Trabajo Práctico 4

Santiago Bussanich

Mayo 2025

Divisibilidad

Ejercicio 8

Enunciado: El producto de dos números naturales m y n aumenta en 132 si cada uno de ellos aumenta en 6. Determine todos los posibles valores de m y n, sabiendo además que n es múltiplo de m.

Resolución: Primero notemos que por hipótesis mn aumenta en 132 si m aumenta en 6 y n aumenta en 6. Esto quiere decir que,

$$mn + 132 = (m + 6)(n + 6)$$

Realizando un poco de operaciones algebráicas, podemos llegar a que

$$mn + 132 = mn + 6m + 6n + 36 \Rightarrow 132 = 6(m + n + 6) \Rightarrow m + n + 6 = 22$$

Luego, al ser n múltiplo de m, tenemos por definición que $n = mk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y entonces

$$22 = m + n + 6 = m + km + 6 = (k + 1)m + 6 \Rightarrow (k + 1)m = 16$$

Considerando que m y n son naturales (distintos de 0) y sin olvidar que $n = km$, podemos obtener todos los valores de k y m que cumplan la igualdad de arriba ya que todo número natural tiene una cantidad finita de divisores. Luego,

$$k = 1,\ 2m = 16 \Rightarrow m = 8, n = 8 \tag{1}$$
$$k = 3,\ 4m = 16 \Rightarrow m = 4, n = 12 \tag{2}$$
$$k = 7,\ 8m = 16 \Rightarrow m = 2, n = 14 \tag{3}$$
$$k = 15,\ 16m = 16 \Rightarrow m = 1, n = 15 \tag{4}$$

Los casos de k que no fueron incluidos son aquellos que $m = \frac{16}{k+1} \notin \mathbb{N}$, por lo que los posibles pares de valores m y n son,

$$S = \{(1, 15), (2, 14), (4, 12), (8, 8)\}$$

Ejercicio 9

Enunciado: Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ y r, s los respectivos restos de dividir b y c por a, probar:

a) el resto de dividir $b \pm c$ por a es igual al resto de dividir $r \pm s$ por a.

b) el resto de dividir bc por a es igual al resto de dividir rs por a.

c) el resto de dividir b^n por a es igual al resto de dividir r^n por a, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución: Por las hipótesis del problema tenemos que $b = ac_1 + r$ y $c = ac_2 + s$.
a) Consideremos $b + c$, luego

$$b + c = ac_1 + r + ac_2 + s = a(c_1 + c_2) + (r + s)$$

Además, al ser r y s los restos de la división por a, ambos cumplen que $0 \leq r < a$ y $0 \leq s < a$. Por lo tanto $r + s < 2a$.
Si sucede que $r + s < a$, luego $r + s = 0.a + r + s$ y entonces $r + s$ ya es el resto de dividir $r + s$ por a, por lo que podemos escribir

$$b + c = a(c_1 + c_2) + (r + s) = a(c_1 + c_2) + r_a(r + s)$$

Por otro lado, si $a < r+s < 2a$ entonces tenemos que $r+s = a+r_a(r+s)$, con $r_a(r+s) < a$ (basta con dividir la inecuación anterior) y por lo tanto

$$b + c = a(c_1 + c_2) + a + r_a(r + s) = a(c_1 + c_2 + 1) + r_a(r + s)$$

Notar que en ambos casos pudimos escribir $b + c = ak + r_a(r + s)$, como vimos que $0 \leq r_a(r + s) < a$, concluimos que $r_a(b + c) = r_a(r + s)$ debido a la unicidad de los valores cociente y resto.
Para el caso de la resta, tenemos

$$b - c = a(c_1 - c_2) + (r - s)$$

Luego como $0 \leq r < a$ y $0 \leq s < a$ entonces en particular

$$0 - a < r - s < a \Rightarrow -a < r - s < a \Rightarrow |r - s| < |a|$$

y por lo tanto tomando $r_a(b-c) = |r-s|$ concluimos nuevamente que $r_a(b-c) = r_a(r-s)$.
b) Consideremos el producto bc, luego

$$bc = (ac_1 + r)(ac_2 + s) = ac_1c_2 + ac_1s + ac_2r + rs = a(c_1c_2 + c_1s + c_2r) + rs$$

