

Trabajo Práctico 3

Santiago Bussanich

Mayo 2025

Antes de comenzar con la resolución de los ejercicios notemos que, algunas veces, optaremos por escribir en símbolos matemáticos $\forall x P(x)$. Esta notación es abreviada ya que en general lo correcto sería escribir $\forall x \in \mathcal{U} [P(x)]$. Teniendo en claro que el cuantificador es entorno al universo de elementos que estamos trabajando, vamos a obviar esta notación.

Ejercicio 6. Siendo $E, F, G \subseteq \mathcal{U}$ conjuntos, demostrar:

b) $E \subseteq F, F \subseteq E \Rightarrow E = F$ c) $E \subseteq F, F \subseteq G \Rightarrow E \subseteq G$

Veamos el item b, como $E \subseteq F$ tenemos que $\forall x[x \in E \Rightarrow x \in F]$ y además al ser $F \subseteq E$ se tiene $\forall x[x \in F \Rightarrow x \in E]$. Luego,

$$\begin{cases} \forall x[x \in E \Rightarrow x \in F] \\ \forall x[x \in F \Rightarrow x \in E] \end{cases} \Rightarrow \forall x[x \in E \iff x \in F] \xrightarrow{(1)} E = F$$

(1) definición de igualdad de conjuntos.

Veamos ahora el item c, sea $x \in \mathcal{U}$ se tiene:

$$x \in E \xrightarrow{(2)} x \in F \xrightarrow{(3)} x \in G$$

Por lo que se tiene que,

$$\forall x[x \in E \Rightarrow x \in G] \xrightarrow{(4)} E \subseteq G$$

(2) $E \subseteq F$

(3) $F \subseteq G$

(4) definición de subconjunto.

Ejercicio 15. Siendo $E, F, G \subseteq \mathcal{U}$ conjuntos, demostrar:

$$\text{b) } E \cup E = E \quad \text{c) } F \subseteq E \iff F \cap E = F \quad \text{d) } E \cap \emptyset = \emptyset$$

b) Probaremos la doble contención:

$$\subseteq) x \in (E \cup E) \xrightarrow{\text{def}} x \in E \vee x \in E \xrightarrow{(1)} x \in E$$

$$\supseteq) x \in E \xrightarrow{(2)} x \in E \vee x \in E \xrightarrow{\text{def}} x \in (E \cup E)$$

(1) propiedad idempotente de la disyunción.

(2) amplificación disyuntiva.

c) Probaremos primero la ida:

\Rightarrow) Tenemos que probar la igualdad de los conjuntos $F \cap E$ y F , veamos la doble contención.

$$\subseteq) x \in (F \cap E) \xrightarrow{\text{def} \cap} x \in F \wedge x \in E \xrightarrow{(1)} x \in F$$

$$\supseteq) x \in F \xrightarrow{(2)} x \in E \xrightarrow{(3)} x \in F \wedge x \in E \xrightarrow{\text{def} \cap} x \in (F \cap E)$$

(1) como $F \subseteq E$ tenemos que $x \in F \Rightarrow x \in E$ por lo que podemos simplificar la conjunción

(2) por definición de $F \subseteq E$

(3) agregamos la hipótesis a la conjunción

Como vale la doble contención, tenemos que $F = F \cap E$.

\Leftarrow) Sea $x \in F$ tenemos que:

$$x \in F \xrightarrow{\text{hip}} x \in (F \cap E) \xrightarrow{\text{def} \cap} x \in F \wedge x \in E \xrightarrow{(1)} x \in E$$

(1) simplificación conjuntiva.

Por lo tanto, $F \subseteq E \iff F \cap E = F$.

d) Para ver esta igualdad podemos usar el item c) que acabamos de probar. Se ha visto en teoría que para todo conjunto $A \in \mathcal{U}$ tenemos que $\emptyset \subseteq A$. Por lo que entonces, $\emptyset \subseteq E \Rightarrow E \cap \emptyset = \emptyset$ debido al item anterior.

Ejercicio 17. Dado $A = \{a, \{b\}\}$, determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

- | | |
|--|--|
| a) $\{b\} \subset A$ | l) $\forall x \in A, \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ |
| b) $\{b\} \in \mathcal{P}(A)$ | m) $\exists x \in A$ tal que $\{x\} \not\subseteq A$ |
| c) $\{b\} \subset \mathcal{P}(A)$ | |
| k) $\exists x \in A$ tal que $\{x\} \in A$ | n) $\nexists x \in A$ tal que $\{x\} \notin A$ |

b) Falso. El conjunto $\{b\} \not\subset A$, ya que entonces $\{b\}$ debería ser un conjunto de elementos de A , pero el elemento $b \notin A$.

c) Falso. Recordando que el conjunto $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A , como el ítem anterior es falso, luego este también lo es, ya que el conjunto $\{b\}$ no es un subconjunto de A .

d) Falso. Escribiendo el conjunto de partes por extensión tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, A\}$. Donde notamos claramente que $\{b\} \not\subset \mathcal{P}(A)$ ya que $b \notin \mathcal{P}(A)$

k) Falso. Notemos que los únicos dos elementos de A son a y $\{b\}$. Luego probando por extensión tenemos que $\{a\} \not\subseteq A$ y $\{\{b\}\} \not\subseteq A$ por lo que para ambos elementos de A la implicancia es falsa.

l) Verdadero. Hemos escrito el conjunto $\mathcal{P}(A)$ por extensión en el ítem d). En este caso, $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ y $\{\{b\}\} \in \mathcal{P}(A)$, por lo que para cada $x \in A$ tenemos que $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$, lo que muestra la veracidad del enunciado.

m) Falso. El enunciado es una **contradicción**. Si x es un elemento de A , luego claramente el conjunto $B = \{x\}$ es un conjunto de elementos de A (su único elemento es x el cual está en A) y por lo tanto $\{x\} = B \subseteq A$.

n) Verdadero. Sea el elemento $a \in A$, luego $\{a\}$ no es un elemento de A , y por lo tanto la fórmula lógica es verdadera.

