Gleichungen

Autor:
Jonas Guler (Gu)

Version v1.0
23. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg **1**
1.1 Typen von Gleichungen 2

2 Lösungsmenge von Gleichungen **5**

3 Lösungsstrategie für lineare Gleichungen **7**
3.1 Lineare Gleichungen mit Parameter 8
3.2 Gleichungen der Form $a \cdot b = 0$ 10

4 Bruchtermgleichungen **11**
4.1 Definitionsmenge 11
4.2 Bruchtermgleichung auflösen 12
4.3 Bruchtermgleichungen mit Parametern 13

5 Textaufgaben **14**
5.1 Textaufgaben mit Bruchtermgleichungen 16

1 Einstieg

Wir steigen mit zwei interessanten Entdeckungsaufgaben ein.

Aufgabe 1.1.

1. Du stehst auf einem Hügel und schaust auf eine Wiese, auf der Schafe und Ziegen weiden. Nach einer Weile fällt dir auf, dass sich fünfmal so viele Schafe wie Ziegen auf der Wiese befinden. Drücke diesen Sachverhalt als Gleichung aus? Was muss du dabei einführen? Welche Vorteile gibt diese Darstellung im Vergleich zur sprachlichen Fassung?

2. Du planst eine USA-Reise und liest dazu einen Reiseblog. Unter anderem findest du den Hinweis, dass in den USA die Temperaturen in Grad Fahrenheit angegeben werden und nicht wie bei uns üblich in Grad Celsius. Folglich solltest du wissen, wie das Mass ins andere umgerechnet wird. Dem Blog ist zu entnehmen, dass man, um Fahrenheit in Grad umzurechnen, erst 32 abziehen und dann den erhaltenen Wert mit $\frac{5}{9}$ multiplizieren muss. Drücke diesen Sachverhalt als Gleichung aus? Was muss du dabei einführen? Welche Vorteile gibt diese Darstellung im Vergleich zur sprachlichen Fassung?

Wir sehen also, dass Gleichungen nicht einfach vom Himmel fallen sondern drücken vielmehr eine Frage zu einem bestimmten Thema aus. Dabei können Gleichungen sehr einfach, wie beispielsweise eine lineare Gleichung

$$2x - 5 = 17 - 3x,$$

oder auch extrem komplexe, wie zum Beispiel

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V \cdot \Psi = i \cdot \hbar \cdot \frac{\delta \Psi(x,t)}{\delta t}$$

sein. Beide dieser Gleichungen haben aber gemeinsam, dass ihre Aussage entweder **wahr** oder **falsch** ist. Betrachten wir dazu die lineare Gleichung. Falls wir $x = 4.4$ in die Gleichung einsetzen, so erhalten wir eine wahre Aussage:

$$2 \cdot 4.4 - 5 = 8.8 - 5 = 3.8 = 17 - 13.2 = 17 - 3 \cdot 4.4.$$

Wird eine andere Zahl für x eingesetzt, erhalten wir immer eine falsche Aussage. Das heisst also, wir können den Begriff einer Gleichung mathematisch definieren.

Definition 1.1.

Unter einer **Aussage** versteht man eine Behauptung, der eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte (*wahr*) oder (*falsch*) zugeordnet werden kann.
Eine **Gleichung** ist eine Aussage, die eine oder mehrere Variablen enthält. Indem die Variablen mit Zahlen belegt werden, entsteht entweder eine wahre oder eine falsche Aussage.

Wir werden uns zu Beginn vor allem darauf fokussieren, alle Zahlen einer Gleichung zu finden, sodass eine wahre Aussage entsteht. Dabei beschränken wir uns auf maximal eine Variable.

Aufgabe 1.2.

1. Formuliere aus den folgenden Fragestellungen jeweils eine Gleichung.

   a) Ich denke mir eine Zahl: Ihr 11−Faches ist um 7 grösser als 400. An welche Zahl denke ich?

   b) Wenn ich eine bestimmte Zahl verdopple, erhalte ich gleich viel, wie wenn ich die von 33 subtrahiere. Welche Zahl ist das?

   c) Addiere ich 5 zum 5−Fachen einer bestimmten Zahl, so erhalte ich 5. Welche Zahl ist gesucht?

