UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

PRÁCTICAS DE PROGRAMACIÓN EN PYTHON

Este documento presenta la guía y la evaluación del 20% del curso de Programación Estructurada y Métodos Numéricos.

Presentado por:
Oscar David Hincapie Garcia

PAUTAS DE ENTREGA

Inicialmente se plantearon dos prácticas. Sin embargo, se decidió utilizar una que abarcara el contenido de ambas prácticas. Por este motivo, a la práctica anterior se le agregaron puntos y se distribuyeron los porcentajes de evaluación. La evaluación correspondiente al 20%. La práctica debe realizarse en grupos de 3 personas. En el enlace anexo a este documento, se deben registrar los grupos de trabajo. La interpretación de la práctica también cuenta como evaluación.

La práctica se debe entregar de dos formas.

1 Una entrega definitiva el día 20 de diciembre a las 12:00 pm.

2 Ó una entrega parcial el día 13 de diciembre a las 12:00 pm con los puntos (P1, P2, P3). En la entrega dos que sería el día 20 de diciembre se entregan los puntos (P4, P5, P6). Esto implica una retroalimentación con los estudiantes que entreguen el día 11.

Objetivos

Utilizar los conceptos relacionados con la lógica de programación en analizar problemas de ingeniería, especialmente sistemas mecánicos. Es por esto que se plantea un sistema dinámico que se modela a través de las ecuaciones diferenciales y que sirve como ejemplo para estructurar lógica de programación en la solución de problemas derivados de este tipo de sistemas.

Temas

- Sentencias condicionales.
- Sentencias repetitivas.
- Llamado de funciones.
- Definición de variables.
- Estructuras de datos.

Módulos necesarios

numpy, plotly (o matplotlib), scipy, sympy, ipywidgets, pandas

REPASO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Existen dos tipos de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones diferenciales ordinarias EDO (bi-variables, $y = f(x)$) y las ecuaciones diferenciales parciales EDP (multi-variable, $z = f(x, y, w, ...)$). El desarrollo de esta práctica se centra en las EDO con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + ... + a_n \frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$$

Las posibles ecuaciones diferenciales que se deriven de esta familia permiten describir y representar gran variedad de sistemas dinámicos como los sistemas mecánicos, sistemas eléctricos y los sistemas termodinámicos. Otra representación que tienen estas ecuaciones diferenciales es una representación algebráica a través del operador $D = \frac{d}{dx}$ de modo que la EDO se puede escribir como:

$$(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_n D^n) y(x) = f(x) \rightarrow L_n(D) y(x) = f(x)$$

Por ejemplo, si aplico el operador D a la expresión $3x + 4$ implica tener una representación de la forma $D(3x + 4) = \frac{d}{dx}(3x + 4) = 3$

$L_n(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_n D^n$ es un operador derivador. Para obtener la solución a la EDO se necesitan obtener dos cosas. Las soluciones asociadas a la EDO homogénea ($L_n(D)y(x) = 0$) y la solución asociada a la perturbación que sufre el sistema debido a la función $f(x)$. La unidad de medida depende del contexto del problema, para sistemas mecánicos es fuerza [N], para sistemas eléctricos es el voltaje [V].

Solución de EDO de coeficientes constantes de segundo orden

Las EDO de coeficientes constantes de segundo orden tienen la forma:

$$(a_0 + a_1 D + a_2 D^2) y(x) = f(x)$$

Como la EDO es de orden dos, la solución asociada a la EDO homogénea es el conjunto de soluciones $y_H = \{y_{H1}, y_{H2}\}$. Si la EDO es de orden n entonces el conjunto de soluciones tiene n posibles valores. Por lo tanto, la solución se puede escribir como:

$$y(x) = y_H + y_P = c_1 y_{H1} + c_2 y_{H2} + y_P$$

Donde c_1 y c_2 son valores a calcular con base en las condiciones iniciales del problema.

