集合论

前言：集合论是现代数学的根基，在大学数学的学习当中，数学分析，实变函数，概率论，抽象代数，拓扑学等核心科目都是以集合论作为基础的，而我们的大学老师时而忽视这一部分的教学。因而，笔者推出了集合论系列文章，希望将基本的集合论知识用较严格完备的方式阐述出来，以方便大家学习。文章共分为11章，目录如下，由于前后的逻辑关系，建议大家按照顺序阅读。

目录：

第一章 集合的基本定义

> 定义1.1：具有某种性质的，确定的，有区别的事物的全体称为集合，集合中的事物称为元素。 定义1.2：若 x 是集合 A 中的元素，记作 $x\in A$ ，若 x 不是集合 A 中的元素，记作 $x\notin A$。 定义1.3：若 $\forall x$ ，都有 $x\notin A$ ，则 A 为空集，记作 $A=\emptyset$ 。 定义1.4：对于集合 A 和 B ， $\forall x\in A$ ，都有 $x\in B$ ，则称 A 是 B 的子集记作 $A\subset B$ ；若 $A\subset B$ ， $\exists x\in B$ 且 $x\notin A$ ，则称 A 是 B 的真子集记作 $A\subseteq B$ 。

注： A 是 B 的子集也称作 A 包含于 B 或 B 包含 A ； A 是 B 的真子集也称作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A 。

> 定理1.1： A 为任意集合，都有$\emptyset\subset A$ 。

证：$\emptyset\subset A$ 等价于 $\forall x\in\emptyset$ ，都有 $x\in A$ 。我们证：它的逆否命题：若 $x\notin A$ ， $x\notin\emptyset$ ，由空集的定义 $x\notin\emptyset$ 恒成立，故得证。

注：有时空集是任何集合的子集是直接定义的。

> 定理1.2： （1） $A\subset A$ （自反性）。 （2）若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$ ，则 $A\subset C$ （传递性）。 （3）若 $x\in A$ ，则 $\{x\}\subset A$ 。

证： （1）若 $x\in A$ ，则显然 $x\in A$ ，因此 $A\subset A$ 。

（2）由若 $A\subset B$ 得若 $x\in A$ 则 $x\in B$ ，再根据$B\subset C$，得 $x\in C$ ，因而得证。

（3）显然只有 $x \in \{x\}$，再根据 $x \in A$，得证。

> 定义1.5：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 和 B 相等记作 $A = B$，否则 A 和 B 不相等，记作 $A \neq B$。

注：集合相等只需证：他们互为子集。

例1.1：自然数集记作 N，正整数集记作 N^+，整数集记作 Z，有理数集记作 Q，实数集记作 R，复数集记作 C；有 $N^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$。

某些 R 的子集在数学研究中十分常用，我们把它们称为区间，用特定的符号便于表示。

> 定义1.6：$a, b \in R$，以下类型的 R 的子集称为区间：（1）$\{x|x \geq a\} = [a, +\infty)$；（2）$\{x|x > a\} = (a, +\infty)$；（3）$\{x|x \leq a\} = (-\infty, a]$；（4）$\{x|x < a\} = (-\infty, a)$；（5）$\{x|a \leq x \leq b\} = [a, b]$；（6）$\{x|a \leq x < b\} = [a, b)$；（7）$\{x|a < x \leq b\} = (a, b]$；（8）$\{x|a < x < b\} = (a, b)$；（9）$R = (-\infty, +\infty)$。其中（1）—（4）、（9）是无界区间，（5）-（8）是有界区间，其中（5）是闭区间，（6）（7）是半开半闭区间，（8）是开区间。

注：当 $a = b$ 时 $[a, b] = \{a\}$，$(a, b) = [a, b) = (a, b] = \emptyset$，区间可以是单点集或空集。

> 定义1.7：设 X，Y 是非空集合，定义 $X \times Y = \{(x, y)|x \in X, y \in Y\}$，称作集合 X, Y 的直积。若有有限个非空集合 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$，定义 $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)|x_i \in X_i\}$。

例1.2：设 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ 都是有限集，且各有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 个元素，则 $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$ 的元素个数为 $\prod_{i=1}^{n} a_i$。

例1.3：$R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n个}$，称为 n 维欧式空间。

$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 是平面长方形。

需要注意的是，集合中的元素可以是集合，例如 $\{\emptyset\}$不是空集，是由包含一个集合作为元素的集合。

> 定义1.8：集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集，记为 $P(S)$。定理1.3：含有 n 个元素的有限集 S 的幂集包含 2^n 个元素。

证：设 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，我们可以把 $P(S)$ 按照包含 a_1 与否分成两类，再在每一类中以包含 a_2 与否分成两类，依次做下去，恰好分成 2^n 类，每一类恰好包含唯一集合，得证。

第二章 集合的并、交运算

> 定义2.1：对于集合 A 和 B，$\{x|x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的并集记作 $A \cup B$，$\{x|x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为 A 与 B 的交集记作 $A \cap B$。定理2.1（幂等律）：$A \cup A = A$，$A \cap A = A$。

证：由定义2.1，显然。

> 定理2.2（交换律）：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

证：$A \cup B = \{x|x \in A$ 或 $x \in B\} = \{x|x \in B$ 或 $x \in A\} = B \cup A$。

> 定理2.3（结合律）：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

证：$(A \cap B) \cap C = \{x|x \in A \cap B$ 且 $x \in C\} = \{x|x \in A$ 且 $x \in B$ 且 $x \in C\} = \{x|x \in A$ 且 $x \in B \cap C\} = A \cap (B \cap C)$。

$(A \cap B) \cap C = \{x | x \in A \cup B$ 或 $x \in C\} = \{x | x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C\} = \{x | x \in A$ 或 $x \in B \cup C\} = A \cup (B \cup C)$ 。

> 定理2.4：对于集合 A ， B ， $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ ， $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ 。证：若 $x \in A \cap B$ ，则 $x \in A$ 且 $x \in B$ ，从而 $x \in A$ ，根据子集的定义可得 $A \cap B \subset A$ 。若 $x \in A$ ，则显然 $x \in A$ 或 $x \in B$ 必成立，从而 $A \subset A \cup B$ 。同理可证另一关系式。 定理2.5（分配律）： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$， $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

证：若 $x \in A \cap (B \cup C)$ ，则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$ 。由此可得 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ ，即 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，从而 $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。若 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ 。由此可得$x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，因此 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ 。综上， $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 得证。

若 $x \in A \cup (B \cap C)$ ，则 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$ 。若 $x \in A$ ，则 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ；若 $x \in B \cap C$ ，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$ ，从而， $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。若 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$ 。由此可得$x \in A$ 或$x \in B \cap C$，因此 $x \in A \cup (B \cap C)$ 。综上， $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 得证。

> 定义2.2：设 D 是非空集合，对 D 中所有元素 α ，都有一个指标集 A_α 与之对应，则这些指标集组成的集合称为以 D 为指标集的集族，记作 $\{A_\alpha | \alpha \in D\}$ ，简称 $\{A_\alpha\}$ 。

例2.1：若 D 为自然数集，则 $\{A_\alpha\}$ 为集列（ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ）。

> 定义2.3：对于集族 $\{A_\alpha\}$ ，若存在 α ，使得 $x \in A_\alpha$ ，则称 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$ ，即 $\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in D, x \in A_\alpha\}$ ；若任意 α ，满足 $x \in A_\alpha$ ，则称 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$ ，即 $\bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in D, x \in A_\alpha\}$ 。

由上述无穷交、并的定义，下面结论显然：

> 定理2.6：对于集族 A_n 和集合 B ，有： （1）若 $\forall \alpha \in D$ ，有 $B \subset A_\alpha$ ，则 $B \subset \bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$ 。
> （2）若 $\forall \alpha \in D$ ，有 $A_\alpha \subset B$ ，则 $\bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha \subset B$ 。

证： （1）若 $x \in B$ ，则 $\forall \alpha \in D$ ， $x \in A_\alpha$ ，由无穷交的定义， $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$ ，得证。

（2）若 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$ ，由无穷并的定义， $\exists \alpha$ ，使得 $x \in A_\alpha$ ，由 $A_\alpha \subset B$，得 $x \in B$ ，得证。

> 定理2.7：对于一列集合 A_n 和集合 B ， （1） $B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ ， $B \cup (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B)$ 。 （2） $B \cap (\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ ， $B \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B)$ 。

证： （1）若 $x \in B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ ，则 $x \in B$ 且 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ，则 $\exists n$ ， $x \in A_n$ ，故 $x \in A_n \cap B$ ，由此 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ ，从而 $B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ 。若 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ ，则 $\exists n$，使得 $x \in A_n \cap B$ ，从而 $x \in A_n$ 且 $x \in B$ ，因此 $x \in B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ ，由此 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \subset B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)$ 。综上， $B \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$ 成立，另一结论类似可得。

（2）若 $x\in B\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$，则 $x\in B$ 且 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，从而$\forall n$，使得 $x\in A_n\cap B$，因此 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)$， $B\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)$。若 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)$，则$\forall n$，使得 $x\in A_n\cap B$，因此 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，从而 $x\in B\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$， $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)\subset B\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$。综上，$B\cap(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)$ 成立，另一结论类似可得。

注：定理2.7（1）是分配律的推广，（2）是结合律的推广；定理2.7的结论推广位指标集族也成立。

> 定理2.8：对于集列 A_n 和 B_n，有$(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_m)\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup\limits_{m,n\geq1}A_m\cap B_n$，$(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m)\cup(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcap\limits_{m,n\geq1}A_m\cup B_n$。

