Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (De-Morgan-Regeln, doppelte Verneinung, Kontraposition)

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Äquivalenzaussagen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Dann gilt:

(i) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$ und $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ (*De-Morgan-Regeln*)

(ii) $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (*Gesetz für die doppelte Verneinung*)

(iii) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (*Kontrapositionsgesetz*)

Aufgabe 2 (Transitivität von „$\Rightarrow$" und „$\Leftrightarrow$")

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Implikationen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Dann gilt:

(i) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

(ii) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$

Aufgabe 3 (Arithmetische Reihen) Zeigen Sie mittels natürlicher Induktion.

(i) Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt die Gaußsche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 4 (Reihen) Zeigen Sie mittels natürlicher Induktion.

(i) Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) Für die alternierende Summe gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{1}{4}\Big((-1)^n(2n+1) - 1\Big).$$