HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Technische Grundlagen der Informatik

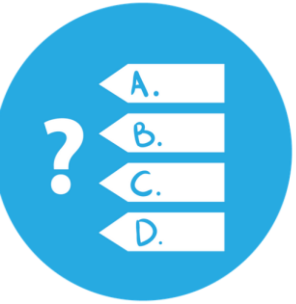
Normalformen und Minimierung

Prof. Dr.-Ing. Benjamin Weinert

Gliederung

- Minterme und Maxterme
- Disjunktive Normalform
- Konjunktive Normalform
- Zusammenhang der Normalformen
- Realisierung durch Logikgatter
- Vereinigungstheorem
- Karnaugh-Veitch-Diagramme

Recap



- Boolesche Algebra <-> Schaltalgebra
- Wahrheitstafeln
- Huntingtonsche Axiome
- (Vollständige) Operatorensysteme
- Boolesche Funktionen <-> Boolesche Ausdrücke

Recap: Literale und Monome

- Ein Literal ist eine Variable oder eine negierte Variable
  - a, b, ¬c, $\bar{x}$
- Ein Monom ist eine UND-Verknüpfung von Literalen
  - (a ∧ b ∧ ¬c) = $ab\bar{c}$, $xy\bar{z}$, …
- Die Schaltfunktion eines Monoms kann nur dann 1 sein
  - Wenn jedes vorkommende Literal 1 ist, d.h.
  - Jede vorkommende Variable ist mit 1 belegt
  - Jede vorkommende negierte Variable ist mit 0 belegt

- Beispiel: Das Monom $\bar{x}y\bar{z}$ ist also nur dann 1, wenn x = z = 0 und y = 1

Recap: Literale und Monome

- Ein Boole'scher Ausdruck, der aus einer ODER-Verknüpfung von Monomen besteht, ist genau dann 1, wenn mindestens eines der Monome zu 1 evaluiert

- So evaluiert der Ausdruck y =$(\bar{x}y\bar{z}$ v $x\bar{y}z)$ zu 1, wenn x = z = 0 und y= 1 ODER x = z = 1 und y = 0

- Durch die ODER-Verknüpfung von Monomen kann somit eine beliebige Schaltfunktion abgebildet werden

Normalformen

- Die Wahrheitstabelle ist eine eindeutige Definition einer booleschen Funktion
  - Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn die Wahrheitstafeldarstellung identisch ist

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

  - **Aber**: Es gibt unendlich viele verschiedene Realisierungen mittels Logikgattern oder Beschreibungen in Form eines booleschen Ausdrucks
- Normalformen (auch kanonische Formen):
  - Standarddarstellung für einen booleschen Ausdruck in einer eindeutigen algebraischen Form

Begriffsdefinition: Minterm

- Gegeben sei
  - eine boolesche Funktion $y = f(x_n, \dots, x_1, x_0)$
  - und die Literale $\hat{x}_i \in \{\overline{x}_i, x_i\}$
- Minterm $(\hat{x}_n \land \dots \land \hat{x}_2 \land \hat{x}_1 \land \hat{x}_0)$
- Der **Minterm** evaluiert für **genau eine bestimmte Konfiguration** der Variablen x_i **zu 1** und sonst zu 0
- Genauer gesagt: Der Minterm evaluiert genau dann zu 1, wenn für alle negierten Variablen x_i = 0 und alle nicht negierten x_i = 1
  - Beispiel für einen Minterm: $y = \overline{x}_2 \land \overline{x}_1 \land x_0$
- Ein Minterm ist ein Monom, in dem **<u>alle</u>** Variablen vorkommen **müssen**

Begriffsdefinition: Maxterm

- Gegeben sei
  - eine boolesche Funktion $y = f(x_n, \dots, x_1, x_0)$
  - und die Literale $\hat{x}_i \in \{\overline{x}_i, x_i\}$
- Maxterm $(\hat{x}_n \vee \dots \vee \hat{x}_2 \vee \hat{x}_1 \vee \hat{x}_0)$

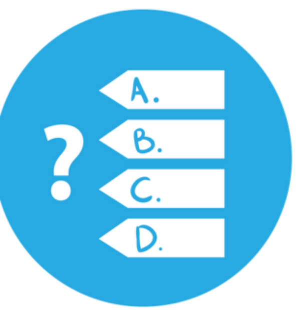
- Der **Maxterm** evaluiert für **genau eine** bestimmte **Konfiguration** der Variablen x_i **zu 0** und sonst zu 1

- Genauer gesagt: Der Maxterm evaluiert genau dann zu 0, wenn für alle negierten Variablen $x_i = 1$ und alle nicht negierten $x_i = 0$
  - Beispiel: $y = f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \vee x_0$

Disjunktive Normalform

- Eine disjunktive Normalform (DNF) ist eine **ODER-Verknüpfung** von Mintermen
- Alle Konfigurationen von Mintermen, in denen $\boldsymbol{y = f(x_n, \dots, x_1, x_0) = 1}$ müssen vorkommen
- Beispiel

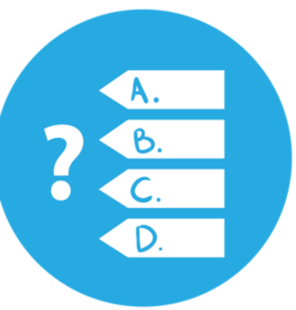
Index i	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



Konjunktive Normalform

- Eine konjunktive Normalform (KNF) ist eine UND-Verknüpfung von Maxtermen
- Alle Konfigurationen von Maxtermen, in denen $y = f(x_n, \dots, x_1, x_0) = \mathbf{0}$ müssen vorkommen
- Beispiel

