Dr. Jan Johannsen
Balazs Toth

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
16. April 2024

Lösungsvorschlag zur 1. Übung zur Vorlesung

Logik und Diskrete Strukturen

Hinweise:

- Die A-Aufgaben bezeichnen Aufgaben, die in den Tutorien in Anwesenheit gerechnet oder besprochen werden, die H-Aufgaben sind Hausaufgaben.
- Es gibt auf jede Hausaufgabe Übungspunkte. Übungspunkte geben Bonuspunkte für die Klausur, aber nur, wenn die Klausur ohnehin bestanden wurde.
- Abgabefrist (für die H-Aufgaben) ist der 26. April 2024
- Wie immer sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise oder Zwischenschritte gefordert
- $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0

A1-1 *Mengen*

Berechnen Sie folgende Mengen:

a) $\{m, e, n\} \cup \{g, e\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{m, e, n, g\}$

b) $\{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{3\}$

d) $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

e) $\{1, 2, 3\} \times \{\{4, 5\}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{(1,\{4,5\}),(2,\{4,5\}),(3,\{4,5\})\}$

f) $\{1,2,4\} \setminus \{1,2,3,5,6,7\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{4\}$

g) $\{1,2,4\} \triangle \{1,2,3,5\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\{3,4,5\}$

A1-2 ***Kardinalitäten***

Geben Sie die Kardinalität folgender Mengen an:

a) $\mathscr{P}(\{\varnothing\})$

LÖSUNGSVORSCHLAG: 2

b) $\{x \in \mathbb{N}_0; x < 5\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: 5

c) $\{x \in \mathbb{Z}; x < 5\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Es gibt unendlich viele negative Zahlen, damit ist die Kardinalität unendlich

d) $\{\{1,2,3,4\},\{5,7,9\}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: 2

e) $\{x; x \in \mathbb{N}_0\} \cap \{1,\ldots,100\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $|\{x; x \in \mathbb{N}_0\} \cap \{1,\ldots,100\}| = |\{1,\ldots,100\}| = 100$

f) $\{3,4,5\} \times \{2,7,8,9\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: $|\{3,4,5\}| = 3, |\{2,7,8,9\}| = 4 \Rightarrow |\{3,4,5\} \times \{2,7,8,9\}| = 3 \cdot 4 = 12$

g) $\{p \in \mathbb{N}_0; p \text{ ist Primzahl}\} \times \{x \in \mathbb{N}_0; x > 50 \text{ und } x \leq 100\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei $P = \{p \in \mathbb{N}_0; p \text{ ist Primzahl}\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{N}_0; x > 50 \text{ und } x \leq 100\}$.

Die Kardinalität von P ist unendlich.

Die Kardinalität von $Q = 50$.

Damit ist $|P \times Q| = |P| \cdot |Q| = |P| \cdot 50 = \infty$

Also ist diese Kardinalität unendlich.

A1-3 ***Disjunktheit***

Geben Sie aus folgenden Mengen alle Paare von Mengen an, die disjunkt sind

- $A = \{1,2,3\}$
- $B = \{4,6,8\}$
- $C = \{2,3,5,7\}$
- $D = \{4,8,9\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Zur Lösung eine Tabelle, die für jedes Paar an Mengen den Schnitt dieser Mengen angibt:

	A	B	C	D
A	A	$\varnothing$	$\{2,3\}$	$\varnothing$
B	$\varnothing$	B	$\varnothing$	$\{4,8\}$
C	$\{2,3\}$	$\varnothing$	C	$\varnothing$
D	$\varnothing$	$\{4,8\}$	$\varnothing$	D

Die Paare, deren Einträge $\varnothing$ ist, sind disjunkt. Dies sind:
$(A,B), (A,D), (B,A), (B,C), (C,B), (C,D), (D,A), (D,C)$

Da M disjunkt mit $N \iff N$ disjunkt mit M, wäre die Frage auch mit weniger Paaren beantwortet, etwa (A,B), (B,C), (C,D), (D,A).

Mit Paaren sind in der Regel geordnete Paare gemeint, aber da der Fokus auf Disjunktheit lag, wäre diese Antwort hier auch in Ordnung.

A1-4 ***Mengenoperationen***

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass gilt:
$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup D)$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Die Richtung "$\supseteq$ ist falsch.

Gegenbeispiel: Seien $A = D = \{0\}$ und $B = C = \{\}$. Dann ist $A \cup C = B \cup D = \{0\}$, aber $A \cap B = C \cap D = \{\}$, die Null ist also in der Menge auf der rechten Seite enthalten, aber nicht auf der linken.

Richtig wäre die Aussage: $(A \cap B) \cup (A \cap D) \cup (C \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup D)$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass gilt:
$(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Die Richtung $\supseteq$ ist falsch.

Gegenbeispiel: Seien $A = B = C = \{0\}$. Dann ist $(A \cup B) \setminus C = A \setminus C = A \setminus A = \varnothing$, doch $A \cup (B \setminus C) = A \cup \varnothing = A = \{0\}$.

Beweis der Richtung "$\subseteq$": Sei $a \in (A \cup B) \setminus C$. Dann ist a in $A \cup B$, aber nicht in C. Wir fahren mit einer Fallunterscheidung fort. Angenommen, a liegt in A. Dann liegt a insbesondere in $A \cup (B \setminus C)$. Angenommen, a liegt in B. Dann liegt a in $B \setminus C$, da a ja nicht in C liegt, und liegt somit auch in $A \cup (B \setminus C)$.