Trabajo Práctico 2

Santiago Bussanich

Abril 2025

Ejercicio 10. Dé las razones para cada paso de las siguientes simplificaciones de proposiciones compuestas.

a) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \iff p \vee q \vee r$.
Comencemos del lado izquierdo y apliquemos reglas sucesivamente hasta llegar al lado derecho.
$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \iff p \vee ((q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (q \vee r))$, por la propiedad distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$.
Luego $q \vee \neg q \iff T$ ya que es una tautología, por lo tanto tenemos que:
$p \vee ((q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (q \vee r)) \iff p \vee ((q \vee \neg p) \wedge (q \vee r)) \iff (p \vee (q \vee \neg p)) \wedge (p \vee (q \vee r))$.
Donde la última equivalencia lógica corresponde nuevamente a la propiedad distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$. Ahora, $\vee$ es conmutativa y asociativa, entonces $p \vee (q \vee \neg p) \overset{\text{conmutativa}}{\iff} p \vee (\neg p \vee q) \overset{\text{asociativa}}{\iff} (p \vee \neg p) \vee q \overset{\text{tautología}}{\iff} T$.
Volviendo a nuestra equivalencia lógica original, tenemos que,
$p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \iff \underbrace{(p \vee (q \vee \neg p))}_{\iff T} \wedge (p \vee (q \vee r)) \iff T \wedge (p \vee (q \vee r)) \iff p \vee q \vee r$
Lo cual prueba el enunciado.

Ejercicio 14. Sea $p(x)$ la proposición abierta "$x^2 = 3x$", donde el universo comprende todos los enteros. Determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa.

a) $\exists x\, p(x)$
Debemos hallar un número $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0^2 = 3x_0$. Vemos que dicha

ecuación tiene como posibles soluciones $x_0 = 3$ y $x_0 = 0$. En efecto, $0^2 = 3 \times 0$ y $3^2 = 3 \times 3 = 9$. Por lo que existe un valor que satisface dicha igualdad y la proposición resulta **verdadera**.

b) $\forall x \;\, p(x)$
Para probar la falsedad de dicha proposición basta con encontrar un $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \neq 3x$. Hay muchos valores para los cuales dicha ecuación es válida, por ejemplo, el valor $x_0 = 1$, ya que $1^2 \neq 3 \times 1 = 3$. Por lo que la proposición es **falsa**.

c) $\exists x \, \neg p(x)$
Esta proposición es la negación de la proposición del item **b**. En efecto, si no pasa que $\forall x \in \mathbb{Z} \, x^2 = 3x$ entonces existe un valor $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0^2 \neq 3x_0$. Esto es equivalente a decir que $\exists x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\neg p(x)$. Podemos verificar que el contraejemplo $x_0 = 1$ del item anterior es válido para poder mostrar la veracidad de ésta proposición. Por lo tanto la proposición es **verdadera**.

d) $\forall x \, \neg p(x)$
Nuevamente tenemos que la proposición de este item es la negación de la proposición vista anteriormente en el item **a**. En efecto, si la proposición **a** fuese falsa tenemos que no existe ningún valor que verifique $p(x)$ y por lo tanto es siempre válido la proposición $\neg p(x)$. Sin embargo, como la proposición en **a** es verdadera, tenemos que sí existen valores los cuales cumplen $p(x)$ y por lo tanto la proposición propuesta en este item es **falsa**.

Ejercicio 19. Para cada una de las siguientes parejas de proposiciones, determine si la negación propuesta es correcta. Si es correcta, determine cuál es verdadera: la proposición original o la negación propuesta. Si la negación propuesta es incorrecta, escriba una versión corregida de la negación y determine a continuación si la proposición original o la versión corregida de la negación es verdadera.

a) Proposición: Para todos los números reales $x,\ y$, si $x^2 > y^2$ entonces $x > y$
Negación propuesta: Existen números reales x, y tales que $x^2 > y^2$ pero $x \leq y$
En este caso tenemos que la negación propuesta es la correcta, ya que

al negar un para todo sobre una propiedad es lógicamente equivalente a ver la existencia de la negación de dicha propiedad. Es decir:

$$\neg\forall x\, p(x) \iff \exists x \neg p(x) \tag{1}$$

o, en el contexto del problema

$$\neg(\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 > y^2 \Rightarrow x > y) \iff \exists x, y \in \mathbb{R}\, \neg(x^2 > y^2 \Rightarrow x > y) \tag{2}$$

Por la definición de semántica del operador $\Rightarrow$, tenemos que el miembro de la derecha se traduce en $x^2 > y^2 = T$ pero $x > y = F \to x \leq y$. Por lo que la negación propuesta es correcta.
Respecto al valor de verdad de dichas proposiciones, para $x = -3$ y $y = -2$ tenemos que $x^2 = (-3)^2 = 9 > 4 = (-2)^2 = y^2$ pero $-3 \leq -2$. Por lo tanto **la proposición original es falsa y su negación es verdadera**.

b) Proposición: Existen números reales x, y tales que x e y son racionales pero $x + y$ es irracional.
Negación propuesta: Para todos los números reales x, y, si $x + y$ es racional, entonces x e y son racionales.
La negación propuesta **no es correcta**. Siguiendo un razonamiento análogo a lo que realizamos en el item anterior, tenemos que:

$$\neg(\exists x, y \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}) \iff \forall x, y \in \mathbb{R}\, \neg(x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+y \notin \mathbb{Q}) \tag{3}$$

El término de la derecha de la ecuación se puede reescribir como

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q} \tag{4}$$

Lo cual coloquialmente sería "Para todo par de números reales x e y, si x e y son racionales, entonces $x + y$ **es** racional." Respecto al valor de verdad, analizaremos dicho valor para la nueva negación propuesta. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ cualesquiera, entonces $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \tag{5}$$

Como las operaciones suma y producto son cerradas en $\mathbb{Z}$, tenemos que $ad + bc \in \mathbb{Z}$ y $bd \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $\frac{ad+bc}{bd} = x + y \in \mathbb{Q}$.

