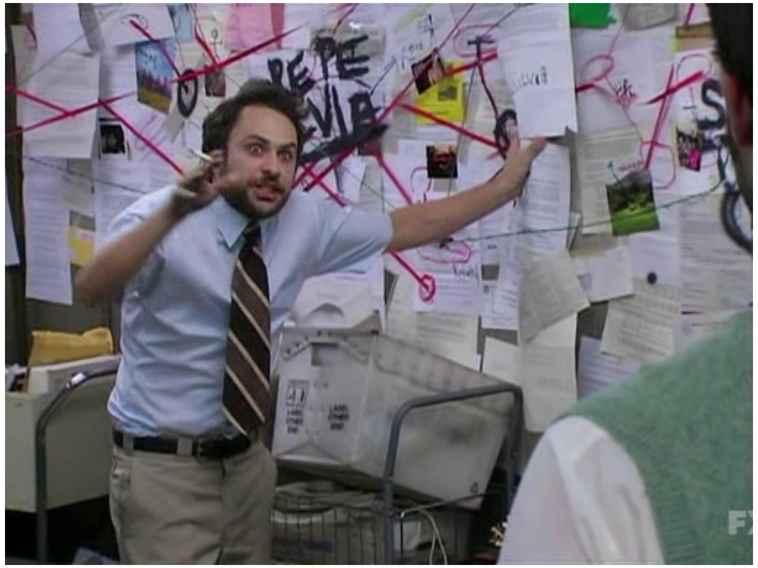
HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Technische Grundlagen der Informatik

Normalformen und Minimierung, Teil II

Prof. Dr.-Ing. Benjamin Weinert

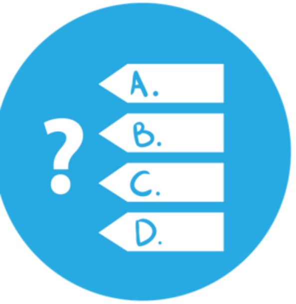


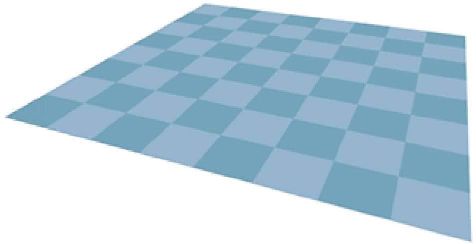
Gliederung

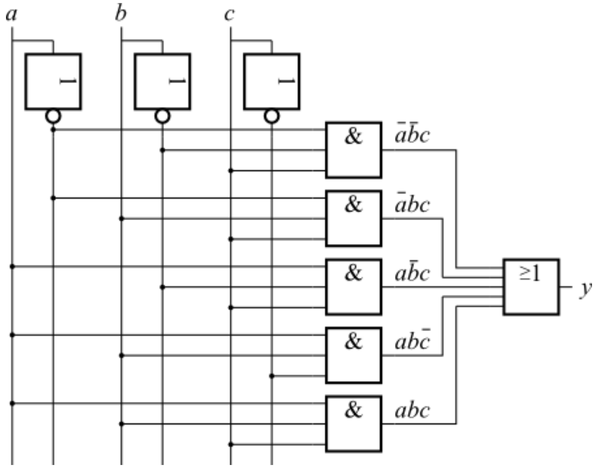
- Recap
- Verfahren von Quine und McCluskey

Recap

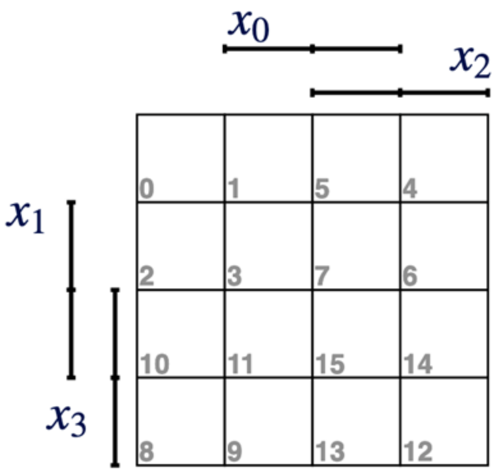
- Minterme & Maxterme
- Konjunktive Normalform vs Disjunktive Normalform
- Disjunktive Minimalform / Konjunktive Minimalform

