Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Eigenschaften linearer Abbildungen)

(i) Seien U, V und W K-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ und $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Funktionsverkettung $f \circ g : U \to W$ auch eine lineare Abbildung ist.

(ii) Seien V, W K-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f\,\text{injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Kern} f = \{0\}$$

Aufgabe 2 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht linear? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 5$

(iii) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$

(iv) ϕ: $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$

Aufgabe 3 (Untervektorräume)

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 3x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 3x + 2y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

(iii) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) | \, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x \leq y\} \subset \mathbb{R}^3$

(v) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \, f(x) = f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Aufgabe 4 (Graphen)

Gegeben seien Funktionen f, g, h und k von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(i) $f(x_1, x_2) = 1$

(ii) $g(x_1, x_2) = x_1 + 2$

(iii) $h(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 + 2$

(iv) $k(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion, d.h. zeichnen Sie G_f, G_g, G_h und G_k. Ist eine der skizzierten Flächen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sei $f : X \to Y$. Der Graph einer Funktion f ist definiert als

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \,|\, x \in X\}.$$

D.h. für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ ist $G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.