上面的结论利用定理2.7（1）两次即可得证，具体证明略。

第三章 集合的差、补运算

> 定义3.1：对于集合 A，B 属于集合 A 而不属于集合 B 的元素称为 A 减 B 的差集，记作 $A\setminus B=\{x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$；当 $B\subset A$ 时，则 $A\setminus B$ 也记作 C_AB；当我们讨论的集合都是 X 的子集时，称 X 为全集，C_XB 一般记作 B^c，称作 B 的补集。

注：以下讨论中，我们一般只使用$A\setminus B$ 与 B^c 两种符号， C_AB 一般不使用，因任何情况下都可以用 $A\setminus B$ 代替；此外，$A\setminus B$ 在一些教材中也记作$A-B$。

例3.1：设 A 是集合，则 $A\setminus A=\emptyset$， $A\setminus\emptyset=A$。

> 定理3.1：设 S 是全集，集合 $A\subset S$，则有：（1） $A\cap A^c=\Phi$， $A\cup A^c=S$。 （2）若 $x\in S$，则 $x\notin A\Leftrightarrow x\in A^c$， $x\in A\Leftrightarrow x\notin A^c$。 （3） $(A^c)^c=A$。

证： （1）若 $\exists x\in A\cap A^c$，则 $x\in A$ 且 $x\in A^c$，由此得出 $x\notin A$，矛盾，从而 $A\cap A^c=\Phi$。显然 $A\cup A^c\subset S$，而 $\forall x\in S$，若 $x\notin A$，则有 $x\in\{x|x\in S \text{ 且 } x\notin A\}=A^c$，故 $S\subset A\cup A^c$，综上$A\cup A^c=S$。

（2）若 $x\notin A$，由 A^c 的定义得， $x\in A^c$，故 $\Rightarrow$ 成立，同理 $\Leftarrow$ 成立。另一命题可将上述结论取逆否命题得到。

（3）由（2）结论得，若 $x\in S$，则 $x\in A\Leftrightarrow x\notin A^c\Leftrightarrow x\in(A^c)^c$，因而得证。

注：如果将 S 为全集的条件去掉，同时将 A^c 改为 $S\setminus A$，结论仍然成立。

> 定理3.2：若集合 $A,B\subset S$，则有 （1） $A\subset B\Leftrightarrow B^c\subset A^c$。 （2） $A\setminus B=A\cap B^c$。

证： （1）由子集的定义，$\forall x\in A$，都有 $x\in B$，取逆否命题：若 $x\notin B$，则 $x\notin A$，这正是 $A\subset B\Leftrightarrow B^c\subset A^c$ 的定义， $\Rightarrow$ 得证，再根据定理3.1（3）立即可证 $\Leftarrow$。

（2）若 $x\in A\setminus B$，则 $x\in A$ 且 $x\notin B$，由定理3.1（2）， $x\in B^c$，从而 $x\in A\cap B^c$，证得 $A\setminus B\subset A\cap B^c$。若 $x\in A\cap B^c$，则 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，由定理3.2（2） $x\notin B$，从而 $x\in A\setminus B$，证得 $A\cap B^c\subset A\setminus B$。综上， $A\setminus B=A\cap B^c$。

> 定理3.3：$(A\setminus B)\cap C=A\cap C\setminus B\cap C$，$(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$。

证：若 $x\in(A\setminus B)\cap C$，则 $x\in C$ 且 $x\in A$，故 $x\in A\cap C$，另外 $x\notin B$，因而 $x\notin B\cap C$，故 $(A\setminus B)\cap C\subset A\cap C\setminus B\cap C$；若 $x\in A\cap C\setminus B\cap C$，则 $x\in A$，且 $x\in C$，但 $x\notin B\cap C$，因为已经有了 $x\in C$，于是 $x\notin B$，因此 $A\cap C\setminus B\cap C\subset(A\setminus B)\cap C$。

若 $x\in(A\setminus B)\setminus C$ ，则 $x\in A$ ，$x\notin B$ ，$x\notin C$ ，于是 $x\notin B\cup C$ ，因而 $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C)$ 。若 $x\in A\setminus(B\cup C)$ ，则 $x\in A,\ x\notin B\cup C$ ，于是 $x\notin B$ ，$x\notin C$ ，因此 $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$ 。

> 定理3.4（De Morgan 公式）：若集合 $A,B\subset S$ ，则有 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ ，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ 。

证：若 $x\in(A\cup B)^c$ ，则 $x\notin A\cup B$ ，故 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ ，故$x\in A^c$ 且 $x\in B^c$，从而 $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$ 。

若 $x\in A^c\cap B^c$ ，则$x\notin A$ 且 $x\notin B$ ，从而 $x\notin A\cup B$ ，$x\in(A\cup B)^c$ ，综上，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 。

若 $x\in(A\cap B)^c$ ，则 $x\notin A\cap B$ ，故 $x\notin A$ 或 $x\notin B$ ，故$x\in A^c$ 或 $x\in B^c$，从而 $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$ 。

若 $x\in A^c\cup B^c$ ，则$x\notin A$ 或 $x\notin B$ ，从而 $x\notin A\cap B$ ，$x\in(A\cap B)^c$ ，综上，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 。

> 定理3.5：设 $\{A_\alpha\}$ 为指标集族， S 为全集，则 $(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha^c$ ， $(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha^c$ 。

定理3.5可看做定理3.4的推广，不再给出证：。更一般地，有下面的结论：

> 定理3.6：$A\setminus(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in D}A\setminus A_\alpha$ ，$A\setminus(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in D}A\setminus A_\alpha$ 。

证：首先， $A\setminus A_\alpha=A\cap(A\setminus A_\alpha)=(A\cap A)\setminus(A\cap A_\alpha)=A\setminus(A\cap A_\alpha)$ ，由定理2.6可得 $A\setminus(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=A\setminus(\bigcup\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\cap A)=A\setminus[\bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)]$ ，$A\setminus(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha)=A\setminus(\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\cap A)=A\setminus[\bigcap\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)]$ ，这样，我们就把 A 看作全集，利用定理3.5得证。

至此，我们已经讲完了集合的并、交、差、补运算。在全集明确的情况下，由定义3.1，补运算可由差运算得到；由定理3.2（2），差运算可由补运算和交运算复合达到；由定理3.4，交运算可由补运算与并运算得到，并运算可由补运算与交运算得到。由此，我们可以说，集合的以上四种运算可以归结为其中两种，我们只需取并、交运算中的一种，差、补运算中的一种，经过复合即可得到剩下的运算。以下，我们补充一下集合的对称差运算。

> 定义3.2：对于集合 A,B ， $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ 称为它们的对称差，记作 $A\triangle B$ 。

对称差描述了两个集合不相交的部分，因对称差是之前我们讨论的运算的复合，它的性质相信读者能够自行证：

> 定理3.7：（1） $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cap B^{c})\cup(B\cap A^{c})=A^{c}\triangle B^{c}$ 。（2）$A\triangle B=\emptyset \Leftrightarrow A=B$ 。（3）$A\triangle B=B\triangle A$ 。（4） $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle (B\triangle C)$ 。

第四章 集列的极限

> 定义4.1：对于集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ ，若 $\forall i$ ，都有 $A_{i}\subset A_{i+1}$ ，则称 $\left\{ A_{n} \right\}$ 是单调递增的集列；若 $\forall i$ ，都有 $A_{i+1}\subset A_{i}$ ，则称 $\left\{ A_{n} \right\}$ 是单调递减的集列。

例4.1： $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]=(0,1)$ ，$\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}[n,+\infty)=\emptyset$ 。

本节我们考虑集列的极限集，通过例4.1，我们发现，单调集列的极限比较容易刻画，单调递减的集列的极限可以定义为它们的无穷交，单调递增的集列的极限可以定义为它们的无穷并；并且，容易发现，对于任意集列 $\{A_{n}\}$，都有 $B_{n}=\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ 是单调递减的集列，$C_{n}=\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{j}$ 是单调递增的集列。据此，我们产生了上极限与下极限的定义：

> 定义4.2：对于集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ ，称$\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ 为集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ 的上极限，记作 $\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ ；$\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{j}$ 为集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ 的下极限，记作 $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ 。

下面我们通过一个定理来研究上下极限的本质：

> 定理4.1：对于集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ ，（1）$x\in\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}\Leftrightarrow \forall m$，都有 $n>m$ ，使得 $x \in A_n$ 。
> （2）$x\in\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}\Leftrightarrow \exists m$ ，当 $n>m$时，总有 $x \in A_n$ 。

证：（1）$\Rightarrow$：若 $x\in\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ ，则 $x\in\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，则 $\forall n$ ，都有 $x\in\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，因此 $x\in\underset{j=m}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，因此必存在 $n>m$ ，使得 $x \in A_n$ 。 $\Leftarrow$：若存在 $n>m$ ，使得 $x \in A_n$ ，则意味着 $x\in\underset{j=m}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，由于对任意 m 都成立，则有 $x\in\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}=\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ 。

（2）$\Rightarrow$：若 $x\in\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ ，则 $x\in\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{j}$ ，则 $\exists n$ ，都有 $x\in\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，因此 $x\in\underset{j=m}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，因此必存在 $n>m$ ，使得 $x \in A_n$ 。 $\Leftarrow$：若存在 $n>m$ ，使得 $x \in A_n$ ，则意味着 $x\in\underset{j=m}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}$ ，由于对任意 m 都成立，则有 $x\in\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}=\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ 。

