Paula Reichert, Siddhant Das Wintersemester 2023/24

Lineare Algebra (Informatik)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Relationen, Äquivalenzrelationen)

(i) Es sei $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass

$$x \sim y :\iff x^2 = y^2$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert und geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

(ii) Es sei $M \coloneqq \{a, b\}$ eine zweielementige Menge. Bestimmen Sie alle möglichen Relationen $\mathcal{R}$ auf M und untersuchen Sie diese jeweils auf die folgenden Eigenschaften:

(a) Reflexivität

(b) Symmetrie

(c) Transitivität

Hinweis: Eine Relation $\mathcal{R} = (M, R)$ ist definiert über eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Denken Sie bei der Untersuchung der Relationen an die Aussagenlogik.

Lösung

(i) $\{(x, y) : x, y \in X \wedge x \sim y\} = \{(0, 0), (-2, -2), (-1, -1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (2, 2), (-2, 2), (2, -2)\}$. $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und damit eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind gegeben durch $\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}$.

(ii) Es ist $M \times M = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Jede Teilmenge davon ist eine Relation:

Relation $\mathcal{R}$	reflexiv	symmetrisch	transitiv
$\emptyset$	–	✓	✓
$\{(a,a)\}$	–	✓	✓
$\{(a,b)\}$	–	–	✓
$\{(b,a)\}$	–	–	✓
$\{(b,b)\}$	–	✓	✓
$\{(a,a),(a,b)\}$	–	–	✓
$\{(a,a),(b,a)\}$	–	–	✓
$\{(a,a),(b,b)\}$	✓	✓	✓
$\{(a,b),(b,a)\}$	–	✓	–
$\{(a,b),(b,b)\}$	–	–	✓
$\{(b,a),(b,b)\}$	–	–	✓
$\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$	–	✓	–
$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$	✓	–	✓
$\{(a,a),(b,a),(b,b)\}$	✓	–	✓
$\{(a,b),(b,a),(b,b)\}$	–	✓	–
$\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$	✓	✓	✓

Die Äquivalenzrelationen auf M sind gerade die Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, d.h. $\{(a, a), (b, b)\}$ und $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Aufgabe 2 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität sowie Bijektivität. Beweisen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

(i) $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$, $n \mapsto (-1)^n$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 2x$

(iii) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n^2 - 1$

(iv) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$

Lösung

(i) f ist *nicht injektiv* nach obiger Überlegung, denn es gilt $f(2) = 1 = f(4)$, obwohl $2 \neq 4$.

f ist jedoch *surjektiv*, denn es gilt $f(1) = -1$ und $f(2) = +1$ womit die Definition von surjektiv erfüllt ist.

f ist *nicht bijektiv*, da nicht injektiv.

(ii) g ist *injektiv*, denn sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$. Angenommen es gilt: $g(x) = 1 - 2x = 1 - 2y = g(y)$. Addiert man (-1) und dividiert dann durch (-2), folgt sofort, dass auch $x = y$ gilt im Widerspruch zur Vorraussetzung. Folglich ist die Annahme $g(x) = g(y)$ falsch, d.h. es gilt $g(x) \neq g(y)$.

g ist *surjektiv*, denn sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $x = (1 - y)/2$. Dann ist $x \in \mathbb{R}$ und es gilt $g(x) = 1 - 2((1 - y)/2) = y$.

Somit ist g auch *bijektiv.*

(iii) h ist *injektiv*, denn sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Dann gilt wegen $0 < m, n$ auch $m^2 \neq n^2$ und damit $h(m) \neq h(n)$.

h ist *nicht surjektiv*, da hier nur auf die „Quadratzahlen minus 1“, also auf $\{0, 3, 8, 15, 24, \ldots\}$ abgebildet wird. Insbesondere liegt also 1 nicht im Bild.

h ist *nicht bijektiv*, da nicht surjektiv.

