



Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

## Lineare Algebra (Informatik)

### Übungsblatt 9

#### Aufgabe 1 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$ )

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen von Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$  sind:

- (i)  $\{(-1, 1, 5)\}$
- (i)  $\{(0, 0, 0), (-1, 1, 5)\}$
- (iii)  $\{(-1, 1, 5), (2, 1, 3), (-2, 2, 10)\}$

Bestimmen Sie außerdem die lineare Hülle für jede dieser Mengen.

#### Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{C}^3$ )

Man betrachte  $\mathbb{C}^3$  als Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Untersuchen Sie,

- (i) ob die Vektoren  $\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3i \\ 4-i \\ -1+i \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}^3$  linear unabhängig sind,
- (ii) ob die Vektoren  $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{C}^3$  linear unabhängig sind.

#### Aufgabe 3 (Basis von Polynomen)

Es sei  $P_2(\mathbb{R}) := \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (i) Zeigen Sie, daß sowohl  $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2\}$  als auch  $\mathcal{B}_2 := \{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$  Basen von  $P_2(\mathbb{R}) =$  sind.
- (ii) Drücken Sie das Polynom  $P' \in P_2(\mathbb{R})$ ,  $P'(x) := (x+1)^3 - (x-1)^3$  sowohl bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2\}$  als auch bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_2 := \{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$  aus.

#### Aufgabe 4 ( $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum vs. $\mathbb{Q}$ -Vektorraum)

$\mathbb{R}$  ist sowohl über dem Körper  $\mathbb{R}$  als auch über dem Körper  $\mathbb{Q}$  ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Vektoren  $1 \in \mathbb{R}$  und  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

- (i) linear abhängig sind, wenn man  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffasst,
- (ii) linear unabhängig sind, wenn man  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum auffasst.