与数学分析中数列的上下极限类似，上极限描集中的元素是属于原集列的任意子列的元素，或属于集列中无限个集合的元素；下极限描述的元素是仅仅不属于集列中有限个集合的元素。因此，显然地有 $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}\subset\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ 。由此，我们给出极限集存在的定义：

> 定义4.3：若对于集列 $\left\{ A_{n} \right\}$， $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ ，则称它是收敛集列，定义它的极限为 $\lim \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}$ 。

下面我们说明在此定义下单调集列的极限与我们期望的情形是一样的：

> 定理4.2：若集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ 单调递减，则 $\lim \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{n}$ ；若集列 $\left\{ A_{n} \right\}$ 单调递增，则 $\lim \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}$ 。

证：若集列 $\left\{ A_{n} \right\}$单调递减，则 $\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{n}$ ， $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{j} =\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\underset{j=1}{\overset{\infty}

{\bigcap}}A_{j}= \underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{n}$ 。若集列 $\left\{ A_{n} \right\}$单调递增，则 $\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}\underset{j=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{j}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}$ ， $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\underset{j=n}{\overset{\infty}{\bigcap}}A_{j}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}$ 。

第五章 映射与双射

> 定义5.1：设 A,B 为两个非空集合，若有一个对应法则 f ，使得 $\forall x \in A$ ，有**唯一**一个 $y\in B$ 与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射记作 $f：A\rightarrow B$ ，对应元素的关系写作 $y=f(x)$ ，集合 A 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$ ， $f(A)=\left\{ f(x)|x\in A \right\}$ 是 f 的值域，记作 $R(f)$ 。

注：定义域的英文是Domain，值域是Range。只有 $R(f)\subset B$ ，不一定有 $R(f)=B$ 。

> 定义5.2：若 $A_{1}\subset A$ ，集合 $f(A_{1})=\left\{ f(x)|x\in A_{1} \right\}$ 称为 A_{1} 的像集。若$B_{1}\subset B$ ，集合 $f^{-1}(B_{1})=\left\{ x\in A|f(x)\in B_{1} \right\}$ 称为 B_{1} 的原像集。

例5.1：设 X 是集合，从 $X\times X$ 到 X 的映射 f 称为运算，如 $X=R$ 时，令 $f(x,y)=x+y$ 或 $f(x,y)=xy$ 即为 R 上的加法和或乘法运算。进一步地，如果有 $f(x,y)=f(y,x)$ 恒成立，则称运算满足交换律；如果 $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$ 恒成立，则称运算满足结合律。上述的加法与乘法运算满足交换律和结合律。

> 定义5.3：对于$f：A\rightarrow B$，若 B 是数集，则 f 称作泛函；若 A,B 都是数集，则 f 称作函数。

例5.2：设 S 是全集，$A\subset S$ ，定义从 S 到 $\{0,1\}$ 的函数 $1_{A}(x)=\begin{cases}1\quad x\in A\\0\quad x\notin A\end{cases}$ ，称为集合 A 的示性函数。显然这是泛函，当 S 是数集时，这是函数。并且 $1_{A\cap B}=min\{1_{A},1_{B}\}=1_{A}1_{B}$ ， $1_{A^{c}}=1-1_{A}$ ， $1_{A\setminus B}=min\{1_{A},1-1_{B}\}=1_{A}(1-1_{B})$ ， $1_{A\cup B}=max\{1_{A},1_{B}\}=1-min\{1-1_{A},1-1_{B}\}+1-(1-1_{A})(1-1_{B})=1_{A}+1_{B}-1_{A}1_{B}$ ， $1_{A\triangle B}=max\{min\{1_{A},1-1_{B}\},min\{1-1_{A},1_{B}\}\}$ $=1_{A}(1-1_{B})+(1-1_{A})1_{B}-1_{A}(1-1_{B})(1-1_{A})1_{B}=1_{A}+1_{B}-21_{A}1_{B}$ 。 若 $\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=A$，则$\overline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}1_{A_{n}}(x)=1_{A}(x)$ ；若 $\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=A$，则$\underline{\lim} \limits_{n \rightarrow \infty}1_{A_{n}}(x)=1_{A}(x)$ ；若 $\lim \limits_{n \rightarrow \infty}{A_{n}}=A$，则 $\lim \limits_{n \rightarrow \infty}1_{A_{n}}(x)=1_{A}(x)$ 。

> 定义5.4：对于$f：A\rightarrow B$，若 $\forall y\in B$ ，都有 $x\in A$ ，满足 $f(x)=y$ ，则称 f 是满射。若 $\forall x_{1}\ne x_{2}$ ，都有 $f(x_{1})\ne f(x_{2})$ ，则称 f 是单射。若 f 既是满射又是单射，则称 f 是双射。

注：满射也可以理解为 $R(f)=B$ ，单射理解为 $\forall y\in B$ ，$f^{-1}(y)$ 至多有一个元素，双射建立了两个集合的一一对应。

> 定理5.1：对于映射 $f：A\rightarrow B$ ， $f(A_{1}\cup A_{2})=f(A_{1})\cup f(A_{2})$

证：由于 $A_{1},A_{2}\subset A_{1}\cup A_{2}$ ，有 $f(A_{1}),f(A_{2})\subset f(A_{1}\cup A_{2})$ ，从而有 $f(A_{1})\cup f(A_{2})\subset f(A_{1}\cup A_{2})$ 。若 $y\in f(A_{1}\cup A_{2})$ ，则 $\exists x\in A_{1}\cup A_{2}$ ，使得 $y=f(x)$ ，故 $x\in A_{1}$ 或 $x\in A_{2}$ ，从而 $y\in f(A_{1})$ 或 $y\in f(A_{2})$ ，因此证得了 $f(A_{1}\cup A_{2})\subset f(A_{1})\cup f(A_{2})$ 。综上， $f(A_{1}\cup A_{2})=f(A_{1})\cup f(A_{2})$ 。

> 定理5.2：对于映射 $f：A\rightarrow B$ ， $f(A_{1}\cap A_{2}) \subset f(A_{1})\cap f(A_{2})$ ，若 f 是单射，则有 $f(A_{1}\cap A_{2}) =f(A_{1})\cap f(A_{2})$ 。

证：由于 $ A_{1}\cap A_{2}\subset A_{1},A_{2}$ ，有 $f(A_{1}\cap A_{2})\subset f(A_{1}),f(A_{2})$ ，从而有 $f(A_{1}\cap A_{2})\subset f(A_{1})\cap f(A_{2})$ 。若 f 是单射，设 $y\in f(A_{1})\cap f(A_{2})$ ，则 $\exists x$ ，使得 $y=f(x)$ ，并且 $x\in A_{1}$ 且 $x\in A_{2}$ ，即 $x\in A_{1}\cap A_{2}$ ，从而 $y\in f(A_{1}\cap A_{2})$ ，因此证得了 $f(A_{1})\cap f(A_{2})\subset f(A_{1}\cap A_{2})$ 。综上， $f(A_{1}\cap A_{2})=f(A_{1})\cap f(A_{2})$ 。

注：定理5.1和5.2将两个集合的交并推广为若干指标集仍成立，证：类似。

> 定理5.3：对于映射 $f：A\rightarrow B$， （1） $A_{1}\subset f^{-1}(f(A_{1}))$ ，当 f 是单射时， $A_{1}=f^{-1}(f(A_{1}))$ 。 （2） $f(f^{-1}(B_{1}))\subset B_{1}$ ，当 f 是满射时，$f(f^{-1}(B_{1}))= B_{1}$ 。

证： （1）设 $x\in A_{1}$ ，则 $y=f(x)\in f(A_{1})$ ，那么显然 $x\in f^{-1}(y)\subset f^{-1}(f(A_{1}))$ 。若f 是单射，令 $x\in f^{-1}(f(A_{1}))$ ，则 $y\in f(A_{1})$ ，满足 $y=f(x)$ ，由于是单射，满足 $y=f(x)$ 的 x 是唯一的，因此 $x\in A_{1}$ 。

（2）设 $y\in f(f^{-1}(B_{1}))$ ，则必存在 $x\in f^{-1}(B_{1})$ ，满足 $y=f(x)$ ，由于映射的性质，满足 $x= f^{-1}(y)$ 的 y 是唯一的，总而 $y\in B_{1}$ 。若f 是满射，令 $y\in B_{1}$ ，则 $\exists x\in f^{-1}(B_{1})$ ，显然 $y=f(x)$ ，因此 $y\in f(f^{-1}(B_{1}))$ 。

> 定理5.4：若 A,B 是有限集，包含 n 个元素，则对于映射 $f：A\rightarrow B$，有 f 是单射 $\Leftrightarrow f$ 是双射 $\Leftrightarrow f$ 是满射。

证：若 f 是单射，则 $f(A)$ 中的元素个数为 n ，不然必存在 $f(x_{1})=f(x_{2})$ ；因此 $f(A)=B$ ，f 是满射，进而是双射。若 f 是满射，若有 $f(x_{1})=f(x_{2})$ ，则 $f(A)=f(A\setminus\{x_{1},x_{2}\})\cup \{f(x_{1})\}$ ，至多有 $n-1$ 个元素，与 f 是满射矛盾，因此 f 是单射，进而是双射。