Index i	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1



Zusammenhang zwischen den Normalformen

- Umrechnung DNF in KNF
  - Verwendung der Maxterme $\mathbf{M_i}$, die nicht zu den Mintermen $\mathbf{m_i}$ gehören
  - Beispiel

i	a	b	c	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

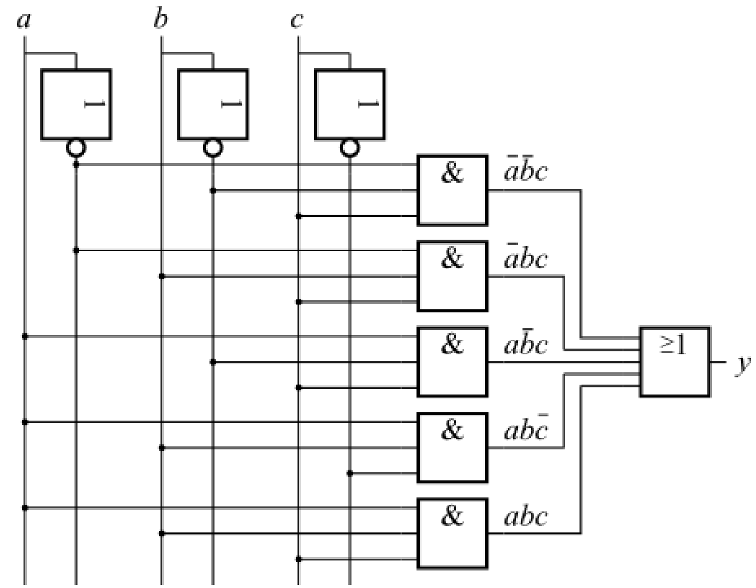
$$f(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{1,3,5,6,7\}} m_i = \bigwedge_{i \in \{0,2,4\}} M_i$$

- Umrechnung KNF in DNF
  - umgekehrte Vorgehensweise
  - Verwendung der Terme, die nicht zu den Maxtermen gehören als Minterme

Realisierung durch Logikgatter

- Jede booleschen Funktion $f(x_n, \dots, x_1, x_0)$ der Stelligkeit n lässt sich durch einen **Standard-Schaltkreis** realisieren, der der DNF bzw. KNF entspricht
- Im Fall der DNF werden die Minterme durch UND-Gatter mit n Eingängen realisiert
- Die Erweiterung der Minterme zur DNF erfolgt durch ein ODER-Gatter
- Beispiel
  - $y = f(a, b, c) = ab \vee c$

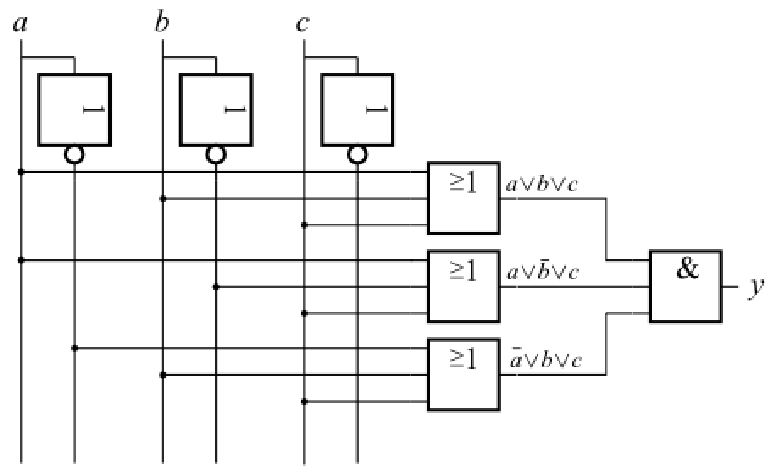
a	b	c	y
0	0	0	0
0	**0**	**1**	**1**
0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**



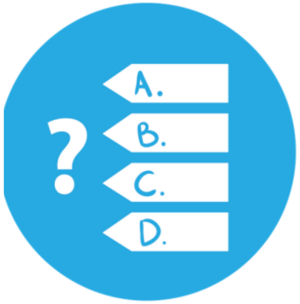
Realisierung durch Logikgatter

- Im Fall der KNF werden die Maxterme durch ODER-Gatter mit n Eingängen realisiert
- Die Erweiterung der Maxterme zur KNF erfolgt durch ein UND-Gatter
- Beispiel
  - $y = f(a, b, c) = ab \lor c$

a	b	c	y
0	**0**	**0**	**0**
0	0	1	1
0	**1**	**0**	**0**
0	1	1	1
1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Aufgabe



- Was ist die DNF für folgende Boolesche Funktion?

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

  - a) $abc \, V \, a\bar{b}c \, V \, \bar{a}\bar{b}\bar{c}$
  - b) $\bar{a}\bar{c} \, V \, abc$
  - c) $\bar{a}b\bar{c} \, V \, \bar{a}\bar{b}\bar{c} \, V \, abc$
  - d) keins davon

- Wie sieht das Logikgatter für die DNF aus?

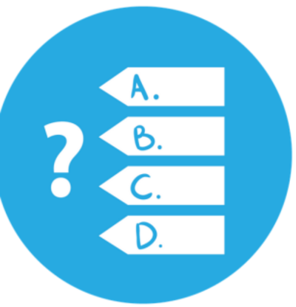
Exkurs: Vereinigungstheorem

- Das Vereinigungstheorem ist eine wesentliche Grundlage für die systematische Minimierung von Funktionen:
  - $(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) = a$
- Grundsatz zur Vereinfachung bei zweistufiger Logik (ODER-Verknüpfung von Monomen)
  - Sind in der "1"-Menge zwei Monome, die die sich nur in einer Variablen unterscheiden,
    - dann können diese zusammengefasst werden.
  - Zur Abdeckung dieser beiden Elemente der "1"-Menge kann ein einzelnes Monom verwendet werden, in welchem diese Variable nicht mehr vorkommt
- Beispiel
  - b kommt negiert und nicht-negiert vor
  - y = (¬a¬b) V (¬ab) = ¬a

b	a	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Minimierung

- Die DNF ergibt sich durch eine ODER-Verknüpfung aller Minterme
- Muss für jedes Element $y = f(x_n, \dots, x_1, x_0) = 1$ ein Minterm erzeugt werden?



