Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**Системное и прикладное программное обеспечение.
Программная инженерия.**

Лабораторная работа №3.

Дисциплина: Вычислительная математика.

Преподаватель: Малышева Татьяна Алексеевна.

Выполнил: Бусыгин Иван.

Группа: P3212.

Вариант: 6.

Санкт-Петербург

2022 год

Цель работы.

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Программная реализация.

Реализация метода трапеций на Python:

```
@dispatch(object, float, float, int)
def calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n):
  integral = func(a) + func(b)
  h = (b - a) / n

  x = a + h
  h *= 2
  sum = 0
  for i in range((n - 2) // 2 + 1):
    x += h
    sum += func(x)
  integral += sum * 4

  x = a + h
  sum = 0
  for i in range((n - 2) // 2):
    x += h
    sum += func(x)
  integral += sum * 2

  return integral * h / 6

@dispatch(object, float, float, float, int)
def calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, admissibleError, n):
  integral = calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n)
  while True:
    n *= 2
    newIntegral = calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n)
    if abs(newIntegral - integral) / 15 < admissibleError:
      return (newIntegral, n)
    integral = newIntegral
```

Реализация метода Симпсона на Python:

```
@dispatch(object, float, float, int)
def calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n):
  integral = func(a) + func(b)
  h = (b - a) / n

  x = a + h
  h *= 2
  sum = 0
  for i in range((n - 2) // 2 + 1):
    x += h
    sum += func(x)
  integral += sum * 4

  x = a + h
  sum = 0
```

```
  for i in range((n - 2) // 2):
    x += h
    sum += func(x)
  integral += sum * 2

  return integral * h / 6

@dispatch(object, float, float, float, int)
def calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, admissibleError, n):
  integral = calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n)
  while True:
    n *= 2
    newIntegral = calculateIntegralSimpsonMethod(func, a, b, n)
    if abs(newIntegral - integral) / 15 < admissibleError:
      return (newIntegral, n)
    integral = newIntegral
```

Пример работы программы.

```
Есть три функции:
 1. cos(x) - x
 2. x³ - 3,78x² + 1,25x + 3,49
 3. e^x - x³

Введите номер функции, на интервале которой необходимо вычислить интеграл: 1

Два способа приближённого вычисления интеграла:
 1. Метод трапеций
 2. Метод Симпсона

Введите номер метода для вычисления интеграла: 2

Введите точность (погрешность) вычислений: 0.0001

Введите левую границу интервала интегрирования: 0

Введите правую границу интервала интегрирования: 1

Найденное значение интеграла: 0.34004554936439585
Число разбиения интервала интегрирования: 2048

Программа завершила работу.
```

Вычисления вручную.

Точный расчёт:

$$\int_1^2 (3x^3+5x^2+3x-6)dx = \left(\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{257}{12} = 21{,}41(6)$$

Метод Ньютона–Котеса:

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i =$$

$$= \frac{41}{840}f(1)+\frac{9}{35}f\left(\frac{7}{6}\right)+\frac{9}{280}f\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{34}{105}f\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{280}f\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{9}{35}f\left(\frac{11}{6}\right)+\frac{41}{840}f(2) =$$

$$= \frac{41\cdot 5}{840}+\frac{9\cdot 1959}{35\cdot 216}+\frac{9\cdot 378}{280\cdot 27}+\frac{34\cdot 159}{105\cdot 8}+\frac{9\cdot 723}{280\cdot 27}+\frac{9\cdot 7515}{35\cdot 216}+\frac{41\cdot 44}{840} =$$

$$= \frac{205+1959+378+5406+723+7515+1804}{840} = \frac{257}{12} = 21{,}41(6)$$

Относительная погрешность: 0%

Метод средних прямоугольников:

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \left(f\left(\frac{13}{12}\right)+f\left(\frac{15}{12}\right)+f\left(\frac{17}{12}\right)+f\left(\frac{19}{12}\right)+f\left(\frac{21}{12}\right)+f\left(\frac{23}{12}\right)\right)\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11979+19737+29055+40077+52947+67809}{12^3\cdot 6} = \frac{18467}{864} = 21{,}37384(259)$$

Относительная погрешность: $\frac{21{,}417-21{,}374}{21{,}417} \approx 0{,}2\%$

Метод трапеций:

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \left(f(1)+2\cdot\left(f\left(\frac{7}{6}\right)+f\left(\frac{8}{6}\right)+f\left(\frac{9}{6}\right)+f\left(\frac{10}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)\right)+f(2)\right)\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1080+3918+6048+8586+11568+15030+9504}{6^4\cdot 2} = \frac{9289}{432} = 21{,}5023(148)$$

Относительная погрешность: $\frac{21{,}417-21{,}502}{21{,}417} \approx 0{,}4\%$

Метод Симпсона:

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \left(f(1)+4\cdot\left(f\left(\frac{7}{6}\right)+f\left(\frac{9}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)\right)+2\cdot\left(f\left(\frac{8}{6}\right)+f\left(\frac{10}{6}\right)\right)+f(2)\right)\cdot\frac{1}{18} =$$

$$= \frac{1080+7836+17172+30060+6048+11568+9504}{6^4\cdot 3} = \frac{257}{12} = 21{,}41(6)$$

Относительная погрешность: 0%

Вывод.

Освежил в памяти методы приближённого вычисления определённого интеграла и реализовал некоторые из них программно.