = \text{Im } z$. Now, using the polar decomposition of a complex number (Bemerkung 3.3.6), $S(r) = \{z \in \mathbb{C} : z := r\, e^{i\phi} \vee \phi \in [0, 2\pi)\}$. Noting that

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \overset{\text{Satz 3.3.2.}}{=} \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{r\, e^{i\phi}}}{r^2} = \frac{r\, e^{-i\phi}}{r^2} = \frac{1}{r}\, e^{-i\phi},$$

we have $f(S(r)) := \{z^{-1} : z \in S(r)\} = \{r^{-1}\, e^{-i\phi} : \phi \in [0, 2\pi)\} = S(r^{-1})$, which denotes a concentric circle of radius r^{-1} and center $(0, 0)$.

The set of points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ denoting a straightline passing through the origin $(0, 0)$ and inclined at an angle $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ is given by $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \tan\theta\}$. In the complex plane it can be identified with the set $L_\theta := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = \text{Re } z \tan\theta\} = \{z = r\, e^{i\theta} : r > 0\} \subset \mathbb{C}$. Consider next the image of this set under f, i.e., $f(L_\theta) = \{f(r\, e^{i\theta}) : r > 0\} = \{r^{-1}\, e^{-i\theta} : r > 0\} = L_{-\theta}$. This set

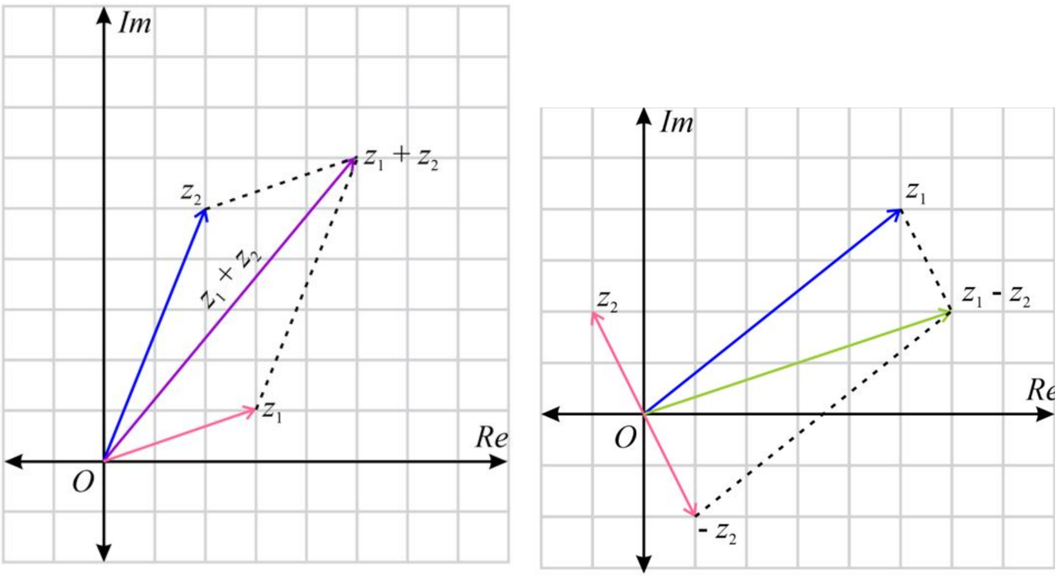

Abbildung 2: Geometric depiction of the addition and subtraction of two complex numbers z_1 and z_2.

again denotes a straight line in the complex plane subtending an angle $-\theta$ (or, equivalently $\pi - \theta$ with the real axis. [A more comprehensive solution for this problem will be posted shortly!]

Aufgabe 3 (Quaternionen)

Der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ wird wie folgt konstruiert. Quaternionen, d.h. Elemente von $\mathbb{H}$, sind Ausdrücke der Form

$$h = h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3$$

mit $h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ und den drei imaginären Einheiten i, j und k. Die Addition auf $\mathbb{H}$ ist komponentenweise definiert, d.h. für $h, h' \in \mathbb{H}$ ist

$$h + h' := (h_0 + h'_0) + \mathrm{i}(h_1 + h'_1) + \mathrm{j}(h_2 + h'_2) + \mathrm{k}(h_3 + h'_3).$$

Für die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ gilt Folgendes:

- Für reelle Zahlen r und r' (mit $r = r + \mathrm{i}0 + \mathrm{j}0 + \mathrm{k}0$) ist die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ und $\mathrm{ij} = \mathrm{k}, \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \mathrm{ki} = \mathrm{j}$.
- Die imaginären Einheiten vertauschen mit jeder reellen Zahl r, d.h. $\mathrm{i}r = r\mathrm{i}, \mathrm{j}r = r\mathrm{j}, \mathrm{k}r = r\mathrm{k}$.
- Für $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ und jede reelle Zahl r gilt das Assoziativgesetz, d.h. $\mathrm{i}(\mathrm{ik}) = (\mathrm{ii})\mathrm{k}, \mathrm{j}(\mathrm{ki}) = (\mathrm{jk})\mathrm{i}, r(\mathrm{jk}) = (r\mathrm{j})\mathrm{k}$, usw.