注：上述结论对于无限集不成立，例如 $f：Z\rightarrow Z$ ， $f(x)=2x$ ，是一个单射，但不是满射。

> 定义5.5：若$f：A\rightarrow B$ 是双射，那么对于 $\forall b\in B$ ，都有唯一的 $a\in A$ ，使得 $f(a)=b$ ，则令 $f^{-1}(b)=a$ ，那么 $f^{-1}：B\rightarrow A$ ，称为 f 的逆映射。 定理5.5：若$f：A\rightarrow B$ 不是双射，则 f^{-1} 不是映射；若 f 是双射，则 f^{-1} 是双射。

证：若 f 不是满射，$\exists y\in B$ ， $f^{-1}(\left\{ y \right\})=\emptyset$ ，若 f 不是单射，$\exists y\in B$ ， $f^{-1}(\left\{ y \right\})=\left\{ x_{1},x_{2} \right\}$，其中 $y=f(x_{1})=f(x_{2})$ 。因而f^{-1} 不是映射。相反地，若f 是双射，则 $\forall y\in B$ ， $f^{-1}(\left\{ y \right\})=\left\{ x\right\}$，其中 $y=f(x)$ ，从而是映射，又 f 是映射，因而 $f^{-1}(y_{1})\ne f^{-1}(y_{2})$ ，是单射，满射显然，因而双射得证。

> 定义5.6：设 $f：A\rightarrow B$ ， $g：B\rightarrow C$ ，可以由表达式 $g(f(x))$ 定义复合映射 $g\circ f：A\rightarrow C$ 。 定理5.6：对于映射$f：A\rightarrow B$ ， $g：B\rightarrow C$，与复合映射 $g\circ f：A\rightarrow C$ ，有： （1）若 g,f 为单射，则 $g\circ f$ 为单射。 （2）若 g,f 为满射，则 $g\circ f$ 为满射。 （3）若 g,f 为双射，则 $g\circ f$ 为双射。

证： （1）若 $x_{1},x_{2}\in A$ ，由于g,f 为单射，有 $f(x_{1})\ne f(x_{2})$ 和$g(f(x_{1}))\ne g(f(x_{2}))$ ，因而为单射。

（2）若 $z\in C$ ，由于 g,f 为满射， $\exists y\in B$ ，使 $g(y)=z$ ， $\exists x\in A$ ，使 $f(x)=y$ ，此时 $z=g(f(x))$ ，因而是满射。

（3）根据（1） （2）结论直接可得。

第六章 集合的基数

> 定义6.1：设 A， B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A\sim B$ 。 定理6.1：集合的对等满足：（1） $A\sim A$ （自反性）。 （2）若 $A\sim B$ ，则 $B\sim A$ （对称性）。 （3）若 $A\sim B$ ， $B\sim C$ ，则 $A\sim C$ （传递性）。

证：（1）定义 $f:A\sim A$ ， $f(x)=x$ ，显然是双射。

（2）若 $f:A\sim B$ 是双射，由定理5.5， f^{-1} 是双射。

（3）若 $f:A\sim B$ ， $g:B\sim C$ 都是双射，由定理5.6（3）， $g\circ f$ 是双射。

例6.1：设 N^+ 代表非零自然数集， E 代表正偶数集，我们定义映射 $f:N^{+}\rightarrow E$ ， $f(x)=2x$ 。这是一个双射，显示两集合是对等的。但是 $E\subset N^{+}$ ，这显示了无限集的元素个数可以和它的真子集一样“多”。

> 定理6.2：设指标集族 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 与 $\left\{ B_{\alpha}|\alpha\in D \right\}$ ，对于 $\alpha\ne \beta$ 都有 $A_{a}\cap A_{\beta}=\Phi$ ， $B_{a}\cap B_{\beta}=\Phi$ ，且 $\forall\alpha\in D$ ， $A_{\alpha}\sim B_{\alpha}$ ，则 $\underset{\alpha\in D}{\bigcup}A_{\alpha}\sim \underset{\alpha\in D}{\bigcup} B_{\alpha}$。

证：显然映射 $f_{\alpha}:A_{\alpha}\rightarrow B_{\alpha}$ 是双射，定义映射 $f:\underset{\alpha\in D}{\bigcup}A_{\alpha}\rightarrow \underset{\alpha\in D}{\bigcup}B_{\alpha}$ ， $f(x)=f_{\alpha}(x),x\in A_{\alpha}$ 。设 $y\in \underset{\alpha\in D}{\bigcup}B_{\alpha}$ ， $\exists\alpha$ 使得 $y\in B_{\alpha}$ ，由此 $\exists x\in A_{\alpha}$ ， $y=f(x)$ ，因此是满射；设 $x_{1}\ne x_{2}$ 且 $x_{1}, x_{2}\in \underset{\alpha\in D}{\bigcup}A_{\alpha}$ ，若 x_{1}, x_{2} 属于同一个集合 A_α ，那么对于双射 f_{α} ，显然 $f(x_{1})\ne f(x_{2})$ ，若 x_{1}, x_{2} 属于不同集合，由 $B_{a}\cap B_{\beta}=\emptyset$ ，显然 $f(x_{1})\ne f(x_{2})$，因而是单射。因此， f 是双射，两集合对等。

> 定理6.3（F·Bernstein定理）：对于集合 $A，B$ ，有 $A_{0}\subset A$ ， $B_{0}\subset B$ ， $A_{0}\sim B$ ， $B_{0}\sim A$ ，则 $A\sim B$ 。

证：设 $f:A\rightarrow B_{0}$， $g:B\rightarrow A_{0}$ ，令 $A-A_{0}=A_{1}$ ， $B_{1}=f(A_{1})$ ， $A_{2}=g(B_{1})$ ，$B_{2}=f(A_{2})$ ， $A_{3}=g(B_{2})\cdots$ $B_{n}=f(A_{n})$ ， $A_{n+1}=g(B_{n})\cdots$显然 $A_{n}\sim B_{n}$ ，由定理6.2，有 $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}\sim \underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}B_{n}$。由映射 g 知， $B\sim A_{0}$ ， $B_{n}\sim A_{n+1}$ 。故 $B\setminus\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}B_{n}\sim A_{0}\setminus\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n+1}=A_{0}\setminus\underset{n=2}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}= A\setminus\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}$ 。由定理6.2，

$A=(A\setminus\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n})\cup\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{n}\sim (B\setminus\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}B_{n})\cup \underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}B_{n}=B$ 。即 $A\sim B$ 。

由此，我们可以推出集合对等的夹逼性质：

> 定理6.4：若 $A\subset B\subset C$ ， $A\sim C$ ，则 $A\sim B\sim C$ 。

证：由于 $C\sim A\subset B$ ， $B\sim B\subset C$ ，由定理6.3， $B\sim C$ ，再由传递性， $A\sim B\sim C$ 。

随后，我们可以引出基数的概念。

> 定义6.2：若两个集合 A, B 对等，则称他们有相同的基数，记作 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ 。

注：集合的基数也称为势

> 定理6.5：（1） $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{A}}$ （自反性）。 （2）若 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ ，则 $\bar{\bar{B}}=\bar{\bar{A}}$ （对称性）。 （3）若 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ ， $\bar{\bar{B}}=\bar{\bar{C}}$ ，则 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{C}}$ （传递性）。

证：由定理6.1，显然可得。

> 定义6.3：对于集合 A,B，若有 $B_{0}\subset B$ ， $A\sim B_{0}$ ，则称 A 的基数小于等于 B 的基数，记作 $\bar{\bar{A}}\leq\bar{\bar{B}}$ 。若 $\bar{\bar{A}}\leq\bar{\bar{B}}$ 且A 与 B不对等，则称称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $\bar{\bar{A}}<\bar{\bar{B}}$ 。 定理6.6：对于集合 A,B， $\bar{\bar{A}}<\bar{\bar{B}}$ ， $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ ， $\bar{\bar{A}}>\bar{\bar{B}}$ 中的任意两个不会同时成立。

证：由定义6.3可知，若 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ ， A 与 B 对等，另外两个不会成立；假设，$\bar{\bar{A}}<\bar{\bar{B}}$ 与 $\bar{\bar{A}}>\bar{\bar{B}}$ 同时成立，则有 $B_{0}\subset B$ ，$A\sim B_{0}$ ，$A_{0}\subset A$ ，$B\sim A_{0}$ ，使用定理6.3得出 $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$ ，显然矛盾，证毕。

注：我们并不能断定任给两个集合都能讲两者基数的关将锁定在以上三种之内，因为我们还没有证，基数的关系不可能不属于以上三种的任意一种，在目前数学体系下，无法完成这个证明，可能与哥德尔不完备定理有关，但在Zermelo选择公理下，我们可以证明它。

第七章 可列集

> 定义7.1：含有有限个元素的集合称为有限集，基数定义为其元素的个数；与自然数集对等的集合称为可列集，基数定义为 $\aleph_{0}$ ；含有无限个元素且与自然数集不对等的集合称为不可数集；含有有限个元素的集合与可列集统称为至多可数集。

注：可列集也可称可数集，可列集 A 可以表示为 $\left\{ a_{n} \right\}$ 。

> 定理7.1：任何无限集必包含一个可列子集。

证：设 A 为无限集，在其中任取一元素记为 a_1 ， $A_{1}=A\setminus\left\{ a_{1} \right\}$ 仍为无限集，再在 A_{1} 任取一元素记为a_2 ，记 $A_{2}=A_{1}\setminus\left\{ a_{2} \right\}$，依次取下去，得一序列 $\left\{ a_{n} \right\}$ ，显然这是一可列集合，且为 A 的子集，得证。

