定义1：设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义，对应自变量的改变量 $\Delta x$ ，有函数的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称该极限为$f(x)$ 在 $x_0$的导数，记作 $f'(x_0)$ 。

引理1（导数公式1）：常数函数的导数处处为零。

证明：设 $f(x)=C$ 。

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$

引理2：部分三角函数和差化积公式

$\sin\alpha-\sin\beta=\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2})-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2})$

$=(\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}))-$

$(\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})-\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}))$

$=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$\cos\alpha-\cos\beta=\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2})-\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2})$

$=(\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}))-$

$(\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}))$

$=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

引理3：部分等价无穷小

（1） $\sin x\sim x(x\to 0)$

（2） $e^x-1\sim x(x\to 0)$

（3） $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$

（1）的证明略去，（2）（3）的证明见以下文章：

https://zhuanlan.zhihu.com/p/91881261

引理4：导数的四则运算，设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导。

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

（2）$[cu(x)]'=cu'(x)$

（3）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（4） $[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

（5） $[\frac{1}{v(x)}]'=\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$

证明：（1）（2）（3）请读者自行验证，下面我们证明在后文主要用到的（4）（5）

$[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta xv(x+\Delta x)v(x)}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta xv(x+\Delta x)v(x)}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)u(x)-u(x)v(x)}{\Delta xv(x+\Delta x)v(x)}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$

$- \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$

$= u'(x)\frac{v(x)}{v^2(x)} - v'(x)\frac{u(x)}{v^2(x)}$

$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

直接令 $u(x)=1$ 即可得（5）

引理5：复合函数的导数，设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导。

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

证明：

$f(g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$= f'(g(x))g'(x)$

引理6：设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有反函数 $x=g(y)$ ，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一点 $x_0$ 可导，且 $f(x_0)=y_0$。则若 $f(x_0)' \neq 0$ ， $g(y_0)' = \frac{1}{f(x_0)'}$ ，若$f(x_0)'=0$ ， $g(y_0)'=\infty$。

证明：记 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$g(y_0)' = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{y_0+\Delta y-y_0}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0+\Delta x-x_0}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$

$= \frac{1}{f(x_0)'}$

导数公式2： $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

证法一：设 $f(x)=x^\mu$

$f(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^\mu \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\Delta x} = x^\mu \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\mu \ln(1+\frac{\Delta x}{x})}-1}{\Delta x} = x^\mu \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mu \ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$

$= \mu x^{\mu-1} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$

$= \mu x^{\mu-1}$

证法二：设 $f(x)=x^\mu = e^{\mu \ln x}$

根据复合函数求导法则： $f(x)' = e^{\mu \ln x}(\mu \ln x)' = x^\mu \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$

导数公式3： $(\sin x)' = \cos x$

证明：设 $f(x)=\sin x$

$f(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(\frac{2x+\Delta x}{2}) = \cos x$

导数公式4： $(\cos x)' = -\sin x$

证明：设 $f(x)=\cos x$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(\frac{2x+\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(\frac{2x+\Delta x}{2}) = -\sin x$$

导数公式5： $(\tan x)' = \sec^2 x$

证法一：设 $f(x) = \tan x$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(x+\Delta x)-\tan(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \sin x\cos(x+\Delta x)}{\Delta x\cos(x)\cos(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x\cos(x)\cos(x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x)\cos(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

证法二：设 $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$f(x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

导数公式6： $(\cot x)' = -\csc^2 x$

证法一：设 $f(x) = \cot x$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cot(x+\Delta x)-\cot(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)\sin x - \cos x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x\sin(x)\sin(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(\Delta x)}{\Delta x\sin(x)\sin(x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sin(x)\sin(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

证法二：设 $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$f(x)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

导数公式7： $(\sec x)' = \tan x \sec x$

证法一：设 $f(x) = \sec x$

$$f(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sec(x+\Delta x)-\sec(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)-\cos(x+\Delta x)}{\Delta x\cos(x+\Delta x)\cos(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\frac{2x+\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x\cos(x+\Delta x)\cos(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{2x+\Delta x}{2})}{\cos(x+\Delta x)\cos(x)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

证法二：设 $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$f(x)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

导数公式8： $(\csc x)' = -\cot x \csc x$

证明：设 $f(x) = \csc x$

$f(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\csc(x+\Delta x)-\csc(x)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)-\sin(x+\Delta x)}{\Delta x \sin(x+\Delta x)\sin(x)}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-2\cos(\frac{2x+\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x \sin(x+\Delta x)\sin(x)}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos(\frac{2x+\Delta x}{2})}{\sin(x+\Delta x)\sin(x)}$

$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$

证法二：设 $f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

$f(x)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$

导数公式9： $(a^x)' = a^x \ln a$

证明：设 $f(x) = a^x$

$f(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

$= a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a}-1}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x}$

$= a^x \ln a$

导数公式10： $(e^x)' = e^x$

证明：在导数公式9中令 $a = e$，即证得。

导数公式11： $(\log_a^x)' = \frac{1}{x \ln a}$

证明：设 $f(x) = \log_a^x$

$f(x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a^{x+\Delta x} - \log_a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a^{1+\frac{\Delta x}{x}}}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x \ln a} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x \ln a}$

$= \frac{1}{x \ln a}$

导数公式12： $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

证明：在导数公式1中令 $a = e$，即证得。

导数公式13： $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

证明：设 $y = f(x) = \arcsin x$

$f(x)' = \frac{1}{\sin(y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数公式14： $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

证法一：设 $y = f(x) = \arccos x$

$f(x)' = \frac{1}{\cos(y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

证法二：

设 $y=\arcsin x$，则 $x=\sin y(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2})$ ，令 $z=\frac{\pi}{2}-y(0\leq z\leq\pi)$ ，所以有 $\cos z=\sin y=x$ ， 因为 $y,z$ 的取值范围与反三角函数的值域一致，所以有 $z=\arccos x$， $y=\arcsin x$，因此 $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ 。故 $(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 。

注：公式16和18也可用类似方法完成证明，由于不太常用，具体证明请读者自行完成。

导数公式15： $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

证明：设 $y=f(x)=\arctan x$

$f(x)'=\frac{1}{\tan(y)'}=\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}$

$=\frac{1}{\tan^2 y+1}=\frac{1}{1+x^2}$

导数公式16： $(arccotx)'=\frac{1}{1+x^2}$

证明：设 $y=f(x)=arccotx$

$f(x)'=\frac{1}{\cot(y)'}=-\sin^2 y=-\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y+\cos^2 y}$

$=-\frac{1}{\cot^2 y+1}=-\frac{1}{1+x^2}$

导数公式17： $(arcsecx)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

证明：设 $y=f(x)=arcsecx$

$f(x)'=\frac{1}{\sec(y)'}=\frac{1}{\tan y\sec y}$

$=\frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

导数公式18： $(arccscx)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

证明：设 $y=f(x)=arccscx$

$f(x)'=\frac{1}{\csc(y)'}=-\frac{1}{\cot y\csc y}$

$=-\frac{1}{\csc y\sqrt{\csc^2 y-1}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$