笔者看过这样两个问题。

怎么推导或证明 e^x 的导数是自身？https://www.zhihu.com/question/285037827

如何证明lnx的导数是1/x？https://www.zhihu.com/question/317874965

下面我们尝试使用定义法证明一下：

$(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

$(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$

令 $t = \frac{\Delta x}{x}$ ，则原极限化为 $\frac{1}{x} \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$

那么问题来了，极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ 和 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$ 等于几呢？

我们记 $I_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ ， $I_2 = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$

可以发现，令 $t = e^{\Delta x} - 1$ ， $I_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{I_2}$ 。

这样，两个极限问题可以理解为同一个问题。

下面先给出几种错误的做法：

错误做法一：

利用等价无穷小 $e^x - 1 \sim x$ ， $\ln(1+x) \sim x$ ，所以 $I_1 = I_2 = 1$ 。

解析：

我们观察等价无穷小的定义：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为自变量在同一极限过程中的无穷小量，并有 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$为等价无穷小。

我们发现，等价无穷小就是用两者商的极限为 1 定义的，上述做法说两者是等价无穷小，仅仅是把待证明的东西换一种说法说了一遍，并没有做出实质性证明。

错误做法二：

利用洛必达法则： $I_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}}{1} = 1$

$I_2 = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1$

解析：

使用洛必达法则时涉及到了求导，已经利用到了他们的导数公式，而我们的导数公式又依赖于这两个极限的值，循环论证。

下面给出正确做法：

定义：定义数列 $x_n = \lim\limits_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$ ，记 $e = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 。

引理1： $\lim\limits_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ （这里的 x 视作函数的自变量，本引理实现了从数列极限到函数极限的转化）。

证明思路：我们可以将上函数极限进行取整放缩到数列极限 x_n 再利用夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ ，再利用负代换将负无穷时的极限转化为正无穷时的极限。（具体证明略）

引理2： $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 。

证明：对引理1的结果做倒数代换即可得。

接下来， $I_2=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$=\ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1$

$I_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ ，令 $t=e^{\Delta x}-1$ ，

$I_1=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{1}{I_2}=1$ 。

综上：

$(e^x)'=e^xI_1=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}I_2=\frac{1}{x}$

逻辑链：

$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

$\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$

$\Rightarrow(e^x)'=e^x,(\ln x)'=\frac{1}{x}$