a)

x_3	x_2	x_1	x_0	y
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**

$$y = x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$$

b)

x_3	x_2	x_1	x_0	y
0	0	1	1	**1**
1	0	1	1	**1**

$$y = \overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_0$$

c)

x_3	x_2	x_1	x_0	y
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**

$$/$$

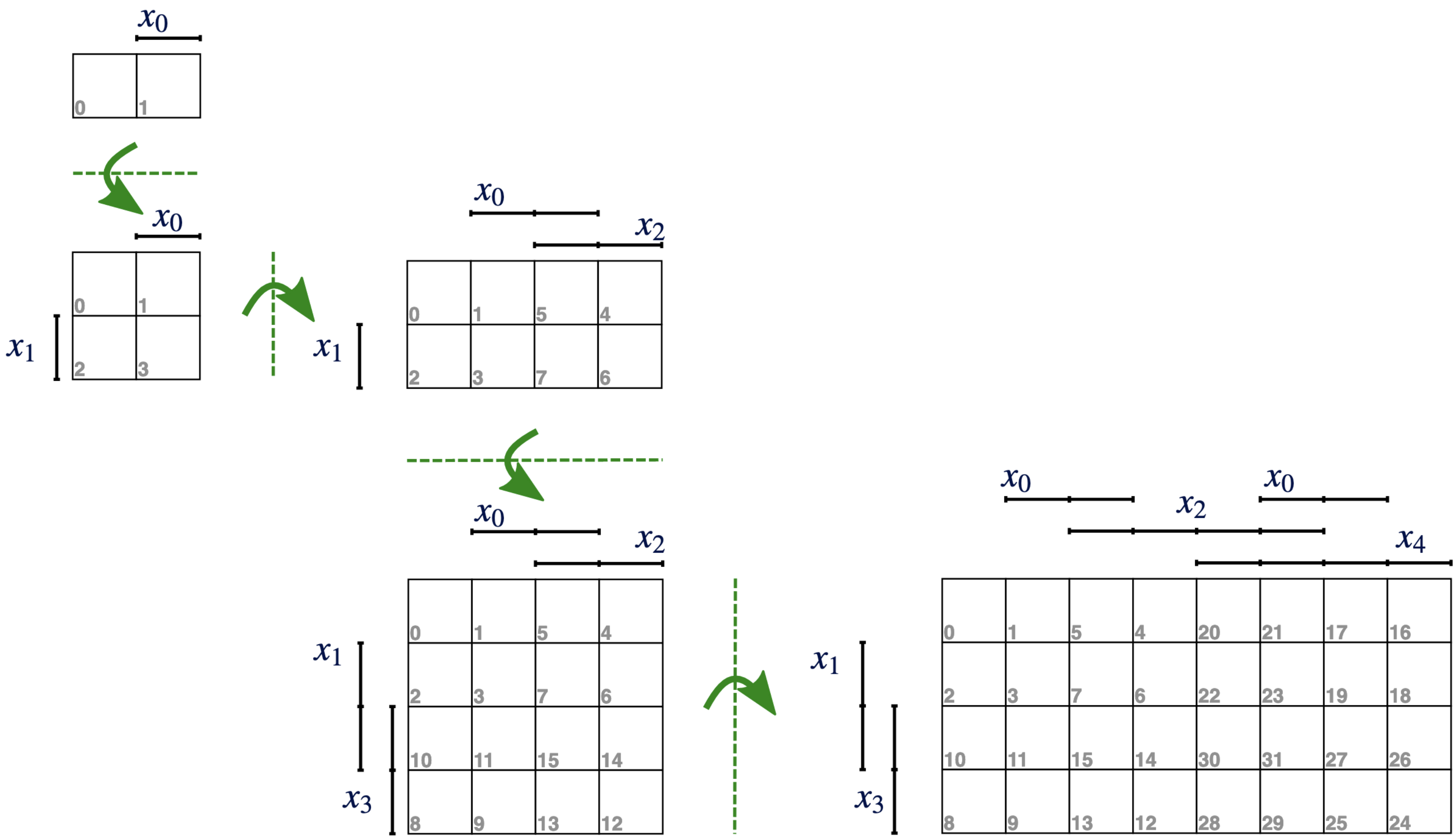
Welche Regel lässt sich hier ableiten?

- Eine Variable x_i heißt **gebunden**, falls sie in beiden Belegungen den gleichen Wert besitzt. Ist die Variable x_i unterschiedlich belegt, ist sie **frei**
- Zwei Variablenbelegungen heißen **benachbart**, wenn sie sich in **genau einer** freien Variablen unterscheiden
- Zwei Variablenbelegungen lassen sich genau dann durch einen einzigen konjunktiv verknüpften Term repräsentieren, wenn sie benachbart sind
  - Eine Zusammenfassung ist bei **zwei** oder **mehr** freien Variablen **nicht** möglich

Karnaugh-Veitch-Diagramme

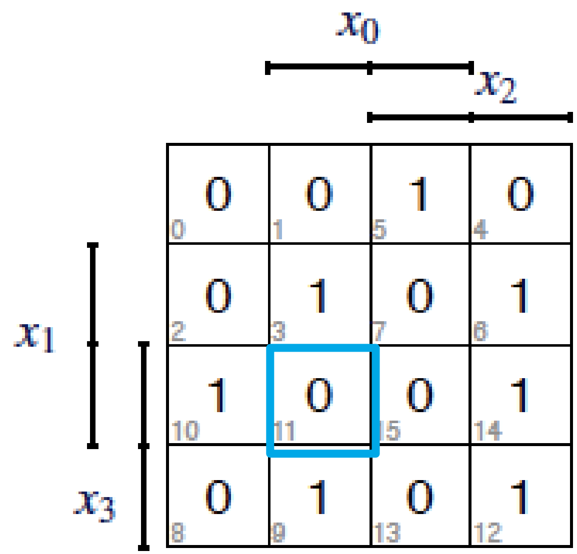
- dienen zur übersichtlichen Darstellung und systematischen Vereinfachung boolescher Funktionen
- Ziel
  - Umwandlung einer disjunktiven Normalform in einen **minimalen** disjunktiven logischen Ausdruck (minimale ODER-Verknüpfung von Monomen)
- Sie wurden
  - 1952 von Edward W. Veitch entworfen und
  - 1953 von Maurice Karnaugh zu ihrer heutigen Form weiterentwickelt

Konstruktion von KV-Diagrammen



Variablenzuordnung im KV-Diagramm

- Jede Zelle hat eine eindeutige Variablenzuordnung, die an den Rändern abgelesen werden kann
  - Feld 11 hat z.B. die Zuordnung $x_0\, x_1\, \overline{x_2}\, x_3$

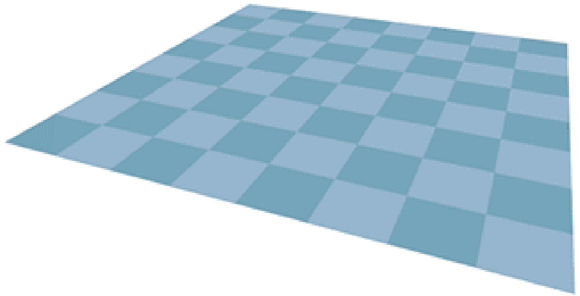


- Der Index in den Zellen gibt den Index der zur Zelle gehörenden Variablenbelegung an (Variablen in **umgekehrter** Reihenfolge)
  - Feld 11 = $(1011)_2$ = $x_3\, \overline{x_2}\, x_1\, x_0$