Y si ocurre que $0 \leq r < a$ y $0 \leq s < a$ entonces

$$0 \leq rs < a.a$$

si se tiene que $rs < a$, entonces $r_a(rs) = rs$ y no hay nada que hacer. Si por otro lado $rs \geq a$ entonces $\exists i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i < a$ tal que $ai \leq rs < a(i + 1)$. Luego podemos expresar $rs = ai + k$ donde k es el resto de dividir a rs por a (si fuese $k > a$ entonces

$rs + k > a(i+1)$).
Finalmente reemplazando en la igualdad anterior obtenemos:

$$bc = a(c_1c_2 + c_1s + c_2r) + ai + k = am + k$$

con $m = c_1c_2 + c_1s + c_2r + i$.
c) Finalmente consideremos b^n, luego podemos escribir

$$b^n = \underbrace{b \times \cdots \times b}_{n \text{ veces}}$$

Notemos que en el item anterior hemos probado que el resto de la división por a del producto de dos números es el resto de la división por a del producto de sus restos. Esto puede generalizarse para n elementos por inducción.[1]
Por lo tanto podemos concluir que $r_a(b^n) = r_a(b \times \cdots \times b) \overset{lema}{=} r_a(r \times \cdots \times r) = r_a(r^n)$.

Ejercicio 10

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. En cada caso, determine si lo que se afirma es verdadero o falso (justificando adecuadamente su respuesta):

a) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$

b) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

c) $a \mid b - c \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b$

d) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$

e) $a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

f) $a \mid b \Leftrightarrow ac \mid bc$

g) $a \mid b \wedge c \mid b \Rightarrow ac \mid b$

h) $a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^m$

Resolución:
a) Falso. Consideremos $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$. Luego tenemos que $2|3+5 = 8$ sin embargo $2 \nmid 3$ y $2 \nmid 5$.
b) Verdadero. Por hipótesis tenemos que $b = ak_1$ y $c = ak_2$. Por lo tanto $b \pm c = ak_1 \pm ak_2 = a\underbrace{(k_1 \pm k_2)}_{\in\mathbb{Z}}$.
c) Verdadero. Como $a \mid b - c$ tenemos que $b - c = ak_1$, además tenemos que $a \mid c$ y entonces $c = ak_2$. Luego $b - c = b - ak_2 = ak_1 \Rightarrow b = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2) \Rightarrow a \mid b$.
d) Falso. Tomemos $a = 6$, $b = 2$ y $c = 3$, luego se tiene que $6 \mid 2 \times 3 = 6$ pero $6 \nmid 2$ y $6 \nmid 3$.
e) Verdadero. Por hipótesis tenemos que $b = ak_1$ y $d = ck_2$, entonces $bd = ak_1ck_2 = ac\underbrace{(k_1k_2)}_{\in\mathbb{Z}}$.

[1] Podría haberse hecho lo mismo en el item b) considerando bc como $b + \cdots + b$ c veces

f) Verdadero. $a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ak \Leftrightarrow bc = akc \Leftrightarrow bc = (ac)k \Leftrightarrow ac \mid bc$.
g) Falso. Sean $a = 2$, $b = 6$ y $c = 6$, luego tenemos que $2 \mid 6$ y también $6 \mid 6$, sin embargo $2 \times 6 = 12 \nmid 6$.
h) Verdadero. Tenemos que $b = ak$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b^m = (ak)^m = a^m \underbrace{k^m}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a^m \mid b^m$.

