Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Eigenschaften linearer Abbildungen)

(i) Seien U, V und W K-Vektorräume. Seien $f : V \to W$ und $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Funktionsverkettung $f \circ g : U \to W$ auch eine lineare Abbildung ist.

(ii) Seien V, W K-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Kern} f = \{0\}$$

Lösung

(i) Since f and g are linear maps, according to Bemerkung 4.2.1., $\forall\, \lambda \in K,\ \forall\, u, v \in V$:

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v). \tag{1}$$

Also, $\forall\, \lambda \in K,\ \forall\, u, v \in U$:

$$g(\lambda u + v) = \lambda g(u) + g(v). \tag{2}$$

Now, $\forall\, \lambda \in K,\ u, v \in U$, consider

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\lambda u + v) &= f\big(g(\lambda u + v)\big) \overset{(2)}{=} f\big(\lambda g(u) + g(v)\big) \overset{(1)}{=} \lambda f(g(u)) + f(g(v)) \\ &= \lambda\, (f \circ g)(u) + (f \circ g)(v).\end{aligned}$$

Therefore, $f \circ g$ is a linear map.

(ii) „$\Rightarrow$": f injektiv, d.h. $\forall v, v' \in V : f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$. Nun ist $v \in \mathrm{Kern}\ f \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = f(0)$, wobei die letzte Äquivalenz gilt, weil f linear. Daraus folgt, weil f injektiv: $v = 0$.

„$\Leftarrow$": Betrachte $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$, also $f(v) - f(v') = 0$. Weil f linear, folgt daraus: $f(v - v') = 0$, d.h. $v - v' \in \mathrm{Kern}\ V$. Weil $\mathrm{Kern}\ f = \{0\}$, folgt: $v - v' = 0 \Leftrightarrow v = v'$.

Aufgabe 2 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht linear? Begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 5$

(iii) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$

(iv) ϕ: $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(1)$

Lösung

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$ ist linear, denn $\forall\, u := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v := (x', y') \in \mathbb{R}^2$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\, u + v) &= f(\lambda\,(x, y) + (x', y')) = f((\lambda x, \lambda y) + (x', y')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), \lambda x + x') = (3\lambda x + 3x' + 2\lambda y + 2y', \lambda x + x') \\ &= ((3\lambda x + 2\lambda y) + (3x' + 2y'), \lambda x + x') = (3\lambda x + 2\lambda y, \lambda x) + (3x' + 2y', x') \\ &= \lambda\,(3x + 2y, x) + (3x' + 2y', x') = \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

(ii) The map g is not linear since $g(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \neq 0$ (see, Bemerkung 4.2.4).

(iii) The map h is not linear because $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} h(i\, z_1 + z_2) &= \overline{i\, z_1 + z_2} \overset{\text{Satz 3.3.2.}}{=} \overline{i\, z_1} + \bar{z}_2 \overset{\text{Satz 3.3.2.}}{=} \bar{i}\, \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -\, i\, \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= -\, i\, h(z_1) + h(z_2) \neq i\, h(z_1) + h(z_2). \end{aligned}$$

Remark: If $\mathbb{C}$ is considered as a $\mathbb{R}$-vector space, then $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ with $h(z) = \bar{z}$ is indeed a linear map, because $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, and $\lambda \in \mathbb{R}$: $h(\lambda\, z_1 + z_2) = \overline{\lambda\, z_1 + z_2} = \overline{\lambda\, z_1} + \overline{z_2} = \bar{\lambda}\, \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \lambda\, \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \lambda\, h(z_1) + h(z_2)$. (N.B.: $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\bar{\lambda} = \lambda$.)

(iv) $\phi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$ ist linear, denn $\forall\, f,\, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(1) \overset{\text{Satz 4.1.2.}}{=} (\lambda f)(1) + g(1) \overset{\text{Satz 4.1.2.}}{=} \lambda\, f(1) + g(1) = \lambda\, \phi(f) + \phi(g).$$

Aufgabe 3 (Untervektorräume)

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 2y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

(iii) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) |\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(iv) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x \leq y\} \subset \mathbb{R}^3$

(v) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\, f(x) = f(-x)\, \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Lösing

(i) $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 2y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ is a subspace of the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^3$. First, note that $(0, 0, 0) \in U$ because $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$. Next, consider (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in U$; $\lambda \in \mathbb{R}$. That is, $3x_n + 2y_n + z_n = 0$, $n = 1, 2$. It follows that $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ and $\lambda\,(x_1, y_1, z_1) = (\lambda\, x_1, \lambda\, y_1, \lambda\, z_1)$. Note that $3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (3x_1 + 2y_1 + z_1) + (3x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U$. Also, $3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + \lambda z_1 = \lambda(3x_1 + 2y_1 + z_1) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow (\lambda\, x_1, \lambda\, y_1, \lambda\, z_1) \in U$. Therefore, U is a sub-vector-space (or subspace) of $\mathbb{R}^3$ applying Definition 4.3.1.

(ii) $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x + 2y + z = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ because $(0, 0, 0) \notin U$, as $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 1$; see Bemerkung 4.3.1.

