Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

# Lineare Algebra (Informatik)
## Übungsblatt 8

**Aufgabe 1** (Matrizenmultiplikation)

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ Matrizen.

Für welche Paare $(K, M)$ mit $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$ kann man das Matrixprodukt $K \cdot M$ bilden? Berechnen Sie die möglichen Produkte $K \cdot M$ für $K, M \in \{A, B, C, D, F, G\}$. Welche Beispiele findet man hier, die zeigen, daß die Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist?

**Aufgabe 2** (Rechenregeln für Matrizen)

(i) Seien $A, B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times p}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

(ii) Seien $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $Y := XZ$.

Berechnen Sie $X + Z$, $Y \cdot (X + Z)$, $(X + Z) \cdot Y$, $Y \cdot Z + Y \cdot Z$ und $X \cdot Y + Z \cdot Y$und überprüfen Sie damit die Identitäten $Y \cdot (X + Z) = Y \cdot X + Y \cdot Z$ und $(X + Z) \cdot Y = X \cdot Y + Z \cdot Y$.

**Aufgabe 3** (Rechenregeln für inverse Matrizen)

Seien $k, l, n \in \mathbb{N}$. Sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad$ $A \cdot B$ invertierbar und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(ii) $A_1, ..., A_l \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad$ $A_1 \cdot \ldots \cdot A_l$ invertierbar und $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_l)^{-1} = A_l^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$

(iii) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad$ $\forall k \in \mathbb{N} : (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

(iv) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\quad\Rightarrow\quad$ $A^T$ invertierbar und $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Hier bezeichnet $A^{-1}$ die zu $A$ inverse Matrix und $A^T$ die zu $A$ transponierte Matrix und $A^k := A \cdot \ldots \cdot A$ ($k$-mal).

**Aufgabe 4** (Inverse Matrix)

(i) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Finden Sie die Matrix $M^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die Bedingung $M^{-1}M = M\,M^{-1} = E_2$ erfüllt. Welche Bedingungen müssen $a, b, c, d$ erfüllen, damit $M^{-1}$ existiert? Geben Sie ein Beispiel für $M$, für das $M^{-1}$ nicht existiert.

(ii) Finden Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe i) die inversen Matrizen zu $X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Berechnen Sie $XZ$, $(XZ)^{-1}$ und $Z^{-1}X^{-1}$ und überprüfen Sie damit die Identität $(XZ)^{-1} = Z^{-1}X^{-1}$.

(iv) Sei $Y := XZ \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie $Y^\top$, $Y^{-1}$, $(Y^{-1})^\top$ und $(Y^\top)^{-1}$ und überprüfen Sie damit die Identität $(Y^\top)^{-1} = (Y^{-1})^\top$.

(v) Betrachten Sie die Rotationsmatrix $R_\phi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$: $R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe i) die inverse Matrix $R_\phi^{-1}$. Zeigen Sie, dass $R_\phi^{-1} = R_\phi^\top = R_{-\phi}$.

*Hinweis:* Für $R_{-\phi}$ muss man $\sin(-\phi)$ und $\cos(-\phi)$ in Abhängigkeit von $\sin\phi$ und $\cos\phi$ bestimmen. Benutzen Sie dazu die trigonometrischen Formeln für $\sin(\phi + \psi)$ und $\cos(\phi + \psi)$.