注：由此可知，在无限集中，可列集合的基数为最小。

> 定理7.2：可列集的子集至多可列。

证：设 A 为可列集，表示为 $\left\{ a_{n} \right\}$ ，若它的子集不是有限集，则为它的子列构成的集合，即 $\left\{ a_{n_{k}} \right\}$ ，必为可列集。

> 定理7.3：若 A 为有限集，B 为可列集，则： （1） $A\cup B$ 是可列集。 （2） $B\setminus A$ 是可列集。

证： （1）易得 $(A\cup B)\setminus B\subset A$ ，从而 $A\cup B\setminus B$ 只包含 A 中的有限个元素，从而 $A\cup B=\left\{b_{n} \right\}\cup\left\{a_{1},a_{2},\cdots,a_{k} \right\}$ ，我们只需令 $c_{i}=a_{i}(i\leq k)$ ， $c_{i}=b_{i+k}(i> k)$ ，那么 $A\cup B=\left\{ c_{i} \right\}$ 为可列集。

（2）显然， $B\setminus A\subset B$ ，由定理7.2，它至多可列；再假设他是有限集，$B\setminus(B\setminus A)\subset A$ ， $B\setminus(B\setminus A)$ 是有限集，由此 $B=B\setminus(B\setminus A)\cup B\setminus A$ 也是有限集，与 B 为可列集矛盾，故 $A\cup B$ 为可列集。

> 定理7.4：当各集合的交集都含有有限个元素时： （1）有限个有限集的的并是有限集。 （2）可列个有限集的并是可列集。 （3）有限个可列集的并是可列集。 （4）可列个可列集的并是可列集。

证： （1）显然。

（2）定义第 k 个集合表示为 $A_{k}=\left\{ a_{n}^{(k)} \right\}$ ， c_{m} 表示前 m 个集合的元素个数和。令 $b_{i}=$ $a{b{i}-c{m}}^{(m)}(c{m}

（3）设共有 x 个集合，定义第 k 个集合表示为 $A_{k}=\left\{ a_{n}^{(k)} \right\}$ ， c_{m} 表示 m 除以 x 的余数， d_{m} 表示 m 除以 x 的结果向下取整。令 $b_{i}=$$a_{d_{m}}^{(c_{m})}$ 。就有 $\underset{k=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}A_{k}=\{ b_{i} \}$ 。

（4）设第 p 个集合的第 q 个元素记作 a_{pq} ， $h=p+q$ ，按照 h 从小到大排序， h 相等时再按 q 从小到大排序，就得到了一种所有元素的排序方式，再去掉重复元素，即得可列集。

注：若去掉交集有限的条件，（2）—（4）的结论变为至多可数。

> 定理7.5： （1）整数集是可列集。 （2）有理数集是可列集。 （3）P_{n} 表示 n 阶的整系数多项式全体，P_{n} 是可列集。 （4）整系数多项式全体是可列集，进而全体代数数是可列集。

证： （1）显然整数集 $Z=N\cup\{ -1,-2,-3,\cdots,-n,\cdots \}$ ，显然二者都是可列集，由定理7.4（3），得证。

（2）集合 $Q=\underset{p=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}\left\{ \frac{q}{p}|q\in Z \right\}$ ，由定理7.4（4）， Q 为可列集。

（3）设 k 为任意正整数，使用数学归纳法，当 $k=1$ 时，由（2）结论显然可列；设 P_{n} 可列，则固定 $n+1$ 阶系数的 $n+1$ 阶整系数多项式可列，故 P_{n+1} 为可列个 P_{n} 的并，由定理7.4（4），得证。

（4）全体整系数多项式为 $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\bigcup}}P_{n}$ ，是可列个可列集的并，由定理7.4（4），得证。

例7.1：下列元素构成的集合都是可列集：整系数多项式，有理系数多项式，代数数， n 为欧式空间上的整数坐标点，n 为欧式空间上的有理坐标点，分量为有理数的有限维向量。

> 定理7.6：若集合 $A_{1},A_{2},A_{3},\cdots,A_{k}$ 都是可列集，则 $A_{1}\times A_{2}\times A_{3}\times\cdots\times A_{k}$ 是可列集。

证：用数学归纳法，显然 A_{1} 是可列集，假设 $A_{1}\times A_{2}\times A_{3}\times\cdots\times A_{n}$ 可列，那么在 $A_{1}\times A_{2}\times A_{3}\times\cdots\times A_{n}\times A_{n+1}$ 中。取定任一 A_{n+1} 中的元素都是一个可列集，因此是可列个可列集的不交并；根据定理7.4（4），得证。

第八章 不可列集

> 定理8.1：区间 $[0,1]$ 是不可列集。

证：假设是可列集，则 $[0,1]=\{a_{1},a_{2},\cdots,a_{n},\cdots\}$ 。我们将区间三等分，取其中一份，使得 $a_{1}\notin I_{1}$ ，再将 $ I_{1}$ 三等分，得到 $a_{2}\notin I_{2}$ ，这样一直做下去，得到一列区间列，有 $I_{1}\subset I_{2}\subset\cdots\subset I_{n}\subset\cdots$ 。显然区间长度趋于 0 ，由区间套定理，$\exists a\in [0,1]$ ，满足 $a\in\underset{i=1}{\overset{\infty}{\bigcap}}I_{i}$，但由于 $[0,1]$ 可列， $\exists m$ ， $a=a_{m}$ ，于是 $a\notin I_{m}$ ，矛盾，故不是可数集。

由此，我们可以找到一类基数比可列集大的无限集：

> 定义8.1：与区间 $[0,1]$ 对等的集合称为连续集，基数记为 $\aleph$ 。 定理8.2：设 A 是无限集， B 是至多可列集，则 $A\cup B\sim A$ 。

证：假设 $A\cap B=\empty$ ，由于A 是无限集，由定理7.1，存在可列集 $M\subset A$ ，由定理7.4， $M\sim M\cup B$ ，从而， $A\cup B=(A\setminus M)\cup(M\cup B)\sim (A\setminus M)\cup M=A$ 。若 $A\cap B\ne\emptyset$ ，则令 $C=(A\cup B)\setminus A$ ，有 $A\cup C=A\cup B$ 且 $A\cap C=\emptyset$ ，用前面结论即可证。

> 定理8.3： （1） $[0,1]\sim (0,1)$ 。 （2） $R\sim(0,1)$ 。 （3）任意含有无限个元素的区间的基数都是 $\aleph$ 。 （4）任意含有无限个元素的区间内无理数全体的基数是 $\aleph$ 。

证： （1）取 $A=(0,1)$, $B=\left\{ 0,1 \right\}$ ，使用定理8.3即得。

（2）构造映射 $f：(0,1)\rightarrow R$ ， $f(x)=tan(πx-\frac{π}{2})$ ，不难验证这是一个双射，由此 $R\sim (0,1)$ ，得证。

（3）令 $f(x)=(b-a)x+a$ ，显然 f 是从 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的双射，也是从 $(0,1)$ 到 (a,b) 的双射，而半开半闭区间 $(a,b)\subset [a,b)\subset [a,b]$ ，由定理6.4，基数也是 $\aleph$ ，由此，有界区间的情形得证。对于无界区间，有 $(a,a+1)\subset (a,+\infty)\subset (-\infty,+\infty)$ 。由定理6.4，得证。

（4）该区间内的有理数全体是至多可列的，由定理8.3，无理数全体与该区间对等，得证。

为了找到更多不可列集，我们通过进制的概念进一步研究区间 $(0,1)$ 。显然任何数 a 都可以写成小数的形式，即 $a=\underset{n=1}{\overset{\infty}\sum}\frac{a_{n}}{10^{n}}$ ，其中 $a_{n}=0,1,\cdots,9$ ，因而 10 进制可以表示 $(0,1)$ 上所有的数。我们把 k 进制数全体记作 $B_{k}=\{\underset{n=1}{\overset{\infty}\sum}\frac{a_{n}}{k^{n}}|a_{n}=0,1,\cdots,9\}$ ，显然 $(0,1)\subset B_{k}$ ，但有些数会有两种表示，如 $0.5=0.4999\cdots$ ，但不难想象，至多有两种表示，于是 B_{k} 可以与 $(0,2)$ 的子集建立双射，由定理6.4，B_{k} 的基数为 $\aleph$ 。因此，我们可以用 B_{k} 代表所有连续集进行分析。

> 定理8.4： （1）R^{n} 的基数为 $\aleph$ ，即有限个连续集的直积仍是连续集。 （2）可列维的实向量全体的基数为 $\aleph$ ，即可列个连续集的直积仍是连续集。 （3） 有理数域上的可列维向量全体基数为 $\aleph$ ，即可列个可列集的直积是连续集。

证： （1）R^{n} 中的一个元素可以表示为 n 个小数，我们把每一个小数的第一位排列起来，再依次这样排列第二位、第三位 $\cdots$ ，即可得一个 R_{n} 到 R 的双射，得证。

（2）设第 p 个分量的第 q 位小数记作 a_{pq} ， $h=p+q$ ，按照 h 从小到大排序， h 相等时再按 q 从小到大排序，就得到了一种所有元素的排序方式，因而是连续集。

（3）我们将向量的每一位理解为小数，则每一位有可列种选择，而小数集 B_{k} 有有限种选择，故基数不小于 $\aleph$ ；另一方面，可列个可列集的直积小于可列个连续集，故基数不大于 $\aleph$ ，综上，得证。