2. Ein Zirkus verkaufte für die Abendvorstellung 60 Karten in der Preiskategorie I, 125 Karten in der Kategorie II und 75 in der Kategorie III. Die Gesamteinnahmen an diesem Abend betrugen 5′140.– CHF. Ein Platz der Kategorie I war 8.– CHF teurer als ein Platz in der Kategorie III. Ein Platz in der Kategorie II war 4.– CHF billiger als ein Platz der Kategorie I. Stelle diesen Sachverhalt in einer einzigen Gleichung mit einer Variable dar. Mache dabei deutlich, was deine Variable bedeutet.

1.1 Typen von Gleichungen

Durch das Gleichsetzen von Termen entstehen also Gleichungen. Aber Gleichungen können sich in ihrer Bedeutung und Behandlung stark unterscheiden. Wir besprechen nun kurz und der Reihe nach die folgenden Typen von Gleichungen: Bestimmungsgleichungen, Identitäten, Axiome, naturwissenschaftliche Gesetze und Definitionsgleichungen.

Bestimmungsgleichungen

Bestimmungsgleichungen sind Gleichungen mit mindestens einer Unbekannten, üblicherweise mit x bezeichnet. Dabei stellt sich jeweils die Frage, ob die Gleichung durch das Belegen der Unbekannten mit einer Zahl in eine **wahre** Aussage übergeht.
Die Bestimmungsgleichung

$$x^2 = 2$$

besitzt zwei Lösungen. Wenn wir nämlich für x entweder $+\sqrt{2}$ oder $-\sqrt{2}$ einsetzen, so ergibt sich die wahre Aussage

$$\left(+\sqrt{2}\right)^2 = 2 \quad \text{oder} \quad \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

Bei Bestimmungsgleichungen geht es also überwiegend darum eine Lösung für Unbekannten zu finden. Wir werden uns in Zukunft auch mehrheitlich mit solchen Gleichungen auseinander setzen.

Identitäten

Die Gleichung

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

unterscheidet sich in offensichtlicher Weise von den bisher betrachteten Bestimmungsgleichungen. Dies ist eine sogenannte Identität. Es zeichnet sie aus, dass sie für jede mögliche Belegung von a und b zu einer wahren Aussage wird. Deshalb es ist auch nicht interessant, nach einer der enthaltenen Variablen aufzulösen. Es soll nicht nach einer ganz bestimmten Belegung gesucht werden, sondern es wird ganz allgemein festgestellt, dass die beiden Terme a^2-b^2 und $(a+b)\cdot(a-b)$ generell denselben Wert haben. Eine Identität kann bewiesen werden, indem die eine Seite in die andere umgeformt wird. Unter Verwendung des Distributivgesetzes und des Kommutativgesetzes erhalten wir nämlich:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)\\ &= a^2 - a\cdot b + b\cdot a - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Naturwissenschaftliche Gesetze

Naturwissenschaftliche Gesetze haben oftmals die Form von Gleichungen, aber sie sind keine Bestimmungsgleichungen und keine Identitäten. Das folgende Beispiel mögen den Unterschied erhellen.
Durch Experimente kann festgestellt werden, dass eine Masse, die sich im freien Fall befindet, in guter Näherung nach t Sekunden Fall die Strecke $5t^2$ in Metern zurückgelegt hat. Das Gesetz lautet also so:

$$s = 5t^2.$$

Nun ist das keine Bestimmungsgleichung, weil es nicht darum geht, nach einer Variablen aufzulösen, und es ist keine Identität, denn es ist nicht möglich, die eine Seite durch formales Umformen in die andere Seite zu überführen. Es ist vielmehr die Feststellung eines Zusammenhangs zweier Grössen, welcher durch Experimente erhärtet, aber nicht formal bewiesen werden kann.