- Einfache Eintragung der Feldindizes bei spiegelbildlicher Ergänzung:
  - Bei Erweiterung von k auf k +1 Variable: Addition von 2^k

Konstruktion von KV-Diagrammen

- **Jede Zelle** eines KV-Diagramms **entspricht genau einer Zeile einer Wahrheitstafel** und wird durch Übertragung der Funktionswerte ausgefüllt
- Das KV-Diagramm einer boolesche Funktion $f(x_n, \ldots, x_1, x_0)$ der Stelligkeit n hat 2^n Zellen
- Beim Hinzufügen einer neuen Variablen x_i wird das bisherige KV-Diagramm durch abwechselndes vertikales und horizontales Spiegeln erzeugt
- Dabei verdoppeln sich jeweils die Anzahl der Zellen
- Benachbarte Zellen unterscheiden sich in genau einer Variablen
- Zellen an der linken und rechten (bzw. oberen und unteren) Kante des Diagramms sind ebenfalls benachbart („warp-around")



- Bei 5 Variablen ist der Bereich für x_0 räumlich gespalten
- Allgemein gilt: Bei n>4 Variablen sind die Bereiche für n-4-Variablen räumlich gespalten

Übertragung Wahrheitstafel in KV-Diagramm

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Für eine Funktion $y = f(x_1, x_0)$ wird folgendes Diagramm konstruiert

x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	2
1	1	0	3

		x_0
	1 0	0 1
x_1	1 2	0 3

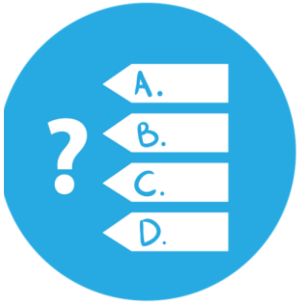
- Für eine Funktion $y = f(x_2, x_1, x_0)$ wird folgendes Diagramm konstruiert

x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	0	3
1	0	0	1	4
1	0	1	1	5
1	1	0	1	6
1	1	1	1	7

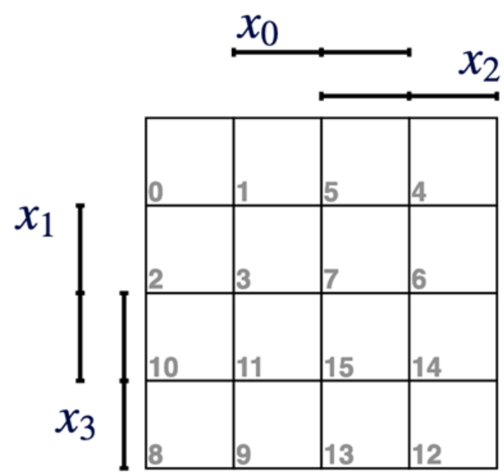
		x_0	x_0, x_2	x_2
	0 0	0 1	1 5	1 4
x_1	1 2	0 3	1 7	1 6

Übertragung Wahrheitstafel in KV-Diagramm

- Konstruieren Sie für eine Funktion $y = f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ mit entsprechender Wahrheitstafel ein KV-Diagramm

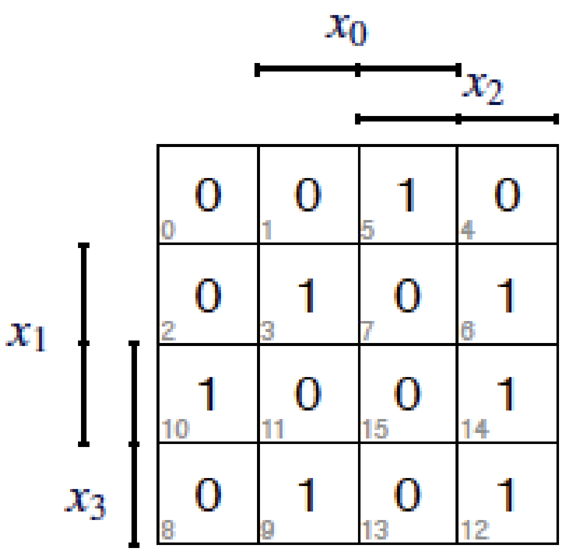


x_3	x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	6
0	1	1	1	0	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	1	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	0	11
1	1	0	0	1	12
1	1	0	1	0	13
1	1	1	0	1	14
1	1	1	1	0	15



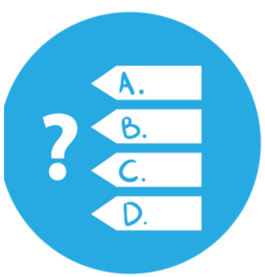
Übertragung Wahrheitstafel in KV-Diagramm

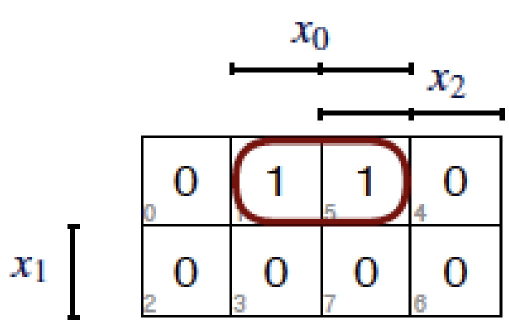
x_3	x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	6
0	1	1	1	0	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	1	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	0	11
1	1	0	0	1	12
1	1	0	1	0	13
1	1	1	0	1	14
1	1	1	1	0	15



Karnaugh-Veitch-Diagramme

- Zur Konstruktion der bisherigen Diagramme wurde von einer Wahrheitstafel ausgegangen
- Nun soll aus einem Diagramm eine **minimale** Oder-Verknüpfung von Monomen abgelesen werden
- Dazu werden die verwendeten Monome so gewählt, dass möglichst viele "Einsen" gemeinsam abgelesen werden
- Ein Monom entspricht dabei einem **rechteckigen** Block im KV-Diagramm
- Somit werden möglichst große Blöcke gesucht, welche die 1-Menge im KV-Diagramm überdecken





$$y = \bar{x}_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 = \bar{x}_1x_0$$

