Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Rechenregeln auf Ringen)

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und seien $a, b, c \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln gelten:

(i) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(ii) Falls ein Einselement $1 \in R$ existiert, dann gilt:

$-a = (-1) \cdot a = 1 \cdot (-a)$

(iii) Falls R nullteilerfrei ist, also falls $\forall a, b \in R : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, dann gilt:

$(c \neq 0 \wedge a \cdot c = b \cdot c) \Rightarrow a = b \quad$ und $\quad (c \neq 0 \wedge c \cdot a = c \cdot b) \Rightarrow a = b$

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)

Betrachten Sie die komplexe Zahlenebene.

(i) Seien $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Veranschaulichen Sie sich anhand einer Skizze die Addition bzw. Subtraktion zweier komplexer Zahlen $(z_1, z_2) \to z_1 \pm z_2$ sowie die komplexe Konjugation $z \to \bar{z}$.

(ii) Betrachten Sie nun die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Auf welche Kurven bildet f Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung, auf welche Geraden durch den Ursprung ab? Wie verändert sich der Winkel zwischen zwei Ursprungsgeraden, wie der Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden?

Hinweis: Nutzen Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen.

Aufgabe 3 (Quaternionen)

Der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ wird wie folgt konstruiert. Quaternionen, d.h. Elemente von $\mathbb{H}$, sind Ausdrücke der Form

$$h = h_0 + \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3$$

mit $h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ und den drei imaginären Einheiten i, j und k. Die Addition auf $\mathbb{H}$ ist komponentenweise definiert, d.h. für $h, h' \in \mathbb{H}$ ist

$$h + h' := (h_0 + h_0') + \mathrm{i}(h_1 + h_1') + \mathrm{j}(h_2 + h_2') + \mathrm{k}(h_3 + h_3').$$

Für die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ gilt Folgendes:

- Für reelle Zahlen r und r' (mit $r = r + \mathrm{i}0 + \mathrm{j}0 + \mathrm{k}0$) ist die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ die übliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ und $\mathrm{ij} = \mathrm{k}, \mathrm{jk} = \mathrm{i}, \mathrm{ki} = \mathrm{j}$.

- Die imaginären Einheiten vertauschen mit jeder reellen Zahl r, d.h. $\mathrm{i}r = r\mathrm{i}, \mathrm{j}r = r\mathrm{j}, \mathrm{k}r = r\mathrm{k}$.
- Für $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ und jede reelle Zahl r gilt das Assoziativgesetz, d.h. $\mathrm{i}(\mathrm{ik}) = (\mathrm{ii})\mathrm{k}, \mathrm{j}(\mathrm{ki}) = (\mathrm{jk})\mathrm{i}, r(\mathrm{jk}) = (r\mathrm{j})\mathrm{k}$, usw.

Weiter gelten die Distributivgesetze $(h + h')g = hg + h'g$ und $h(g + g') = hg + hg'$. Man kann nun zeigen, dass $\mathbb{H}$ mit dieser Addition und Mulptiplikation ein Schiefkörper ist, d.h. dass alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation erfüllt sind.

(i) Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist und dass insbesondere gilt: $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$, $\mathrm{kj} = -\mathrm{jk}$ und $\mathrm{ik} = -\mathrm{ki}$.

(ii) Geben Sie die allgemeine Formel für die Multiplikation zweier Quaternionen h und h' an. Begründen Sie, dass das Assoziativgesetz der Multiplikation für Quaternionen gilt.

(ii) Geben Sie das neutrale Element der Multiplikation und das inverse Element der Multiplikation zu einer Quaternion $h \in \mathbb{H}$ an.

Hinweis: Definieren Sie sich die konjugierte Quaternion als $\bar{h} := h_0 - \mathrm{i}h_1 - \mathrm{j}h_2 - \mathrm{k}h_3$

Aufgabe 4 (Fixpunktfreie Permutationen)

In dieser Aufgabe soll die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen einer endlichen Menge bestimmt werden. Eine Permutation $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ heißt fixpunktfrei, wenn für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt, dass $\sigma(k) \neq k$. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen in S_n wird im folgenden mit d_n bezeichnet

(i) Zeigen Sie, dass es in S_1 keine und in S_2 genau eine fixpunktfreie Permutation gibt.

(ii) Sei $j \neq 1$ beliebig, aber fest. Finden Sie eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

  (a) $\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) = 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$ und $\{\sigma \in S_{n-2} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$

  (b) $\{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j \wedge \sigma(j) \neq 1 \wedge \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$ und $\{\sigma \in S_{n-1} : \sigma \text{ hat keinen Fixpunkt}\}$

(iii) Folgern Sie, dass $d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ und daher $d_n - n \cdot d_{n-1} = (-1)^n$.

(iv) Beweisen Sie mit Induktion unter Verwendung von (iii), dass $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$