Definitionsgleichungen

Zum Schluss soll noch eine weitere Art von Gleichungen kurz gestreift werden: die Definitionsgleichung. Angenommen, wir sind in längere Berechnungen verstrickt und stellen fest, dass gehäuft die Zahl

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$$

vorkommt. Um diesen Term nicht jedes Mal in voller Länge aufschreiben zu müssen, beschliessen wir, den Term durch einen Buchstaben abzukürzen und wir wählen dazu den griechischen Buchstaben φ (Phi). Von jetzt an soll also immer dieser Buchstabe für die oben erwähnte Zahl stehen. Das nennt man eine Definition; einem neuen Symbol (oder Begriff) wird eine klare Bedeutung zugeordnet. Und dafür verwendet man in der Mathematik nicht das gewöhnliche Gleichheitszeichen, sondern ein Gleichheitszeichen mit vorangestelltem Doppelpunkt:

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Übrigens der Buchstabe, der hier gewählt wird, kann vollkommen selbst bestimmt werden. Es gibt absolut keine Einschränkungen, die hier beachtet werden müssen. Wichtig ist lediglich, dass die Buchstaben nicht vertauscht werden.

Aufgabe 1.3.

Nimm zu den folgenden Behauptungen Stellung. Haben die Schülerinnen und Schüler recht? Begründe!

a) Bob behauptet: «Die Bestimmungsgleichung $x - 7 = 5$ besitzt keine Lösung in der Menge der natürlichen Zahlen.»

b) Céline behauptet: «Die Gleichung $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 3$ besitzt überhaupt keine Lösung.»

c) David behauptet: «Der Ausdruck $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ist eine Identität.»

d) Eliane behauptet: Das Assoziativgesetz $(a+b)+c = a+(b+c)$ könne sie durchaus beweisen. Sie wählt die drei Zahlen $1, 2$ und 3 und rechnet: $(1+2)+3 = 3+3 = 6$ und $1+(2+3) = 1+5 = 6$. Da beide Ergebnisse gleich seien, hält Eliane das Gesetz für bewiesen.

2 Lösungsmenge von Gleichungen

Eine Bestimmungsgleichung kann aus ganz unterschiedlichen Aussagen entstehen und unterschiedliche Zusammenhänge mathematisch beschreiben. In der folgende Aufgabe sind einige Möglichkeiten abgebildet.

Aufgabe 2.1.

Löse die folgenden Aufgaben.

a) «Ich denke mir eine Zahl, wenn ich sie verdopple und danach 3 abziehe, so erhalten ich exakt 13. Welche Zahl denke ich mir?»

b) «Ich denke mir eine Zahl, die verdoppelt genau dasselbe ergibt, wie wenn ich sie quadriere. An welche Zahl denke ich?»

c) «Ich denke mir eine Zahl zwischen 1 und 100. Wenn ich das Quadrat der Zahl um 17 erhöhe, erhalte ich 746. Welche Zahl denke ich mir?»

d) «Ich denke mir eine Zahl zwischen 1 und 10. Wenn ich das Quadrat der Zahl um 3 verringere, erhalte ich eine Zahl, die durch 2 teilbar ist. Welche Zahlen denke ich mir?»

Alle obigen Bestimmungsgleichungen haben also eine oder mehrere Lösungen. Eine Zahl ist genau dann eine Lösung einer Gleichung, wenn sich die Gleichung durch Einsetzen der Zahl in eine wahre Aussage verwandelt. Üblicherweise werden alle Lösungen in der **Lösungsmenge** zusammengefasst. Beim Lösen von Gleichungen im Allgemeinen unterscheiden wir folgende 3 Fälle:

Fall 1: Die Gleichung lässt sich eindeutig Lösen

$$6x + (1 - 7x) = 9 - (5x + 5)$$

Fall 2: Die Gleichung besitzt keine Lösung.

$$x \cdot (2 + x) = 2 \cdot (2 + x) + x^2$$

Fall 3: Die Gleichung besitzt unendliche viele Lösungen.

$$2 \cdot (x + 2) + 5x - 10 = 2x + 4 + 5 \cdot (x - 2)$$

Aufgabe 2.2.

a) Finde die Lösungsmenge der folgenden Gleichung.

$$x - (15 - 4 \cdot (2x - 1)) = 3 \cdot (3 \cdot (x + 1) - 5)$$

b) Verändere nun eine einzige Zahl an der obigen Gleichung, sodass sie jetzt unendliche viele Lösungen besitzt.

