Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Mengen)

(i) Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ an.

(ii) Wieviele dieser Teilmengen A erfüllen die Bedingung $\{1, 2\} \subsetneq A$?

(iii) Für wieviele Teilmengen A gilt $2 \in A$, aber nicht $\{1, 2\} \subseteq A$?

Aufgabe 2 (Darstellungen von Mengen)

(i) Vereinfachen Sie: $\mathcal{P}\Big((\{0,1\} \times \{0,1\}) \setminus (\{(0,1)\} \cup \{(1,1)\})\Big)$

(ii) Vereinfachen Sie: $(\mathbb{N}_0 \setminus \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{2n : n \in \mathbb{N}_0\})$

Geben Sie dabei alle Schritte an.

Aufgabe 3 (Rechenregeln auf Mengen)

Sei Ω eine Grundmenge und $A, B, C \subseteq \Omega$. Zeigen Sie:

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(iii) Sei $\mathcal{I}$ eine nichtleere Indexmenge und $\forall i \in \mathcal{I} : A_i \subseteq \Omega$. Dann gilt:

$$\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i^c.$$

Überlegen Sie sich, dass (i)-(iii) analog gelten, wenn man jeweils $\bigcap$ und $\bigcup$ vertauscht.

Aufgabe 4 (Fundamentalsatz der Arithmetik)

Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ist eindeutig als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellbar.

Dabei gilt: p ist eine Primzahl $\Leftrightarrow p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ und $\forall a \in \mathbb{N} : a$ teilt $p \Rightarrow a = 1 \vee a = p$.

Gehen Sie bei Ihrem Beweis wie folgt vor. Zeigen Sie 1) die *Existenz* der Primfaktorzerlegung mittels vollständiger Induktion. Zeigen Sie 2) die *Eindeutigkeit* der Primfaktorzerlegung in den folgenden Schritten:

(i) Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus (Wechselwegnahme) um zu zeigen, dass für je zwei natürliche Zahlen m, n zwei ganze Zahlen p, q existieren, sodass:

$$ggT(m, n) = p \cdot m + q \cdot n.$$

(ii) Benutzen Sie (i), um zu zeigen, dass für natürliche Zahlen m, n und Primzahl p gilt:

$$p \text{ teilt } m \cdot n \Leftrightarrow p \text{ teilt } m \text{ oder } p \text{ teilt } n.$$

Verallgemeinern Sie diese Aussage auf Produkte von mehr als zwei Zahlen.

(iii) Nehmen Sie nun an, dass es zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen gibt und benutzen Sie das Resultat aus (ii) um zu zeigen, dass beide Zerlegungen in allen Faktoren übereinstimmen.