Extra.

Ejercicio 19. Sean $E_i \subseteq \mathcal{U}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen:

- a) $\bigcap_{i=1}^n E_i = (\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i) \cap E_n$
- b) $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{P}(E_i) = \mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^n E_i)$

a) Veamos la doble contención. Sea $n \in \mathbb{N}$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^n E_i &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \in (E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n) \\ &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x \in (E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \cap E_n \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i \cap E_n \right) \end{aligned}$$

(1) definición de intersección de E_1, E_2, \dots, E_n

(2) ley asociativa de \cap

(3) definición de intersección de E_1, E_2, \dots, E_{n-1}

b) Nuevamente probaremos la igualdad de conjuntos mediante la doble contención. Tomemos $x \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{P}(E_i)$. Entonces:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{P}(E_i) &\\ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x \in (\mathcal{P}(E_1) \cap \mathcal{P}(E_2) \cap \cdots \cap \mathcal{P}(E_n)) &\\ \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(E_1) \wedge x \in \mathcal{P}(E_2) \wedge \cdots \wedge x \in \mathcal{P}(E_n) &\\ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x \subseteq E_1 \wedge x \subseteq E_2 \wedge \cdots \wedge x \subseteq E_n &\\ \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} x \subseteq E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n &\\ \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) & \end{aligned}$$

(1) definición de intersección de $\mathcal{P}(E_1), \mathcal{P}(E_2), \dots, \mathcal{P}(E_n)$

(2) definición del conjunto de partes

(3) si $x \in E_1 \wedge x \in E_2$ entonces $x \in (E_1 \cap E_2)$ y así para los n conjuntos

Ejercicio 26. Demostrar que si $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathcal{U} \iff A = \mathcal{C}B$. Cuando esto sucede decimos que "A y B son una partición de \mathcal{U} " y notamos $A|B$ partición de \mathcal{U} .

Dar tres ejemplos de conjuntos universales \mathcal{U} y posibles particiones $A|B$ de \mathcal{U} .

Probemos primero que si $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathcal{U}$ entonces $A = \mathcal{C}B$. Vamos a probar la doble contención, sea $a \in A$ luego tenemos que

$$a \in A \Rightarrow a \in A \vee a \in B \Rightarrow a \in \mathcal{U}$$

Donde la primer implicancia es por amplificación disyuntiva y la segunda implicancia se debe a que por hipótesis tenemos $A \cup B = \mathcal{U}$. Pero como además sabemos que $A \cap B = \emptyset$, sabemos que si $a \in A \Rightarrow a \notin B$, y entonces podemos escribir:

$$a \in \mathcal{U} \wedge a \in A \Rightarrow a \in \mathcal{U} \wedge a \notin B \Rightarrow a \in \mathcal{C}B$$

Ahora veamos que $\mathcal{C}B \subseteq A$. Sea $x \in \mathcal{C}B$ entonces,

$$x \in \mathcal{C}B \Rightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_F$$

y por lo tanto obtenemos

$$x \in \mathcal{C}B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$$

Habiendo probado entonces que $A \subseteq \mathcal{C}B$ y $\mathcal{C}B \subseteq A$ concluimos que $A = \mathcal{C}B$.

Ahora debemos probar que si ocurre que $A = \mathcal{C}B$ entonces $A \cup B = \mathcal{U}$ y $A \cap B = \emptyset$. Las pruebas son inmediatas, ya que

$$A \cap B \stackrel{A=\mathcal{C}B}{=} \mathcal{C}B \cap B \stackrel{(1)}{=} \emptyset$$

y además

$$A \cup B \stackrel{A=\mathcal{C}B}{=} \mathcal{C}B \cup B \stackrel{(2)}{=} \mathcal{U}$$

(1) $x : x \in \mathcal{C}B \cap B \Rightarrow x \in \mathcal{U} \wedge \underbrace{x \notin B \wedge x \in B}_F$ y por lo tanto no hay x que pertenezcan a $\mathcal{C}B \cap B$

(2) Son los $x : (x \in \mathcal{U} \wedge x \notin B) \vee x \in B \Rightarrow x : x \in \mathcal{U} \vee x \in B \Rightarrow x : x \in \mathcal{U}$

Por último demos tres ejemplos de conjuntos universales y sus posibles particiones.

1. Consideremos $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y los conjuntos $A = \{x : x \equiv 0(2)\} = \mathbb{P}$ y $B = \{x : x \equiv 1(2)\} = \mathbb{C}\mathbb{P}$ donde A es el conjunto de los números pares y B , su complemento, el conjunto de los números impares. Otras posibles particiones de \mathbb{N} son, dado un natural $n_0 \in \mathbb{N}$, los conjuntos $A = \{x : x \leq n_0\}$ y $B = \{x : x > n_0\}$.
2. Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Si nombramos $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{I}$ al conjunto de los números racionales e irracionales respectivamente, tenemos en efecto que $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.
3. Asumamos $\mathcal{U} = \{x : x \leq 20 \wedge x \in \mathbb{N}\}$. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ forman una partición de \mathcal{U}