Solución de EDO's homogénea − y_H

El operador derivador $L_n(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2$ se puede expresar como un polinomio característico $P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. Las raíces del polinomio λ_1, λ_2 se utilizan para construir la solución homogénea de la siguiente manera:

C1 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathfrak{R} \rightarrow y_H = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

C2 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathfrak{R} \rightarrow y_H = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

C3 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\gamma \in \mathfrak{C} \rightarrow y_H = \{e^{\alpha x}\cos\gamma x, e^{\alpha x}\sin\gamma x\} = c_1 e^{\alpha x}\cos\gamma x + c_2 e^{\alpha x}\sin\gamma x$

Solución de EDO debido a la perturbación de $f(x)$ − y_P

La solución particular se puede obtener por muchos métodos, entre ellos: Variación de Parámetros, Coeficientes Indeterminados, Operador Inverso, Operador Anulador. La deducción de las alternativas se encuentran detalladas en libros de ecuaciones diferenciales. Para el caso de esta práctica, se debe trabajar con el método de Variación de Parámetros. Este método plantea la solución de la siguiente manera:

Partiendo de la solución homogénea Y_H, se puede escribir la solución particular y_P como

$$y_P = \mu_1 y_{H1} + \mu_2 y_{H2}$$

Los valores de μ_i se obtienen al solucionar e integrar el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

A través de este método, se garantiza que las soluciones sean linealmente independientes.

Solución de EDO de coeficientes constantes de segundo n

$$(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_n D^n)y(x) = f(x)$$

Como la EDO es de orden n, la solución asociada a la EDO homogénea es el conjunto de soluciones $y_H = \{y_{H1}, y_{H2}, ..., y_{Hn}\}$. Por lo tanto, la solución se puede escribir como:

$$y(x) = y_H + y_P = c_1 y_{H1} + c_2 y_{H2} + c_n y_{Hn} + y_P$$

Donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son valores a calcular con base en las condiciones iniciales del problema.

Solución de EDO's homogénea − y_H

El operador derivador $L_n(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_n D^n$ se puede expresar como un polinomio característico $P(\lambda) = a_n \lambda^n + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$. Las raíces del polinomio $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ se utilizan para construir la solución homogénea de la siguiente manera:

C1 $\lambda_i \in \Re \rightarrow y_{Hi} = \{e^{\lambda_i x}\}$

C3 $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\gamma \in \mathfrak{C} \rightarrow y_{H_{i,i+1}} = \{e^{\alpha x} \cos \gamma x, e^{\alpha x} \sin \gamma x\}$

Es importante que las soluciones sean linealmente independientes, esto quiere decir, que ninguna solución esté repetida. Matemáticamente esto se deduce al analizar el Wronskiano de las soluciones que se obtengan. Se tienen tantas soluciones como raíces se tienen. Para independizar dos soluciones iguales se multiplica por x^n donde n representa el número de soluciones repetidas. Por ejemplo:

- $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 2)$ donde la raíz λ se repite tres veces. Esto implica que $y_H = \{e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$. Como estas raíces no son independientes, se deben independizar mulplicando por x^n, y el resultado sería $y_H = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}\}$.
- $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)$ donde la raíz λ se repite dos veces. Esto implica que $y_H = \{\sin x, \sin x, \cos x, \cos x\}$. Como estas raíces no son independientes, se deben independizar mulplicando por x^n, y el resultado sería $y_H = \{\sin x, x \sin x, \cos x, x \cos x\}$.

Solución de EDO debido a la perturbación de $f(x)$ − y_P

La solución particular se puede obtener por muchos métodos, entre ellos: Variación de Parámetros, Coeficientes Indeterminados, Operador Inverso, Operador Anulador. La deducción de las alternativas se encuentran detalladas en libros de ecuaciones diferenciales. Para el caso de esta práctica, se debe trabajar con el método de Variación de Parámetros. Este método plantea la solución de la siguiente manera:

Partiendo de la solución homogénea Y_H, se puede escribir la solución particular y_P como

$$y_P = \mu_1 y_{H1} + \mu_2 y_{H2} + ... + \mu_n y_{Hn}$$

Los valores de μ_i se obtienen al solucionar e integrar el sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ \\ y_1^n & y_2^n & ... & y_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \\ \\ \mu_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ f(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

EVALUACIÓN

Para el desarrollo de esta práctica, se debe obtener el promedio de los últimos dos números de la cédula de los integrantes del equipo. Este valor se debe aproximar al menor número entero. Si este valor es mayor o igual a 50, se debe hacer el ejercicio del grupo A. Si el valor es menor a 50, se debe hacer el ejercicio del grupo B. Adicionalmente, si el dato obtenido es par, se deben tomar los valores asociados a los pares y si es impar, se deben tomar los valores asociados a los impares. La evaluación se compone de:

P0 **10% Buenas prácticas de programación:** Esto incluye el cuidado al nombrar variables, al definir variables, al definir las funciones y la documentación del código necesaria. Para más información ver el capítulo 1, 2 y 3 de la url `https://github.com/NarciH/PyMed-2020-1` en la ruta ./Documentos/Guía para desarrollo de prácticas - PyMeNu 2019-1.pdf

P1 **10% Diagrama de flujo explicando la solución al ejercicio:** Se debe presentar un diagrama de flujo donde se detallen todos los pasos necesarios para la solución del problema. Esto incluye el orden de estas acciones. Para desarrollar un diagrama de flujo sin necesidad de instalar otros programas, pueden optar por trabajar en `https://www.diagrams.net`.