3 Lösungsstrategie für lineare Gleichungen

Unser Ziel ist es auf den folgenden Seite eine Strategie zu erarbeiten, mit der sich eine spezielle Gruppe von Bestimmungsgleichungen (sogenannte lineare Gleichungen) lösen lässt. Ihr habt in eurem mathematischen Werkzeugskoffer bereits einige Mittel, um solche Gleichungen zu lösen. Zuerst wollen wir aber die lineare Gleichung korrekt definieren.

Definition 3.1. ***(lineare Gleichung)***

Eine Gleichung in der Variable x, die in die Form

$$a \cdot x + b = 0$$

gebracht werden kann, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, wird als **lineare Gleichung** bezeichnet.

Aufgabe 3.1.

Entscheide, ob die folgenden Gleichungen linear sind. Begründe deine Antwort.

a) $6 - (5x - 4) = 3 - (2x - 1)$

b) $\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} = x + 1$

c) $\frac{x}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 5$

d) $(x - 3)(x + 3) + 9 = x^2$

Du bringst im Lösen von linearen Gleichungen schon einige Erfahrungen mit. Jedoch wollen wir diese noch ein wenig vertiefen und in Zukunft auch Gleichungen mit nicht nur natürlichen Koeffizienten a, b lösen können. Deshalb brauchen wir eine allgemein durchführbare Lösungsstrategie für lineare Gleichungen. In diesem Video[1] wird dir eine entsprechende Lösungsstrategie vorgestellt. Beschreibe die wichtigsten Punkte in der Box unten.

Lösungsstrategie

1. _____

2. _____

3. _____

Aufgabe 3.2.

1. Bestimme die Lösungen der folgenden linearen Gleichungen.

   a) $(4x - 5) = 4 \cdot (x + 3)$

   b) $\frac{1}{6} \cdot (x - 2) + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{2}x - 1)$

   c) $x \cdot (x - 2) - 3x = x^2 + 5$

   d) $(8x - 1)(x + 3) = 8 \cdot (x - 2)^2$

   e) $x\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} - x\sqrt{2}$

   f) $4x - 5 = \sqrt{6} \cdot x + 7$

   g) $(x - 4)\sqrt{2} = \sqrt{3}(x - 5)$

   h) $(x + 2 - \sqrt{2})^2 = x^2 + \sqrt{2}$

2. Löse die Aufgaben 121 – 126 aus der Aufgabensammlung.

[1] https://www.youtube.com/watch?v=B5PJhPuiKzA&list=PLZDmY1No3ODo_z43GEirwmEYslEo8K27G&index=3&t=0s

3.1 Lineare Gleichungen mit Parameter

Beispiel 1.
Angenommen wir schleudern einen Gegenstand mit einer Startgeschwindigkeit von $v_0 = 50\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben. Das entspricht etwa der Geschwindigkeit eines Tennisballs beim Aufschlag eines Profis. Durch die Erdanziehung wird die Geschwindigkeit laufend gebremst, und zwar pro Sekunde um exakt $9.81\,\frac{m}{s^2}$. Nach wie vielen Sekunden wird die Masse ihren höchsten Punkt erreicht haben, an dem die Geschwindigkeit 0 ist?

Dieser Zusammenhang kann mit der folgenden linearen Gleichung beschrieben werden:

_____,

wobei die Variable t der Zeit in Sekunden entspricht. Die Lösung dieser Gleichung kann sehr einfach berechnet werden.