Ejercicio 11

Enunciado: En cada caso, determine los números naturales n que satisfacen la relación planteada:

a) $n|n+1$

b) $n-2|n+2$

Resolución:
a) Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n|n+1$. Por definición tenemos que

$$n|n+1 \Leftrightarrow n+1 = nc \Leftrightarrow n(c-1) = 1$$

Esta operación solo la satisface el valor $n = 1$. Supongamos que hay otro valor $n' \neq 1$ que lo satisface, luego $c - 1 = \frac{1}{n'}$ pero este valor no es entero ya que $n' \neq 1$.
Por lo tanto $n = 1$ es el único natural que satisface dicha igualdad.
b) Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-2|n+2$. Notemos que si $n-2$ divide a $n+2$ significa que el resto de la división entre ambos números no es mayor a 4. Ya que de otra forma no podriamos sumar 1 al cociente y entonces no llegariamos a resto 0.

Por lo tanto los números naturales que satisfacen dicha relación son $n \in \{1, 3, 4, 6\}$, ya que luego $n - 2 > 5$ y entonces el resto de dividir $n+2$ por $n-2$ es mayor a 4, y entonces no podemos alcanzar nuevamente el resto 0 sumando únicamente 4 unidades.
O escrito de otra forma, $n + 2 = (n-2) \times 1 + 4$ y entonces $4 < 5 < n + 2$. Por lo que 4 es el resto de la división y no se puede dividir nuevamente.

Ejercicio 12

Enunciado: Demuestre las siguientes propiedades:

a) La suma de dos números impares consecutivos es múltiplo de 4.

b) La suma de tres números impares consecutivos es divisible por 3 pero no por 6.

c) El producto de dos números pares consecutivos es divisible por 8.

Resolución:
a) Consideremos dos números impares consecutivos cualesquiera como $2n-1$ y $2n+1$ con $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos que,

$$(2n-1) + (2n+1) = 4n$$

al ser n arbitrario, queda probado el enunciado.
b) Nuevamente nombremos a tres números impares consecutivos como $2n-1$, $2n+1$ y $2n+3$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces su suma es

$$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3) = 4n+2n+3 = 6n+3 = 3(2n+1)$$

por lo tanto

$$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3) = 6n+3$$

Donde claramente es un múltiplo de 3 (nombrando $k = 2n+1$), sin embargo no es un múltiplo de 6, ya que vemos que la suma es $6n+3$ y por el teorema de unicidad del cociente y resto, esto nos dice que

$$r_6(2n-1+2n+1+2n+3) = r_6(6n+3) = 3 \neq 0$$

por lo que la suma no es divisible por 6.
c) Sean dos números pares consecutivos, nombremoslos $2n$ y $2(n+1)$, luego veamos que

$$2n \times 2(n+1) = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$$

Al tener la expresión de arriba nos será útil probar el siguiente
Lema: El producto de un número par con un número impar es siempre par.
D/ Sea $2k$ y $2k'-1$ un número par e impar respectivamente, luego su producto es par, en efecto

$$2k \times (2k'-1) = 4kk' - 2k = 2(2kk'-k)$$

lo cual prueba el enunciado. //
Siguiendo con el problema, tenemos que siempre $n(n+1)$ es el producto de un factor par y un factor impar, y por el lema que hemos probado $n(n+1) = 2k$ y entonces

$$2n \times 2(n+1) = 4n(n+1) = 4{,}2k = 8k$$

por lo que es divisible por 8.

Ejercicio 13

Enunciado: Las edades de tres personas son números consecutivos. Si se dividen dichos números por 9, dos de ellos tienen cociente 6 y el restante 7, ¿qué edades tienen?

Resolución: Sea $n \in \mathbb{N}$ la edad más chica de las tres consecutivas. Lo que nos dice la hipótesis es que

$$n = 9 \times 6 + r_n \tag{5}$$
$$n+1 = 9 \times 6 + r_{n+1} \tag{6}$$
$$n+2 = 9 \times 7 + r_{n+2} \tag{7}$$