P2 **10% Deducción matemática de la EDO a partir de un diagrama de cuerpo libre:** Para ambos problemas, se da la ecuación diferencial. En este punto deben mostrar desde la segunda ley de Newton, cómo se llega a la EDO planteada.

P3 **20% Desarrollo de las funciones que permiten obtener la solución una EDO de orden superior.** Esto incluye desarrollar las siguientes funciones:

- 5% Función para las soluciones homogéneas $y_1, y_2, ..., y_n$
- 5% Función para la solución particular y_P
- 5% Función para obtener los valores de $c_1, c_2, ..., c_n$
- 5% Función para obtener derivada de la solución. No se está pidiendo programar un método numérico de derivación.

Los parámetros de entrada de cada función se exponen en el cuaderno anexo a la práctica.

P4 **20% Uso de las funciones hechas en el punto P3 para dar solución a los sub-problemas planteados:** Cada ejercicio tiene un conjunto de condiciones a evaluar. Las funciones que se desarrollen deben ser capaz de solucionar estas condiciones sin ninguna falla.

P5 **15% Manejo de pandas.** En la carpeta ./data hay dos archivos csv, grupo_a.csv y grupo_b.csv ambos con un separador '\t'. El archivo presenta para una EDO de orden dos de la forma $(a_2D^2 + a_1D + a_0)y(t) = f(t)$ con $y(0) = y_0$ y $y'(0) = Dy_0$ los valores de a, b, c, y_0, Dy_0 y $r(x)$. Para este punto debe:

- Cargue el archivo correspondiente a su práctica.
- Al dataframe cargado, crearle seis columnas. c_1,c_2, y_min, y_max, vel_min,vel_max.
- Realizar un ciclo iterativo que recorra cada fila del dataframe. En cada iteración, se debe solucionar la EDO con los valores definidos en el csv y almacenar en las columnas c_1 y c_2 los coeficientes de integración. la posición mínima (y_min) y la posición máxima (y_max), la velocidad mínima (vel_min) y la velocidad máxima (vel_max). Para esto considere un tiempo entre 0 y 30 segundos. Luego de anexarle los datos a cada fila del dataframe, se debe sobre-escribir el csv. Por lo tanto en la siguiente iteración se debe cargar un csv con la información guardada de la iteración anterior.

P6 **15% Uso de funciones pre-diseñadas.** En la carpeta ./resources/code hay una librería "visual_interface.py" personalizada que posee varias funciones que permiten corroborar los resultados asociados a EDO's de segundo orden. La función get_app() recibe tres parámetros y retorna un objeto (widget) con un aplicativo básico de una EDO de segundo orden. El aplicativo que entrega es el presentado en la figura 1. Este aplicativo entrega una interfaz con las objetos interactivos y gráficas. Los sliders a, b, c son widgets que permiten simular los coeficientes de la EDO asociada. La función get_app() recibe tres argumentos, un diccionario para el widget a, uno para el b y otro para el c. get_app(dict_a,dict_b,dict_c). Cada diccionario posee como llaves los siguientes atributos: [min, max, value, step] donde min es el valor mínimo, max es el valor máximo, value es un valor inicial y step es el paso. Para este punto, deben llamar la función get_app() enviándole los parámetros especificados anteriormente con los valores relacionados con al problema asociado y replicar los resultados obtenidos en el punto 4. ¿Qué conclusiones puede sacar?

Figura 1: Aplicativo que permite solucionar de forma numérica EDO's de orden 2 de coeficientes constantes

Grupo A – Péndulo Simple

Un péndulo simple de longitud l, como el mostrado en la figura 2 se deja caer libremente desde un ángulo inicial θ_i en un medio viscoso de flujo laminar con coeficiente de fricción B_0. Para ángulos pequeños y sin considerar perturbaciones en el sistema, la EDO se puede aproximar a:

$$\frac{dx^2(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}x(t) - \frac{B_0}{m}\frac{dx(t)}{dt}$$

Se necesita una aplicación que dependiendo de los valores de g, l, m, B_0 y las condiciones iniciales, entregue la posición y la velocidad del péndulo. Para lograr esto, se deben desarrollar los puntos P1, P2, P3 y P5.