Was wäre nun aber, wenn wir die Startgeschwindigkeit verändern und trotzdem herausfinden wollen, wann der Gegenstand am höchsten Punkt angekommen ist? Klar ich könnte nun einfach eine neue Gleichung mit der veränderten Startgeschwindigkeit aufstellen und ebenfalls lösen. Um dieses ständige neu Aufstellen und Lösen zu umgehen, können wir aber auch einen sogenannten Parameter einführen. Wir wählen also einen Buchstaben, der die Startgeschwindigkeit in der Gleichung drin repräsentiert. Zum Beispiel

_____

Die Gleichung ist nach wie vor linear und t die Unbekannte; aber die Gleichung enthält nun einen weiteren Buchstaben, der für eine angegebene Grösse steht. Nun können wir die Gleichung einmal wie gewohnt lösen:

Nun sind die Vorteile auf den ersten Blick ersichtlich. Wir kennen die Lösung nun für jede beliebige Startgeschwindigkeit. Das einzige was gewöhnungsbedürftig ist, ist der Umstand, dass keine Zahl als Lösung mehr erscheint sondern die Lösung abhängig von der Wahl der Parameters ist.

Nachdem wir den Nutzen von Parametern gesehen haben, wollen wir ein weiteres Beispiel besprechen, welches eine zusätzliche Herausforderung beleuchtet.

Beispiel 2. Betrachte die folgende Gleichung mit Parameter. Wir möchten die Gleichung nach der Unbekannten x auflösen:

$$(x-b)^2 = (x-a)^2$$

Aufgabe 3.3.

1. Löse die folgenden Parametergleichungen mit Diskussion der Sonderfälle.

   a) $ax = 60$

   b) $5x = 3 - ax$

   c) $3a(x-5) = 2(5-x)$

   d) $\dfrac{6x+1}{4a} = 4 - x$

   e) $5(x+a) = b \cdot (x-2)$

   f) $\dfrac{7+3x}{2} = \dfrac{x}{a+1}$

   g) $(x+1)^2 = 2(a^2+x) - 1$

   h) $(t+1)x = (t-1)x + 5$

   i) $3(ax-b) = x(2a-1)$

   j) $x(t+1)^2 = 4(xt+2)$

2. Löse die Aufgaben 149 – 152 aus der Aufgabensammlung, ohne Sonderfälle zu diskutieren.

3.2 Gleichungen der Form $a \cdot b = 0$

Unter «Gleichungen der Form $a \cdot b = 0$» sind beispielsweise folgende Gleichungen einzuordnen:

$$(3x + 12) \cdot (x - 13) = 0$$
$$34x \cdot (2x + 6) = 0$$
$$(7x - 28) \cdot x = 0.$$

Solche Gleichungen lassen sich mit den bekannten Methode ebenfalls lösen. Dabei müssen wir uns aber eine entscheidende Frage über die Faktoren eines Produkts stellen:
«Vorausgesetzt das Produkt zweier Zahlen ist gleich 0, was wissen wir über die einzelnen Faktoren?»

Das bedeutete also, wir können Gleichungen der Form $a \cdot b = 0$ folgendermassen lösen:

Beispiel 3.

1. $(7x - 14) \cdot (5x - 10) \cdot (2x + 3) = 0$

2. $x^2 + 2x - 24 = 0$

Aufgabe 3.4.

Löse die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten x auf.

a) $(x - 3)(x - 4) = 0$

b) $(x + 5)(x - 2) = 0$

c) $(3x + 12)(12 + 8x) = 0$

d) $(5x - 2)(4x + 3) = 0$

e) $x(x - 9)(2x + 13)(3x - 15) = 0$

f) $(5x + 7)(6x - 90)(9x + 60) = 0$

g) $(x - 7.5)(7.5 - x)(4x + 10) = 0$

h) $3x(4 + x)(16 - 5x)(16x + 24) = 0$

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

j) $x^2 - 9x + 20 = 0$

k) $x^2 - 2x + 63 = 0$

l) $x^2 - 5x + 14 = 0$

4 Bruchtermgleichungen

4.1 Definitionsmenge

Aufgabe 4.1.

Gegeben ist die folgende Gleichung

$$\frac{4-x}{3x-1} = \frac{2x+3}{3x-1}.$$

Gehört $x = \frac{1}{3}$ zur Lösungsmenge dieser Gleichung? Begründe deine Antwort.

Aus dieser Aufgabe können wir also die folgende Definition ableiten.

Definition 4.1.

Die **Definitionsmenge** einer Gleichung enthält alle Zahlen, die für die Variable x akzeptabel sind, sodass die Gleichung einen sinnvollen mathematischen Ausdruck ergibt.