Veamos que efectivamente el de la edad más alta es aquel que el cociente es 7 y que además podemos calcular cuanto vale cada uno de los restos.
Primero es claro que aquel que su cociente es 7 debe ser el último ya que para números más grandes el cociente siempre aumenta, si las edades n o $n+1$ tuviesen el cociente 7, entonces todas las edades siguientes tienen cociente 7 en la división por 9. Luego si incrementamos en 1 la edad, entonces también se incrementa en 1 el resto y así hasta que

el resto sea 9 donde se agrega una unidad al cociente.
Con lo dicho anteriormente podemos decir que $r_n = 7$, $r_{n+1} = 8$ y $r_{n+2} = 0$ ya que en $n + 2$ aumenta el cociente. Luego el sistema nos dice que

$$n = 9 \times 6 + 7 = 61$$

y por lo tanto las edades de las personas son 61, 62 y 63 respectivamente.

Ejercicio 14

Enunciado: Hallar n sabiendo que el cociente de dividir n por 29 es 5 y que el resto de dividir $n + 10$ por 29 es 3.

Resolución: Por hipótesis, dividimos a n por 29 y obtenemos $n = 29 \times 5 + r$. Luego dividimos a $n + 10$ por 29 y así obtenemos $n + 10 = 29 \times c + 3$.
Notemos que al incrementar en una unidad n, incrementamos en una unidad su resto de la división por 29, y así hasta llegar a 29 donde aumenta en una unidad el cociente. Como el resto de $n + 10$ es 3 significa que el cociente ha aumentado en una unidad (y no más ya que no hemos sumado más de 29 unidades!) y por lo tanto tenemos que $n + 10 = 29 \times 6 + 3 = 177$ por lo que $n = 167$.
En efecto, $167 = 29 \times 5 + 22$ y $167 + 10 = 29 \times 6 + 3$.

Ejercicio 15

Enunciado: En cada caso, determine el mayor número natural n que satisface:

a) El cociente de dividir n por 15 es el doble de su resto.

b) El resto de dividir n por 18 es el doble de su cociente.

Resolución:
a) Buscamos el máximo número n tal que $n = 15 \times 2r + r$ y entonces $n = 31r$. Eligiendo $n = 434 = 31 \times 14$ nos aseguramos que es el número máximo. En efecto, si fuese un número mayor tal que $n = 31 \times r$ tenemos que $r \geq 15$, sin embargo r es el resto de la división entera por 15.
Sin perder generalidad supongamos $r = 15$, luego $n = 15 \times 2 \times 15 + 15 = 15 \times 3 \times 15$ donde claramente el cociente no es el doble del resto. Por lo tanto para valores de r mayores o iguales a 15, el cociente aumenta más que el doble que el resto de la división entera ya que este siempre cumple que $0 \leq r_{15} < 15$ y por lo tanto $n = 31 \times 14$ es el máximo número que satisface lo pedido.
b) Buscamos el máximo número tal que $n = 18c + 2c$ con $0 \leq 2c < 18$. De la igualdad obtenemos $n = 20c$. Si queremos que se mantenga la desigualdad del resto, luego tenemos que $0 \leq c < 9$, tomando el máximo valor de c posible (esto es $c = 8$), obtenemos que $n = 20 \times 8 = 160$. Vemos que aquí $n = 160 = 18 \times 8 + 16$ donde $c = 8$ y $r = 16$.
Este es el número máximo ya que nuevamente si tuviesemos $c \geq 9$ entonces $2c \geq 18$ y por lo tanto no es el resto de la división por 18.

Ejercicio 16

Enunciado: Si $n \in \mathbb{N}$ analice la validez de las siguientes afirmaciones:

a) La suma de n números enteros consecutivos es un múltiplo de n.

b) El producto de n números enteros consecutivos es un múltiplo de n.

c) El producto de los divisores positivos de n es una potencia de n.

