Opgave: Strategisk terningspil

I et strategisk terningspil for to spillere er der fire terninger, som vi kan kalde A, B, C og D. Hvor normale terninger har øjnene 1, 2, 3, 4, 5 og 6, så har disse terninger følgende antal øjne på de seks sider:

A. Fire sider med 4 og to sider med 0
B. Alle seks sider med 3
C. To sider med 6 og fire sider med 2
D. Tre sider med 3 og tre sider med 1

Spillets regler er, at spiller nr. 1 vælger en terning, hvorefter spiller nr. 2 vælger en af de tre resterende terninger. Spillerne kaster hver deres terning, og den spiller, der slår det højeste antal, vinder runden.

For hver runde må spillerne vælge nye terninger, men altid så spiller nr. 1 vælger først.

Den spiller, der først har vundet 25 runder, har vundet spillet.

a. Beregn middelværdi for de fire terninger, altså hvor mange øjne slår man i gennemsnit?
b. Hvad er sandsynligheden for at spilleren med terning A vinder over spilleren med terning B?
c. Hvad er sandsynligheden for at spilleren med terning A vinder over spilleren med terning C?
d. Er det bedst at være spiller 1 (der altid vælger terning først) eller spiller 2?
e. Kan du lave en vinderstrategi for spillet?

Løsning

a. $\mu_A = \frac{4}{6} \cdot 4 + \frac{2}{6} \cdot 0 = \frac{16}{6} = 2.667$
$\mu_B = \frac{6}{6} \cdot 3 = 3.0$
$\mu_C = \frac{2}{6} \cdot 6 + \frac{4}{6} \cdot 2 = \frac{20}{6} = 3.333$
$\mu_D = \frac{3}{6} \cdot 5 + \frac{3}{6} \cdot 1 = \frac{18}{6} = 3.0$

b. Spilleren med terning A vinder de 4 ud af 6 gange, han slår 4, så sandsynligheden er
$P\big((A = 4) \cap (B = 3)\big) = \frac{2}{3}$

c. Spilleren med terning A vinder kun, når han slår 4, samtidig med at spilleren med terning C slår 2. Udfaldet af de to terningkast er uafhængige, så sandsynligheden er produktet af sandsynligheden for de enkelte udfald, d.v.s.
$P\big((A = 4) \cap (C = 2)\big) = P(A = 4) \cdot P(C = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4/9$

d. Tabellen nedenfor viser sandsynligheden for at jeg vinder, for hver kombination af min og modstanderens terninger. F.eks. vinder jeg 4 ud af 9 gange, hvis jeg har terning A og modstanderen har terning C, som beregnet i delspørgsmål c):

		Modstanderens terning			
		A	B	C	D
Min ter-ning	A	-	**2/3**	4/9	1/3
	B	1/3	-	**2/3**	1/2
	C	5/9	1/3	-	**2/3**
	D	**2/3**	1/2	1/3	-

Tabellen viser, at uanset hvilken terning min modstander har, så findes der en terning, som jeg kan vinde med i 2 ud af 3 spil (med sandsynlighed 2/3). Det giver mig en klar fordel af at være spiller nr. 2.

e. Vinderstrategien er, at være spiller nr. 2 og så vælge den terning, der er bedre end spiller 1's valgte terning. A er bedre end B, B er bedre end C, C er bedre end D og D er bedre end A.

Og så kan man jo undre sig over, at det kan lade sig gøre, at $A > B > C > D > A$!!