Paula Reichert, Siddhant Das

Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)

Probeklausur

Hinweis: Dies ist eine Probeklausur. Sie kann wie die Übungsblätter zur Korrektur eingereicht werden, wird aber auch in der ersten Woche nach den Ferien in den Übungen besprochen. Falls Sie die Probeklausur in Echtzeit rechnen wollen, nehmen Sie sich bitte 90 Minuten Zeit. Zugelassene Hilfsmittel sind nur ein Stift und Papier (Papier wird ind er echten Klausur gestellt). Die letzten beiden Teilaufgaben von Aufgabe 5 sind neuer Stoff und werden nochmal in der Vorlesung nach den Ferien besprochen, können aber schon probiert werden.

Aufgabe 1 [10 Pkt]

(i) **[3 Pkt]** Finden Sie die Kettenbruchdarstellung von $\frac{43}{19}$ und bestimmen Sie damit den größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen: $ggT(19, 43)$.

(ii) **[2 Pkt]** Sei Ω eine Grundmenge und $A, B \subseteq \Omega$. Zeigen Sie: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(iii) **[3 Pkt]** Bestimmen Sie den Realteil und die Polardarstellung von $w := \frac{\bar{z}}{1+z^2}$, wobei $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

(iv) **[2 Pkt]** Betrachten Sie die beiden Permutationen $f : A \to A$, $k \mapsto f(k)$ und $g : A \to A$, $j \mapsto g(j)$ mit $A := \{1, 2, 3, 4\}$

$$f : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{Bmatrix}, \qquad g : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und g^{-1}.

Lösung

(i) **[2 Pkt]**

$$\frac{43}{19} = \frac{2 \cdot 19 + 5}{19} = 2 + \frac{5}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{5}} = 2 + \frac{1}{\frac{3 \cdot 5 + 4}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{1 \cdot 4 + 1}{4}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}.$$

It follows that $ggT(19, 43) = ggT(43, 19) = 1$ **[1 Pkt]**.

(ii) **[2 Pkt]**

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg\Big((x \in A) \wedge (x \in B)\Big) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$$
$$\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow A^c \cup B^c \ni x$$

(iii) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\bar{z} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i$.

$$\begin{aligned} w &:= \frac{\bar{z}}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1-i)^2}{1-i^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+i^2-2i}{2} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad (\Rightarrow \operatorname{Re} w = 0) \quad \textbf{[2 Pkt]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/2} \quad \textbf{[1 Pkt]} \end{aligned}$$

(iv)

$$f \circ g : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(g(1)) & f(g(2)) & f(g(3)) & f(g(4)) \end{Bmatrix}$$

$$: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(4) & f(3) & f(1) & f(2) \end{Bmatrix}$$

$$: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{Bmatrix} \quad \textbf{[1 Pkt]}.$$

The neutral element of the permutation group $e : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$. The inverse element of g, denoted g^{-1}, fulfills $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$. That is,

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ g &: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g^{-1}(g(1)) & g^{-1}(g(2)) & g^{-1}(g(3)) & g^{-1}(g(4)) \end{Bmatrix} \\ &: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g^{-1}(4) & g^{-1}(3) & g^{-1}(1) & g^{-1}(2) \end{Bmatrix} \\ &: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow g^{-1} : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \textbf{[1 Pkt]}. \end{aligned}$$

N.B.:

$$\begin{aligned} g \circ g^{-1} &: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(g^{-1}(1)) & g(g^{-1}(2)) & g(g^{-1}(3)) & g(g^{-1}(4)) \end{Bmatrix} \\ &: \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(3) & g(4) & g(2) & g(1) \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix} : e. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 [10 Pkt]

(i) **[3 Pkt]** Geben Sie die Verknüpfungstafel der Multiplikation für $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an. Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

a) $2z = 1$

b) $z^2 = 2$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) **[3 Pkt]** Ist die Menge $M = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \, f(x) = -\,f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}\}$ Untervektorraum des Vektorraums der Abbildungen $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Geben Sie ein Beispiel für ein Element $g \in M$ an.

(iii) **[4 Pkt]** Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf Linearität. Untersuchen Sie alle linearen Abbildungen auf Surjektivität und Injektivität.

a) $f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y)$

b) $f_2(x, y) = (7x + 14y - 1, x + 2y + 5)$

Lösung

(i) Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \cdot)$: **[1 Pkt]**

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

a) $2z = 1 \Rightarrow z = 2$ **[1 Pkt]**.

b) $z^2 = 2$ hat in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ keine Lösung **[1 Pkt]**.

