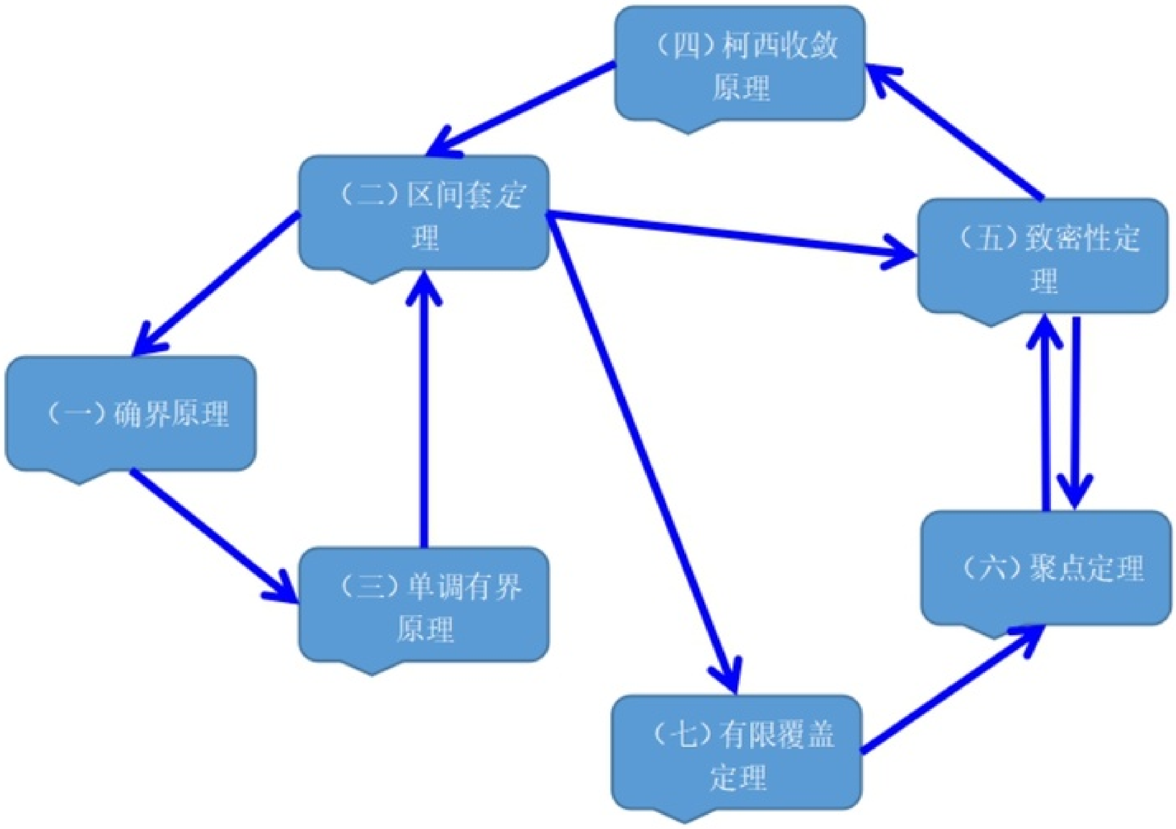
七大实数理论简介



（一）确界原理

定义1.1： S 是一个非空数集， β 是一个常数，若 $\forall x \in S$ ，有 $x \leq \beta$ ，则称 β 是数集 S 的一个上界。同理，若 $\forall x \in S$ ，有 $x \geq \beta$ ，则称 β 是数集 S 的一个下界。 定义1.2：若 β 是数集 S 的一个上界，并且有 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists x_{\varepsilon} \in S$ ，满足 $x_{\varepsilon} > \beta - \varepsilon$ ，则称 β 是数集 S 的上确界。类似的，若 β 是数集 S 的一个下界，并且有 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists x_{\varepsilon} \in S$ ，满足 $x_{\varepsilon} < \beta + \varepsilon$ ，则称 β 是数集 S 的下确界。

定理1.1：若数集 S 有上确界，则上确界是唯一的。

证明：使用反证法，若 β 是数集 S 的上确界，假设还有 α 也是上确界。

若 $\alpha > \beta$ ，根据定义1.2的否定，取 $\varepsilon = \alpha - \beta$ ，此时 $\alpha - \varepsilon = \beta$ ，有 $\forall x \in S$ ，有 $x \leq \alpha - \varepsilon$ ，因此 α 不是数集 S 的上确界。

