Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Satz des Pythagoras)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras, i.e., die Aussage

$$(\text{Länge von } AB)^2 + (\text{Länge von } AC)^2 = (\text{Länge von } BC)^2.$$

Zeigen Sie den Satz auf die Weise, wie ihn Euklid bewiesen hat (in dem Fall auch bekannt als Kathetensatz). Dazu bilden Sie je ein Quadrat über jeder Seite des Dreiecks (vgl. Fig. 1a) – dies ergibt die Quadrate $CBDE$, $BAGF$, and $ACIH$ (vgl. Fig. 1b) – und zeigen, dass ($\star$) die Fläche des Quadrats $CBDE$ gleich der Summe der Flächen der Quadrate $BAGF$ und $ACIH$ ist.

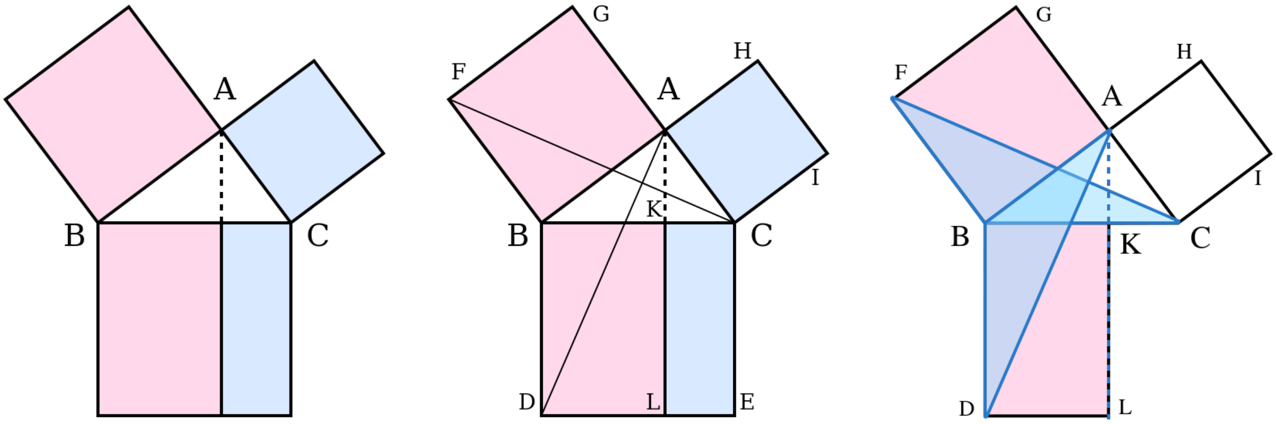


Abbildung 1: Skizzen zur Konstruktion des Euklidischen Beweises vom Satz von Pythagoras

Hinweis: Um ($\star$) zu beweisen, wird eine Parallele zu BD und CE durch den Punkt A gezogen. Diese schneidet die Strecken BC bzw. DE im rechten Winkel bei K bzw. L (vgl. Fig. 1b). Jetzt ist ($\star$) äquivalent zu den folgenden zwei Aussagen: (I) die Fläche des Quadrats $BAGF$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $DLKB$ (pink hinterlegt) *und* (II) die Fläche des Quadrats $ACIH$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $KLEC$ (blau hinterlegt).

Nun zeigt man zuerst (I) schrittweise wie folgt:

(i) Man zeichnet Dreiecke BCF bzw. BDA, indem man C und F bzw. A und D verbindet, und zeigt, dass diese zwei Dreiecke kongruent und damit flächengleich sind (siehe Fig. 1c).

(ii) Man beweist, dass das Rechteck $DLKB$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BDA.

(iii) Man beweist, dass das Quadrat $BAGF$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BCF.

Der Beweis von (II) geht analog zu dem von (I).

(i) $\angle CBD$ and $\angle FBA$ are right angles (because each angle in a square is 90°); therefore, $\angle ABD = \angle FBC$, since both are the sum of a right angle and $\angle ABC$. Furthermore, since AB and BD are equal to FB and BC, respectively (due to the fact that all sides of a square are equal), triangle BDA must be congruent to triangle BCF.