Resolución:
a) Falso. Sean los números consecutivos 1 y 2. Luego $1 + 2 = 3$ el cuál claramente **no** es un múltiplo de 2 (la cantidad de números consecutivos).
b) Verdadero. Consideremos n números enteros consecutivos $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ y luego dividamoslo por n. Luego tenemos que $k_1 = nc + r$, sea cual sea este resto r, sabemos que cumple que $0 \leq r < n$.
Nuevamente como los restos incrementan en 1 a medida que los números incrementan en 1, al tener n restos posibles, existe un índice j tal que $k_j = nc_j$ (si queremos ser más técnicos el índice es exactamente $n - r$ siendo r el resto de dividir por n a k_1). Esto significa que existe un número entre ellos tal que es múltiplo de n, y reordenando tenemos que

$$k_1 \times \cdots \times k_{j-1} \times k_j \times k_{j+1} \times \cdots \times k_n = k_j \times (k_1 \times \cdots \times k_{j-1} \times k_{j+1} \times \cdots \times k_n)$$

y por lo tanto

$$k_1 \times \cdots \times k_{j-1} \times k_j \times k_{j+1} \times \cdots \times k_n = n \times p$$

con $p = c_j \times k_1 \times \cdots \times k_{j-1} \times k_{j+1} \times \cdots \times k_n$.
c) Falso. Sea $n = 9$, luego sus divisores son 1, 3 y 9 respectivamente. Vemos que su producto es $1 \times 3 \times 9 = 27$, lo cual contradice el enunciado ya que 27 no es una potencia (entera) de 9.

Ejercicio 17

Enunciado: Si el resto de dividir p por 7 es 5, siendo $p \in \mathbb{Z}$, calcule el resto de la división por 7 de los siguientes números:

a) $p + 86$

b) $99 - p$

c) $-p$

d) $14p$

Resolución: En los items de este ejercicio podemos aplicar los resultados vistos en el **ejercicio 9**. Sabemos que $r = 5$ es el resto de la división de p por 7.
a) Dividamos a 86 por 7, así obteniendo $86 = 7 \times 12 + 2$, luego $r_7(p + 86) = r_7(r + 2) = r_7(7) = 0$.
b) Nuevamente dividamos a 99 por 7 obteniendo así $99 = 7 \times 14 + 1$, luego $r_7(99 - p) = r_7(1 - r) = r_7(-4) = 4$.

c) Como hemos visto el resto de dividir bc por a es el resto de dividir por a a rs (que son sus restos). Luego si consideramos $b = -1$ y $c = p$ tenemos que $r_7(-p) = r_7(-1 \times 5) = r_7(-5) = 5$. Esto es claro si vemos que $p = 7c + 5 \Rightarrow -p = 7\underbrace{(-c)}_{\in\mathbb{Z}} + (-5)$.

d) Con un argumento similar al del item c) concluimos que $r_7(14p) = r_7(14 \times r) = r_7(14 \times 5) = r_7(70) = 0$.

Máximo común divisor y múnimo común múltiplo

Ejercicio 5

Enunciado: A través de un proceso inductivo, podemos definir el **máximo común divisor de n números enteros,** $a_1, \ldots, a_n$ como

$$d = mcd(a_1, a_2 \ldots, a_n) = mcd(mcd(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

donde d es el único número natural tal que $d|a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y si $t|a_i$ para todo i entonces $t|d$. Calcular:

a) $mcd(24, 18, 54, 30)$

b) $mcd(15, 45, 20, 100)$

Resolución:

a) Calculemos $mcd(24, 18, 54, 30)$. Por definición

$$mcd(24, 18, 54, 30) = mcd(mcd(24, 18, 54), 30) = mcd(mcd(mcd(24, 18), 54), 30)$$

Notamos que los divisores de 24 son $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, mientras que los divisores de 18 son $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Luego el $mcd(24, 18)$ es 6. Entonces tenemos que

$$mcd(24, 18, 54, 30) = mcd(mcd(6, 54), 30)$$

Como $54 = 6 \times 9$ entonces sigue que $mcd(6, 54) = 6$. Luego,

$$mcd(24, 18, 54, 30) = mcd(6, 30)$$

Finalmente como 30 es múltiplo de 6, tenemos nuevamente que $mcd(6, 30)$ es 6 y obtenemos:

$$mcd(24, 18, 54, 30) = 6$$

b) Por definición se tiene que

$$mcd(15, 45, 20, 100) = mcd(mcd(15, 45, 20), 100) = mcd(mcd(mcd(15, 45), 20), 100)$$