若 $\alpha < \beta$ ，根据定义1.2，取 $\varepsilon = \beta - \alpha$ ，那么 $\exists x \in S$ ，使得 $x > \beta - \varepsilon = \alpha$ ，因此 α 不是数集 S 的上确界。

综上所述， $\alpha = \beta$ ，上确界唯一。

类似的，我们有：

定理1.2：若数集 S 有下确界，则下确界是唯一的。

定理1.3：若数集 B 的下确界为 β ，定义数集 $C = \{-x | x \in B\}$， 那么数集 C 的上确界是 $-\beta$ 。

证明：由于 β 是数集 B的下界，根据定义1.1，有$x \geq \beta$， $-x \leq -\beta$， $-\beta$ 是数集 C 的上界。根据定义1.2有$\forall \varepsilon > 0$， $\exists x_{\varepsilon} \in B$ ，满足 $x_{\varepsilon} < \beta + \varepsilon$ ，也就 $\exists - x_{\varepsilon} \in C$ ，满足 $-x_{\varepsilon} > -\beta - \varepsilon$ 。因此 $-\beta$ 是数集 C 的上确界。

类似的，我们有：

定理1.4：若数集 B 的上确界为 β ，定义集合 $C=\{-x|x\in B\}$，那么数集 C 的下确界是 $-\beta$ 。

在定理1.3的证明过程中我们可以得到如下结论：

定理1.5：若 b 是数集 B 的下界，定义数集 $C=\{-x|x\in B\}$，那么 $-b$ 是数集C 的上界。

定理1.6：若 b 是数集 B 的上界，定义数集 $C=\{-x|x\in B\}$，那么 $-b$ 是数集C 的下界。 定理1.7（确界原理）：有上界的非空数集必有上确界。

推论：有下界的非空数集必有下确界。

证明：设 b 是数集 B 的一个下界，定义数集 $C=\{-x|x\in B\}$，根据定理1.5，$-b$ 是数集 C 的上界。再根据定理1.7（确界原理），数集 C 必有上确界 γ ，再根据定理1.4，数集B的下确界为 $-\gamma$ 。

注：确界原理可以被看做公理，它是实数的连续性或完备性的体现，即实数包含了数轴上所有的点，没有空隙。数集 S 的上确界常被记作 $\sup S$ ，下确界记作 $\inf S$ 。

（二）区间套定理

定理2.1（区间套定理）：数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构成闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，满足

（1） $\forall n\in N^+$ 有 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$

（2） $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，存在唯一公共点 ξ ，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 。

注：该定理闭区间条件必不可少，例如区间列 $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}$ 和 $\{[n,+\infty]\}$ 都不存在公共点 ξ 。

（三）单调有界原理

定义3.1：若一个数集既有上界，又有下界，则称这个数集有界。

定理3.1（单调有界原理）：单调有界的数列必有极限。

注：后面我们会证明，若数列单调递增，则极限为上确界，若单调递减，则极限为下确界。

（四）柯西收敛原理

定理4.1（柯西收敛准则）：若对于数列 $\{x_n\}$ ，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$ ，当 $m>N$ 时，对一切自然数 p ，有 $|x_{m+p}-x_m|<\varepsilon$。则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

定理4.2（柯西收敛准则逆命题）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$ ，当 $m>N$ 时，对一切自然数 p ，有 $|x_{m+p}-x_m|<\varepsilon$。

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ ，根据极限定义，$\forall\varepsilon>0$，，$\exists N\in N^+$ ，当 $m>N$ 时，$|x_m-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$ ，同时因为 $m+p>m>N$ ，也有$|x_{m+p}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$。因此 $|x_{m+p}-x_m|\le|x_{m+p}-\xi|+|\xi-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。得证。

注：多数教科书上把以上两个命题称为柯西收敛准则，笔者认为这是不妥的。定理4.2的证明完全来自于极限的定义，不依赖与其他六个实数理论中的任何一个，与他们不能互推。因此，柯西收敛准则在本文中指的就是定理4.1。

（五）致密性定理

定义5.1：在一个数列中，按原顺序任意选出无穷多项，构成一个新的数列。这个新的数列称为原数列的子列。

定理5.1（致密性定理）：有界数列必有收敛子列。

（六）聚点定理

定义6.1：$\delta>0$ ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$,δ 称作该邻域的半径。

定义6.2：$\delta > 0$ ，$U(a,\delta) - \{a\}$称为 a 的去心 δ 邻域，记作 $U^{\cdot}(a,\delta)$。

定义6.3：设 E 是数集，实数a满足，$\forall \delta > 0$，满足$U^{\cdot}(a,\delta) \cap E \neq \varnothing$，则称 a 为 E 的聚点。