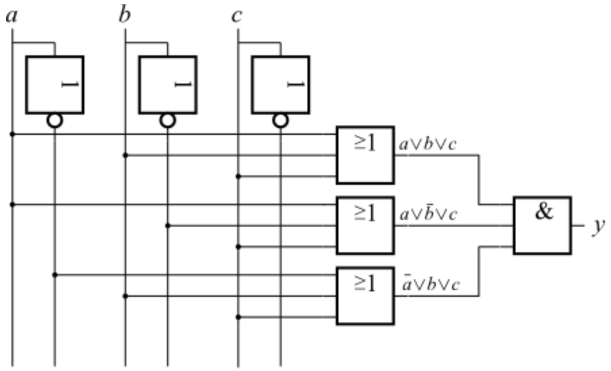






- KV-Diagramm
- Implikanten
- Don‘t Cares





Arten von Minimierungsverfahren

- Wir haben bisher zwei Arten von Minimierungsverfahren kennengelernt
  - Algebraische Verfahren
    - Vereinfachung mit Hilfe von Gesetzen der Booleschen Algebra
    - …
  - Graphische Verfahren
    - KV-Diagramme
- Die Verfahren eignen sich nur für Funktionen mit bis zu 5 oder 6 Variablen
  - Danach werden sie zu unübersichtlich
- Insgesamt gibt es **drei** Arten von Minimierungsverfahren
  - Algebraische Verfahren
  - Graphische Verfahren
  - **Tabellarische Verfahren**
    - **Quine-McCluskey Verfahren**
    - **…**
- Tabellarische Verfahren sind geeignet zur Bearbeitung größerer Variablenzahlen

Quine-McCluskey-Verfahren

- Verfahren zur Minimierung Boole'scher Funktionen
  - Im Gegensatz zur KV-Minimierung auch für **mehr als 4 Variablen** gut anwendbar
  - Relativ einfach für Computer implementierbar
  - Arbeitet nach dem gleichen Prinzip wie KV-Diagramme
  - **Terme**, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, **werden zusammengefasst**

- Ausgangspunkt: Wahrheitstabelle einer Funktion
  - Disjunktive und konjunktive Minimalformen können erzeugt werden
  - Das Verfahren wird im Folgenden für die disjunktive Minimalform erklärt
    - Ausgangspunkt sind die Minterme der Funktion

- Prinzipieller Ablauf
  - Phase 1: Finden der Primimplikanten
  - Phase 2: Aufstellen der Primimplikantentafel
  - Phase 3: Lösen des Überdeckungsproblems

Quine-McCluskey-Verfahren

Eingabe: Eine Funktion $y = \mathrm{f}(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$ der Stelligkeit n

- Angabe z.B. durch DNF
  Beispiel:

$$\begin{aligned} y = \mathrm{f}(x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) &= \\ &= m_0 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_{11} \vee m_{12} \vee m_{13} \vee m_{14} \\ &= \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \\ &\quad \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_3 \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee \\ &\quad x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \\ &\quad x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \end{aligned}$$

- oder Wahrheitstafel (siehe rechts)

	x_3	x_2	x_1	x_0	y
0:	0	0	0	0	1
1:	0	0	0	1	0
2:	0	0	1	0	0
3:	0	0	1	1	0
4:	0	1	0	0	1
5:	0	1	0	1	0
6:	0	1	1	0	1
7:	0	1	1	1	0
8:	1	0	0	0	0
9:	1	0	0	1	0
10:	1	0	1	0	0
11:	1	0	1	1	1
12:	1	1	0	0	1
13:	1	1	0	1	1
14:	1	1	1	0	1
15:	1	1	1	1	0

Ausgabe: Ein minimaler boolescher Ausdruck als ODER-Verknüpfung von Monomen (= UND-Verknüpfungen von Literalen)

- Möglichst wenig ODER-Verknüpfungen
- Möglichst wenig UND-Verknüpfungen

Phase 1: Finden der Primimplikanten

- Um die Primimplikanten zu finden, wird (wie bei den KV-Diagrammen) das Vereinigungstheorem verwendet:
  - $(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) = a$
- Bei KV-Diagrammen wird das Vereinigungstheorem rekursiv angewendet, indem immer größere Blöcke aus benachbarten Blöcken gebildet werden
- Beim Quine-McCluskey-Verfahren wird analog vorgegangen, nur dass statt mit graphischen Blöcken mit Tabelleneinträgen gearbeitet wird

Phase 1: Finden der Primimplikanten

- Die erste Tabelle („1. Quinesche Tabelle“) enthält die Implikanten der Ordnung 0
  - Sie wird aus der 1-Menge der Wahrheitstafel extrahiert
- Tipp: Sortieren Sie die Minterme nach Anzahl der 1er absteigend in der 1. Quineschen Tabelle

