Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)

Probeklausur

Hinweis: Dies ist eine Probeklausur. Sie kann wie die Übungsblätter zur Korrektur eingereicht werden, wird aber auch in der ersten Woche nach den Ferien in den Übungen besprochen. Falls Sie die Probeklausur in Echtzeit rechnen wollen, nehmen Sie sich bitte 90 Minuten Zeit. Zugelassene Hilfsmittel sind nur ein Stift und Papier (Papier wird ind er echten Klausur gestellt). Die letzten beiden Teilaufgaben von Aufgabe 5 sind neuer Stoff und werden nochmal in der Vorlesung nach den Ferien besprochen, können aber schon probiert werden.

Aufgabe 1 [10 Pkt]

(i) **[3 Pkt]** Finden Sie die Kettenbruchdarstellung von $\frac{43}{19}$ und bestimmen Sie damit den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen: $ggT(19, 43)$.

(ii) **[2 Pkt]** Sei Ω eine Grundmenge und $A, B \subseteq \Omega$. Zeigen Sie: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(iii) **[3 Pkt]** Bestimmen Sie den Realteil und die Polardarstellung von $w := \frac{\bar{z}}{1+z^2}$, wobei $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(iv) **[2 Pkt]** Betrachten Sie die beiden Permutationen $f : A \to A$, $k \mapsto f(k)$ und $g : A \to A$, $j \mapsto g(j)$ mit $A := \{1, 2, 3, 4\}$

$$f : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{Bmatrix}, \qquad g : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und g^{-1}.

Aufgabe 2 [10 Pkt]

(i) **[3 Pkt]** Geben Sie die Verknüpfungstafel der Multiplikation für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

a) $2z = 1$

b) $z^2 = 2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) **[3 Pkt]** Ist die Menge $M = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \, f(x) = -f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}\}$ Untervektorraum des Vektorraums der Abbildungen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Geben Sie ein Beispiel für ein Element $g \in M$ an.

(iii) **[4 Pkt]** Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf Linearität. Untersuchen Sie alle linearen Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität.

a) $f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y)$

b) $f_2(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

Aufgabe 3 [10 Pkt]

(i) **[3 Pkt]** Betrachten Sie den Vektorraum der quadratischen Polynome

$$P_2(\mathbb{R}) = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Polynome $P', P'' \in P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $P' := x^2$ und $P'' := 3x - 1$. Ist $\mathcal{B} := \{P', P''\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) **[4 Pkt]** Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ definiert durch $(A)_{ij} := a_{ij} = 1 - \frac{\delta_{ij}}{2}$, wobei δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion ist, für die gilt: $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, und 0 sonst. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sum_{i=1}^{5} a_{1j} a_{2j}$

b) $\sum_{i=1}^{7} a_{1j} a_{j2}$

Berechnen Sie alle a_{ij} und schreiben Sie damit die Matrix A auf.

(iii) **[3 Pkt]** Sei $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir definieren $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle_A := x^T A\, y$. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ dieselben Eigenschaften wie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ erfüllt.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(i) **[4 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Es gelte weiter $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $A^T = -A$.

Hinweis: Betrachten Sie Skalarprodukte der Form $\langle A(x+y), x+y\rangle$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) **[4 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, für die gelte: $\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = 0$, wobei $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$ das k-fache Matrixprodukt ist. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix von $(E_n - A)$ durch $E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l$ gegeben ist.

(iii) **[2 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $(A \cdot A^T)^{-1}$.

Aufgabe 5 [10 Pkt]

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die Menge $\mathcal{B} = \{B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}\} \subset V$ aus Matrizen $B_{mn} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit zugehörigen Koeffizienten $(B_{mn})_{ij} := \delta_{im}\delta_{jn}$, $i, j = 1, 2$, für Indizes $m, n = 1, 2$; dabei bezeichne δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion. Sei weiter die folgende Abbildung gegeben:

$$L_A : V \to V,\ X \mapsto [A, X] := A \cdot X - X \cdot A \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in V\,,$$

wobei $+$ und $\cdot$ jeweils die Matrixaddition und -multiplikation bezeichne.

a) **[3 Pkt]** Geben Sie die Definition einer Basis von V an und zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) **[2 Pkt]** Definieren Sie die Menge $\mathrm{Kern} L_A$ und geben Sie daraus zwei Elemente an.

c) **[2 Pkt]** Berechnen Sie A^{-1}, d.h. die inverse Matrix zu A. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von A^{-1} bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

d) **[3 Pkt]** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von L_A bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.