Logik und Diskrete Strukturen

Jan Johannsen

Vorlesung im Sommersemester 2024

Vorlesung

Präsenzveranstaltung im Raum B 101 im Hauptgebäude

Vorlesungsvideos (Screencast) aus den Vorjahren werden zusätzlich als Video-on-Demand (LMUcast) und zum Download zur Verfügung gestellt.

Links zu den Videos und Foliensätzen werden auf Moodle bereitgestellt.

Im Chatstream TCS-24S-LDS auf `https://chat.ifi.lmu.de`
steht das gesamte Team für Fragen zur Verfügung.

Zusätzlich gibt es eine Videoaufzeichnung der Vorlesung
aus dem SoSe 2012 von Prof. Martin Hofmann.

Übungen

Organisation: Balazs Toth

Tutor:innen und Korrektor:innen

- Stephanie Ames
- Jiacheng Chen
- Het Dave
- Victor Hucklenbroich
- Darius Jousdani
- Sonja Matuska
- Luis Reich
- Fatjon Tushe
- Emil Zitek
- Yifei Fu
- Qingshi Liu
- Nguyet Luong

Übungsgruppen

Gruppe	Zeit	Raum	Tutor:in
1	Mi 12-14	M 001	Victor Hucklenbroich
2	Mi 14-16	"	Sonja Matuska
3	Mi 16-18	"	Jiacheng Chen
4	Mi 18-20	"	Darius Jousdani
5	Do 10-12	"	Stephanie Ames
6	Do 12-14	"	Emil Zitek
7	Do 14-16	"	Fatjon Tushe
8	Do 16-18	"	Fatjon Tushe
9	Fr 10-12	online	Balazs Toth
10	Fr 12-14	M 001	Luis Reich
11	Fr 14-16	"	Het Dave

Alle Räume sind im Hauptgebäude.

Hausaufgaben

In den Übungsgruppen werden gemeinsam Präsenzübungen bearbeitet.

Die Hausaufgaben orientieren sich an den Präsenzübungen.

- Abgabe elektronisch über Moodle.

Vorerst ist keine Papierabgabe möglich!

Für die Hausaufgaben gibt es Punkte.

- Wer mindestens 50% der Punkte erreicht, erhält Bonuspunkte, die in der Klausur angerechnet werden.
- Die maximal erreichbare Zahl an Bonuspunkten entspricht dabei ca. 10% der Klausur.

Inhalt

Literatur

- Angelika Steger: Diskrete Strukturen 1. Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, 2. Auflage, Springer Verlag, 2007
  Kostenlos als E-Book in der UB erhältlich.
- Uwe Schöning: Logik für Informatiker, 5. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2000.
- Martin Hofmann: Logik und Diskrete Strukturen, Vorlesungsskript, Sommersemester 2017. (Umfasst nur den Logik-Teil.)

Übersicht

Grundlagen
- Mengen
- Relationen
- Funktionen
- Beweise
- Vollständige Induktion

Ordnungen und Verbände

Kombinatorik

Zahlentheorie und Arithmetik

Algebra

Aussagenlogik

Prädikatenlogik erster Stufe

Mengen

"Definition" (Georg Cantor)

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (m) unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Notation für Mengen:

- Aufzählung: $\{2, 3, 5, 8\}$,
  auch unvollständig: $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$
  oder unendlich: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,
- Komprehension: $\{\, x \,;\, \varphi(x) \,\}$ für Eigenschaft $\varphi(x)$
- Aussonderung: $\{\, x \in M \,;\, \varphi(x) \,\}$
- Bekannte Mengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- $[n] = \{1, \ldots, n\}$

Elemente und Teilmengen

Notation:

$a \in M$	a ist Element von M
$a \notin M$	a ist nicht Element von M
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
d.h.:	für alle x gilt: aus $x \in A$ folgt $x \in B$.

Extensionalität

Mengen sind durch ihre Elemente bestimmt:

$A = B$ gdw. für alle x gilt: $x \in A$ gdw. $x \in B$
gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

Die leere Menge $\{\}$, auch als $\emptyset$ notiert, enthält keine Elemente.

Operationen auf Mengen

Vereinigung

$$A \cup B := \{ x \,;\, x \in A \text{ oder } x \in B \}$$

Durchschnitt

$$A \cap B := \{ x \,;\, x \in A \text{ und } x \in B \}$$

Differenz

$$A \setminus B := \{ x \,;\, x \in A \text{ und } x \notin B \}$$

Symmetrische Differenz

$$A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A$$

Eigenschaften

Assoziativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Kommutativität

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

Idempotenz

$$A \cup A = A \quad \text{und} \quad A \cap A = A$$

Distributivität

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{und}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Eigenschaften der leeren Menge

$A \cup \emptyset = A$ (neutral)

$A \cap \emptyset = \emptyset$ (absorbierend)

Verallgemeinerte Operationen

Sind $A_1, \ldots, A_n$ Mengen, so schreibt man

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

für die Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Allgemeiner: für eine (Index-)Menge I und Mengen A_i für $i \in I$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

Analog für $\cap$, und andere (assoziative und kommutative) Operationen.

Kardinalität

Kardinalität (oder Mächtigkeit) von A:
Anzahl der Elemente von A, notiert $|A|$

Es ist $|\emptyset| = 0$.

A ist endlich gdw. $|A| \in \mathbb{N}$.

Unendliche Mengen sind z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Theorem (Cantor)

Es ist $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, *aber* $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Disjunktheit

Kardinalität der Vereinigung:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Insbesondere $|A \cup B| \leq |A| + |B|$

Mengen A, B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Sind A, B disjunkt, dann schreibe $A \uplus B$ für $A \cup B$

Dann gilt: $|A \uplus B| = |A| + |B|$

Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist

$$\{\, A\,;\ A \subseteq M \,\}$$

Beispiel: $M = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(M) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

Es gibt auch die Notation $2^M = \mathcal{P}(M)$

Es ist $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Ist M endlich, so ist $|\,\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Kartesisches Produkt

Geordnetes Paar: (a, b)

Eigenschaft: $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$

Kartesisches Produkt

$$A \times B := \{ (x, y) ; x \in A \text{ und } y \in B \}$$

Es gilt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Definiere induktiv:

$$A^1 = A$$
$$A^{i+1} = A \times A^i$$

Notation: $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$