Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

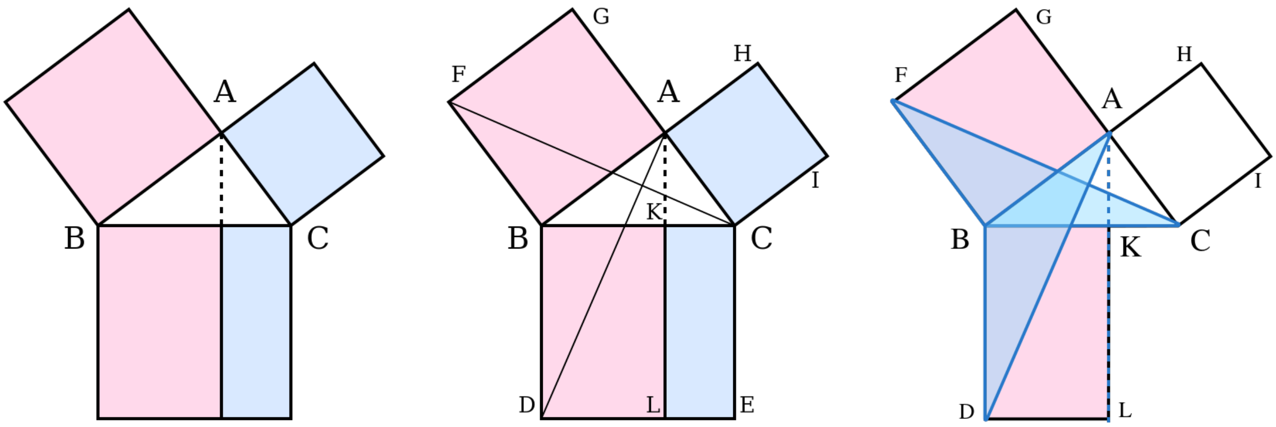
Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Satz des Pythagoras)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle CAB = 90°$. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras, i.e., die Aussage

$$(\text{Länge von } AB)^2 + (\text{Länge von } AC)^2 = (\text{Länge von } BC)^2.$$

Zeigen Sie den Satz auf die Weise, wie ihn Euklid bewiesen hat (in dem Fall auch bekannt als Kathetensatz). Dazu bilden Sie je ein Quadrat über jeder Seite des Dreiecks (vgl. Fig. 1a) – dies ergibt die Quadrate $CBDE$, $BAGF$, and $ACIH$ (vgl. Fig. 1b) – und zeigen, dass ($\star$) die Fläche des Quadrats $CBDE$ gleich der Summe der Flächen der Quadrate $BAGF$ und $ACIH$ ist.



(a) (b) (c)

Abbildung 1: Skizzen zur Konstruktion des Euklidischen Beweises vom Satz von Pythagoras

Hinweis: Um ($\star$) zu beweisen, wird eine Parallele zu BD und CE durch den Punkt A gezogen. Diese schneidet die Strecken BC bzw. DE im rechten Winkel bei K bzw. L (vgl. Fig. 1b). Jetzt ist ($\star$) äquivalent zu den folgenden zwei Aussagen: (I) die Fläche des Quadrats $BAGF$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $DLKB$ (pink hinterlegt) *und* (II) die Fläche des Quadrats $ACIH$ ist gleich der Fläche des Rechtecks $KLEC$ (blau hinterlegt).

Nun zeigt man zuerst (I) schrittweise wie folgt:

(i) Man zeichnet Dreiecke BCF bzw. BDA, indem man C und F bzw. A und D verbindet, und zeigt, dass diese zwei Dreiecke kongruent und damit flächengleich sind (siehe Fig. 1c).

(ii) Man beweist, dass das Rechteck $DLKB$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BDA.

(iii) Man beweist, dass das Quadrat $BAGF$ doppelt so groß ist wie das Dreieck BCF.

Der Beweis von (II) geht analog zu dem von (I).

Aufgabe 2 (Kettenbruchentwicklung, ggT)

Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler (ggT) bzw. die Kettenbruchdarstellung der folgenden Zahlen zu bestimmen:

(i) Bestimmen Sie $ggT(7, 2)$, $ggT(15, 75)$.

(ii) Bestimmen Sie die Kettenbruchdarstellung der folgenden rationalen Zahlen: $\frac{13}{2}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{75}{33}$

Aufgabe 3 (Allgemeine Form der Kettenbruchdarstellung von $\sqrt{n}$)

(i) Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie die folgende Identität:

$$\sqrt{n} = a + \frac{n - a^2}{a + \sqrt{n}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe i), um iterativ die folgende allgemeine Form der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, zu erhalten.

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{n - a^2}{2a + \cfrac{n - a^2}{2a + \cfrac{n - a^2}{2a + \ddots}}}$$

Bemerkung: In der Vorlesung wurde der Fall $n = 2$ und $a = 1$ geometrisch hergeleitet (siehe auch Aufgabe 4).

(iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe ii), um zwei verschiedene Kettenbruchdarstellungen von $\sqrt{5}$ zu erhalten (d. h. benutzen Sie zwei verschiedene Werte für $a \in \mathbb{N}$, z.B. $a = 1$ und $a = 2$). Bestimmen Sie $\sqrt{5}$ jeweils bis zu einer Genauigkeit, bei der sich die zweite Dezimalstelle nicht mehr ändert. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4 (Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im Quadrat)

Fertigen Sie eine beschriftete Zeichnung der geometrischen Konstruktion von Euklid, mit der in der Vorlesung bewiesen wurde, dass die Diagonale und Seite im Quadrat nicht kommensurabel sind. Schreiben Sie die Gleichungen auf, die iterativ zu einer immer besseren Darstellung des Verhältnisses von Diagonale und Seite und damit approximativ zum Wert von $\sqrt{2}$ führen.

Die Aufgaben können allein oder in Gruppen gelöst und zur Korrektur abgegeben werden (siehe die Anleitung dazu auf Moodle). Bitte markieren Sie höchstens zwei Aufgaben, die korrigiert werden sollen.

Achtung: Die Abgabe von Lösungen ist freiwillig und stellt keine prüfungserelevante Leistung dar. Sie kann insbesondere nicht zur Notenverbesserung benutzt werden.

Die Lösung der Aufgaben wird in den Tutorien besprochen und im Anschluss wird eine Musterlösung auf Moodle veröffentlicht. Bitte melden Sie sich auf Moodle zu einem Tutorium Ihrer Wahl an.