(ii) $U := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \, f(x) = -f(-\,x) \, \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is a subspace of the $\mathbb{R}$-vector space $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ because $\forall \, f, g \in U$ (i.e., $\forall \, x \in \mathbb{R} : \; f(x) = -\,f(-x)$ and $g(x) = -\,g(-x)$) and $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -\,f(-x) - g(-x) = -\,(f + g)(-x) \Rightarrow f + g \in U$ **[1 Pkt]**, and
2. $(\lambda \, f)(x) = \lambda \, f(x) = \lambda \cdot (-\,f(-x)) = -\,(\lambda f)(-x) \Rightarrow \lambda f \in U$ **[1 Pkt]**.

(Alternatively, $(f + \lambda g)(x) f(x) + (\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = -\,f(-x) - \lambda g(-x) = -\,(f(-x) + \lambda g(-x)) = -\,(f + \lambda g)(-x) \Rightarrow f + \lambda g \in U$ **[2 Pkt]**.) Examples of functions in U: $\sin x$, x, x^3, $x^5 + \sin(2x)$, $x \cos x$, etc. **[1 Pkt]**.

(iii) a) Let $\mathbf{u} = (x_1, y_1), \mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ and $\lambda \in \mathbb{R}$. f_1 is linear, because

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) &= f_1(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (3(x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \lambda y_2), 4(x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2)) \\ &= ((3x_1 + 2y_1) + \lambda(3x_2 + 2y_2), (4x_1 + y_1) + \lambda(4x_2 + y_2)) \\ &= (3x_1 + 2y_1, 4x_1 + y_1) + \lambda(3x_2 + 2y_2, 4x_2 + y_2) \\ &= f_1(\mathbf{u}) + \lambda f_1(\mathbf{v}) \quad \textbf{[1 Pkt]}. \end{aligned}$$

Injectivity: $f_1(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (3x + 2y, 4x + y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \text{Kern}(f_1) = \{\mathbf{0}\}$. Given Lemma 4.3.1. f_1 is Injective **[1 Pkt]**. (Alternatively $f_1(x_1, y_1) = f_1(x_2, y_2) \Leftrightarrow (3x_1 + 2y_1, 4x_1 + y_1) = (3x_2 + 2y_2, 4x_2 + y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \Rightarrow f_1$ is injective **[1 Pkt]**.) Surjectivity: $\forall \, (a, b) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = (3x + 2y, 4x + y) = (a, b) \Rightarrow x = \frac{2b-a}{5}$, $y = \frac{4a-3b}{5}$. It follows that f_1 is surjective **[1 Pkt]**.

b) $f_2(0, 0) = (-1, 5) \neq (0, 0) \Rightarrow f_2$ is not linear (see, Bemerkung 4.2.4) **[1 Pkt]**.

Aufgabe 3 [10 Pkt]

(i) [**3 Pkt**] Betrachten Sie den Vektorraum der quadratischen Polynome

$$P_2(\mathbb{R}) = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Betrachten Sie die Polynome $P', P'' \in P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $P' := x^2$ und $P'' := 3x - 1$. Ist $\mathcal{B} := \{P', P''\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) [**4 Pkt**] Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ definiert durch $(A)_{ij} := a_{ij} = 1 - \frac{\delta_{ij}}{2}$, wobei δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion ist, für die gilt: $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j$, und 0 sonst. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sum_{j=1}^{5} a_{1j}a_{2j}$

b) $\sum_{j=1}^{7} a_{1j}a_{j2}$

Berechnen Sie alle a_{ij} und schreiben Sie damit die Matrix A auf.

(iii) [**3 Pkt**] Sei $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir definieren $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle_A := x^T A\, y$. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ dieselben Eigenschaften wie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ erfüllt.

Lösung

(i) Let $O \in P_2$ denote the zero polynomial (i.e., $\forall\, x \in \mathbb{R} : O(x) = 0$). $\lambda P'(\cdot) + \mu P''(\cdot) = O(\cdot) \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} :\ \lambda P'(x) + \mu P''(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda x^2 + \mu(3x - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \Rightarrow P'$ and P'' are linearly independent [**1 Pkt**]. However, $\mathcal{B}$ is not a basis of P_2 because, e.g., the constant polynomial $Q \in P_2$ defined by $\forall\, x \in \mathbb{R} : Q(x) = 1$ cannot be expressed as a linear combination of P' and P''. This is confirmed by noting that $Q(\cdot) = \alpha P'(\cdot) + \beta P''(\cdot) \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} : Q(x) = \alpha P'(x) + \beta P''(x) \Leftrightarrow 1 = \alpha x^2 + \beta(3x - 1)$. Now, choosing $x = 0$, $x = 1/3$, and $x = 1$, we obtain the equations $-1 = \beta$, $9 = \alpha$, and $1 = \alpha + 2\beta$, respectively, which cannot be satisfied for any $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [**2 Pkt**].