定理6.1（聚点定理）：有界无穷点集至少有一个聚点。

定理6.2：若a 为 E 的聚点，则a 的任何 δ 邻域均包含无限个 E 中的点。

证明：假设 a 的任何 δ_1 邻域仅仅包含 m 个 E 中的点，记作 $x_i(1 \le i \le m)$，令 $\delta = \min\{|x_i - a|\}$ ，则有$U^{\cdot}(a,\delta) \cap E = \varnothing$， a 不是聚点。

（七）有限覆盖定理

定理7.1（有限覆盖定理）：若开区间所成的区间集 E 覆盖闭区间 $[a,b]$ ，则可以从 E 中选出有限个区间覆盖 $[a,b]$ 。

注：区间集 E 必须为开区间集，否则集合不能成立。

七大实数理论互推

（一）确界原理 $\Rightarrow$ （三）单调有界定理

> 定理3.1（单调有界原理）：单调有界的数列必有极限。

不妨设数列 $\{x_n\}$ 单调递增。显然它有上界，根据确界原理，记上确界为 ξ 。

根据上确界的定义，$\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists\, x_N > \xi - \varepsilon$ ，由于单调递增， $n > N$ 时有 $x_n \ge x_N > \xi - \varepsilon$。同时显然有 $x_n \le \xi$ 。故 $|x_n - \xi| < \varepsilon$ 成立，故$\{x_n\}$的极限就是上确界 ξ 。

同理可证，当$\{x_n\}$单调递减时，极限为下确界。

（三）单调有界定理 $\Rightarrow$ （二）区间套定理

> 定理2.1（区间套定理）：数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构成闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，满足 （1） $\forall n \in N^+$ 有 $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 则区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，存在唯一公共点 ξ ，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ 。

由于 $\{b_n\}$ 单调递减， $\{a_n\}$ 单调递增，且 $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$ ，根据单调有界原理，两个数列的极限均存在。 $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$。显然两者极限相等，记为 ξ ，并且 ξ 为$\{b_n\}$ 的下确界， $\{a_n\}$的上确界。故有 $a_n \le \xi \le b_n$ 。

若 ξ 不唯一，假设有 $a_n \le \xi_2 \le b_n$ ，由夹逼定理得，$\xi \le \xi_2 \le \xi$，故 $\xi = \xi_2$ ，因此 ξ 唯一。

（二）区间套定理 $\Rightarrow$ （一）确界原理

> 定理1.7（确界原理）：有上界的非空数集必有上确界。

设 S 为任一非空有上界数集，若实数 s 是 S 的最大值，可以验证 s 就是上确界。

若 S 没有最大值，则随意取 $a_1 \in S$ ， b_1 为 S 的任一上界。若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 为上界，则令 $a_2 = a_1$ ，$b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ，反之，则令 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$， $b_2 = b_1$ 这样依次取得数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ ，构成区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} = 0$。根据区间套定理，存在唯一 ξ ，使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ 。

由于 b_n 是上界， $\forall x \in S$ 有 $x \le b_n$ ，两侧取极限有$x \le \xi$。故 ξ 是 S 的上界。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$， $\forall \varepsilon > 0$ ，有 N ，使得 $n > N$ 时有 $a_n > \xi - \varepsilon$ ，又因为 a_n 不是上界，故 $\exists x \in S$,有$x > a_n > \xi - \varepsilon$。因此 ξ 是上确界。

（二）区间套定理 $\Rightarrow$ （五）致密性定理

> 定理5.1（致密性定理）：有界数列必有收敛子列。

设 $\{x_n\}$ 为一有界数列，有 $a \le x_n \le b$ ，将区间 $[a,b]$ 分成 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 两部分，显然至少一个区间包含无穷多项，取那个区间的下界记作 a_1，上界记作 b_1。在该区间任取一项记作 c_1 。依次取下去得到数列$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$和闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$。根据区间套定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，由于每一个区间包含无穷多项，因而可以取到完整的子列 $\{c_n\}$ ，并且有 $a_n \le c_n \le b_n$，根据夹逼定理有 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\xi$。

