Løsningsforslag til opgave 5.73 + 5.75 (s. 173)

5.73

Den simultane tæthedsfunktion for de diskrete stokastiske variable X_1 og X_2 er givet ved:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & 0 < x_1 < 2, \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{Ellers} \end{cases}$$

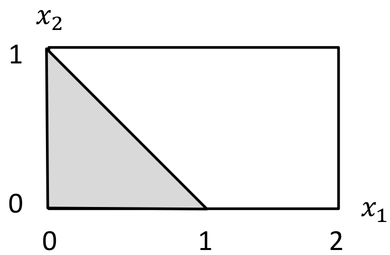
a) Vi skal bestemme $P(X_1 < 1, X_2 < 1) = F(1,1)$.

$$F(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} u \cdot v \, du \, dv = \int_0^{x_2} \left(\int_0^{x_1} u \cdot v \, du \right) dv = \int_0^{x_2} \left[\frac{1}{2} v \cdot u^2 \right]_0^{x_1} dv$$

$$= \int_0^{x_2} \frac{1}{2} v \cdot {x_1}^2 \, dv = \left[\frac{1}{4} {x_1}^2 \cdot v^2 \right]_0^{x_2} = \frac{1}{4} {x_1}^2 {x_2}^2$$

Således er $F(1,1) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

b) Vi skal bestemme $P(X_1 + X_2 < 1)$. Det svarer til at integrere $f(x_1, x_2)$ over den grå trekant i figuren herunder:



Vi kan integrere $f(x_1, x_2)$, hvor vi lader x_1 løbe fra 0 til 1 og for hver værdi af x_1, f.eks. v, integrerer vi x_2 fra 0 til $1 - v$. Dermed har vi opfyldt, at $x_1 + x_2 \leq 1$:

$$P(X_1 + X_2 < 1) = \int_0^1 \int_0^{1-v} u \cdot v \, du \, dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-v} u \cdot v \, du \right) dv = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} v \cdot u^2 \right]_0^{1-v} dv$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} v \cdot (1 - v)^2 \, dv = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} v^3 - v^2 + \frac{1}{2} v \right) dv$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} v^4 - \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} v^2 \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3 - 8 + 6}{24} = \frac{1}{24}$$

5.75

a) Den simultane kumulerede fordelingsfunktion blev bestemt i 5.73 a):

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{4} {x_1}^2 {x_2}^2$$

De marginale tæthedsfunktioner bestemmes:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, dx_2 = \int_0^1 x_1\, x_2\, dx_2 = \left[\frac{1}{2} x_1 \cdot {x_2}^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} x_1$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, dx_1 = \int_0^2 x_1\, x_2\, dx_1 = \left[\frac{1}{2} x_2 \cdot {x_1}^2\right]_0^2 = 2x_2$$

Dermed kan de marginale kumulerede fordelingsfunktioner bestemmes:

$$F_1(x_1) = \int_0^{x_1} f_1(u)\, du = \int_0^{x_1} \frac{1}{2} u\, du = \left[\frac{1}{4} u^2\right]_0^{x_1} = \frac{1}{4} {x_1}^2$$

$$F_2(x_2) = \int_0^{x_2} f_2(v)\, dv = \int_0^{x_2} 2v\, dv = [v^2]_0^{x_2} = {x_2}^2$$

De to stokastiske variabler X_1 og X_2 er uafhængige, for

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{4} {x_1}^2 {x_2}^2 = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$$

Der gælder tilsvarende, at

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \left(\frac{1}{2} x_1\right) \cdot (2x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$