Überdeckung von 1-Mengen in KV-Diagrammen

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

		x_0	x_0 x_2	x_2
	0	0	1	1
x_1	0	0	0	0

$$y = x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1$$

		x_0	x_0 x_2	x_2
	0	0	1	0
x_1	0	0	1	0

$y =$

		x_0	x_0 x_2	x_2
	0	0	0	1
x_1	0	0	0	1

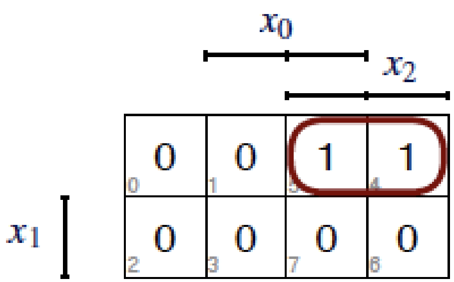
$y =$

		x_0	x_0 x_2	x_2
	0	0	1	1
x_1	0	0	1	1

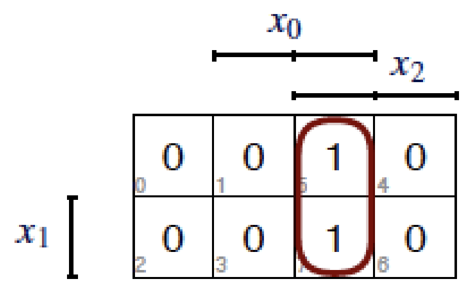
$y =$

Überdeckung von 1-Mengen in KV-Diagrammen

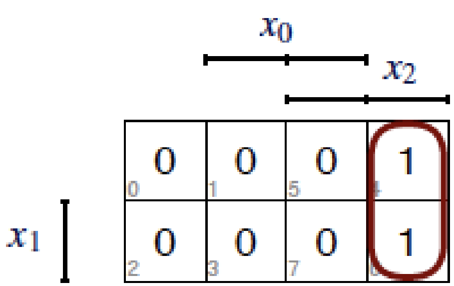
HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



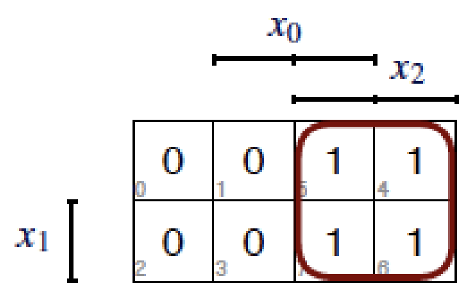
$$y = x_2\bar{x}_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_1$$



$$y = x_2x_1x_0 \vee x_2\bar{x}_1x_0 = x_2x_0$$



$$y = x_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2x_1\bar{x}_0 = x_2\bar{x}_0$$

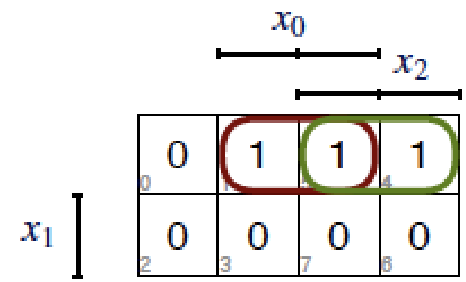


$$y = x_2$$

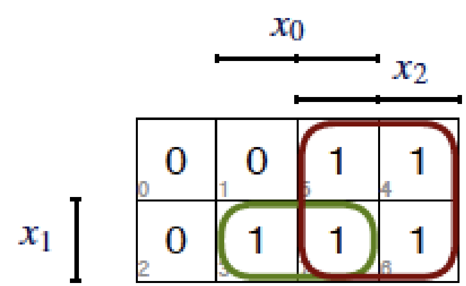
Überdeckung von 1-Mengen in KV-Diagrammen

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Die Blöcke dürfen sich überlappen
- Blöcke haben **immer Zweierpotenzen** als Höhe und Breite.
  - In diesem Beispiel ist es daher **nicht** möglich, einen **3 * 1 Block** zu verwenden.
  - **Stattdessen** ergeben sich **zwei 2 * 1 Blöcke**
- Es gibt häufig mehrere Möglichkeiten die 1-Menge zu überdecken.
  - Es wird **immer** diejenige ausgewählt, die auf **möglichst wenige Oder-Verknüpfungen** führt (d.h. möglichst große Blöcke und davon wenige)



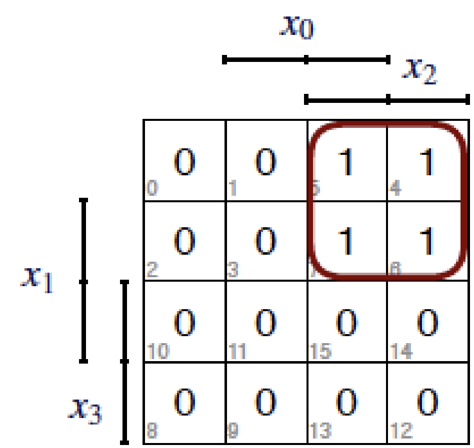
$$y = \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1$$



$$y = x_1 x_0 \vee x_2$$

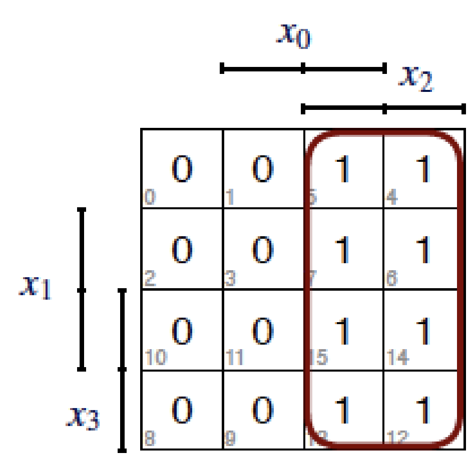
Überdeckung von 1-Mengen in KV-Diagrammen

- Es ist zu erkennen, dass bei größeren Blöcken das Vereinigungstheorem wiederholt angewendet wird, indem immer größere Blöcke aus benachbarten Blöcken gebildet werden



- In dem Beispiel rechts werden aus zwei 2 * 1 Blöcken ein 2 * 2 Block

$$
\begin{aligned}
y &= \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \\
&= \bar{x}_3 x_2 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_0 \\
&= \bar{x}_3 x_2
\end{aligned}
$$

