Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Orthogonalmatrizen)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Gruppe der orthogonalen Matrizen:

$$O(n) := \{M \in R^{n\times n} : M \cdot M^T = E_n\}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(O(n), \cdot)$ tatsächlich eine Gruppe ist.

(ii) Sei der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen das Skalarprodukt invariant lassen, d.h.

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n \text{ und } \forall\, M \in O(n) : \langle v, w\rangle = \langle Mv, Mw\rangle$$

(iii) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ gilt, dass die Matrix

$$V = (v_1 \quad ... \quad v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

in $O(n)$ liegt.

Aufgabe 2 (Skalarprodukt, Orthonormalsystem)

Es sei $V := \{P : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0 \,|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

(i) Zeigen Sie, dass V mit

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R},\ (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt wird.

(ii) Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Elemente

$$p_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$$

mit $n = 0, 1, 2$ in $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Aufgabe 3 (Basiswechsel)

Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $V = W = \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt in der kanonischen Einheitsbasis $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Sei $B' = \left\{ b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis.

Bestimmen Sie:

(i) die Matrix $M^B_{B'}(\mathrm{id}_V)$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $B \to B'$ gehört, sowie die Matrix $M^{B'}_B(\mathrm{id}_V)$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $B' \to B$ gehört.

(ii) die Koordinatendarstellung von f bezüglich

a) der Basen B von V und B von W,

b) der Basen B' von V und B' von W,

c) der Basen B' von V und B von W.

Aufgabe 4 (Dimensionsformel für Untervektorräume)

Sei V ein K-Vektorraum mit $dim\ V < \infty$. Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Dann ist die Summe $U_1 + U_2$ definiert als

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $U_1 + U_2$ ist Untervektorraum von V

(ii) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

Bemerkung: Falls $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, nennt man $U_1 + U_2$ die *direkte Summe.*

Hinweis: Übungsblatt 10 wird in der zweiten Woche nach den Ferien in den Übungen besprochen. In der ersten Woche nach den Ferien wird die Probeklausur besprochen.