Como x e y son arbitrarios, hemos probado que la negación corregida:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q} \tag{6}$$

es **verdadera**, y por lo tanto la proposición original es **falsa**.

c) Proposición: Existen enteros impares cuyo producto es impar.
Negación propuesta: El producto de cualesquiera de dos enteros impares es impar.
La negación propuesta **no** es correcta. Si escribimos la proposición original como

$$P = \exists x, y \in \mathbb{Z} :\ x, y \textit{ son impares} \Rightarrow x \times y \textit{ es impar} \tag{7}$$

Por lo que su negación resulta

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \neg(x, y \textit{ son impares} \Rightarrow x \times y \textit{ es impar}) \tag{8}$$

o, equivalentemente,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x, y \textit{ son impares} \Rightarrow x \times y \textit{ es par} \tag{9}$$

Coloquialmente resulta "El producto de dos números enteros e impares cualesquiera es un número **par**." Veamos la veracidad de dicha proposición. Sean $x = 3$ e $y = 5$, luego $x \times y = 3 \times 5 = 15$. Como 15 es impar, entonces la proposición original es **verdadera** y su negación corregida es **falsa**.

Ejercicio 22. Para cada proposición propuesta, determine si es verdadera o falsa, justificando su respuesta. Si fuese falsa, escriba la proposición corregida para que resulte verdadera. Luego escriba la correspondiente negación.

a) Por dos puntos pasa una única recta.
Verdadero. Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y sean $y = mx + h$ e $y = rx + s$ dos rectas en $\mathbb{R}^2$. Si tenemos que ambas rectas pasan por los puntos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) respectivamente, entonces tenemos que

$$\begin{cases} mx_0 + h = y_0 \\ rx_0 + s = y_0 \\ mx_1 + h = y_1 \\ rx_1 + s = y_1 \end{cases} \tag{10}$$

o de forma simplificada

$$\begin{cases} mx_0 + h = rx_0 + s \\ mx_1 + h = rx_1 + s \end{cases} \tag{11}$$

restando la segunda ecuación a la primera, tenemos que

$$mx_0 - mx_1 = rx_0 - rx_1 \Rightarrow m(x_0 - x_1) = r(x_0 - x_1) => m = r \tag{12}$$

siempre que $x_0 \neq x_1$. Luego, si tenemos que $m = r$, el sistema de ecuaciones (11) nos dice inmediatamente que $h = s$ y por lo tanto $mx + h = rx + s$ en todos sus puntos.
Por otro lado si $x_0 = x_1$ entonces $y_0 \neq y_1$, lo cual nos indica que esta recta no puede ser escrita de la forma $y = mx + h$ (ya que en particular para x_0 y x_1 dicha relación no es funcional), y por lo tanto la única recta que pasa por dichos puntos es la recta vertical $x = x_0$.
La correspondiente **negación** de la proposición dada es "Por dos puntos pasa más de una recta".

b) Dos rectas siempre se cortan en un punto.
Falso. Sean las rectas $y = x$ e $y = x + 1$. Luego deberíamos encontrar un punto (x_0, y_0) tal que satisfaga ambas ecuaciones de la recta. Pero entonces,

$$y_0 = x_0 \wedge y_0 = x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = x_0 + 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ Absurdo!!} \tag{13}$$

Luego las dos rectas dadas no se cortan en ningún punto.
Una **versión corregida** del enunciado es: "Dos rectas o bien se cortan en un punto, o bien son paralelas, o bien son alabeadas"
La correspondiente **negación** de la proposición dada es "Dos rectas **nunca** se cortan en un punto".

c) Hay funciones que verifican $f(x) = f(-x)$ para todos $x \in Dom(f)$.
Verdadero. Sea $f(x) = x^2$, tomemos $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, entonces:

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = (-1)(-1)(x)(x) = x^2 = f(x) \tag{14}$$

como x es arbitrario, luego la relación se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$ que en particular es el dominio de la función dada.
La correspondiente **negación** para la proposción dada es "Para toda función f, $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in Dom(f)$"

d) Todo polinomio a coeficientes reales tiene raíces reales.
Falso. Sea $p(x) = x^2 + 1$, al buscar raíces de este polinomio buscamos valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \tag{15}$$

Pero claramente para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$ por lo que no hay soluciones reales para este polinomio.
Sí presenta soluciones complejas, en efecto, los valores $i, -i \in \mathbb{C}$ son soluciones de esta ecuación.
Por lo que una **versión corregida** del enunciado es: "Todo polinomio a coeficientes reales tiene raíces complejas".
La correspondiente **negación** para la proposición dada es "Todo polinomio a coeficientes reales **no** tiene raíces reales".

e) Hay un polinomio de grado 3 que tiene una raíz real y dos complejas.
Verdadero. Sea $p(x) = (x-1)(x-i)(x+i)$, si distribuimos la expresión obtenemos $p(x) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$. Donde claramente sus raíces son $1, i, -i$ ya que lo hemos construido de esa forma.
La correspondiente **negación** para la proposición dada es "No existe un polinomio de grado 3 que tiene una raíz real y dos complejas".