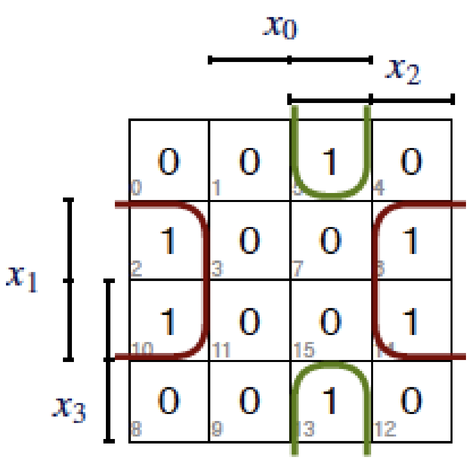


- und in diesem Beispiel aus zwei 2 x 2 Blöcken ein 4 * 2 Block:

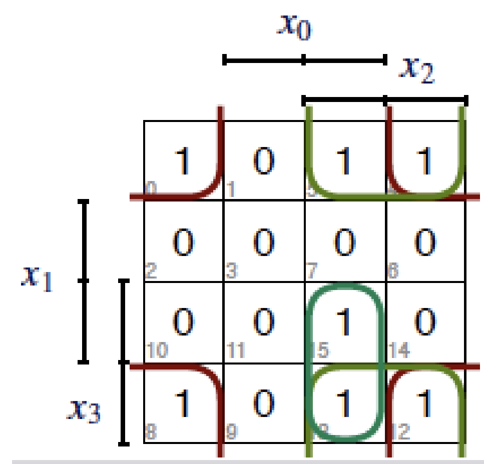
$$
\begin{aligned}
y &= \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \\
&\vee x_3 x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_1 \bar{x}_0 \\
&= \bar{x}_3 x_2 x_0 \vee \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_0 \vee x_3 x_2 x_0 \vee x_3 x_2 \bar{x}_0 \\
&= \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 x_2 \\
&= x_2
\end{aligned}
$$

Überdeckung von 1-Mengen in KV-Diagrammen

- Die Blöcke können auch über die Ränder hinweg gebildet werden („warp around“).



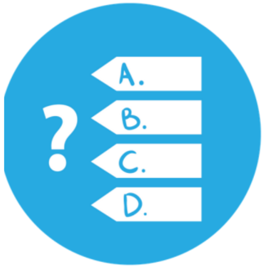
$$y = x_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1 x_0$$



$$y = \bar{x}_1\bar{x}_0 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_0$$

Beispiele mit 3 Variablen

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



- Identifizieren Sie möglichst effektiv Blöcke von 1-Mengen und beschreiben Sie die Funktion in disjunktiver Form.

a)

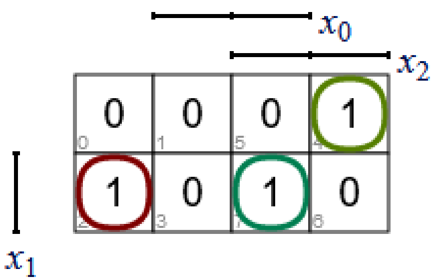
		x_0	x_0	
			x_2	x_2
	0	0	0	1
x_1	1	0	1	0

b)

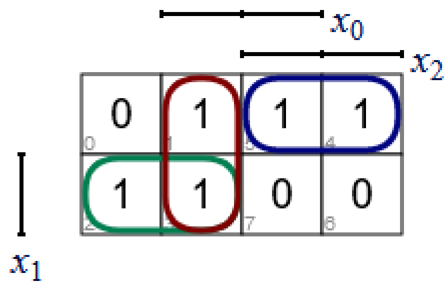
		x_0	x_0	
			x_2	x_2
	0	1	1	1
x_1	1	1	0	0

c)

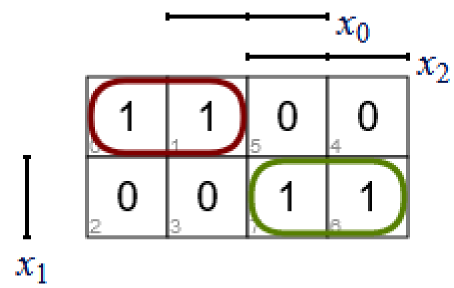
		x_0	x_0	
			x_2	x_2
	1	1	0	0
x_1	0	0	1	1



$y = (\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0) \vee$
$(x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0) \vee (x_2 x_1 x_0)$

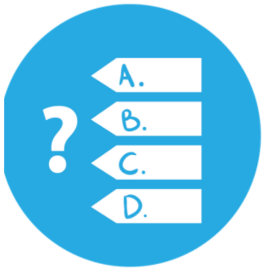


$y = (\bar{x}_2 x_1) \vee (x_2 \bar{x}_1) \vee$
$(\bar{x}_2 x_0)$



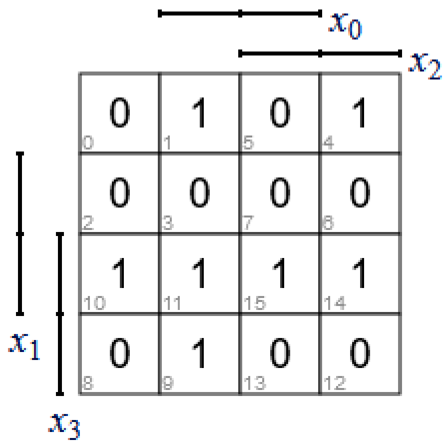
$y = (\bar{x}_2 \bar{x}_1) \vee (x_2 x_1)$

Beispiele mit 4 Variablen

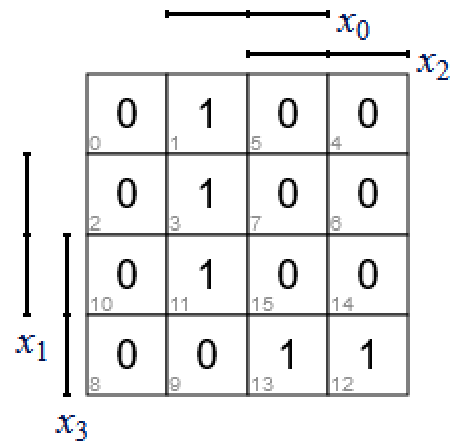


- Identifizieren Sie möglichst effektiv Blöcke von 1-Mengen und beschreiben Sie die Funktion in disjunktiver Form.