Como 45 es múltiplo de 15, entonces $mcd(15, 45) = 15$ con lo cual

$$mcd(15, 45, 20, 100) = mcd(mcd(15, 20), 100)$$

Ahora veamos que los divisores de 15 son $\{1, 3, 5, 15\}$ mientras que los divisores de 20 son $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Por lo que $mcd(15, 20) = 5$, y entonces

$$mcd(15, 45, 20, 100) = mcd(5, 100)$$

Finalmente como $100 = 5 \times 20$ concluimos que

$$mcd(15, 45, 20, 100) = 5$$

Ejercicio 6

Enunciado: Pruebe que si $mcd(a, b) = c$ con $a = k_1c$, $b = k_2c$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ entonces:

a) $mcd(k_1, k_2) = 1$.

b) $mcd(ka, kb) = |k|c$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Resolución:
a) Supongamos que $m = mcd(k_1, k_2) > 1$, entonces $m \mid k_1$ y $m \mid k_2$ (por ser su mcd) y por lo tanto $k_1 = c_1m$ y $k_2 = c_2m$. Luego sigue que $a = c_1mc$ y $b = c_2mc$ y entonces tenemos que $mc|a \wedge mc|b$, y como $m = mcd(k_1, k_2) > 1$ entonces $mc > c$ y se tiene que $c|mc$.

Absurdo!! Ya que c era el mcd entre a y b. Esta contradicción surge de suponer $mcd(k_1, k_2) > 1$ por lo tanto $mcd(k_1, k_2) = 1$.
b) Sea D el conjunto de divisores comunes de ka, kb. Luego es claro que $|k|c \in D$ y entonces $max(D) \geq |k|c$.

Además sea $d \in D$, sabemos que $c = ax + by$ que es la combinación lineal más chica de a y b ya que c es el mcd. Luego si $d|ka \Rightarrow d|kax$ y si $d \mid kb \Rightarrow d|kby$.
Como sabemos que $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$ entonces obtenemos que $d|kax + kay = kc$. Con lo que concluimos que $d \leq kc$. Y por lo tanto $|max(D)| <= |kc| = |k|c$.

Finalmente como $max(D) \geq |k|c$ y $max(D) \leq |k|c$ resulta $max(D) = |k|c$.

Ejercicio 13

Enunciado: Sean a par, digamos $a = 2k$ y b impar. Pruebe que $mcd(a, b) = mcd(k, b)$.
Resolución: Veamos que

$$mcd(2k, b) = c \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} : x2k + yb = c \overset{z=2x}{\Leftrightarrow} zk + yb = c \Leftrightarrow mcd(k, b) = c$$

ya que si x, y son los valores que hacen mínima la combinación lineal, entonces también hace mínima la combinación lineal $zk + yb$.

Ejercicio 14

Enunciado: Consideremos la sucesión de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Demuestre que dos términos consecutivos cualesquiera de la misma son coprimos.

Resolución: Probaremos el resultado por inducción en n. Esto es, probaremos que $mcd(f_n, f_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde f_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Caso base n=1 Como $f_1 = 0$ y $f_2 = 1$ es claro que $mcd(0, 1) = 1$.

Caso inductivo. Supongamos que $mcd(f_n, f_{n+1}) = 1$ **(HI)**, tenemos que probar que $mcd(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$. La prueba se obtiene de la siguiente manera:

$$mcd(f_{n+1}, f_{n+2}) \overset{\text{def fibonacci}}{=} mcd(f_{n+1}, f_{n+1} + f_n) \overset{\textbf{(1)}}{=} mcd(f_{n+1}, f_n) \overset{\textbf{(HI)}}{=} 1$$

(1) considerando $a = f_{n+1}$ y $b = f_{n+1} + f_n$ usamos que $mcd(a, b) = mcd(a, b - a)$.

Por lo que hemos probado el enunciado.