（二）区间套定理 $\Rightarrow$ （六）聚点定理

> 定理6.1（聚点定理）：有界无穷点集至少有一个聚点。

证明方法与上面一个类似。

（二）区间套定理 $\Rightarrow$ （七）有限覆盖定理

> 定理7.1（有限覆盖定理）：若开区间所成的区间集 E 覆盖闭区间 $[a,b]$ ，则可以从 E 中选出有限个区间覆盖 $[a,b]$ 。

假设区间 $[a,b]$ 不能被 E 中有限个开区间覆盖，则将区间 $[a,b]$ 分成 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 两部分，至少有一个不能被有限个开区间覆盖，记为 $[a_1,b_1]$ ，这样依次等分，得到一区间列$\{[a_n,b_n]\}$，不难验证该区间列满足区间套定理的使用条件，因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。由于 E 能覆盖闭区间 $[a,b]$，因此存在开区间 (α,β) ，有 $\alpha<\xi<\beta$ ，由数列极限的定义， $\exists N\in N^+$ ，当 $n>N$ 时有 $\alpha<a_n<b_n<\beta$。即 $[a_n,b_n]\subset(\alpha,\beta)$。与假设矛盾。

（五）致密性定理 $\Rightarrow$ （四）柯西收敛原理

> 定理4.1（柯西收敛准则）：若对于数列 $\{x_n\}$ ， $\forall\varepsilon>0$， $\exists N\in N^+$ ，当 $m>N$ 时，对一切自然数 p ，有 $|x_{m+p}-x_m|<\varepsilon$。则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

取 $\varepsilon=1$ ，$\exists N\in N^+$ ，当 $m>N$ 时，对一切自然数 p ，有 $|x_{m+p}-x_m|<1$。取 $m=N+1$。则有 $n>N+1$ 时有 $|x_n|<|x_{N+1}|+1$ ，因此$\{x_n\}$有界。由致密性定理，$\{x_n\}$存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ ，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=\xi$ 。根据极限定义， $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists N_1\in N^+$，当 $k>N_1$ 时有 $|x_{n_k}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$，再考虑柯西列的定义，$\exists N_2\in N^+$，当 $n,n_k>N_2$ 时有 $|x_{n_k}-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而当上述两条件均满足时有 $|x_n-\xi|<\varepsilon$ ，故数列 $\{x_n\}$ 收敛。

（四）柯西收敛原理 $\Rightarrow$ （二）区间套定理

设闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$ ，满足

（1） $\forall n\in N^+$ 有 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

由条件（2）， $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists N\in N^+$ ，当 $n>N$ 时有， $|b_n-a_n|<\varepsilon$ 。对一切自然数 p ，有 $a_n\le a_{n+p}\le b_{n+p}\le b_n$，因而有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ ，$|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon$。由柯西收敛准则，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$都收敛。再根据 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$。有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$。由于极限的唯一性， ξ 唯一。

（五）致密性定理 $\Rightarrow$ （六）聚点定理

设点集 S 为一有界无穷点集，依次任取 S 中不重复的点构成数列 $\{a_n\}$ ，根据致密性定理，必存在收敛子列满足 $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$，由极限定义， $\forall\varepsilon>0$， $\exists N\in N^+$，使 $k>N$ 时有 $|a_{n_k}-\xi|<\varepsilon$ ，因而 ξ 是聚点。

（六）聚点定理 $\Rightarrow$ （五）致密性定理

设数列 $\{a_n\}$有界，显然可以看做一无穷点集，根据聚点定理，至少存在一个聚点 ξ 。依次从 ξ 的 $\frac{1}{i}$ 邻域中取一项，记作 x_i，根据定理6.2，可以无限取下去构成子列 $\{x_n\}$ ，且有 $|x_n-\xi|<\frac{1}{n}$ ，易证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ 。

（七）有限覆盖定理 $\Rightarrow$ （六）聚点定理

设 S 为一有界无限点集， $\forall x\in S$ ， $a\le x\le b$。假设 S 没有聚点，即 $\forall\xi\in[a,b]$ ，在 ξ 的 ε_ξ 去心领域内只包含有限多项，这些领域可以构成开区间集 J ，根据有限覆盖定理，该开覆盖必有有限子覆盖 J_1 能够覆盖区间 $[a,b]$ 。然而J_1 中的有限个开区间必然只包含有限个 S 中的点，与已知矛盾。

（七）有限覆盖定理 $\Rightarrow$ （五）致密性定理

将数列看作无穷点集，证明与上类似。

至此，我们完成了七大实数理论的连接，即从任何一个实数理论出发可以推出其它六个定理（如文章开始的图所示）。

该图所展示的逻辑架构为多数国内数学分析教材的论证过程，事实上，任何两个实数理论之间均可以互推，具体内容如下：

七大实数理论互推完整版 https://zhuanlan.zhihu.com/p/83426407

以下这篇文章讲述了实数理论在数学分析中的应用：

实数理论的基本应用 https://zhuanlan.zhihu.com/p/89843274