注：全体整系数多项式的基数为 $\aleph_{0}$ ，它不能够看作是可列个可列集的直积，因为任何整系数多项式都包含于有限个可列集的直积，而事实上，不包含于有限个可列集的元素更多，因而可列个可列集的直积的基数为 $\aleph$ 。

我们把用集合的基数用有限数想象以下，比如：二进制数就是可列位小数，每一位都有两种选择，因而可以表达为 $2^{\aleph_{0}}$ 。类似地，记 n 为有限基数，无限集基数运算的结论可以记作： $\aleph_{0}=\aleph_{0}-n=\aleph_{0}+n$ ，$\aleph_{0}=n\aleph_{0}=\aleph_{0}\times \aleph_{0}=\aleph_{0}^{n}$ ； $n^{\aleph_{0}}=\aleph_{0}^{\aleph_{0}}=\aleph$ ， $\aleph=\aleph-\aleph_{0}=\aleph+\aleph_{0}$ ， $\aleph=n\aleph=\aleph_{0}\times\aleph$ ， $\aleph=\aleph^{\aleph_{0}}$ 。

那么一个问题出现了，还有没有基数更大的集合呢？答案是肯定的。我们前面将可列集作为指数得到了连续集，我们想，如果将连续集作为指数，得到的自然应该是基数更大的集合，下面我们借助定义1.8中幂集的概念来说明这个问题。

> 定理8.5（康托定理）：设 A 是一个集合，那么 $P(A)$ 的势大于 A 的势。

证：有限的情形由定理1.3显然。无限的情形我们用反证法，假设有映射 $f：A\rightarrow P(A)$ 是双射，首先假设 $\forall a\in A$ ，都有 $a\notin f(a)$ ，那么 $f^{-1}(A)=\emptyset$ ，不成立；其次，如果存在 $a\in A$ ，满足 $a\notin f(a)$ ，令 $B=\{a|a\notin f(a)\}$ ，易得 $f^{-1}(A)=\emptyset$ ，不成立；因此， $\forall a\in A$ ，都有 $a\in f(a)$ ，于是 $\forall a\in A$ ，发现必有 $f^{-1}(\{a\})=a$ ，于是 $P(A)$ 中的单元素集就已经用尽了 A 中的所有元素，这不是双射，矛盾，因此得证。

定理8.1是康托定理对于可列集下的特例。定理8.5说明了不存在基数“最大”的集合，因为任何集合的幂集的基数都会更大。至此，我们通过幂集说明了无穷是一级一级递增，没有上限的。另一个问题便是两级之间，即一个无限集与它的幂集合之间有没有其它基数，更具体地，连续集与可列集之间还有没有其他基数，这称为连续统假设，目前为止既无法证实也无法证伪，是一个非常复杂的问题。

第九章 点集中点的分类

> 定义9.1.1（拓扑学中的邻域）：设 $(X,\Im)$ 是拓扑空间, $x\in X$ ， U是 X 的一个子集，满足: 存在一 个开集 $V\in \Im$ 使得 $x\in V\subset U$ ，则称 U 为 x的一个邻域。 定义9.1.2（分析中的球形邻域）：设 $x:(x_{1},x_{2},...x_{n})$ 为欧式空间 R^{n} 中一点，令 $U=\left\{ (y_{1},y_{2},...y_{n})|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{(x_{i}-y_{i})^{2}}}<\delta \right\}$ ，则称 U 为点 x 的 δ 球形邻域。 定义9.1.3（分析中的方形邻域）：设 $x:(x_{1},x_{2},...x_{n})$ 为欧式空间 R^{n} 中一点，令 $U=\left\{ (y_{1},y_{2},...y_{n})|max(\left|x_{i}-y_{i} \right|)<\delta \right\}$ ，则称 U 为点 x 的 δ 方形邻域。

　　在分析与拓扑中定义了不同的邻域，个人认为，邻域的本质是开集，拓扑中的邻域中真正奇效的概念是开集 V ，鉴于点集的性质在多数教材中没有详细介绍，笔者试图通过集合的概念给出系统的论述。我们首先设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$，在此基础上研究点集的分类。第一分类法，将 X 上的点分成内点，边界点，外点；第二分类法，将 X 上的点分成聚点，孤立点，外点。其中外点不是我们主要关注的对象，另外两类点统称相关点（我独创的概念），接下来分别证明两种分类法能够完成分类（下文称分类的正当性），每一类别的点与 A 的关系，以及两种分类之间的关系。

> 定义9.2：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， A 的补集记作 A^c ，对于点 $x\in X$ ：（1）若存在 x 的邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\subset A$ ，则称 x 为 A 的内点；A 的内点构成的集合称为 A 的内部，记作 A° 。 （2）若任意 x 的邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\cap A\ne \Phi$ 且 $U_{x}\cap A^{c}\ne \Phi$ ，则称 x 为 A 的边界点；A 的边界点构成的集合称为 A 的边界，记作 ∂A 。 （3）若存在 x的邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\cap A=\Phi$ ，则称 x 为 A 的外点；A 的外点构成的集合称为 A 的外部。 （4）若任意 x 的邻域 U_{x} ， $U_{x}\cap A\ne \Phi$ ，则称 x 为 A 的相关点，相关点构成的集合记作 $Rel(A)$ 。 定理9.1：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， A 的补集记作 A^c ，对于点 $x\in X$： （1）若x 为 A 的内点，则 x 是 A^c 的外点。 （2）若x 为 A 的外点，则 x 是 A^c 的内点。 （3）若x 为 A 的边界点，则 x 是 A^c 的边界点。

证：先证明 $U_{x}\subset A\Leftrightarrow$ $U_{x}\cap A^{c}=\Phi$ ：由于 $U_{x}\subset A$ ，$\forall a\in U_{x}$ ，都有 $a\in A$ ， $a\notin A^{c}$ ， $\Rightarrow$ 得证；由于 $U_{x}\cap A^{c}=\Phi$ ，$\forall a\in U_{x}$ ， $a\notin A^{c}$ ，$a\in A$ ， $\Leftarrow$ 得证。由此证明:

（1）由定义与上述结论，存在 x 的邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\cap A^{c}=\Phi$ ，恰好符合 A^c 的外点的定义，得证。

（2）由定义与上述结论，存在 x 的邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\subset A^{c}$ ，恰好符合 A^c 的内点的定义，得证。

（3）由于 $A=(A^{c})^{c}$ ，根据定义，显然得证。

我们前面证明的集合关系，给出了另一种一种内点与外电的定义方法，定义9.1是基于集合 A 本身定义的，而这里是基于补集 A^c 定义的；我们因而可以用 $(A^{c})^{\circ}$ 表示 A 的外部。

> 推论9.1：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， $A^{\circ}\subset A$ ， $(A^{c})^{\circ}\subset A^{c}$ 。

证：设 $x\in A^{\circ}$ ，由内点定义有 $x\in U_{x}\subset A$ ，即得证，外点集同理可得。

> 定理9.2（第一分类法的正当性）：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，对于点 $x\in X$ ， x 必是内点、边界点、外点中的一种，即 $X=A^{\circ}\cup\partial A\cup(A^{c})^{\circ}$ ， $A^{\circ}\cap\partial A=\Phi$ ， $A^{\circ}\cap(A^{c})^{\circ}=\Phi$ ， $\partial A\cap(A^{c})^{\circ}=\Phi$ 。

证：先假设 x 既不是内点，也不是外点，结合以上给出的两种定义，有任意 x 的邻域 U_{x}，都有 $U_{x}\cap A\ne \Phi$ 和 $U_{x}\cap A^{c}\ne \Phi$ ，恰好满足边界点的定义，证得了，任何点都至少包含于这三种点当中的一种，接下来证明它不能同时属于两种。假设 $x\in \partial A$ ，由定义有 $U_{x}\cap A\ne \Phi$ 且 $U_{x}\cap A^{c}\ne \Phi$ ，与 x 是内点和外点的定义是矛盾的，因而有 $A^{\circ}\cap\partial A=\Phi$ ， $\partial A\cap(A^{c})^{\circ}=\Phi$ ；最后再假设 $x\in A^{\circ}\cap(A^{c})^{\circ}$ ，则存在邻域 U_{x} ，使得 $U_{x}\cap A=\Phi$ ， $U_{x}\cap A^{c}=\Phi$ ，从而推出 $U_{x}=\Phi$ ，与邻域定义矛盾，从而 $A^{\circ}\cap(A^{c})^{\circ}=\Phi$ 。

> 定理9.3：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ： （1）$Rel(A)=A^{\circ}\cup\partial A$ 。 （2） $A\subset Rel(A)$ 。

证： （1）我们先假设 $x\in Rel(A)$ ，但 $x\notin \partial A$ ，由定义有$U_{x}\cap A\ne \Phi$ 且 $U_{x}\cap A^{c}= \Phi$ ，那么 $U_{x}\cap A^{c}=U_{x}$ ，即 $U_{x}\subset A$ ， $x\in A^{\circ}$ ，也就证出了 $Rel(A)\subset A^{\circ}\cup\partial A$ 。假设 $x\in A^{\circ}$ ，由定义知 $U_{x}\subset A$ ， $U_{x}\cap A\ne \Phi$ ，得 $x\in Rel(A)$ ；若 $x\in \partial A$ ，由定义也有 $U_{x}\cap A\ne \Phi$ ，得 $x\in Rel(A)$ ，故得证。