(iii) $U := \{(\mu + \lambda, \lambda^2) |\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ is not a subspace of $\mathbb{R}^2$ because $(1, 1) \in U$ (letting $\mu = 0, \lambda = 1$), but for $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, $\lambda(1, 1) = (-1, -1) \notin U$.

(iv) $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x \leq y\} \subset \mathbb{R}^3$ is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ because $(1, 0, 0) \in U$ but for $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, $\lambda(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin U$.

(v) $U := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\, f(x) = f(-x)\, \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is a subspace of the $\mathbb{R}$-vector space $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ because $\forall\, f, g \in U$ (i.e., $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = f(-x)$ and $g(x) = g(-x)$) and $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x) \Rightarrow f+g \in U$, and

2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x) \Rightarrow \lambda f \in U$.

Aufgabe 4 (Graphen)

Gegeben seien Funktionen f, g, h und k von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(i) $f(x_1, x_2) = 1$

(ii) $g(x_1, x_2) = x_1 + 2$

(iii) $h(x_1, x_2) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 + 2$

(iv) $k(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$

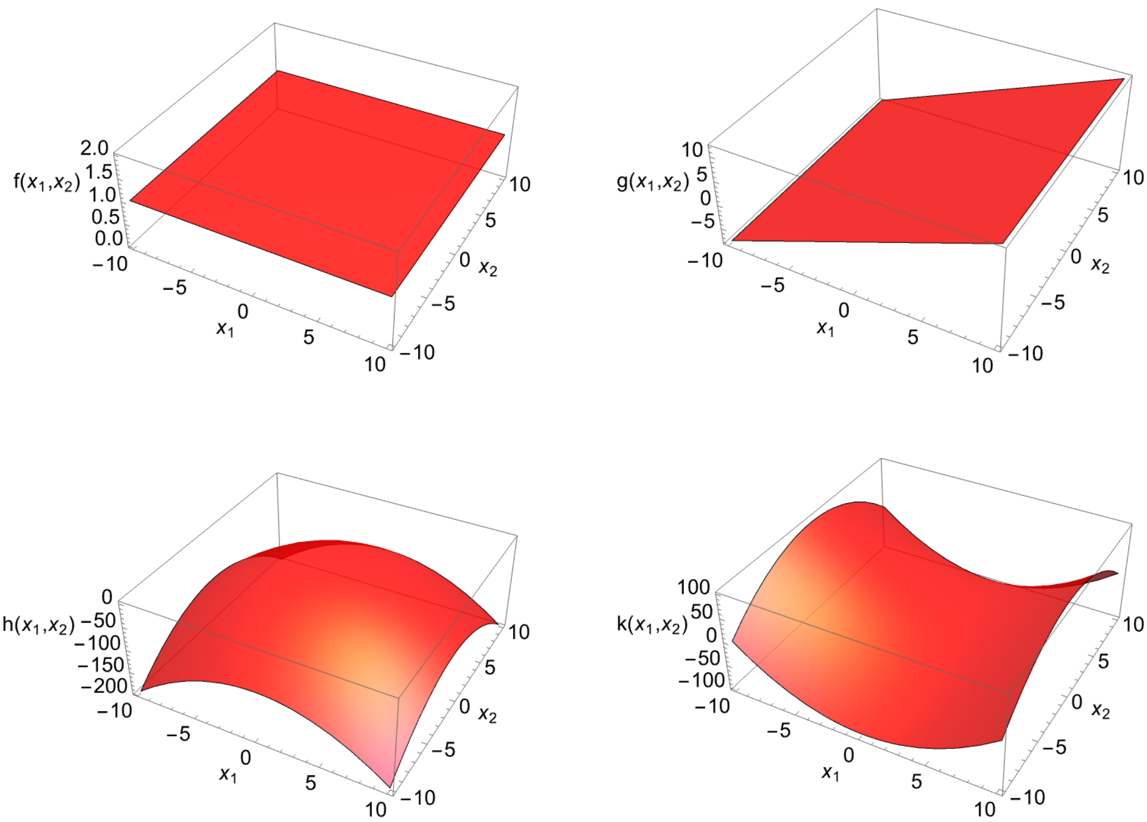
Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion, d.h. zeichnen Sie G_f, G_g, G_h und G_k. Ist eine der skizzierten Flächen ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sei $f: X \to Y$. Der Graph einer Funktion f ist definiert als

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \,|\, x \in X\}.$$

D.h. für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ ist $G_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

Lösung:



$G_f \subset \mathbb{R}^3$ is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ because $(0,0,0) \neq (0,0,f(0,0)) = (0,0,1) \Rightarrow (0,0,0) \neq G_f$. The same holds for G_g, G_h. On the other hand, G_k is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ even though $(0,0,0) \in G_k$. This is because, $(2,1,3) = (2,1,2^2 - 1^2) \in G_k$ but $-1 \cdot (2,1,3) = (-2,-1,-3) \notin G_k$ since $(-2,-1,-3) \neq (-2,-1,(-2)^2 - (-1)^2) = (-2,-1,3)$.