Para el punto P4 pide

1. Para el sistema dado en el planteamiento del problema, y las condiciones iniciales dadas:
   (a) Obtenga y realice una gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración del péndulo. Presente las gráficas de forma independiente.
   (b) Realice una gráfica de la velocidad versus la posición del péndulo. ¿Cuál es la velocidad máxima y mínima alcanzada?
2. Considere ahora que el sistema se encuentra en el vacío y se hace una pertur-

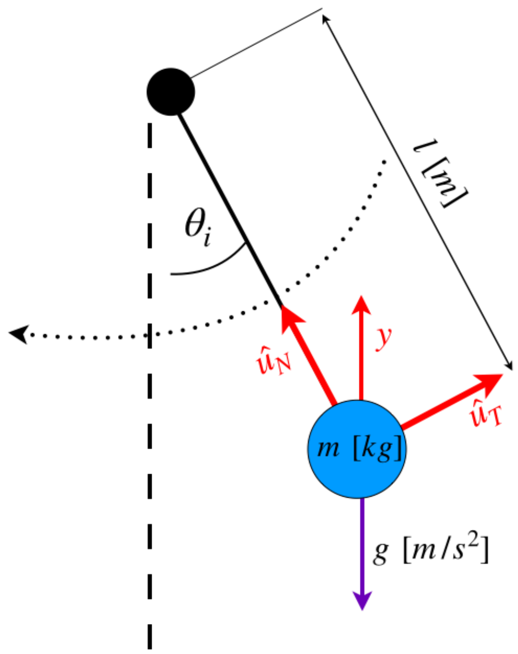

Figura 2: Diagrama para un péndulo simple. Los ejes en color rojo, las fuerzas en color purpura. La linea punteada indica el sentido del movimiento.

bación al sistema con una fuerza tangencial $F(t) = A \sin \omega t$.

(a) Encuentre y realice una gráfica de la posición y la velocidad del péndulo.

(b) Realice una gráfica de la velocidad versus la posición del péndulo. ¿Qué puede concluir?

(c) ¿Por qué la posición y la velocidad tienden a crecer con el tiempo?, ¿Qué similitud tienen con la perturbación del sistema?. Para responder esta pregunta, realice en un mismo gráfico los perfiles de x **vs** t y F **vs** t

3. Se desea saber el efecto que posee el ángulo inicial en los valores de c_1 y c_2. Para esto, utilizando el sistema en un medio viscoso de flujo laminar con coeficiente B_0 y sin considerar perturbaciones, realice en una sola gráfica las curvas c_1 **vs** θ_i y c_2 **vs** θ_i. El ángulo inicial varía de la forma $\theta_i(i) = i\dfrac{\pi}{180}$ con $i = [1, 2, 3, ..., 15]$. Para el desarrollo de este punto, se deben utilizar ciclos for que recorran los posibles valores de θ_i.

Los resultados se deben almacenar en vectores de numpy.

Las gráficas se pueden hacer en plotly o matplotlib.

Pares	**Impares**
$l = 0.25$ $[m]$	$l = 0.5$ $[m]$
$B_0 = 25 \times 10^{-3}$ $[kg/s]$	$B_0 = 30 \times 10^{-3}$ $[kg/s]$
$m = 0.1$ $[kg]$	$m = 0.25$ $[kg]$
$\theta_i = \dfrac{\pi}{4}$ $[rad]$	$\theta_i = \dfrac{\pi}{6}$ $[rad]$
$g = 9.81$ $[m/s^2]$	$g = 9.81$ $[m/s^2]$
$A = 0.25$ $[N]$	$A = 0.5$ $[N]$
$\omega = 6.261$ $[rad/s]$	$\omega = 4.427$ $[rad/s]$
$t = 15$ $[s]$	$t = 15$ $[s]$

Grupo B – Sistema masa resorte amorgituador

Un modelo simple para la suspensión de la rueda de un vehículo se presenta en la figura 3. Los resortes del muelle de suspensión se representan con resortes de constantes de elasticidad k. La constante B de fricción representa el amortiguador que ejerce una fuerza contraria al movimiento y es proporcional a la velocidad relativa entre su centro de gravedad y el perfil de la carretera. Y finalmente se acopla a la masa equivalente del vehículo. Si el eje de referencia es tomado en el centro de equilibrio del vehículo (positivo hacia abajo), la ecuación diferencial que rige el movimiento del desplazamiento del centro de equilibrio es

$$\left(D^2 + \frac{B}{m}D + \frac{k}{m}\right)x(t) = \left(\frac{B}{m}D + \frac{k}{m}\right)x_s(t)$$