（2）显然 $Rel(A)^{c}=(A^{c})^{\circ}\subset A^{c}$ ，有补集的性质，得证。

> 推论9.2：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，$Rel(A)\cup (A^{c})^{\circ}=X$ ， $Rel(A^{c})\cup A^{\circ}=X$ 。

证明：由定理9.3（1），显然。

> 定义9.3：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，对于点 $x\in X$： （1）若任何 x 的邻域 U_{x} ， $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A\ne \Phi$ ，则称 x 为 A 的聚点，聚点构成的集合称作导集，记作 $A^{'}$ 。 （2）若 $x\in A$ ， $x\notin A^{'}$，则称 x 为 A 的孤立点。 定理9.4（第二分类法的正当性）：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，对于点 $x\in Rel(A)$，有 x 不是聚点就是孤立点。

证：由定义可知， x 不会既是聚点又是孤立点；那么我们假设 $x\notin A^{'}$ ，由定义得任存在 x 的邻域 U_{x} ， $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A\ne \Phi$， $U_{x}\cap A\ne \Phi$ ，从而得 $\left\{ x \right\}\cap A\ne \Phi$ ，自然地， $x\in A$， x 是A 的孤立点，得证。

> 定理9.5（有争议）：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ： （1）内点都是聚点。 （2）孤立点都是边界点。

证： （1）设 x 是内点，则存在邻域 $U_{x1}\subset A$ ，对于任何邻域 U_{x} ，由于 $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap U_{x1}\ne \Phi$ ， $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap U_{x1}\subset (U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A$ ，得 $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A\ne \Phi$ ，从而是聚点。

（2）设 x 是孤立点，则任何 x 的邻域 U_{x} ， $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A=\Phi$ ， $\left\{ x \right\}\cap A=\left\{ x \right\}\ne\Phi$ ，得 $U_{x}\cap A\ne\Phi$ ；由补集公式得， $(U_{x}-\left\{ x \right\})\cap A^{c}=U_{x}-\left\{ x \right\}\ne \Phi$ ，即 $U_{x}\cap A^{c}\ne \Phi$ ，满足边界点定义。

注：上述结论在拓扑空间中需要添加条件： $\left\{ x \right\}$ 不是一个邻域（开集）才能够成立，本文的探讨都默认这一条件。

> 定义9.4：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， $A^{'}\cup A$ 称为 A 的闭包，记作 $\bar{A}$ 。 定理9.5：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， $\bar{A}=Rel(A)$ 。

证：设 $x\in Rel(A)$ ，则 $x\in A^{'}$ 或 x 是孤立点，显然若是孤立点，则 $x \in A$ ，因此， $Rel(A)\subset \bar{A}$ 。再假设 $x\in \bar{A}$ ，则$x\in A^{'}$ 或 $x \in A$ ，结合定理9.3（2），易得 $\bar{A}\subset Rel(A)$ ，由此得证。

　　这样，我们就证明了闭包与相关点集的等价性，上述所有关于 $Rel(A)$ 的性质关于 $\bar{A}$ 同样成立，最重要的还是补集性质： $\bar{A}^{c}=(A^{c})^{\circ}$ ，请读者深入理解，这个性质将在下一章的证明中配合定理3.3被反复用到。

> 例9.1：定义二维欧式空间中的集合 $E_{1}=\left\{ (0,0) \right\}\cup \left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}>1 \right\}$ ，其内部：$\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}>1 \right\}$ ，边界： $\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}=1 \right\}\cup\left\{ (0,0) \right\}$ ，外部： $\left\{ (x,y)|0<x^{2}+y^{2}<1 \right\}$ ，闭包： $\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}\geq1 \right\}\cup\left\{ (0,0) \right\}$ ，聚点： $\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}\geq1 \right\}$ ，孤立点： $\left\{ (0,0) \right\}$ 。$E_{2}=\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}\geq1 \right\}\cup\left\{ (0,0) \right\}$，如将集合 E_{1} 换为 E_{2} 上述结论完全不变，请读者自行验证。

总结：本章，我们采用了另外一种顺序阐述了点的分类体系，设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， 将点分成两大类，一类是外点，一类称为相关点，定理9.5告诉我们相关点的集合与闭包是等价的，以后的讨论将只使用闭包，外点不是我们研究 A 时感兴趣的点，而闭包中的点是我们感兴趣的，由此衍生出两大分类法。第一类将闭包分成内点和边界点，这一类分发使得 A 与 A^c 产生了对称性（定理9.1），同时内点一定是属于 A 的，而边界点不见得属于 A 。第二类将闭包分成了聚点和边界点，在特定条件下，聚点包含了全部的内点，同时边界点包含了全部的孤立点。下文将在分类的基础上探讨开集和闭集的性质。

第十章 开集与闭集

由于本章包含大量第九章证明的内容，因此，在学习本章前，请先阅读第九章。

> 定义10.1：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， 若 $A=A^{\circ}$ ，则称 A 为开集。 引理：球形邻域和方邻域都是开集。

证：假设 U_{x} 为 x 的 δ 邻域，取其中任意一点 $z:(z_{1},z_{2},...z_{n})$ ， $U=\left\{ (y_{1},y_{2},...y_{n})|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{(x_{i}-y_{i})^{2}}}<\delta \right\}$ ，令 $\delta_{1}=\frac{\delta-\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{(x_{i}-z_{i})^{2}}}}{2}$ ，我们可以取 z 的 δ_{1} 邻域 U_{z} ，显然， $U_{z}\subset U_{x}$ ，从而 z 是 U_{x} 的内点， U_{x} 就是开集了。对于方邻域，也可以构造出类似的邻域，证明类似。

我们已经给出了开集的概念，接下来我们讨论关于邻域的本质问题，首先回忆一下定义9.1.1：设 $(X,\Im)$ 是拓扑空间, $x\in X$ ， U是 X 的一个子集，满足: 存在一 个开集 $V\in \Im$ 使得 $x\in V\subset U$ ，则称 U 为 x的一个邻域。

前面说过，邻域的本质是开集，我们发现根据上述定义，如果 U_{x} 是 x 的一个邻域，满足某种前面讨论过的性质，那么必存在一个它的开邻域V 也满足这个性质，再加上下面的定理，我们可以充分理解邻域的本质了。

> 定理10.1：设 X 为研究的点集全集， 若 $x\in U\subset X$ ，且 U 为开集，则 U 是点 x 的邻域。

证：根据定义9.1.1， $x\in U\subset U$ ，得证。

> 定义10.2：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， 若 A^c 是开集，则称 A 为闭集。 定理10.2：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， A 为闭集 $\Leftrightarrow A=\bar{A}$ 。

证：若 A 为闭集 $\Leftrightarrow$ A^c 为开集 $\Leftrightarrow A^{c}=(A^{c})^{\circ}$ $\Leftrightarrow A=A^{\circ}\cup \partial A$ $\Leftrightarrow A=\bar{A}$ 。

注：本条定理可以看作闭集的第二定义。

> 定理10.3：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，若 A 包含所有的极限点，则A 为闭集。

证： $A^{'}\subset A$ ，则有 $\bar{A}=A^{'}\cup A\subset A$ 。由定理10.2，得证。

> 定理10.4：(1) 若 $ A\subset B$ ，则 $A^{\circ}\subset B^{\circ}$ ， $\bar{A}\subset \bar{B}$ 。 （2） $(A\cap B)^{\circ} =A^{\circ}\cap B^{\circ}$ ， $\bar{A}\cup\bar{B} = \overline{A\cup B}$ \bar{A}\cup\bar{B} = \bar{A\cup B} 。

证： （1）设 $x\in A^{\circ}$ ，则存在邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\subset A \subset B$ ，从而 $x\in B^{\circ}$ ，即 $A^{\circ}\subset B^{\circ}$ 。由 $ A\subset B$ ，利用定理3.2（1）得 $B^{c}\subset A^{c}$ ，再利用刚才证明的结论有： $(B^{c})^{\circ}\subset (A^{c})^{\circ}$ ，再次利用定理3.2（1）得 $\bar{A}\subset \bar{B}$ 。

（2）设 $x\in (A\cap B)^{\circ} $ ，则存在邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\subset A\cap B$ ，从而 $U_{x}\subset A$ 且 $U_{x}\subset B$ ，由此， $x\in A^{\circ}\cap B^{\circ}$ ， $(A\cap B)^{\circ}\subset A^{\circ}\cap B^{\circ}$ ；若 $x\in A^{\circ}\cap B^{\circ}$ ，则存在邻域 U_{x} ，满足 $U_{x}\subset A$ 且 $U_{x}\subset B$ ，从而 $U_{x}\subset A\cap B$ ， $x\in (A\cap B)^{\circ} $ ， $A^{\circ}\cap B^{\circ}\subset (A\cap B)^{\circ}$ ；综上， $(A\cap B)^{\circ} =A^{\circ}\cap B^{\circ}$ 。

由定理3.4，有 $\bar{A}\cup\bar{B} = (\bar{A}^{c}\cap \bar{B}^{c})^{c} = [(A^{c})^{\circ}\cap (B^{c})^{\circ}]^{c}$ \bar{A}\cup\bar{B} =\bar{A}^{c}\cap \bar{B}^{c}=(A^{c})^{\circ}\cap (B^{c})^{\circ} ，再由前述定理，得 $[(A^{c})^{\circ}\cap (B^{c})^{\circ}]^{c} = [(A^{c}\cap B^{c})^{\circ}]^{c} = \overline{(A^{c}\cap B^{c})^{c}} = \overline{A\cup B}$ (A^{c})^{\circ}\cap (B^{c})^{\circ}=(A^{c}\cap B^{c})^{\circ}=\bar{(A^{c}\cap B^{c})^c}=\bar{A\cup B} 。