Weiter gelten die Distributivgesetze $(h + h')g = hg + h'g$ und $h(g + g') = hg + hg'$. Man kann nun zeigen, dass $\mathbb{H}$ mit dieser Addition und Mulptiplikation ein Schiefkörper ist, d.h. dass alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind.

(i) Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist und dass insbesondere gilt: ij $= -$ji, kj $= -$jk und ik $= -$ki.

(ii) Geben Sie die allgemeine Formel für die Multiplikation zweier Quaternionen h und h' an. Begründen Sie, dass das Assoziativgesetz der Multiplikation für Quaternionen gilt.

(ii) Geben Sie das neutrale Element der Multiplikation und das inverse Element der Multiplikation zu einer Quaternion $h \in \mathbb{H}$ an.

Hinweis: Definieren Sie sich die konjugierte Quaternion als $\bar{h} := h_0 - \mathrm{i}h_1 - \mathrm{j}h_2 - \mathrm{k}h_3$

Lösung

(i) $\mathrm{j} = \mathrm{ki} \Rightarrow \mathrm{ji} = \mathrm{kii} = \mathrm{ki}^2 = -\mathrm{k} \neq \mathrm{k} = ij$. Similarly for $\mathrm{kj} = -\mathrm{jk}$ and $\mathrm{ik} = -\mathrm{ki}$

(ii) Let $h, g \in \mathbb{H}$ with $h = h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3$ and $g = g_0 + \mathrm{i}g_1 + \mathrm{j}g_2 + \mathrm{k}g_3$. We have

$$\begin{aligned}
h \cdot g &= (h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3) \cdot (g_0 + \mathrm{i}g_1 + \mathrm{j}g_2 + \mathrm{k}g_3) \\
&= (h_0g_0 + \mathrm{i}^2h_1g_1 + \mathrm{j}^2h_2g_2 + \mathrm{k}^2h_3g_3) + \mathrm{i}(h_0g_1 + h_1g_0) + \mathrm{j}(h_0g_2 + h_2g_0) + \mathrm{k}(h_3g_0 + h_0g_3) \\
&\quad + (\mathrm{ij}h_1g_2 + \mathrm{ji}h_2g_1) + (\mathrm{ik}h_1g_3 + \mathrm{ki}h_3g_1) + (\mathrm{kj}h_3g_2 + \mathrm{jk}h_2g_3) \\
&= (h_0g_0 - h_1g_1 - h_2g_2 - h_3g_3) + \mathrm{i}(h_0g_1 + h_1g_0) + \mathrm{j}(h_0g_2 + h_2g_0) + \mathrm{k}(h_3g_0 + h_0g_3) \\
&\quad + \mathrm{k}(h_1g_2 - h_2g_1) + \mathrm{j}(-h_1g_3 + h_3g_1) + \mathrm{i}(-h_3g_2 + h_2g_3) \\
&= (h_0g_0 - h_1g_1 - h_2g_2 - h_3g_3) + \mathrm{i}(h_0g_1 + h_1g_0 + h_2g_3 - h_3g_2) \\
&\qquad + \mathrm{j}(h_0g_2 + h_2g_0 + h_3g_1 - h_1g_3) + \mathrm{k}(h_3g_0 + h_0g_3 + h_1g_2 - h_2g_1)
\end{aligned}$$

(iii) The neutral element of multiplication $e \in \mathbb{H}$ is given by $e = 1 + \mathrm{i}0 + \mathrm{j}0 + \mathrm{k}0$. Using the result from (ii) it is easily verified that $\forall\, h \in \mathbb{H} :\ e \cdot h = h \cdot e = h$. For the inverse element, we note that $\forall\, h \in \mathbb{H}$, the product of h and $\bar{h}$, where $h = h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3$ and $\bar{h} = h_0 - \mathrm{i}h_1 - \mathrm{j}h_2 - \mathrm{k}h_3$, is

$$h \cdot \bar{h} = (h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3) \cdot (h_0 - \mathrm{i}h_1 - \mathrm{j}h_2 - \mathrm{k}h_3) \overset{\text{(ii)}}{=} (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + \mathrm{i}0 + \mathrm{j}0 + \mathrm{k}0.$$

The same result expression is obtained from the product $\bar{h} \cdot h$. So, $\forall\, h \in \mathbb{H} : \bar{h} \cdot h = h \cdot \bar{h} = e$. This suggests that the inverse element of $h \in \mathbb{H}$,

$$h^{-1} = \frac{\bar{h}}{h \cdot \bar{h}} = \frac{h_0}{h \cdot \bar{h}} - \mathrm{i}\frac{h_1}{h \cdot \bar{h}} - \mathrm{j}\frac{h_2}{h \cdot \bar{h}} - \mathrm{k}\frac{h_3}{h \cdot \bar{h}},$$

(analogous to the inverse element in $\mathbb{C}$). We need to check if this fulfils the property $h^{-1} \cdot h = h \cdot h^{-1} = e$. Since $h \cdot \bar{h}$ is real, by the properties of scalar multiplication, we have

$$h^{-1} \cdot h = \frac{\bar{h}}{h \cdot \bar{h}} \cdot h = \frac{1}{h \cdot \bar{h}}(\bar{h} \cdot h) = e, \tag{1}$$

and similarly for $h \cdot h^{-1}$.

