Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Matrizenmultiplikation)

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ Matrizen.

Für welche Paare (K, M) mit $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$ kann man das Matrixprodukt $K \cdot M$ bilden? Berechne die möglichen Produkte $K \cdot M$ für $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$. Welche Beispiele findet man hier, die zeigen, daß die Multiplikation von Matrizen im allgemeinen nicht kommutativ ist?

Lösung

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \end{pmatrix}, \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 34 & 25 \end{pmatrix}, \quad A \cdot G = \begin{pmatrix} 14 & 23 & 34 \\ 41 & 50 & 73 \end{pmatrix}, \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 13 & 20 & 27 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 5 & 0 \\ 15 & 35 \end{pmatrix}, \quad F \cdot A = \begin{pmatrix} 29 & 37 & 45 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}, \quad F \cdot B = \begin{pmatrix} 36 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F \cdot F = \begin{pmatrix} 36 & 7 \\ 5 & 35 \end{pmatrix}$$

$$G \cdot C = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad G \cdot D = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 20 & 16 \\ 45 & 25 \end{pmatrix}, \quad G \cdot G = \begin{pmatrix} 26 & 15 & 19 \\ 20 & 31 & 32 \\ 35 & 63 & 102 \end{pmatrix}, \quad D \cdot B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

N.B.: $A \cdot D \neq D \cdot A$.

Aufgabe 2 (Rechenregeln für Matrizen)

(i) Seien $A, B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times p}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

(ii) Seien nun $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und $Y := XZ$.

Berechnen Sie $X + Z$, $Y \cdot (X + Z)$, $(X + Z) \cdot Y$, $Y \cdot X + Y \cdot Z$ und $X \cdot Y + Z \cdot Y$und überprüfen Sie damit die Identitäten $Y \cdot (X + Z) = Y \cdot X + Y \cdot Z$ und $(X + Z) \cdot Y = X \cdot Y + Z \cdot Y$.

Lösung

(i)

$$\begin{aligned} ((A + B) \cdot C)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} (A + B)_{ij} \cdot (C)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk} = (A \cdot C)_{ik} + (B \cdot C)_{ik} \end{aligned}$$

$\forall i = 1, ..., m,\ k = 1, .., p \Rightarrow (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$

(ii) $X + Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Y := XZ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Y \cdot (X + Z) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y \cdot X + Y \cdot Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(X + Z) \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X \cdot Y + Z \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Rechenregeln für inverse Matrizen)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad A \cdot B$ invertierbar und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(ii) $A_1, ..., A_k \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ invertierbar und $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$

(iii) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N} : (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

(iv) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad A^T$ invertierbar und $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Hier bezeichnet A^{-1} die zu A inverse Matrix und A^T die zu A transponierte Matrix und $A^k := A \cdot \ldots \cdot A$ (k-mal).

Lösung

(i) $A, B \in K^{n\times n}$ invertible $:\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n = B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1}$. It follows that

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \qquad \text{(Associativity of Matrix multiplication)} \\ &= B^{-1} \cdot E_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = E_n.\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \qquad \text{(Associativity of Matrix multiplication)} \\ &= A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n.\end{aligned}$$

Therefore, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(ii) We can either use the principle of mathematical induction or direct computation (as in (i)) to prove this result. So, consider $k \in \mathbb{N}$ invertible matrices $A_1, A_2, \ldots, A_k \in K^{n\times n}$ with inverses $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_k^{-1} \in K^{n\times n}$ (i.e., $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots k\} :\ A_j^{-1} \cdot A_j = A_j^{-1} \cdot A_j = E_n$).

(I) By direct computation:

$$\begin{aligned}(A_1 \cdot ... \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) &= (A_1 \cdot ... \cdot A_{k-1}) \cdot (A_k \cdot A_k^{-1}) \cdot (A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\ &= (A_1 \cdot ... \cdot A_{k-1}) \cdot E_n \cdot (A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\ &= (A_1 \cdot ... \cdot A_{k-1}) \cdot (A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\ &= (A_1 \cdot ... \cdot A_{k-2}) \cdot (A_{k-1} \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot (A_{k-2}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\ &= (A_1 \cdot ... \cdot A_{k-2}) \cdot E_n \cdot (A_{k-2}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\ &= \cdots = A_1 \cdot A_1^{-1} = E_n,\end{aligned}$$

and

$$(A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot ... \cdot A_k) = (A_1^{-1} \cdot ... \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot (A_k^{-1} \cdot A_k) \cdot (A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot E_n \cdot (A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_1) \\
&= (A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{k-1}^{-1}) \cdot (A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_1) \\
&= (A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{k-2}^{-1}) \cdot (A_{k-1}^{-1} \cdot A_{k-1}) \cdot (A_{k-2} \cdot \ldots \cdot A_1) \\
&= (A_1^{-1} \cdot \ldots \cdot A_{k-2}^{-1}) \cdot E_n \cdot (A_{k-2} \cdot \ldots \cdot A_1) \\
&= \cdots = A_1^{-1} \cdot A_1 = E_n,
\end{aligned}
$$

(II) Now, we prove the result using mathematical induction. Consider the statement:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) : (A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1} \Leftrightarrow (A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \cdot (A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\
= E_n = (A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P}(1)$ is trivially true. $\mathcal{P}(2)$ is already established by (i). Now, suppose that $\mathcal{P}(m)$ is true for some $m \in \mathbb{N}$ (induction hypothesis I.H.). It follows that

$$
\begin{aligned}
(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{m+1}) \cdot (A_{m+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) &= (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \cdot (A_{m+1} \cdot A_{m+1}^{-1}) \cdot (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\
&= (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \cdot E_n \cdot (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \\
&= (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \cdot (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \overset{\text{I.H.}}{=} E_n,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
(A_{m+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{m+1}) &= (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_{m+1}^{-1} \cdot A_{m+1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \\
&= (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot E_n \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \\
&= (A_m^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_m) \overset{\text{I.H.}}{=} E_n.
\end{aligned}
$$

All in all, $\mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$.