Wahrheitstafel:

	x_3	x_2	x_1	x_0	y
0:	0	0	0	0	1
1:	0	0	0	1	0
2:	0	0	1	0	0
3:	0	0	1	1	0
4:	0	1	0	0	1
5:	0	1	0	1	0
6:	0	1	1	0	1
7:	0	1	1	1	0
8:	1	0	0	0	0
9:	1	0	0	1	0
10:	1	0	1	0	0
11:	1	0	1	1	1
12:	1	1	0	0	1
13:	1	1	0	1	1
14:	1	1	1	0	1
15:	1	1	1	1	0

Implikanten (Ordnung 0):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0:	0	0	0	0	→
4:	0	1	0	0	→
6:	0	1	1	0	→
11:	1	0	1	1	✓
12:	1	1	0	0	→
13:	1	1	0	1	→
14:	1	1	1	0	→

Phase 1: Finden der Primimplikanten

- Die zweite Tabelle enthält die Implikanten der Ordnung 1
  - Sie wird aus der vorgegangenen Tabelle („Ordnung 0“) konstruiert,
  - **indem** diejenigen Zeilen **zusammengefasst** werden,
  - die sich in **genau einer Variablen unterscheiden**
- Implikanten, die zusammengefasst werden können, werden geeignet markiert
  - (hier wird das Zeichen → verwendet)
- Implikanten, die bereits zusammengefasst wurden, stehen weiter zur Verfügung
  - um mit anderen Implikanten zusammengefasst zu werden
- Implikanten, die **nicht** weiter zusammengefasst werden können,
  - sind die gesuchten **Primimplikanten**
  - Sie werden ebenfalls markiert (hier wird das Zeichen ✓ verwendet)

Implikanten (Ordnung 0):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0:	0	0	0	0	→
4:	0	1	0	0	→
6:	0	1	1	0	→
11:	1	0	1	1	✓
12:	1	1	0	0	→
13:	1	1	0	1	→
14:	1	1	1	0	→

Implikanten (Ordnung 1):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0, 4:	0	-	0	0	✓
4, 6:	0	1	-	0	→
4, 12:	-	1	0	0	→
6, 14:	-	1	1	0	→
12, 13:	1	1	0	-	✓
12, 14:	1	1	-	0	→

Implikanten (Ordnung 2):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
4, 6, 12, 14:	-	1	-	0	✓

- Das Verfahren wird für Implikanten höherer Ordnung rekursiv fortgesetzt
  - bis keine Zusammenfassung mehr möglich ist

Phase 2: Aufstellen der Primimplikantentafel

- Die Primimplikatentafel („2. Quinesche Tabelle“) besteht aus allen Primimplikanten
  - diese wurden in **Phase 1** mit ✓ markiert
- Zeilen:
  - Pro Primimplikant jeweils eine Zeile
- Spalten:
  - Jede Spalte steht für einen Minterm m_i der DNF
- In jeder Spalte wird markiert, ob der Primimplikant den Minterm überdeckt
  - hier wird das Zeichen ○ verwendet
- Ist der Primimplikant der einzige Primimplikant, der diesen Minterm überdeckt,
  - so wird er "**essentieller** Primimplikant" genannt und besonders markiert
  - hier wird das Zeichen ● verwendet)
- Essentielle Primimplikanten müssen in jedem Fall Teil des minimalen booleschen Ausdrucks sein und werden sofort übertragen

Phase 2:
Aufstellen der Primimplikantentafel

Implikanten (Ordnung 0):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0:	0	0	0	0	→
4:	0	1	0	0	→
6:	0	1	1	0	→
11:	1	0	1	1	√
12:	1	1	0	0	→
13:	1	1	0	1	→
14:	1	1	1	0	→

Implikanten (Ordnung 1):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0, 4:	0	-	0	0	√
4, 6:	0	1	-	0	→
4, 12:	-	1	0	0	→
6, 14:	-	1	1	0	→
12, 13:	1	1	0	-	√
12, 14:	1	1	-	0	→

Implikanten (Ordnung 2):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
4, 6, 12, 14:	-	1	-	0	√

Primimplikantentafel:

	x_3	x_2	x_1	x_0	0	4	6	11	12	13	14	
4, 6, 12, 14:	-	1	-	0		○	●		○		●	$(x_2\bar{x}_0)$
0, 4:	0	-	0	0	●	○						$(\bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0)$
12, 13:	1	1	0	-					○	●		$(x_3x_2\bar{x}_1)$
11:	1	0	1	1				●				$(x_3\bar{x}_2x_1x_0)$