Einschränkungen entstehen beispielsweise durch eine Division durch Null oder eine negative Zahl unter der Wurzel.

Beispiel 4. Bestimme die Definitionsmenge dieser Gleichung.

$$\frac{52}{4x+5} - \frac{15}{4x-5} + \frac{39}{16x^2-25} = 0$$

Aufgabe 4.2.

Gib für die Aufgaben 211 – 217 aus der Aufgabensammlung die Definitionsmenge an. Du musst die Gleichung noch nicht lösen.

4.2 Bruchtermgleichung auflösen

Definition 4.2.

Eine Gleichung heisst **Bruchtermgleichung**, falls die Lösungsvariable im Nenner vorkommt.

Beispiel 5.

$$\frac{3x+5}{2x-8} = \frac{17}{2x-8}$$

Beispiel 6.

$$\frac{5+x}{5-x} - \frac{5-x}{5+x} = \frac{5x-25}{x^2-25}$$

Aufgabe 4.3.

Löse nun die Gleichungen der Aufgaben 211 – 217 aus der Aufgabensammlung.

a) $\frac{1}{x-5} + \frac{2x-3}{x} = 2$

b) $\frac{3x-7}{x} = \frac{3x-1}{x-4}$

4.3 Bruchtermgleichungen mit Parametern

Beispiel 7.

$$\frac{a}{x} + 1 = \frac{x}{x - b}$$

5 Textaufgaben

Zum Abschluss untersuchen wir noch einige Zahlenrätsel und Textaufgaben, die wir mit Hilfe von Gleichungen lösen.

Beispiel 8. Welche Zahl ist gesucht?

a) Vergrössert man eine Zahl um ihren Drittel, so erhält man eine Zahl, welche um 50 grösser ist als die ursprüngliche Zahl.

b) Der 5. Teil einer Zahl ist um 8 grösser als ihre Gegenzahl.

Aufgabe 5.1.

1. Berechne jeweils die kleinste Zahl:

   a) Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen beträgt 960.

   b) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden geraden ganzen Zahlen beträgt -4444.

2. Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Bestimme Zähler und Nenner des ungekürzten Bruches.

Beispiel 9. In einem rechtwinkligen Dreieck misst die Kathete $a = 24$ cm. Die zweite Kathete b ist 18 cm kürzer als die Hypotenuse c. Berechne die Länge der Hypotenuse c und der Kathete b.

Aufgabe 5.2.

a) Ein Dreieck hat einen Umfang von $U = 25$ cm. Die Seite c ist doppelt so gross wie die Seite b, die Seite a ist um 4 cm kleiner als die Seite b. Bestimme alle Seitenlängen a, b und c.

b) Zu 3.5 l einer Säure-Wasser-Lösung werden 1.2 l destilliertes Wasser dazugegeben. Nun hat die Lösung einen Säuregehalt von 45%. Welchen Säuregehalt hatte die ursprüngliche Lösung?

c) Ein Auto fährt von St. Gallen Richtung Zürich mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h. Gleichzeitig fährt ein Lastwagen in Uzwil Richtung Zürich ab, seine Geschwindigkeit beträgt 85 km/h. Nach welcher Zeit und Strecke holt das Auto den Lastwagen ein?
(St. Gallen - Uzwil 20 km)

d) Alice fährt mit dem Fahrrad von St. Margrethen Richtung Altstätten. Gleichzeitig startet Bob in Balgach und fährt mit seinen Inlineskates ebenfalls Richtung Altstätten. Alice fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $v_A = 23$ km/h, Bob mit $v_B = 8$ km/h. Nach wie vielen Minuten wird Alice Bob einholen? Die Strecke St. Margrethen - Balgach misst 8 km.
(Lösung: $t = \frac{8}{15}$ h = 16 min.)