(ii) Note that

$$a_{ij} := 1 - \frac{\delta_{ij}}{2} = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ \frac{1}{2}, & i = j \end{cases}.$$

a) [**2 Pkt**] $\sum_{j=1}^{5} a_{1j}a_{2j} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{14}a_{24} + a_{15}a_{25} = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 4.$

b) [**2 Pkt**] $\sum_{j=1}^{7} a_{1j}a_{j2} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + \cdots + a_{17}a_{72} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5\cdot 1 = 6.$

(iii) For $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$ and $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x + x', y \rangle_A = (x + x')^T Ay = (x^T + x'^T)Ay = x^T Ay + x'^T Ay = \langle x, y \rangle_A + \langle x', y \rangle_A$. Also, $\langle x, y + y' \rangle_A = x^T A(y + y') = x^T Ay + x^T Ay' = \langle x, y \rangle_A + \langle x, y' \rangle_A$ [**1 Pkt**]
2. Note that $A^T = A$. $\langle x, y \rangle_A = x^T Ay = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_2y_2 = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y^T Ax = \langle y, x \rangle_A$ [**1 Pkt**].
3. $\langle x, x \rangle_A = x^T Ax = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [**1 Pkt**]. Properties 1.-3. establish that $\langle x, y \rangle_A$ is a valid scalar product on $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

(i) **[4 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$. Es gelte weiter $\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $A^T = -A$.

Hinweis: Betrachten Sie Skalarprodukte der Form $\langle A(x+y), x+y\rangle$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) **[4 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, für die gelte: $\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = 0$, wobei $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$ das k-fache Matrixprodukt ist. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix von $(E_n - A)$ durch $E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l$ gegeben ist.

(iii) **[2 Pkt]** Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $(A \cdot A^T)^{-1}$.

Lösung

(i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, note the following results:

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y) = \left\langle x, A^T y\right\rangle \tag{1}$$

$$\langle Ay, x\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad \text{(symmetry of } \langle \cdot, \cdot\rangle) \tag{2}$$

Now, we have

$$0 = \langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax + Ay, x+y\rangle = \overbrace{\langle Ax, x\rangle}^{=0} + \overbrace{\langle Ay, y\rangle}^{=0} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle$$
$$= \overbrace{\langle y, Ax\rangle}^{(2)} + \overbrace{\left\langle y, A^T x\right\rangle}^{(1)} \overset{\text{linearity of } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \left\langle y, Ax + A^T x\right\rangle = \left\langle y, (A + A^T)x\right\rangle \overset{\text{since } x,y \text{ are arbitrary}}{\Rightarrow} A + A^T$$
$$= \overbrace{0}^{\in\mathbb{R}^{2\times 2}} \Leftrightarrow A^T = -A.$$

In the above we used the following result: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \langle x, My\rangle = 0 \Rightarrow M = 0$ (null matrix), where $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. This result follows from observing that for $x = e_i$ and $y = e_j$, the standard basis vectors of $\mathbb{R}^n$, we have $0 = \langle e_i, Me_j\rangle = (M)_{ij}$. So, every entry of M must be zero.

(ii) We verify that the matrix $E_n - A$ is invertible with inverse $J := E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l$. That is, we verify the equation $(E_n - A) \cdot J = J \cdot (E_n - A) = E_n$. First,

$$J \cdot (E_n - A) = J \cdot E_n - J \cdot A = J - J \cdot A = E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - (E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l) \cdot A$$
$$= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - E_n \cdot A - \left(\sum_{l=1}^{k-1} A^l\right) \cdot A = E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A - \sum_{l=1}^{k-1} A^{l+1}$$
$$= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - \sum_{l=0}^{k-1} A^{l+1} \overset{l=n-1}{=} E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - \sum_{n=1}^{k} A^n = E_n - \underbrace{A^k}_{=0} = E_n. \tag{3}$$

Also,

$$(E_n - A) \cdot J = (E_n - A) \cdot \left(E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l\right) = E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A \cdot \left(E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l\right)$$
$$= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A \cdot E_n - \sum_{l=1}^{k-1} A \cdot A^l = E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - A - \sum_{l=1}^{k-1} A^{l+1}$$
$$= E_n + \sum_{l=1}^{k-1} A^l - \sum_{l=0}^{k-1} A^{l+1} = E_n,$$

using similar steps as (3).