(ii) Because A is collinear with K and L, rectangle $BDLK$ must be twice the area of triangle ABD.

a. Area of $BDLK =$ length of $BD \times$ length of BK.

b. Area of $BDA = \frac{1}{2} \times$ length of $BD \times$ length of BK.

c. Thus, the area of $BDLK = 2 \times$ area of BDA.

(iii) Since C is collinear with A and G, square $BAGF$ must be twice the area of triangle BCF.

a. Area of $BAGF =$ length of $AB \times$ length of FB.

b. Area of $FBC = \frac{1}{2} \times$ length of FB (base-length of $FB =$ length of AB) $\times$ length of AB (height, which is the length of the altitude from C).

c. Thus, the area of $BAGF = 2 \times$ area of BCF.

Aufgabe 2 (Kettenbruchentwicklung, ggT) Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) bzw. die Kettenbruchdarstellung der folgenden Zahlen zu bestimmen:

(i) Bestimmen Sie $ggT(7,2)$, $ggT(15,75)$.

$$X = 7,\, Y = 2: \quad X = \overbrace{3}^{=n_0} \cdot Y + \underbrace{1}_{=r_1}. \quad Y = \overbrace{2}^{=n_1} \cdot \underbrace{1}_{r_1} + \overbrace{0}^{=r_2} \Rightarrow ggT(7,2) = r_1 = 1.$$

$$X = 75,\, Y = 15: \qquad X = \overbrace{5}^{=n_0} \cdot Y + \underbrace{0}_{=r_1} \Rightarrow ggT(15,75) = 15.$$

(ii) Bestimmen Sie die Kettenbruchdarstellung der folgenden rationalen Zahlen: $\frac{13}{2}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{75}{33}$

$$\frac{13}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 1}{2} = 6 + \frac{1}{2}.$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{\frac{13}{2}} = \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}.$$

$$\frac{75}{33} = \frac{2 \cdot 33 + 9}{33} = 2 + \frac{9}{33} = 2 + \frac{1}{\frac{33}{9}} = 2 + \frac{9}{33} = 2 + \frac{1}{\frac{3 \cdot 9 + 6}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{6}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{1 \cdot 6 + 3}{6}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2 \cdot 3}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{1 \cdot 6 + 3}{6}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 3 (Allgemeine Form der Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{n}$)

(i) Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sqrt{n} = a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe i), um iterativ die folgende allgemeine Form der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, zu erhalten.

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \ddots}}}$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde der Fall $n = 2$ und $a = 1$ geometrisch hergeleitet (siehe auch Aufgabe 4).

(iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe ii), um zwei verschiedene Kettenbruchdarstellungen von $\sqrt{5}$ zu erhalten (d. h. benutzen Sie zwei verschiedene Werte für $a \in \mathbb{N}$, z.B. $a = 1$ und $a = 2$). Bestimmen Sie $\sqrt{5}$ jeweils bis zu einer Genauigkeit, bei der sich die zweite Dezimalstelle nicht mehr ändert. Was fällt Ihnen auf?

(i) $n - a^2 = (\sqrt{n} - a)(\sqrt{n} + a) \Rightarrow \sqrt{n} = a + \frac{n-a^2}{\sqrt{n}+a}$

(ii) By iterating this result, obtain the general form of the continued fraction expansion of $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Solution sketch:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} &= a + \frac{n-a^2}{a+\sqrt{n}} \\
&= a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{a+\sqrt{n}}} \\
&= a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{a+\sqrt{n}}}} \\
&= a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{a+\sqrt{n}}}}} \\
&= a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \ddots}}}
\end{aligned}$$

(iv) For $n = 5$ obtain two different continued fraction expansions using the result in (iii), i.e., by choosing two values of $a \in \mathbb{N}$. Evaluate $\sqrt{5}$ using both the expansions up to 2 decimal places of accuracy ... solution sketch: First, let $a = 1$, then $2a = 2$ and $n - a^2 = 5 - 1 = 4$. It follows that

$$\sqrt{5} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \ddots}}}} \tag{1}$$