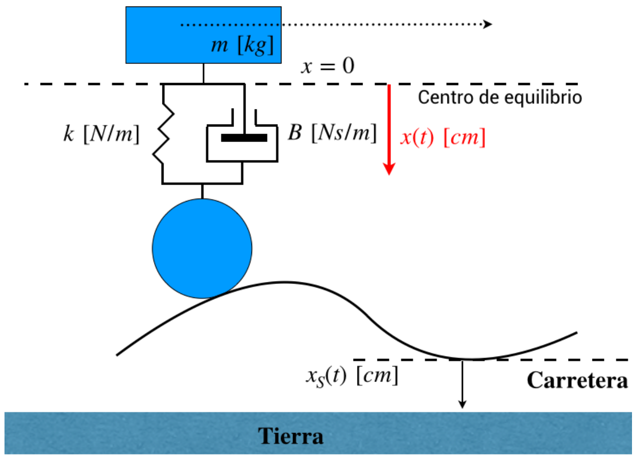

Figura 3: Diagrama para el modelo 1/4 de suspensión de vehículos. Los ejes en color rojo. La linea punteada indica el sentido del movimiento.

Donde $x_s(t)$ representa la distancia desde el centro de gravedad hasta el perfil de la carretera por donde transita el vehículo. Partiendo del reposo el vehículo transita horizontalmente con velocidad constante por la superficie plana de la tierra y el perfil de la carretera está a una distancia de $h_0 = 200\ cm$ del suelo.

Para realizar el diagrama de flujo libre, considere tres momento: El momento 1 considerando el sistema sin la masa del vehículo y en equilibrio. El momento 2 considerando el sistema con la masa del vehículo y en equilibrio. El momento 3 considerando el peso del vehículo en un estado diferente al de equilibrio.

Se necesita una aplicación que dependiendo de los valores de m, B, k, B y las condiciones iniciales, entregue la posición y la velocidad del del centro de equilibrio. Para lograr esto, se deben desarrollar los puntos P1, P2, P3 y P5.

Para el punto P4 se pide

1. Para el sistema dado en el planteamiento del problema, y las condiciones iniciales dadas:
   (a) Obtenga y realice una gráfica de la posición, la velocidad y la aceleración del centro de equilibrio. Presente las gráficas de forma independiente.
   (b) Realice una gráfica de la velocidad versus la posición del centro de quilibrio. ¿Cuál es el desplazamiento máximo del sistema?
2. Considere ahora que el vehículo no posee amortiguadores y que atraviesa una serie de pequeños baches en la carretera de tal forma que el perfil de la carretera responde a la función $x_s(t) = h_0 - A\cos\omega t$.
   (a) Encuentre y realice una gráfica del desplazamiento y la velocidad del centro de equilibrio.
   (b) Realice una gráfica de la velocidad versus la posición del centro de equilibrio. ¿Qué puede concluir?
   (c) ¿Qué similitud tienen con la perturbación del sistema?. Para responder esta pregunta, realice en un mismo gráfico los perfiles de x **vs** t y F **vs** t
3. Se desea saber el efecto que posee la amplitud de la carretera en los valores de c_1 y c_2. Para esto, considere el sistema con amortiguador B y que el perfil de la carretera responde a la ecuación $x_s(t) = h_0 - A\cos\omega t$. Realice en una sola gráfica las curvas c_1 **vs** A y c_2 **vs** A. El valor de A varía en $A = [0.05, 0.1, 0.15, 0.2, ..., 0.9]$. Para el desarrollo de este punto, se deben utilizar ciclos for que recorran los posibles valores de A.

Los resultados se deben almacenar en vectores de numpy.
Las gráficas se pueden hacer en plotly o matplotlib.

Pares	**Impares**
$m = 250$ $[kg]$	$m = 500$ $[kg]$
$B = 500$ $[Ns/m]$	$B = 250$ $[Ns/m]$
$k = 16000$ $[N/m]$	$k = 32000$ $[N/m]$
$A = 0.2$ $[m]$	$A = 0.2$ $[m]$
$\omega = 8$ $[rad/s]$	$\omega = 8$ $[rad/s]$
$t = 15$ $[s]$	$t = 15$ $[s]$