

TMII - Trabajo Práctico 1

Santiago Bussanich

Septiembre 2025

- 4) Demostrar el siguiente resultado.

Teorema. Dados una recta y un punto que no pertenece a la recta, existe un único plano al cual el punto pertenece y que contiene a la recta.

D/ Comencemos notando que por hipótesis tenemos una recta, llamémosla r y un punto no perteneciente a ella. Por el axioma **2** nuestra recta es un subconjunto propio del espacio con al menos dos puntos, y entonces tenemos tres puntos distintos en nuestro problema. Sin perder generalidad, digamos que los puntos de la recta son P y Q , mientras que el punto que no pertenece a ella es S .

Luego, sigue que los tres puntos son no alineados. En efecto, supongamos que fuesen alineados, entonces tenemos que existe una recta t la cual pasa por los puntos P , Q y S . Como en particular t contiene a los puntos P y Q , por el axioma **3** sigue que t es la única recta que contiene a dichos puntos y entonces $t = r$. Pero esto es absurdo ya que $S \in t$ pero $S \notin r$. Esto surge de suponer que los puntos estaban alineados.

Ahora como P, Q, S son tres puntos no alineados, por el axioma **4** y el axioma **5** tenemos que existe un plano π que contiene a dichos puntos y que además este es el único plano que los contiene. Más aún, por el axioma **6** sabemos que la recta r determinada por los puntos P y Q está completamente contenida en π . Como la recta y el punto no perteneciente a ella están totalmente contenidos en el plano, y además este es único, queda probado el enunciado.

- 6) Demostrar de los siguientes teoremas a partir de los axiomas dados.

- b) Dos rectas paralelas distintas están contenidas en un único plano.

D/ Sean r y s dos rectas tales que $r \neq s$ y además $r \parallel s$. Supongamos que existen dos planos, llamados α y β , tales que ambos contienen a r y s . Si consideramos $P \in s$ tenemos que α contiene a r y P , donde P es un punto que no pertenece a r debido a que $r \cap s = \emptyset$ por definición de rectas paralelas.

Pero con el mismo argumento también tenemos que β también contiene a r y P . Por el teorema que probamos en el ejercicio **4** el plano que contiene a r y P es único y por lo tanto $\alpha = \beta$.

- c) Dada una recta y un punto que no pertenece a ella existe al menos una recta alabeada a ella que pase por el punto dado.

D/ Supongamos que no existe una recta alabeada que pase por el punto P . Luego para todo punto $Q \neq P$ en \mathcal{E} , tenemos que existe un plano que contiene a la recta \overleftrightarrow{PQ} y a la recta r . Pero en realidad este plano es único ya que por el axioma **5** los puntos de r y P determinan un único plano, al cual llamaremos π .

Luego entonces, para todo punto $Q \in \mathcal{E}$, con $Q \neq P$, tenemos que $Q \in \pi$ ya que de otra forma existiría un plano que contiene a los puntos de r y a P distinto de π lo cual contradice el axioma 5. Pero esto es absurdo ya que entonces todos los puntos del espacio pertenecen a π , lo cual contradice el axioma **3** dado que si esto ocurriese entonces $\pi = \mathcal{E}$. Absurdo!! Esta contradicción surge de suponer que no existe una recta alabeada a r que pase por P , con lo cual queda probado el enunciado.