Aufgabe 4 (Fixpunktfreie Permutationen) In dieser Aufgabe soll die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer endlichen Menge bestimmt werden. Eine Permutation $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ heißt fixpunktfrei, wenn für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt, dass $\sigma(k) \neq k$. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n wird im folgenden mit d_n bezeichnet

(i) Zeigen Sie, dass es in S_1 keine und in S_2 genau eine fixpunktfreie Permutation gibt.

(ii) Sei $j \neq 1$ beliebig, aber fest. Finden Sie eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

(a) $\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) = 1\}$ und $\{\sigma \in S_{n-2} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$

(b) $\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) \neq 1\}$ und $\{\sigma \in S_{n-1} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$

(iii) Folgern Sie, dass $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ und daher $d_n - n \cdot d_{n-1} = (-1)^n$.

(iv) Beweisen Sie mit Induktion unter Verwendung von (iii), dass $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Lösung In dieser Aufgabe soll die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer endlichen Menge bestimmt werden. Eine Permutation $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ heißt fixpunktfrei, wenn für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt, dass $\sigma(k) \neq k$. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n wird im folgenden mit d_n bezeichnet

i) Zeigen Sie, dass es in S_1 keine und in S_2 genau eine fixpunktfreie Permutation gibt.
Lösung: Jede Abbildung σ in S_1 ist eine Funktion $\{1\} \to \{1\}$. Insbesondere ist $\sigma(1) = 1$ ein Fixpunkt. Sei nun $\mu : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ eine fixpunktfreie Permutation. Da $\mu(1) \neq 1$, ist die Abbildung eindeutig bestimmt: $1 \mapsto 2$ und $2 \mapsto 1$.

ii) Sei $j \neq 1$ beliebig aber fest. Finden Sie (ohne Beweis) eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

$\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) = 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\}$ und $\{\sigma \in S_{n-2} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\}$

Wir sehen, dass jede Permutation aus einer Vertauschung von 1 und j, sowie einem weiteren fixpunktfreien Teil besteht. Also definieren wir folgende Abbildung:

$$\begin{aligned}
&\tau : \{1, ..., n-2\} \to \{2, ..., j-1, j+1, ..., n\} \\
&k \mapsto \begin{cases} k+1 \text{ wenn } k < j-1 \\ k+2 \text{ wenn } k \geq j-1 \end{cases} \\
f :&\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) = 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\} \to \{\sigma \in S_{n-2} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\} \\
&\sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau
\end{aligned}$$

Analog geht man im zweiten Fall vor: Anstatt j darf jetzt 1 nicht mehr an der j-ten Stelle getroffen werden. (Achtung: Die Bedingung, dass j nicht getroffen wird, ist nicht mehr notwendig, da die Permutationen bijektiv sind und 1 schon auf j abgebildet wurde). Die Abbildung σ entspricht also auf $\{2, ..., n\}$ genau einer fixpunktfreien Permutation aus S_{n-1} mit der Umbenennung $1 \leftrightarrow j$:

$$\begin{aligned}
&\tau : \{1, ..., n-1\} \to \{1, ..., j-1, j+1, ..., n\} \\
&k \mapsto \begin{cases} k+1 \text{ wenn } k \neq j-1 \\ 1 \text{ wenn } k = j-1 \end{cases} \\
g :&\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) \neq 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\} \to \{\sigma \in S_{n-1} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\} \\
&\sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau
\end{aligned}$$

iii) Folgern Sie, dass $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ und daher $d_n - n \cdot d_{n-1} = (-1)^n$.
Die Mengen aus ii haben die gleiche Kardinalität. Da j genau $n-1$ Werte annehmen kann, folgt, dass

$$\begin{aligned}
d_n = &\sum_{j=2}^{n} |\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) = 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\}| \\
&+ |\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) \neq 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt }\}| \\
&= \sum_{j=2}^{n} d_{n-1} + d_{n-2} = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})
\end{aligned}$$

Weitere Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
d_n &= (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) = n \cdot d_{n-1} - d_{n-1} + (n-1)d_{n-2} \\
d_n - n \cdot d_{n-1} &= -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2})
\end{aligned}$$

Da wir nach i wissen, dass $d_2 - 2 * d_1 = 1 - 0 = 1 = (-1)^2$ gilt, folgt $d_n - n \cdot d_{n-1} = (-1)^n$.

iv) Beweisen Sie mit Induktion (unter Verwendung von iii), dass $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
Induktionsanfang: Es gilt $d_1 = 0 = 1 - 1 = 1! \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!}$
Induktionshypothese: $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$
Induktionsschritt ($n \to n+1$): Wir wissen $d_{n+1} - (n+1) \cdot d_n = (-1)^{n+1}$. Daher ist auch

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= (-1)^{n+1} + (n+1) \cdot d_n \overset{\text{(IH)}}{=} (-1)^{n+1} + (n+1) \cdot n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1)!}(-1)^{n+1} + (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$