Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Abzählbar und überabzählbar unendliche Mengen)

(i) Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen. Folgern Sie daraus, dass die Menge der Primzahlen abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Benutzen Sie, dass sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen schreiben lässt (siehe Blatt 4) und widerlegen Sie damit die Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt.

(ii) Zeigen Sie: Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge der reellen Zahlen im offenen Intervall $(0, 1)$. Schreiben Sie jede reelle Zahl $r \in (0, 1)$ als Dezimalzahl. Betrachten Sie nun eine beliebige Folge $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $r_i \in (0, 1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Elemente dieser Folge kann man abzählen. Zeigen Sie, dass man eine Zahl konstruieren kann, die nicht in dieser Folge enthalten ist (und dies für jede beliebige Folge). Folgern Sie daraus: die reellen Zahlen sind überabzählbar unendlich: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Aufgabe 2 (Rechnen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)

Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$?

(i) $3z = 5$

(ii) $z^2 = 2$

(iii) $z^2 = 3$

(iv) $2z^2 = 1$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Kommutative Gruppe)

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}, \cdot)$ mit der Verknüpfung $[a]_p \cdot [b]_p = [a \cdot b]_p$ ist eine kommutative Gruppe mit $p - 1$ Elementen.

Aufgabe 4 (Permutationen)

Sei X eine beliebige Menge, $A = \{f : X \to X\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach X und $\circ$ die Verkettung zweier Abbildungen, d.h. für $f, f' \in A$ und $\forall x \in X$:

$$(f' \circ f)(x) = f'(f(x)).$$

(i) Prüfen Sie, ob $(A, \circ)$ eine Gruppe ist.

(ii) Sei $B = \{f : X \to X | f \,\text{bijektiv}\} \subset A$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von X auf X. Prüfen Sie, ob $(B, \circ)$ eine Gruppe ist.

(iii) Sei X endlich. Was ist $f \in B$ anschaulich?

(iv) Betrachten Sie die beiden Permutationen $f : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$, $k \mapsto f(k)$, und $g : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$, $j \mapsto g(j)$ mit

$$f : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{Bmatrix}, \qquad g : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.