> 定理10.5：关于开集，有以下结论： （1）空集和全集是开集。 （2）任意多个开集的并集是开集。 （3）有限多个开集的交集是开集。

证： （1）由于 $\Phi^{\circ}\subset \Phi$ ，显然有 $\Phi^{\circ}=\Phi$ ，故空集是开集。设 X 是全集，任意 $x\in X$ ，显然有 $U_{x}\subset X$ ，故全集也是开集。

（2）设 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}$ ，则任意 $x\in A$ ， $U_{x}\subset A_{j}\subset A$ ，因而 $A=A^{\circ}$ ，得证。

（3）设 A, B 是开集， $(A\cap B)^{\circ} =A^{\circ}\cap B^{\circ}=A\cap B$ ，集合的交满足结合律，因此用数学归纳法即可得证。

> 例11.1： $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})=[0,1]$ ，是闭集，任意多个开集的交未必是开集。 定理10.6：关于闭集，有以下结论： （1）空集和全集是闭集。 （2）任意多个闭集的交集是闭集。 （3）有限多个闭集的并集是闭集。

证： （1）由定理10.5（1）立即可得。

（2）设 $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{i}$ ，由定理3.5，由 $A^{c}=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}^{c}$ ，显然 A_{i}^{c} 是开集，由定理10.5（2）， A^c 是开集，从而 A 是闭集。

（3）设 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_{i} $ ，由定理3.5，由 $A^{c}=\bigcap_{i=1}^{n}A_{i}^{c}$ ，显然 A_{i}^{c} 是开集，由定理10.5（3）， A^c 是开集，从而 A 是闭集。

> 例10.2： $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]=(0,1)$ ，是开集，任意多个闭集的并未必是闭集。 定理10.7：若 A 是开集， B 是闭集，则 $A-B$ 是开集， $B-A$ 是闭集。

证： $A-B=A\cap B^{c}$ ，由闭集定义得 B^c 是开集，再由定理10.5（3）得证，同理可证另外一命题。

> 定理10.8： （1）A° 是开集，并且是 A 所包含的最大的开子集。 （2） $\bar{A}$ 是闭集， 并且是包含 A 的最小的闭集。

证： （1）设 A 所包含的所有开集构成的子集族为 $\Im$ ，设 $U\subset A$ 是 A 中的开集，则

$\forall x\in U$ ， $x\in U\subset A$ ， 则 x 也是 A 的内点， $x\in A^{\circ}$ ，于是 $U\subset A^{\circ}$ ，因此， $\bigcup_{U\in\Im}^{}U\subset A^{\circ}$ 。反之， $\forall x\in A^{\circ}$ ，存在开集 U ，满足 $x\in U\subset A$ ，于是 $x\in \bigcup_{U\in\Im}^{}U$， 即有 $A^{\circ}\subset \bigcup_{U\in\Im}^{}U$ ，综上，A° 是 A 所包含的所有开集的并集，当然也是开集，并且是A 所包含的最大的开子集。

（2）考虑$\bar{A}^{c}=(A^{c})^{\circ}$，由（1）结论， $(A^{c})^{\circ}$ 是开集，因此，$\bar{A}$ 是闭集。设 V 是闭集，且 $A\subset V$ ，则 V^{c} 是开集， $V^{c}\subset A^{c}$ 。由（1），$(A^{c})^{\circ}$ 是A^c 所包含的最大的开子集，因此，$\bar{A}$ 是包含 A 的最小的闭集。

> 推论10.1： $(A^{\circ})^{\circ}=A^{\circ}$ ， $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ 。

证：由定理10.8，和开集，并集定义显然。

> 定理10.7：设 X 为研究的点集全集， 若 $A\subset X$ ，且 A 非空，则： (1) $\partial A\subset A \Leftrightarrow A$ 是闭集。 (2) $A\cap\partial A=\Phi\Leftrightarrow A$ 是开集。 (3) $\partial A=\Phi\Leftrightarrow A$既是开集又是闭集。

证： （1）由于 $A^{\circ}\subset A$ ， $\partial A\subset A\Leftrightarrow A=\partial A\cup A^{\circ}=\bar{A} \Leftrightarrow A$ 是闭集。

（2） $A\cap\partial A=\Phi\Leftrightarrow A=A^{\circ}\Leftrightarrow A$ 是开集。

（3）显然满足（1）和（2）的条件，故既是开集又是闭集。

> 推论10.2：欧式空间上的单点集是闭集。

证：容易验证定理10.7（1）的条件成立。

> 例10.3：定义二维欧式空间中的集合$E_{1}=\left\{ (0,0) \right\}\cup \left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}>1 \right\}$， $E_{2}=\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}\geq1 \right\}\cup\left\{ (0,0) \right\}$，他们的边界都是$\left\{ (x,y)|x^{2}+y^{2}=1 \right\}\cup\left\{ (0,0) \right\}$，容易验证 E_{1} 不满足定理10.7（1）（2），既不是开集，也不是闭集。而 E_{2} 满足（1），是闭集。

第十一章 紧集与连通集

> 定义11.1：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ， 若 $\left\{ O_{\alpha}|\alpha\in E \right\}$ 是 X 上的一个开集族，若 $A\in \bigcup_{\alpha\in E}^{}O_{\alpha}$ ，则称 $\left\{ O_{\alpha}|\alpha\in E \right\}$ 是 A 的一个开覆盖，若集合 E 中有有限个元素，则称 $\left\{ O_{\alpha}|\alpha\in E \right\}$ 是 A 的一个有限开覆盖。 定义11.2：设 X 为研究的点集全集， $A\subset X$ ，若 A 的任意开覆盖都有有限子覆盖，则称 A 是紧集。 定理11.1：设 $A\subset R^{n}$ ， 则 A 是紧集 $\Leftrightarrow$ A 是有界闭集。

证：将以原点 O 为中心，半径为 r 的求形邻域记作 $U(O,r)$ ，显然集族 $\left\{ U(O,k)|k\in N\right\}$ 构成了 A 的一个开覆盖，若A 是紧集，则存在有限开覆盖使得 $A\subset \bigcup_{i=1}^{n}U(O,k_{i})$ ，则有 A 中的所有点与原点的欧式距离小于 $max\{k_{i}\}$ ，从而 A 有界。

再假设 A 不是闭集，参考闭集定义（ $A=\bar{A}=A\cup $ $A^{'}$)，得到 $\exists x\in A^{'}$ ，有 $x\notin A$ ，那么再取 $\forall y\in A$ ，存在 r_{x} ，使得 $U(x,r_{x})\cap U(y,r_{x})=\Phi$ 。由于 $A\subset \bigcup_{y\in A}^{}U(y,r_{x})$ ，由于 A 是紧集，存在 $y_{1},y_{2},y_{3}...y_{n}$ ，满足 $A\subset \bigcup_{i=1}^{n}U(y_{i},r_{x})$ ，显然 $U(x,r_{x})\subset \bigcup_{i=1}^{n}U(y_{i},r_{x})$ ，与 $\forall y$ ，$U(x,r_{x})\cap U(y,r_{x})=\Phi$ 矛盾。从而 A 是闭集， $\Rightarrow$ 得证。

$\Leftarrow$ 的证明请参考扩展阅读（1）中的有限覆盖定理，并在此基础上自行从一维推广到高维。

> 定义11.3：设 $A\subset X$ ， 若 A 不能写成两个非空不相交开集的并，则称 A 是连通集。 定义11.4：设 X 为研究的点集全集， $A\subset R^{n}$ ， 若 $\forall x,y\in A$ ，都存在一条连续曲线满足， $h(a)=x$ ， $h(b)=y$ ，且 $\forall t\in [a,b]$ ，都有 $h(t)\in A$ ，则称 A 为道路连通的。 定义11.5：道路连通的开集是区域。若 A 是区域，那么 $\bar{A}$ 称为闭区域。 定义11.6：设 A 是一个区域，若 $\forall x,y\in A$ ，都有 $tx+(1-t)y\in A(t\in[0,1])$ ，则称 A 是凸域。

由于文章性质，本章内容只给出数学分析的定义，拓扑学相关知识请自行阅读扩展阅读。拓扑学对开集闭集的体系构建过程是与本文不同的，他们将定理10.5作为开集的定义，本文是以研究集合的视角建立的体系，与之不同请大家理解。

扩展阅读：

（1）

乌兰巴托海军：七大实数理论与互推

（2）

乌兰巴托海军：七大实数理论互推完整版

（3）

学弱猹：拓扑学Ⅱ|笔记整理（1）——拓扑基本概念及性质，连续

（4）

学弱猹：拓扑学Ⅱ|笔记整理（2）——乘积空间，拓扑基，分离公理

（5）

学弱猹：拓扑学Ⅱ|笔记整理（3）——可数公理，Urysohn可度量化定理

（6）

学弱猹：拓扑学Ⅱ|笔记整理（4）——紧致性，列紧性

（7）

学弱猹：拓扑学Ⅱ|笔记整理（5）——连通性

（8）

学弱猹：实分析Ⅱ|笔记整理（2）——开集，闭集等集合性质深化