(iv) l ist *nicht injektiv* nach obiger Überlegung, denn es gilt $l(0) = 0 = l(\pi)$, obwohl $0 \neq \pi$. h ist *nicht surjektiv*, $\sin x = 3 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$. l ist *nicht bijektiv.*

Aufgabe 3 (Urbild, Bild)

(i) Für $a > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - a^2$ gegeben. Bestimmen Sie

(a) das Bild des Intervals $[-1, 1] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ unter f,

(b) das Urbild des Intervals $(0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$ unter f.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(ii) Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Weiter sei I eine Indexmenge und für alle $i \in I$ seien U_i Teilmengen von B. Zeigen Sie die Gleichung:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

(iii) Zeigen Sie weiter, dass der Ausdruck in (ii) im Allgemeinen nicht richtig ist, wenn man f^{-1} durch f ersetzt und U_i als Teilmengen von A wählt.

Lösung

(i) (a) $f([-1, 1]) = [-a^2, 1 - a^2]$,

(b) $f^{-1}((0,1]) = [-\sqrt{1+a^2}, -a) \cup (a, \sqrt{1+a^2}\,]$.

(ii) Nach den Definitionen von Urbild und Schnitt gilt folgende Kette von Äquivalenzen, für jedes $x \in A$:

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} U_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I}\;\; f(x) \in U_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I}\;\; x \in f^{-1}(U_i) \Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i) \ni x.$$

Da $x \in A$ beliebig war, folgt $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(U_i)$.

(iii) Zeigen wir nun, dass für eine Funktion $f : A \to B$ und Mengen $U, V \subset A$ im Allgemeinen $f(U \cap V) \neq f(U) \cap f(V)$ ist. Es reicht dafür, ein geeignetes Beispiel anzugeben: Sei etwa $f : \{1,2\} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(1) = f(2) = 1$ und seien $U = \{1\}$, $V = \{2\}$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$, also auch $f(U \cap V) = \emptyset$. Andererseits ist $f(U) = f(V) = \{1\}$ und damit $f(U) \cap f(V) = \{1\} \neq f(U \cap V)$.

Aufgabe 4 (Verkettung von Funktionen)

(i) Seien $f : W \to X$, $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie, dass für die Abbildung von W nach Z gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

die Verkettung also assoziativ ist.

(ii) Betrachten Sie nun die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 5x$. Bestimmen Sie $f \circ g$ sowie $g \circ f$. Folgern Sie daraus, dass die Verkettung i. A. nicht kommutativ ist.

Lösung

(i) $\forall\, x \in W : ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5x) = e^{x^2-5x}$. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = (e^x)^2 - 5e^x = e^{2x} - 5e^x$. $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe: Paare, 3-Tupel)

(i) Seien A, B Mengen und $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

definiert in der Tat ein Paar, d.h. $\forall a, a' \in A$, $\forall b, b' \in B : (a,b) = (a',b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$.

(ii) Seien A, B, C Mengen mit $|A \cap B \cap C| \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Menge (von Mengen)

$$\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

kein 3-Tupel definiert.

Lösung

Zu (i): Seien $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$. Es ist nach obiger Definition $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow$

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a'\}, \{a',b'\}\}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $a = b$ oder es ist $a \neq b$.

1) $a = b$: Dann folgt aus

$$\{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{a\}, \{a,a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\} \stackrel{!}{=} \{\{a'\}, \{a',b'\}\},$$

dass $a = a' = b'$, also insgesamt $a = b = a' = b'$ und damit insbesondere $a = a' \wedge b = b'$.

2) $a \neq b$: Dann lässt sich die Menge von Mengen $\{\{a\},\{a,b\}\}$ nicht vereinfachen (denn $\{a\} \neq \{a,b\}$) und es folgt aus

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\},$$

dass $a = a' \wedge b = b'$ (Denn wäre $a \neq a'$, dann wäre $\{a\} \neq \{a'\}$, und $\{a,b\} \neq \{a'\}$, weil $a \neq b$. Daraus folgt: $a = a'$. Nun muss noch gelten: $\{a,b\} \stackrel{!}{=} \{a,b'\}$. Daraus folgt: $b = b'$.

Zu (ii): Nehmen wir an, es gäbe eine solche Mengendefinition von 3-Tupeln. Betrachte z.B. die Mengen $A = B = C = \{1,2,3\}$ und die 3-Tupel $(1,2,2)$ sowie $(1,2,1)$. Letzteres sind zwei verschiedene 3-Tupel, doch die Mengendefinition kann sie nicht unterscheiden, denn:

$$(1,2,2) = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,2\}\} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2\}\} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,1\}\} = (1,2,1)$$

Die Mengendefiniton versagt also bei 3-Tupeln.