Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Relationen, Äquivalenzrelationen)

(i) Es sei $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass

$$x \sim y :\iff x^2 = y^2$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert und geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

(ii) Es sei $M := \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Bestimmen Sie alle möglichen Relationen $\mathcal{R}$ auf M und untersuchen Sie diese jeweils auf die folgenden Eigenschaften:

(a) Reflexivität

(b) Symmetrie

(c) Transitivität

Hinweis: Eine Relation $\mathcal{R} = (M, R)$ ist definiert über eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Denken Sie bei der Untersuchung der Relationen an die Aussagenlogik.

Aufgabe 2 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität sowie Bijektivität. Beweisen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

(i) $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}\,,\ n \mapsto (-1)^n$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - 2x$

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n^2 - 1$

(iv) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$

Aufgabe 3 (Urbild, Bild)

(i) Für $a > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - a^2$ gegeben. Bestimmen Sie

(a) das Bild des Intervals $[-1, 1] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ unter f,

(b) das Urbild des Intervals $(0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$ unter f.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(ii) Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Weiter sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ seien U_i Teilmengen von B. Zeigen Sie die Gleichung:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

(iii) Zeigen Sie weiter, dass der Ausdruck in (ii) im Allgemeinen nicht richtig ist, wenn man f^{-1} durch f ersetzt und U_i als Teilmengen von A wählt.

Aufgabe 4 (Verkettung von Funktionen)

(i) Seien $f : W \to X$, $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Abbildung von W nach Z gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

die Verkettung also assoziativ ist.

(ii) Betrachten Sie nun die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 5x$. Bestimmen Sie $f \circ g$ sowie $g \circ f$. Folgern Sie daraus, dass die Verkettung i. A. nicht kommutativ ist.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe: Paare, 3-Tupel)

(i) Seien A, B Mengen und $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

definiert in der Tat ein Paar, d.h. $\forall a, a' \in A$, $\forall b, b' \in B : (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$.

(ii) Seien A, B, C Mengen mit $|A \cap B \cap C| \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Menge (von Mengen)

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

kein 3-Tupel definiert.