e) Um 12 : 00 Uhr fährt ein Zug A von Zürich Richtung St. Gallen und ein Zug B von St. Gallen Richtung Zürich. Der Schnellzug A von Zürich hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 110 km/h, der Regionalzug B von St. Gallen eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h. Die Strecke Zürich - St. Gallen ist ca. 85 km lang. Um welche Zeit werden sich die beiden Züge treffen?
(Lösung: $t = \frac{17}{38}$ h ≈ 26.8 min, d.h. um ca. 12 : 27 Uhr.)

f) Um 12 : 00 Uhr startet ein LKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_L = 72$ km/h von St. Gallen Richtung Chur. Um 12 : 15 Uhr startet ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_A = 110$ km/h ebenfalls von St. Gallen Richtung Chur. Wo und wann überholt das Auto den LKW? Die Strecke St. Gallen - Chur beträgt 105 km.
(Lösung: Fahrzeit des Autos: $t = \frac{9}{19}$ h ≈ 28 min, d.h. 12 : 43 Uhr. Die Fahrzeuge sind dann $s = \frac{990}{19}$ km von St. Gallen entfernt.)

5.1 Textaufgaben mit Bruchtermgleichungen

In diesem Abschnitt werden Textaufgaben, die eine Bruchtermgleichung im Lösungsweg enthalten, besprochen. Dazu wird zuerst ein Beispiel erläutert.

Beispiel 10. Bruno möchte seinen 40m langen Zaun von einem Maler frisch streichen lassen. Der Maler A schafft in 3 Stunden 10m Zaun, der Maler B streicht in 4 Stunden ein 13m langes Zaunstück.

a) Welcher Maler soll Bruno wählen, wenn bezüglich Preis und Qualität der Maler keinen Unterschied besteht?
Es wird schnell klar, dass die beiden Maler nur auf ihre Geschwindigkeit her verglichen werden sollen. Das heisst, die eigentliche Fragestellung lautet:
Wie viel Meter Zaun streichen die beiden Maler je in einer Stunde?

b) Der Maler A braucht alleine 12 Stunden. Wie lange brauchen beide zusammen?

c) Bruno und seine Frau, Margrit, möchten nun noch einen kleineren Zaun selber streichen. Margrit beginnt um 13 : 00 Uhr. Jedoch kann Bruno erst ab 16 : 30 Uhr mithelfen. Gemeinsam werden sie um 18 : 30 fertig. Ohne die Hilfe von Bruno wäre Margrit bis 21 : 00 Uhr mit Streichen beschäftigt gewesen. Wie lange braucht Bruno, wenn er den gesamten Zaun alleine streichen würde?

Taufe	benötigte Zeit, um Zaun alleine zu streichen	Leistung [Zaun/h]
Margrit		
Bruno		

Aufgabe 5.3.

a) Löse die Aufgaben 224 – 229 aus der Aufgabensammlung.

b) Ein Baugeschäft verfügt über 2 Bagger. Der grosse Bagger kann einen Aushub doppelt so schnell erledigen wie der kleine Bagger. Der grosse Bagger beginnt mit dem Aushub um 9 : 00 Uhr. Von 12 : 00 Uhr bis 13 : 00 Uhr ist Mittagspause. Danach wird weitergearbeitet. Ab 14 : 30 Uhr wird auch der kleine Bagger eingesetzt. So werden sie gemeinsam um 17 : 00 Uhr mit dem Aushub fertig.
Bis wann hätte der grosse Bagger arbeiten müssen, wenn der kleine Bagger nicht geholfen hätte?

c) Zum Entladen eines Getreideschiffes benötigen zwei Fördergebläse 4 Stunden. Das eine Gebläse leistet 75% des stärkeren Gebläses. Wie viele Stunden benötigt jedes Gebläse alleine?

d) Eine Badewanne wird in 6 Minuten gefüllt, wenn man den Warm- und Kaltwasserhahn gleichzeitig öffnet. Füllt man die Wanne nur mit warmem Wasser, so dauert es 5 Minuten länger, als wenn man sie nur mit kaltem Wasser füllt.
In welcher Zeit füllt jeder Zufluss allein die Wanne?

History

Version	Datum	Person	Bemerkung
0.1	16.12.2023	Jonas Guler	Einführungsaufgaben
1.0	01.04.2025	Jonas Guler	Alle Theorieinhalte