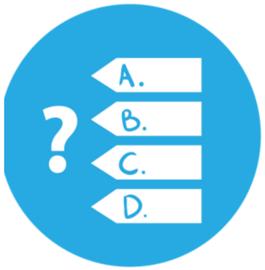
a)



b)

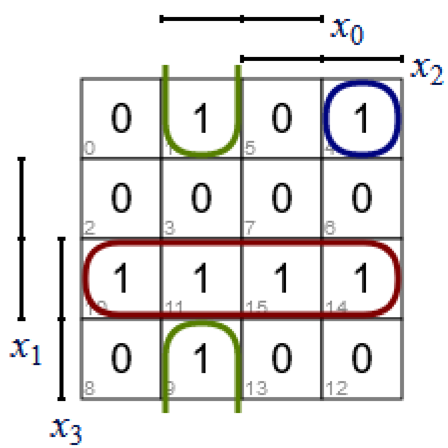


Beispiele mit 4 Variablen



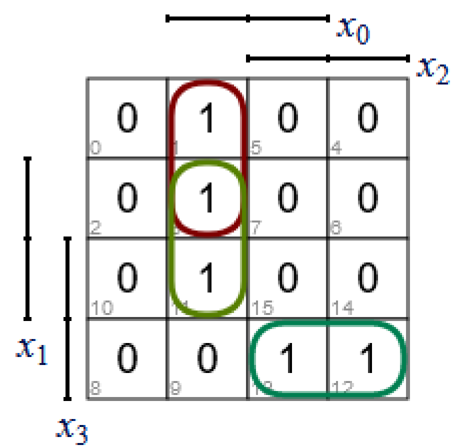
- Identifizieren Sie möglichst effektiv Blöcke von 1-Mengen und beschreiben Sie die Funktion in disjunktiver Form

a)



$y = (\bar{x}_2\bar{x}_1x_0) \lor$
$(\bar{x}_3x_2\bar{x}_1\bar{x}_0) \lor (x_3x_1)$

b)



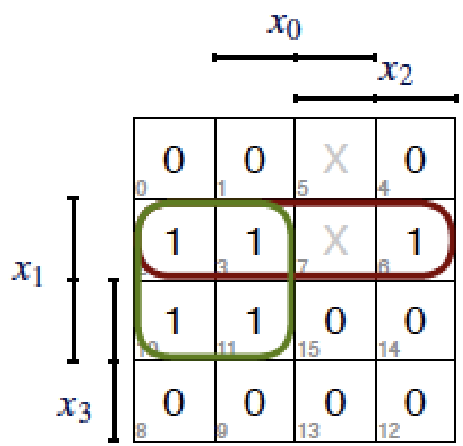
$y = (\bar{x}_3\bar{x}_2x_0) \lor$
$(\bar{x}_2x_1x_0) \lor (x_3x_2\bar{x}_1)$

Don't-Cares in KV-Diagrammen

HOCHSCHULE OSNABRÜCK
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

- Don't-Cares sind Funktionswerte, die beliebig sind
  - können als Nullen oder Einsen behandelt werden

x_3	x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	X	5
0	1	1	0	1	6
0	1	1	1	X	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	1	11
1	1	0	0	0	12
1	1	0	1	0	13
1	1	1	0	0	14
1	1	1	1	0	15



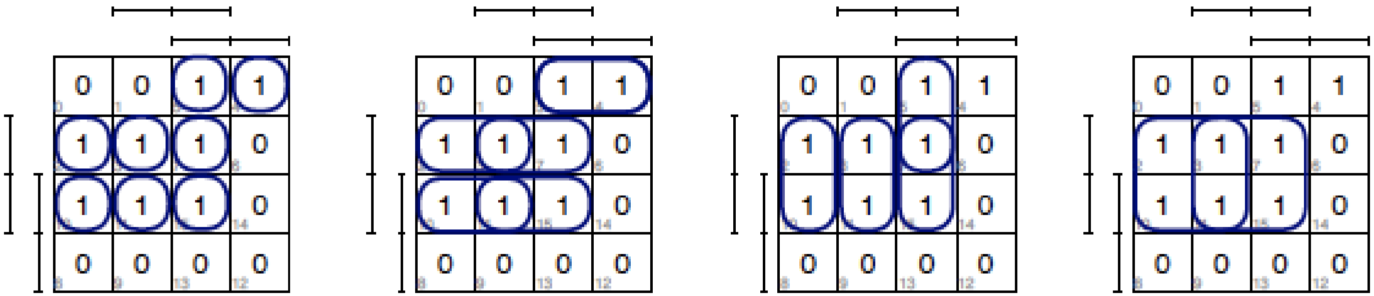
$$y = \bar{x}_3 x_1 \vee \bar{x}_2 x_1$$

Wichtige Begriffe

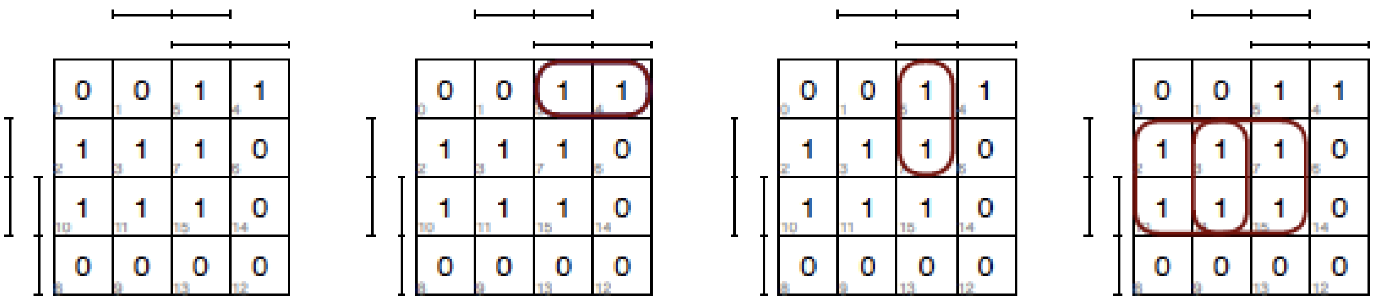
- **Implikant**
  - Monom (bzw. zugehöriger Block), der eine Untermenge der 1-Menge (oder don't cares) abdeckt
  - z.B. 1 x 1 Block, 2 x 1 Block, 2 x 2 Block, 4 x 2 Block, usw.
- **Primimplikant**
  - Primimplikanten können nicht (mehr) mit anderen benachbarten Implikanten zusammengefasst werden, um einen größeren Block zu bilden
- **Essentieller Primimplikant**
  - Ein Primimplikant ist **essentiell**, wenn er als **einziger** Primimplikant ein bestimmtes **Element** der 1-Menge **abdeckt**
  - Ein **essentieller** Primimplikant wird somit in **jedem Fall** für die Abdeckungen der 1-Menge **benötigt**
  - Don't cares werden genutzt, um Primimplikanten zu bilden, aber nicht, um einen Primimplikanten als essentiell anzusehen