(iii) Let $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$ and $A_1^{-1} = A_2^{-1} = \cdots = A_k^{-1} = A^{-1}$ in (ii) to establish the result.

(iv) Recall that $\forall\, A \in K^{m \times n},\ B \in K^{n \times p} :\ (A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ (Satz 4.4.5 4)). Using this result, we have for any invertible matrix $A \in K^{n \times n}$:

$$
A^\top \cdot (A^{-1})^\top = (A^{-1} \cdot A)^\top = E_n^\top = E_n, \quad \text{and} \quad (A^{-1})^\top \cdot A^\top = (A \cdot A^{-1})^\top = E_n^\top = E_n.
$$

It follows that $A^\top$ is invertible with inverse matrix $(A^{-1})^\top$.

Aufgabe 4 (Inverse Matrix)

(i) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Finden Sie die Matrix $M^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die Bedingung $M^{-1}M = M\,M^{-1} = E_2$ erfüllt. Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit M^{-1} existiert? Geben Sie ein Beispiel für M, für das M^{-1} nicht existiert.

(ii) Finden Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe i) die inversen Matrizen zu $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Berechnen Sie XZ, $(XZ)^{-1}$ und $Z^{-1}X^{-1}$ und überprüfen Sie damit die Identität $(XZ)^{-1} = Z^{-1}X^{-1}$.

(iv) Sei $Y := XZ \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie $Y^\top$, Y^{-1}, $(Y^{-1})^\top$ und $(Y^\top)^{-1}$ und überprüfen Sie damit die Identität $(Y^\top)^{-1} = (Y^{-1})^\top$.

(v) Erinnern Sie sich an die Rotationsmatrix $R_\phi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$: $R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe i) die Matrix R_ϕ^{-1}. Zeigen Sie, dass $R_\phi^{-1} = R_\phi^\top = R_{-\phi}$.
Hinweis:: Für $R_{-\phi}$ muss man $\sin(-\phi)$ und $\cos(-\phi)$ Abhängigkeit von $\sin\phi$ und $\cos\phi$ bestimmen. Benutzen Sie dafür die trigonemtrischen Formeln für $\sin(\phi+\psi)$ und $\cos(\phi+\psi)$.

Lösing

(i) Let $M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, where $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. By definition, $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = E_2$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha + b\gamma = c\beta + d\delta = 1 \\ a\beta + b\delta = c\alpha + d\gamma = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Let us first consider the following simultaneous equations:

$$a\alpha + b\gamma = 1, \tag{2a}$$
$$c\alpha + d\gamma = 0. \tag{2b}$$

To solve these equations, multiply Eq. (2a) by c and Eq. (2b) by a and subtract the two to arrive at

$$(bc - ad)\,\gamma = c \Leftrightarrow \gamma = -\frac{c}{ad - bc}.$$

Incorporating this result into any one of the two equations, Eqs. (2a-2b), yields

$$\alpha = \frac{d}{ad - bc}.$$

The remaining equations following from (1), *viz.*,

$$c\beta + d\delta = 1,$$
$$a\beta + b\delta = 0,$$

are analogous to Eqs. (2a-2b) with solutions

$$\beta = -\frac{b}{ad - bc}, \qquad \delta = \frac{a}{ad - bc}. \tag{4}$$

The inverse matrix is determined to be

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Note that M^{-1} exists iff $ad - bc \neq 0$.

As a consistency check, let us verify that $M^{-1} \cdot M = E_2$, which was not used to determine M^{-1} above.

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E_2. \tag{6}$$

(ii) First, check that $ad - bc = -1 \neq 0$ for both X and Z, so, both are invertible. Now, applying (5), we have

$$X^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X, \qquad \text{and} \qquad Z^{-1} = -1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Z.$$

So, X and Z are their own inverses, *viz.*, $X^2 = Z^2 = E_2$.

(iii) From Aufgabe 2 (ii), we have $Y = X \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. for Y, $ad - bc = 1 \Rightarrow Y^{-1}$ exists, and

$$Y^{-1} \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -Y.$$

Now,

$$Z^{-1} \cdot X^{-1} \overset{\text{(ii)}}{=} Z \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Y^{-1}.$$

(iv) $Y^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Thus, $(Y^\top)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, and $(Y^{-1})^\top \overset{\text{(iii)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Evidently $(Y^{-1})^\top \cdot Y^\top = Y^\top \cdot (Y^{-1})^\top = E_2$.

(v) $R_\phi^\top = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. To calculate the inverse of R_ϕ, note that $ad - bc = \cos^2\phi + \sin^\phi = 1 \neq 0$, so R_ϕ^{-1} exists, and by (5), $R_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = R_\phi^\top$. To calculate $R_{-\phi}$, we need the identities $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ and $\cos(-\phi) = \cos\phi$. These follow from the trigonometric addition formula Beispiel 4.4.3 upon setting, e.g., $\psi = 0$ and $\phi \mapsto -\phi$. From this, it follows that

$$R_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = R_\phi^{-1} = R_\phi^\top.$$