Extrahierte essentielle Primimplikanten: $(\bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0)$, $(x_2\bar{x}_0)$, $(x_3\bar{x}_2x_1x_0)$, $(x_3x_2\bar{x}_1)$

Phase 2:
Aufstellen der Primimplikantentafel

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Wenn die essentiellen Primimplikanten alle Minterme überdecken
  - Ende des Algorithmus
- Der minimale boolesche Ausdruck (DMF) für das gezeigte Beispiel lautet daher:

$$y = (\bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_0) \vee (x_2\bar{x}_0) \vee (x_3\bar{x}_2x_1x_0) \vee (x_3x_2\bar{x}_1)$$

- Ist dies nicht der Fall, muss in Phase 3 eine geeignete Überdeckung gefunden werden

Phase 3:
Lösen des Überdeckungsproblems

- Die essentiellen Primimplikanten müssen in jedem Fall Teil des minimalen booleschen Ausdrucks sein
  - Daher können diese Zeilen nach der Übertragung in den booleschen Ausdruck in der Primimplikantentafel **gestrichen** werden
  - Ebenfalls können diejenigen Spalten **gestrichen** werden, die von den essentiellen Primimplikanten überdeckt werden
- Es entsteht eine "reduzierte Primimplikantentafel"

Phase 3: Lösen des Überdeckungsproblems

- Die reduzierte Primimplikantentafel kann folgendermaßen vereinfacht werden:
  - Zeilenregel:
    - Existiert für eine Zeile z_i eine andere Zeile z_j, die **die gleichen und** noch **weitere** Minterme überdeckt, so wird z_i gestrichen
    - Überdecken zwei Zeilen genau **gleich viele Minterme**, so wird die Zeile des Primimplikanten behalten, der **weniger Literale** enthält
  - Spaltenregel:
    - Wird ein Minterm immer überdeckt, wenn auch ein anderer überdeckt wird (alle Primterme behandeln diese beiden gleich), so kann eine der beiden zugehörigen Spalten gestrichen werden
    - Die Spaltenregel kann die reduzierte Primimplikantentafel übersichtlicher machen, ist aber letztendlich nicht wichtig für das Ergebnis des Verfahrens

Phase 3: Lösen des Überdeckungsproblems

Wahrheitstafel:

	x_3	x_2	x_1	x_0	y
0:	0	0	0	0	1
1:	0	0	0	1	0
2:	0	0	1	0	1
3:	0	0	1	1	1
4:	0	1	0	0	0
5:	0	1	0	1	0
6:	0	1	1	0	0
7:	0	1	1	1	1
8:	1	0	0	0	1
9:	1	0	0	1	1
10:	1	0	1	0	0
11:	1	0	1	1	0
12:	1	1	0	0	1
13:	1	1	0	1	0
14:	1	1	1	0	1
15:	1	1	1	1	1

Implikanten (Ordnung 0):

	x_3	x_2	x_1	x_0	
0:	0	0	0	0	→
2:	0	0	1	0	→
3:	0	0	1	1	→
7:	0	1	1	1	→
8:	1	0	0	0	→
9:	1	0	0	1	→
12:	1	1	0	0	→
14:	1	1	1	0	→
15:	1	1	1	1	→

Implikanten (Ordnung 1):

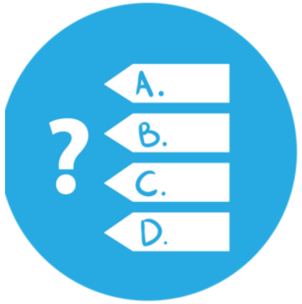
	x_3	x_2	x_1	x_0	
0, 2:	0	0	-	0	✓
0, 8:	-	0	0	0	✓
2, 3:	0	0	1	-	✓
3, 7:	0	-	1	1	✓
7, 15:	-	1	1	1	✓
8, 9:	1	0	0	-	✓
8, 12:	1	-	0	0	✓
12, 14:	1	1	-	0	✓
14, 15:	1	1	1	-	✓

Phase 3:
Lösen des Überdeckungsproblems

Primimplikantentafel:

	x_3	x_2	x_1	x_0	0	2	3	7	8	9	12	14	15	
0, 2:	0	0	-	0	○	○								$(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0)$
0, 8:	-	0	0	0	○				○					$(\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0)$
2, 3:	0	0	1	-		○	○							$(\bar{x}_3\bar{x}_2x_1)$
3, 7:	0	-	1	1			○	○						$(\bar{x}_3x_1x_0)$
7, 15:	-	1	1	1				○					○	$(x_2x_1x_0)$
8, 9:	1	0	0	-					○	●				$(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$
8, 12:	1	-	0	0					○		○			$(x_3\bar{x}_1\bar{x}_0)$
12, 14:	1	1	-	0							○	○		$(x_3x_2\bar{x}_0)$
14, 15:	1	1	1	-								○	○	$(x_3x_2x_1)$

Extrahierte essentielle Primimplikanten: $(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$



- Welche Spalten können entfernt werden?
- Welche Zeilen werden herausgelöscht?

