Dr. Jan Johannsen
Balazs Toth

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
23. April 2024

# 2. Übung zur Vorlesung
# Logik und Diskrete Strukturen

**Hinweise:**

- Die A-Aufgaben bezeichnen Aufgaben, die in den Tutorien in Anwesenheit gerechnet oder besprochen werden, die H-Aufgaben sind Hausaufgaben.
- Es gibt auf jede Hausaufgabe Übungspunkte. Übungspunkte geben Bonuspunkte für die Klausur, aber nur, wenn die Klausur ohnehin bestanden wurde.
- Abgabefrist (für die H-Aufgaben) ist der 3. Mai 2024
- Wie immer sind bei allen Aufgaben Rechenwege, Beweise oder Zwischenschritte gefordert
- $\mathbb{N}$ beschreibt die Menge aller natürlichen Zahlen **inklusive** der 0

**A2-1** ***Relationen*** Entscheiden Sie für die folgenden Relationen jeweils, ob sie reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch sind.

Welche dieser Relationen sind eine Quasiordnung, partielle Ordnung, totale Ordnung, Äquivalenzrelation?

Geben Sie bei allen Äquivalenzrelationen ihre Äquivalenzklassen mit an.

Endliche Relationen werden hierbei durch eine vollständige Aufzählung der in Relation befindlichen Elemente angegeben.

a) $R_1 \subset \{a, b, c\} \times \{a, b, c\} \qquad a\ R_1\ a, b\ R_1\ b, c\ R_1\ c$

b) $R_0 \subset \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \qquad 0\ R_0\ 1, 2\ R_0\ 3$

c) $R_2 \subset \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \qquad 0\ R_2\ 0, 0\ R_2\ 1, 1\ R_2\ 2, 2\ R_2\ 1$

d) $R_3 = \{(s, t) \in \mathbb{Z}^2; |s| \leq |t|\}$

e) $R_4 = \{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2;$ Die Dezimaldarstellung ohne führende 0 von $p$ fängt mit der gleichen Ziffer an, wie die Dezimaldarstellung ohne führende 0 von $q\}$

**A2-2** ***Funktionen***

a) Betrachten Sie die Relation $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; y^2 = x\}$

Für welche Werte von $x$ ist das eine Funktion?

Ersetzen Sie $\mathbb{Z}$ mit einer möglichst großen Teilmenge $A \subset \mathbb{Z}$, sodass $f$ eine Funktion von $A$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Ist $f$ mit Ihrem $A$

- injektiv?

- surjektiv?
- bijektiv?

b) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.

Zeigen oder widerlegen Sie:

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch $f$ injektiv.
- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch $g$ injektiv.

c) Welche dieser Funktionen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

- $\sin(x)$ von $\mathbb{R}$ nach $[-1; 1]$
- $\sin(x)$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
- $f(n) = 2^n$ von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$
- $g(n) = f^{13}(n)$ (mit $f = 2^n$ wie oben)

**A2-3 *Permutationen***

Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f$ die Funktion $x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{falls } x \leq 3 \\ 2x - 7 & \text{falls } x \geq 4 \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass $f$ eine Funktion von $A$ nach $A$ ist

b) Zeigen Sie, dass $f$ eine Permutation ist

c) Geben Sie die Zyklen von $f$ an

**H2-1 *Relationen*** (8 Punkte)

Entscheiden Sie für die folgenden Relationen jeweils, ob sie reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch sind.

Welche dieser Relationen sind eine Quasiordnung, partielle Ordnung, totale Ordnung, Äquivalenzrelation?

Geben Sie bei allen Äquivalenzrelationen ihre Äquivalenzklassen mit an.

- $R_1 \subset \{0, 1, 2\}^2 \qquad 0\ R_1\ 0, 1\ R_1\ 0, 2\ R_1\ 0, 1\ R_1\ 1, 2\ R_1\ 1, 2\ R_1\ 2$
- $R_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{N} \setminus \{2, 4, 5, 8\})^2; x \leq y\}$
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2; (x \mod 3) = (y \mod 6)\}$
- $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x^4 = y^4\}$

**H2-2** ***Funktionen*** (6 Punkte)

a) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.
Zeigen oder widerlegen Sie:

- Ist $g$ injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- Ist $g$ nicht surjektiv, so ist $g \circ f$ nicht surjektiv.

b) Ist $f(x) = |x|$ von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv?

c) Gegeben sei $g : Y \to Z$ mit $Y = \{1, 3, 9, 15, 69, 74\}$ und $Z = \{1, 9, 25, 49, 81, 121\}$
Zeigen oder widerlegen Sie, dass wenn $g$ injektiv ist, $g$ auch bijektiv ist.

**H2-3** ***Permutationen*** (6 Punkte)

Sei $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und seien $f, g : A \to A$.

- $f$ die Funktion $\{(0, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (4, 4)\}$
- $g$ die Funktion $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 0)\}$

a) Zeigen oder widerlegen sie je ob $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$ eine Permutation ist.

b) Geben Sie alle Zyklen der Funktionen $f, g, f \circ g$ und $g \circ f$, sofern die jeweilige Funktion eine Permutation ist.