Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$)

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind:

(i) $\{(-1, 1, 5)\}$

(i) $\{(0, 0, 0), (-1, 1, 5)\}$

(iii) $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$

Bestimmen Sie außerdem die lineare Hülle für jede dieser Mengen.

Lösung

(i) $\{(-1, 1, 5)\}$ is a linearly independent set because $\lambda(-1, 1, 5) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = 0$.

(ii) {(0,0,0), (-1,1,5)} is a linearly dependent set becasue $\lambda_1(0, 0, 0) + \lambda_2(-1, 1, 5) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_2 = 0$ but $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$ is a linearly dependent set becasue $\lambda_1(-1, 1, 5) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(-2, 2, 10) = (0, 0, 0) \Rightarrow (-\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 10\lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_2 = 0$ but $0 \neq \lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{2} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{C}^3$)

Man betrachte $\mathbb{C}^3$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Untersuchen Sie,

(i) ob die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind,

(ii) ob die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2:

a) $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ sind

linear abhängig, denn sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i\lambda_1 + \lambda_2 + 3i\lambda_3 \\ 2\lambda_1 - i\lambda_2 + (4-i)\lambda_3 \\ -\lambda_1 + (-1+i)\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

so folgt $\lambda_1 = (-1+i)\lambda_3$ aus 3. Gleichung

$$\Longrightarrow i(-1+i)\lambda_3 + \lambda_2 + 3i\lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3(-1+2i) = 0 \quad (1)$$

$$2(-1+i)\lambda_3 - i\lambda_2 + (4-i)\lambda_3 = -i\lambda_2 + \lambda_3(2+i) = 0 \quad (2)$$

$$i \cdot (1) + (2) : \quad i(\lambda_2 + \lambda_3(-1+2i)) - i\lambda_2 + \lambda_3(2+i) =$$

$$= \lambda_3(-2-i+2+i) = \lambda_3 \cdot 0 = 0$$

erfüllt für alle $\lambda_3 \in \mathbb{C}$

Wähle also $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 1-2i$

dann ist

$$(-1+i)\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (1-2i)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i-1+1-2i+3i \\ -2+2i-i-2+4-i \\ 1-i-1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ linear abhängig.

b) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ sind linear unabhängig,

denn für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_1 - i\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + i\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = i\lambda_2$ (aus 2. Gleichung)

$-\lambda_2 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$ (in 1. Gleichung)

in 3. Gleichung: $3i\lambda_2 + i\lambda_2 - \lambda_2 = (4i-1)\lambda_2 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ einzige Lösung

Aufgabe 3 (Basis von Polynomen)

Es sei $P_2(\mathbb{R}) := \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto ax^2 + bx + c,\;\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(i) Zeigen Sie, daß sowohl $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2\}$ als auch $\mathcal{B}_2 := \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right\}$ Basen von $P_2(\mathbb{R}) =$ sind.

(ii) Drücken Sie das Polynom $P' \in P_2(\mathbb{R})$, $P'(x) := (x+1)^3 - (x-1)^3$ sowohl bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2\}$ als auch bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right\}$ aus.

Lösung:

(i) To show that $\mathcal{B}_1$ is a basis of $P_2(\mathbb{R})$, see Beispiel 4.5.2 (it is the same argument for showing that $\mathcal{B}_2$ is a basis of $P_2(\mathbb{R})$). To show that $\mathcal{B}_2$ is a linearly independent set, define $q_i \in P_2(\mathbb{R})$ with $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, and $q_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Let $\alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0$, where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. This implies, $\forall\, x \in \mathbb{R} : \alpha_0 q_0(x) + \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) = 0$. A quadratic equation in a single (real) variable x can only identically vanish (i.e., for every x) iff $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. To show that $\mathrm{lin}(\mathcal{B}_2) = P_2(\mathbb{R})$, notice that an arbitrary polynomial in $P_2(\mathbb{R})$, given by $p(x) = ax^2 + bx + c$ can be written as $p(x) = c' q_0(x) + b' q_1(x) + a' q_2(x)$, where $a' = 2a/3$, $b' = b$, and $c' = c + a/3$.

(ii) We have the following Binomial expansions: $(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$; see Satz 2.2.3. This imples, $p(x) := (x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2 \in P_2(\mathbb{R})$. Expressing p is the basis $\mathcal{B}_1$ is straightforward. In order to express p in the second basis, we need only to substitute $a = 6$, $b = 0$ and $c = 2$ in the formulae for a', b', and c', above.

Aufgabe 4 ($\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum vs. $\mathbb{Q}$-Vektorraum)

$\mathbb{R}$ ist sowohl über dem Köper $\mathbb{R}$ als auch über dem Köper $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Vektoren $1 \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

(i) linear abhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffasst,

(ii) linear unabhängig sind, wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffasst.

Aus den Rechenregeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ folgt, daß $\mathbb{R}$ sowohl ein $\mathbb{R}$-Vektorraum als auch ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

- $1, \sqrt{2}$ $\mathbb{R}$-linear abhängig, denn
  z.B. $-\sqrt{2} \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} = 0$
  d.h. die Gleichung $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0$
  ist für $(\lambda_1, \lambda_2) = (-\sqrt{2}, 1) \neq (0,0)$
  erfüllt.

- $1, \sqrt{2}$ $\mathbb{Q}$ linear unabhängig:
  Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0$,
  dann gibt es nach Definition von $\mathbb{Q}$
  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

  $$\lambda_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad \lambda_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

  also $-\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}\sqrt{2}$. Ist $(m_1, m_2) \neq (0,0)$
  so folgt $\sqrt{2} = -\frac{m_1 n_2}{m_2 n_1} \in \mathbb{Q}$ $\lightning$. Daher
  kann $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \sqrt{2} = 0$ nur durch
  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \in \mathbb{Q}^2$ gelöst werden, d.h. $1, \sqrt{2}$
  sind im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear abhängig.