LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Gesetz für die doppelte Verneinung, Kontrapositionsgesetz)

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Äquivalenzaussagen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Dann gilt:

(i) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$ und $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ (*De-Morgan-Regeln*)

(ii) $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (*Gesetz für die doppelte Verneinung*)

(iii) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (*Kontrapositionsgesetz*)

Lösung Wir beweisen dies mittels Wahrheitstafel:

(i) (*De-Morgan-Regeln*)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(ii) (*Gesetz für die doppelte Verneinung*)

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg(\neg\mathcal{A})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A})$
w	f	w	w
f	w	f	w

(iii) (*Kontrapositionsgesetz*)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 2 (Implikationen)

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Aussagen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Dann gilt:

(i) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

(ii) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$

Lösing

(i)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(ii)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	f	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 3 (Arithmetische Reihen)

(i) Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt die Gaußsche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Lösung

(i) For $n = 1$, L.H.S. $= 1$, R.H.S. $= \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Assume $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Now, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2}$.

(ii) For $n = 1$, L.H.S. $= 2 \cdot 1 - 1 = 1$, R.H.S. $= 1^2 = 1$. Assume $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Now, $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \big(2(n+1)-1\big) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

Aufgabe 4 (Reihen)

(i) Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) Für die alternierende Summe gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{1}{4}\Big((-1)^n(2n+1)-1\Big).$$

Lösung

(i) For $n = 1$, L.H.S. $= 1^2 = 1$, R.H.S. $= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$. Assume $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Now, $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6(n+1)}{6}\right) = \frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6) = \frac{n+1}{6}(2n^2+4n+3n+6) = \frac{n+1}{6}(2n(n+2)+3(n+2)) = \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2) = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$.

(ii) For $n = 1$, L.H.S. $= (-1)^1 \cdot 1 = -1$, R.H.S. $= \frac{1}{4}\Big((-1)^1(2\cdot 1+1)-1\Big) = \frac{1}{4}(-3-1) = -1$. Assume $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{1}{4}\Big((-1)^n(2n+1)-1\Big)$. Now,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{1}{4}\Big((-1)^n(2n+1)-1\Big) + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{1}{4}\Big[(-1)^n(2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1}(n+1)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[-(-1)^{n+1}(2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1}(n+1)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[(-1)^{n+1}(4(n+1)-(2n+1)) - 1\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[(-1)^{n+1}(2n+3) - 1\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[(-1)^{n+1}(2(n+1)+1) - 1\Big].
\end{aligned}$$