Wichtige Begriffe

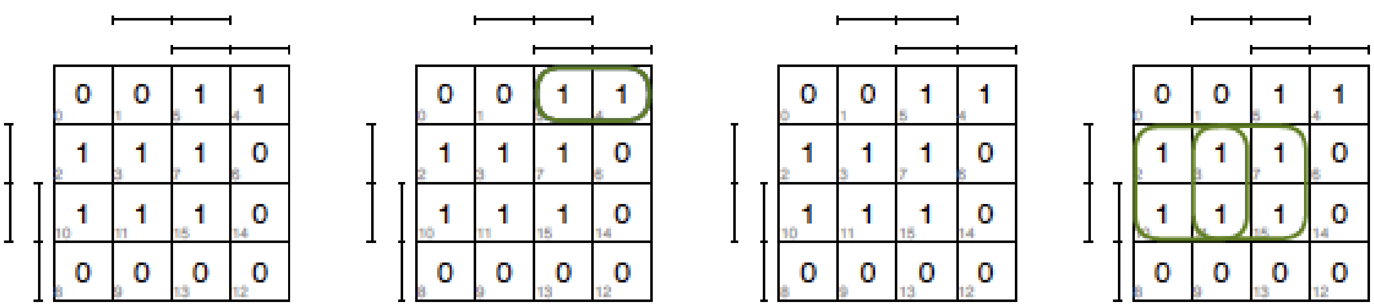
Implikanten



Primimplikanten



Essentielle Primimplikanten



Vorgehensweise bei der Minimierung

- **Schritt 1:** Finden Sie alle Primimplikanten durch Zusammenfassen horizontaler und vertikaler benachbarter 1-en zu möglichst großen Blöcken
  - auch über die Ränder hinweg
  - **Höhe und Breite der Blöcke müssen Potenzen von 2 sein, also 1, 2, 4, 8 usw.**
- **Schritt 2:** Überdecke, Sie die 1-Menge im KV-Diagramm mit einer minimalen Auswahl von Primimplikaten
  - Wird eine 1 nur von einem bestimmten Primimplikanten überdeckt, so ist dieser essentiell und damit Teil der Überdeckungsmenge
  - Alle 1-en, die von einem essentiellen Primimplikanten überdeckt werden, brauchen nicht mehr untersucht zu werden
  - Wenn noch 1-en existieren, die nicht durch essentielle Primimplikanten abgedeckt sind, wähle die kleinste Anzahl von Primimplikanten, die die verbleibenden 1-en abdecken.
  - Dabei werden Primimplikanten bevorzugt, die zu großen Blöcken gehören

Beispiel: 2-bit-Komparator

- Übertragen Sie die Wahrheitstabelle in ein KV-Diagramm, identifizieren Sie die Primimplikanten und beschreiben die Funktionen für l, e, g

$l = (ab < cd)$ (less)

$e = (ab == cd)$ (equal)

$g = (ab > cd)$ (greater)

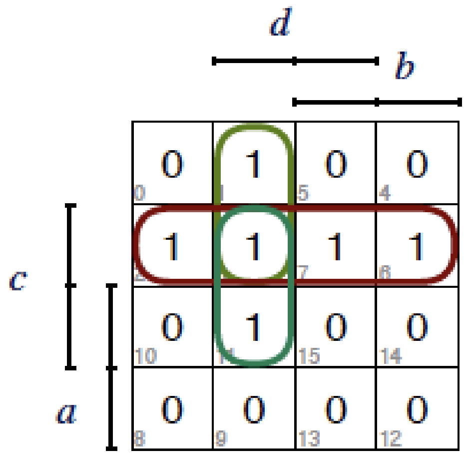
a	b	c	d	l	e	g	KV-Zelle
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	3
0	1	0	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	5
0	1	1	0	1	0	0	6
0	1	1	1	1	0	0	7
1	0	0	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	1	0	0	1	0	10
1	0	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	1	12
1	1	0	1	0	0	1	13
1	1	1	0	0	0	1	14
1	1	1	1	0	1	0	15

Beispiel: 2-bit-Komparator -> Lösung l

$l = (ab < cd)$ (less)

$e = (ab == cd)$ (equal)

$g = (ab > cd)$ (greater)



Abgelesene Lösung für l:

$l = \bar{a}\bar{b}d \vee \bar{a}c \vee \bar{b}cd$

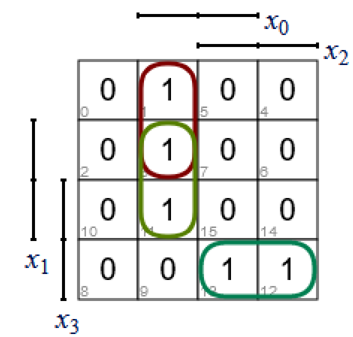
a	b	c	d	l	e	g	KV-Zelle
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	3
0	1	0	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	5
0	1	1	0	1	0	0	6
0	1	1	1	1	0	0	7
1	0	0	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	1	0	0	1	0	10
1	0	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	1	12
1	1	0	1	0	0	1	13
1	1	1	0	0	0	1	14
1	1	1	1	0	1	0	15

Zusammenfassung

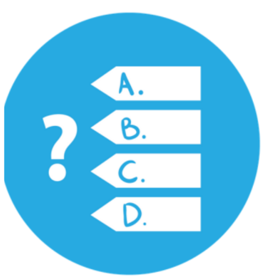
- Minterme $(\hat{x}_n \wedge \ldots \wedge \hat{x}_2 \wedge \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_0)$
- Maxterme $(\hat{x}_n \vee \ldots \vee \hat{x}_2 \vee \hat{x}_1 \vee \hat{x}_0)$

- Disjunktive Normalform: Eine ODER-Verknüpfung von Mintermen
- Konjunktive Normalform: Eine UND-Verknüpfung von Maxtermen

- KV-Diagramm zur Vereinfachung;
  Bildung der Disjunktiven Minimalform (D**M**F)



$y = (\bar{x}_3\bar{x}_2x_0) \vee$
$(\bar{x}_2x_1x_0) \vee (x_3x_2\bar{x}_1)$



Lässt sich das KV-Diagramm auch „konjunktiv“ nutzen?