(iii) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (1 \; -3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ [**1 Pkt**]. Recall the result from Ü 8, Auf. 4 (i), which gives for

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Given this, we note that $(A \cdot A^T)^{-1}$ is not invertible as $ad - bc = 0$ [**1 Pkt**].

Aufgabe 5 [10 Pkt]

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ und die Menge $\mathcal{B} = \{B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}\} \subset V$ aus Matrizen $B_{mn} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit zugehörigen Koeffizienten $(B_{mn})_{ij} := \delta_{im}\delta_{jn}$, $i, j = 1, 2$, für Indizes $m, n = 1, 2$; dabei bezeichne δ_{ij} die Kronecker-Delta-Funktion. Sei weiter die folgende Abbildung gegeben:

$$L_A : V \to V,\ X \mapsto [A, X] := A \cdot X - X \cdot A \qquad \text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in V\,,$$

wobei $+$ und $\cdot$ jeweils die Matrixaddition und -multiplikation bezeichne.

a) **[3 Pkt]** Geben Sie die Definition einer Basis von V an und zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) **[2 Pkt]** Definieren Sie die Menge KernL_A und geben Sie daraus zwei Elemente an.

c) **[2 Pkt]** Berechnen Sie A^{-1}, d.h. die inverse Matrix zu A. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von A^{-1} bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

d) **[3 Pkt]** Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von L_A bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung

a) Correct definition of a basis as a linearly independent spanning set **[1 Pkt]**. $(B_{mn})_{ij} := \delta_{im}\delta_{jn}$ for $i, j, m, n \in \{1, 2\}$. Explicitly,

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, setting $\alpha_1\, B_{11} + \alpha_2\, B_{12} + \alpha_3\, B_{21} + \alpha_4\, B_{22} = 0_V \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\alpha_j = 0_{\mathbb{R}}\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. It follows that $\mathcal{B}$ is a linearly independent set. **[1 Pkt]**

Next,

$$\begin{aligned} \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B}) &:= \{\alpha_1\, B_{11} + \alpha_2\, B_{12} + \alpha_3\, B_{21} + \alpha_4\, B_{22} \,|\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \right\} = V. \end{aligned}$$

Therefore, $\mathcal{B}$ is a basis of V. **[1 Pkt]**

b) $\operatorname{Ker}(L_A) := \{X \in V \,|\, L_A(X) = 0_V\} \subset V$ **[1 Pkt]**. $0_V \in \operatorname{Ker}(L_A)$ and $A^n \in \operatorname{Ker}(L_A)\, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. In particular, $A^0 := E_2 \in \operatorname{Ker}(L_A)$. All linear combinations of the stated examples also lie in $\operatorname{Ker}(L_A)$. **[1 Pkt for any 2 explicit examples]**

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. We have, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\, B_{11} + \frac{2}{3}\, B_{12} + \frac{2}{3}\, B_{21} - \frac{1}{3}\, B_{22}$. It follows that the coordinate representation of $T_{\mathcal{B}}(A^{-1}) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^\top \in \mathbb{R}^4$. **[1 Pkt]**

d) First, we evaluate the images of the basis vectors **[2 Pkt]**, *viz.*,

$$\left.\begin{aligned} L_A(B_{11}) &= A \cdot B_{11} - B_{11} \cdot A = 0\, B_{11} - 2\, B_{12} + 2\, B_{21} + 0\, B_{22} \\ L_A(B_{12}) &= A \cdot B_{12} - B_{12} \cdot A = -2\, B_{11} + 0\, B_{12} + 0\, B_{21} + 2\, B_{22} \\ L_A(B_{21}) &= A \cdot B_{21} - B_{21} \cdot A = 2\, B_{11} + 0\, B_{12} + 0\, B_{21} - 2\, B_{22} \\ L_A(B_{22}) &= A \cdot B_{22} - B_{22} \cdot A = 0\, B_{11} + 2\, B_{12} - 2\, B_{21} + 0\, B_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow M^{L_A}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \textbf{ [1 Pkt]}$$