Phase 3:
Lösen des Überdeckungsproblems

Reduzierte Primimplikantentafel (Iteration 0):

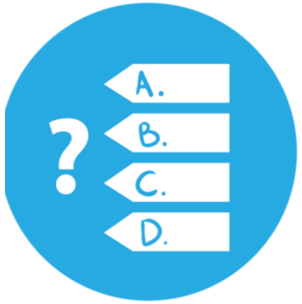
	x_3	x_2	x_1	x_0	0	2	3	7	12	14	15	
0, 2:	0	0	-	0	●	○						$(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0)$
2, 3:	0	0	1	-		○	○					$(\bar{x}_3\bar{x}_2x_1)$
3, 7:	0	-	1	1			○	○				$(\bar{x}_3x_1x_0)$
7, 15:	-	1	1	1				○			○	$(x_2x_1x_0)$
12, 14:	1	1	-	0					●	○		$(x_3x_2\bar{x}_0)$
14, 15:	1	1	1	-						○	○	$(x_3x_2x_1)$

Extrahierte essentielle Primimplikanten: $(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0)$, $(x_3x_2\bar{x}_0)$

Reduzierte Primimplikantentafel (Iteration 1):

	x_3	x_2	x_1	x_0	3	7	15	
3, 7:	0	-	1	1	●	○		$(\bar{x}_3x_1x_0)$
7, 15:	-	1	1	1		○	●	$(x_2x_1x_0)$

Extrahierte essentielle Primimplikanten: $(\bar{x}_3x_1x_0)$, $(x_2x_1x_0)$



- Welche Spalten können entfernt werden?
- Welche Zeilen können herausgelöscht werden?

Phase 3: Lösen des Überdeckungsproblems

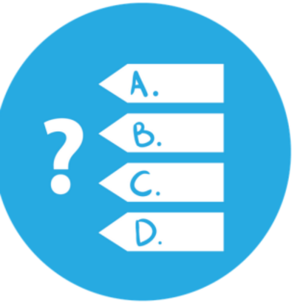
- Nach rekursiver Anwendung des Streichens der Zeilen der essentiellen Primimplikanten und Vereinfachung der reduzierten Primimplikantentafel terminiert das Verfahren häufig
- Der minimale boolesche Ausdruck kann dann durch die essentiellen Primimplikanten aus allen Rekursionsschritten gebildet werden
- Der minimale boolesche Ausdruck (DMF) für das gezeigte Beispiel lautet daher:

$$y = (x_3\bar{x}_2\bar{x}_1) \lor (\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_0) \lor (x_3x_2\bar{x}_0) \lor (\bar{x}_3x_1x_0) \lor (x_2x_1x_0)$$

- Es gibt aber auch zyklische Überdeckungsprobleme, bei denen das Verfahren **nicht** terminiert
  - Ob ein zyklisches Überdeckungsprobleme vorliegt, kann daran erkannt werden, dass in der Primimplikantentafel (oder der reduzierten Primimplikantentafel) keine essentiellen Primimplikanten gefunden werden können
  - Damit ist es nicht eindeutig, welcher Primimplikant in die Lösung aufgenommen werden soll und welcher nicht
  - Eine einfache Lösung ist es, alle möglichen Kombinationen von Primimplikanten auszuprobieren, und die Kombination zu verwenden, die eine Überdeckung mit minimalen Kosten liefert
    - Die Anzahl der möglichen Kombinationen steigt jedoch schnell an. Es gibt 2^k Kombinationen, wenn k die Anzahl der beteiligten Primimplikanten ist

Beispiel

- Bestimmen Sie die Primimplikanten mit dem Verfahren von Quine-McCluskey.
- Erstellen Sie die Primimplikantentafel.
- Geben Sie die disjunktive Minimalform an.



	x_2	x_1	x_0	y
0:	0	0	0	1
1:	0	0	1	1
2:	0	1	0	0
3:	0	1	1	1
4:	1	0	0	0
5:	1	0	1	0
6:	1	1	0	1
7:	1	1	1	1