By truncating this continued fraction at different orders, we obtain

$$\sqrt{5} \approx 1 + \frac{4}{2} = 3$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2}} = 1 + \frac{4}{4} = 2$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2}}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2.333$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2}}}} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{3}} = 1 + \frac{12}{10} = 2.2$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{12}{10}} = 1 + \frac{40}{32} = 2.25$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{40}{32}} = 1 + \frac{128}{104} = 2.23$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{128}{104}} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{16}{13}} = 1 + \frac{52}{42} = 2.2380$$

$$\sqrt{5} \approx 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{128}{104}} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{52}{42}} = 1 + \frac{21}{17} = 2.23529$$

Next, choosing $a = 2$, we have $2a = 4$, $n - a^2 = 5 - 4 = 1$, so that using the result from (iii):

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} \tag{2}$$

As in the previous example, we obtain

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{17} = 2.23529$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{4}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = 2.23611$$

$$\sqrt{5} \approx 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{17}{72}} = 2 + \frac{72}{305} = 2.23607$$

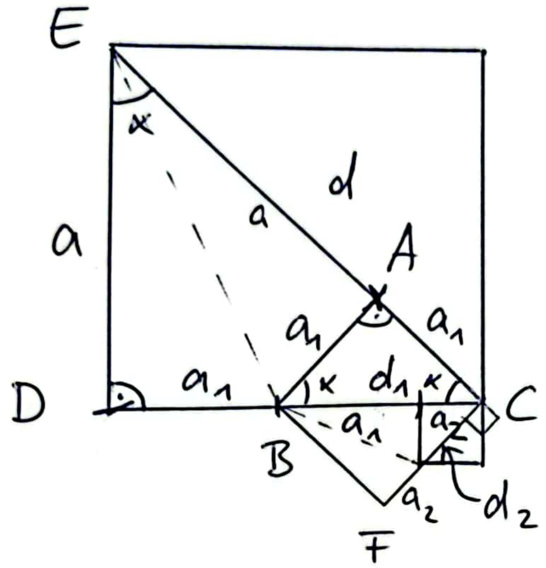
The lesson is that a given $\sqrt{n}$ can have different continued fraction expansions, some of which approximate the true value of $\sqrt{n}$, while others are slower. The best choice might be to let $a = m \in \mathbb{N}$ such that $m < \sqrt{n} < m + 1$ (i.e., the largest natural number smaller than $\sqrt{n}$). For $n = 5$, $m = 2$.

Aufgabe 4 (Diagonale und Seite im Quadrat)

Fertigen Sie eine beschriftete Zeichnung der geometrischen Konstruktion von Euklid, mit der in der Vorlesung bewiesen wurde, dass die Diagonale und Seite im Quadrat nicht kommensurabel sind. Schreiben Sie die Gleichungen auf, die iterativ zu einer immer besseren Darstellung des Verhältnisses von Diagonale und Seite und damit approximativ zum Wert von $\sqrt{2}$ führen.

Aufgabe 4

Lösung: Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$



$d = d_0$

$a = a_0$

$d_0 = a_0 + a_1$

$a_0 = a_1 + d_1 = 2a_1 + a_2$

$d_1 = a_1 + a_2$

$a_1 = a_2 + d_2 = 2a_2 + a_3$

$d_2 = a_2 + a_3$

$\vdots$

$\Rightarrow \frac{d}{a} = 1 + \frac{a_1}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{a_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{a_1}} = \ldots$

Betrachte die Diagonale d. Trage die Seitenlänge a an d ab und ermittle somit A. $\Rightarrow d = a + a_1$

Konstruiere die Senkrechte auf die Diagonale am Punkt A und ermittle somit B. Bemerke: $\overline{AB} = a_1$, denn ΔABC ist gleichschenklig (mit $\alpha = 45°$).

Bemerke: $\overline{DB} = a_1$, denn $\square$ DBAE ist ein Drachenviereck. $\Rightarrow a = a_1 + d_1$

Führe dies iterativ weiter, also trage nun a_1 an d_1 ab $\Rightarrow a_2$ und $d_1 = a_1 + a_2$

Vervollständige ΔABC zu einem Quadrat $\square$ ABFC

. . .

Wir sehen, wenn wir die Gleichungen oben weiterführen, dass $\frac{d}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}} \equiv \sqrt{2}$ (denn nach S.v. Pythagoras ist $d^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{d}{a} = \sqrt{2}$)

CamScanner