I. 运动学

A. 可加性原理（Additive Property）

1. 可加性： $F(t)F(s)=F(t+s)$
   指数函数具有可加性 $e^{\omega t}*e^{\omega s}=e^{\omega(t+s)}$
2. 可加性原理（Additive Property）
   Theorem：如果一个函数具有可加性，那么该函数可以写作指数函数形式——对于函数 f 而言，如果满足$f(t)f(s)=f(t+s)$，那么$f(t)=e^{\omega t}$，其中$\omega=f'(0)$
   证明过程：

   proof. $f(0)^2=f(0) \implies f(0)=1$, and

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{f(t+s)-f(t)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{f(s)f(t)-f(t)}{s} \\ &= \left(\lim_{s\to 0}\frac{f(s)-1}{s}\right)f(t)=f'(0)f(t)=\omega f(t). \end{aligned}$$

   Let $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$. Then

$$\begin{aligned} & a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots \\ =\ & \omega a_0+\omega a_1t+\omega a_2t^2+\cdots+\omega a_{n-1}t^{n-1}+\cdots \end{aligned}$$

   Then $a_0=f(0)=1$, and

$$a_1=\omega a_0=\omega,\ a_2=\tfrac{1}{2}\omega a_1=\tfrac{1}{2!}\omega^2,\ a_2=\tfrac{1}{3}\omega a_2=\tfrac{1}{3!}\omega^3,\ \ldots.$$

$$f(t)=1+\omega t+\tfrac{1}{2!}\omega^2t^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}\omega^nt^n+\cdots=e^{\omega t}.$$

   当 f(t)为矩阵 F(t)时，结论依然成立。
3.
   例如：旋转矩阵 R 满足可加性原理。

$$R=F(t)=\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{bmatrix}$$

   F(t)具有可加性：

$$F(t)*F(s)=\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\cos(\omega s) & -\sin(\omega s)\\ \sin(\omega s) & \cos(\omega s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\omega t)\cos(\omega s)-\sin(\omega t)\sin(\omega s) & -\sin(\omega s)\cos(\omega t)-\cos(\omega s)\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t)\cos(\omega s)+\cos(\omega t)\sin(\omega s) & \cos(\omega t)\cos(\omega s)-\sin(\omega t)\sin(\omega s)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\omega t+\omega s) & -\sin(\omega s+\omega t)\\ \sin(\omega t+\omega s) & \cos(\omega t+\omega s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\big(\omega(t+s)\big) & -\sin\big(\omega(t+s)\big)\\ \sin\big(\omega(t+s)\big) & \cos\big(\omega(t+s)\big)\end{bmatrix}=F(t+s)$$

   因此 F(t)可以写作指数函数形式： $F(t)=e^{\omega t}$

其中： $\omega = F'(0) = \begin{bmatrix} -\omega\sin(\omega t) & -\omega\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \omega J$

其中： $J = R_{\frac{1}{2}\pi}$

由可加性原理： $F(t) = e^{\omega J t}$

B. 复数与欧拉公式（Complex Number & Euler Formula）

1. 复数： $z = x + iy \quad i^2 = -1$
2. 复数共轭(Complex Conjugation)： $\bar{z} = x - iy \quad z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

3. 复数写为极坐标形式： $x = r cos\theta \quad y = r sin\theta \quad z(\theta) = r(cos\theta + isin\theta)$
   当$r = 1$时复数具有可加性： $z(\theta_1) = cos\theta_1 + isin\theta_1 \quad z(\theta_2) = cos\theta_2 + isin\theta_2$

$$z(\theta_1)z(\theta_2) = (cos\theta_1 + isin\theta_1)(cos\theta_2 + isin\theta_2)$$
$$= (cos\theta_1 cos\theta_2 + icos\theta_1 sin\theta_2 + isin\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2) = z(\theta_1 + \theta_2)$$

故可以写作指数形式： $z(\theta) = cos\theta + isin\theta = e^{\omega\theta}$
其中： $\omega = z'(0) = -\sin(0) + icos(0) = i$

4. 故有等式： $cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}$ 此等式即为欧拉公式(Euler Formula)
   用欧拉公式，一般的复数可以写作： $z(\theta) = re^{i\theta}$

$$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

C. 三维向量叉乘（Cross Product）

1. 几何定义： $\vec{x} \times \vec{y}$的结果是一个垂直于$\vec{x}$ & $\vec{y}$所构成平面的向量，其方向遵循右手法则（right hand rule）

$\vec{x} \times \vec{y}$的大小$\|\vec{x} \times \vec{y}\|$表示$\vec{x}$与$\vec{y}$围成的面积

2. 叉乘的计算： $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \hat{x}\vec{y}$
3. Hat 定义：
   a) $\hat{x}$是一个反对称矩阵 $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{x}^T = -\hat{x}$
   b) 等效于叉乘 $\vec{x} \times \vec{y} = \hat{x}\vec{y}$
4. 叉乘的性质：
   a) 双线性(Bilinear)： $(a\vec{u} + b\vec{w}) \times \vec{v} = a\vec{u} \times \vec{v} + b\vec{w} \times \vec{v}$
   $\vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{u} \times \vec{v} + b\vec{u} \times \vec{w}$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

b) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$

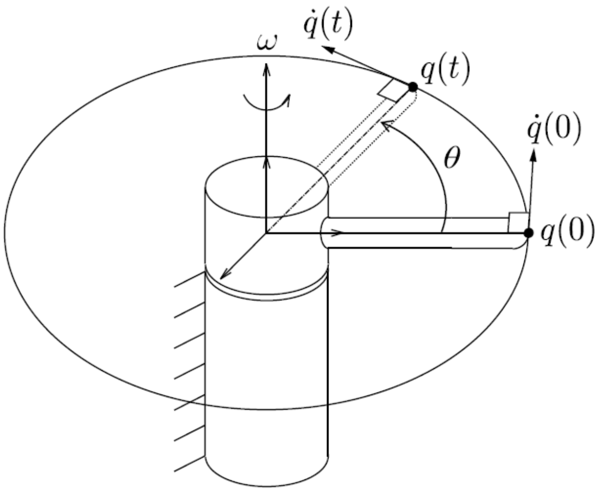
d) Double cross： $\hat{u}\hat{v}\vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = (\mathrm{u^T w})\mathrm{v} - (\mathrm{u^T v})\mathrm{w}$

e) Jacobi Identity：$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$

移项：$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = -\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
等式左边变号：$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w})$=$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \widehat{u \times v}\vec{w}$
等式左边写为 hat 形式：$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\hat{\mathrm{u}}\hat{\mathrm{v}} - \hat{\mathrm{v}}\hat{\mathrm{u}})\vec{\mathrm{w}}$
综上：$(\hat{\mathrm{u}}\hat{\mathrm{v}} - \hat{\mathrm{v}}\hat{\mathrm{u}})\vec{\mathrm{w}} = \widehat{u \times v}\vec{w}$

f) 故得到 commutator：$[\hat{u}, \hat{v}] = \hat{\mathrm{u}}\hat{\mathrm{v}} - \hat{\mathrm{v}}\hat{\mathrm{u}} = \widehat{u \times v}$

5. 转动角速度与刚体某点线速度:

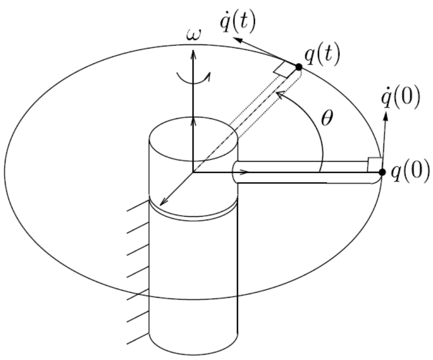


转轴：$\frac{\omega}{\|\omega\|}$　　角速度：$\|\omega\|$

初始位置为$q(0)$，以该角速度转动时间 t 后位置为$q(t)$
此时该点的速度为$\dot{q(t)} = \omega \times q(t) = \hat{\omega}\, q(t)$

D. 旋转分析（Rotation）

1. 匀速转动位移:



MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

$$\textbf{1}\quad q(t) = R * q(0)$$

由于旋转矩阵具有可加性，可以写作指数形式：

二维情况：　$R(t) = e^{\omega J t}$

三维情况：　$R(t) = e^{\widehat{\omega} t}$　（在二维情况下$\widehat{\omega} = \omega J$）

$$\textbf{2}\quad q(t) = e^{\widehat{\omega} t} * q(0)$$

由指数函数的泰勒级数展开式：

$$e^{\widehat{\omega} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \widehat{\omega}^k = I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\|\omega\| t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2}(-\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\|\omega\| t)^{2k}}{(2k)!})$$

由三角函数的泰勒级数展开式：

$$sin\|\omega\| t = \|\omega\| t - \frac{(\|\omega\| t)^3}{3!} + \frac{(\|\omega\| t)^5}{5!} - \frac{(\|\omega\| t)^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\|\omega\| t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$cos\|\omega\| t = 1 - \frac{(\|\omega\| t)^2}{2!} + \frac{(\|\omega\| t)^4}{4!} - \frac{(\|\omega\| t)^6}{6!} + \cdots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\|\omega\| t)^{2k}}{(2k)!}$$

代入$e^{\widehat{\omega} t}$表达式中：

$$e^{\widehat{\omega} t} = I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|} \sin\|\omega\| t + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2}(1 - \cos\|\omega\| t)$$

得到$q(t)$的第三种表达式，即为 **Rodrigues formula**

$$R(t) = e^{\widehat{\omega} t} = I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|} \sin\|\omega\| t + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2}(1 - \cos\|\omega\| t)$$

$$\textbf{3}\quad q(t) = (I + \frac{\widehat{\omega}}{\|\omega\|} \sin\|\omega\| t + \frac{\widehat{\omega}^2}{\|\omega\|^2}(1 - \cos\|\omega\| t)) * q(0)$$

2. 匀速转动速度：

$$\dot{q(t)} = \dot{R(t)} * q(0)$$

$$q(t) = R(t) * q(0) \qquad q(0) = R(t)^{-1} * q(t)$$

$$\textbf{1}\quad \dot{q(t)} = \dot{R(t)} * q(0) = \dot{R(t)} R(t)^{-1} * q(t)$$

定义：$\widehat{\omega} = \dot{R(t)} R(t)^{-1}$

$$\textbf{2}\quad \dot{q(t)} = \widehat{\omega} * q(t)$$

旋转矩阵 R 的一般形式用 XYZ 欧拉角表达$R(t) = R_x(\alpha(t)) R_y(\beta(t)) R_z(\gamma(t))$

先绕 x 轴以$\alpha(t)$转动，再绕 y 轴以$\beta(t)$转动，再绕 z 轴以$\gamma(t)$转动

$$\dot{R_x} R_x^T = \dot{\alpha} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha(t)) & -\cos(\alpha(t)) \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t)) \\ 0 & -\sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{bmatrix} = \dot{\alpha} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R_y} R_y^T = \dot{\beta} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{R_z} R_z^T = \dot{\gamma} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R} = \dot{(R_x R_y)} R_z + (R_x R_y) \dot{R_z} = \dot{R_x} R_y R_z + R_x \dot{R_y} R_z + R_x R_y \dot{R_z}$$

$$R^T = [(R_x R_y) R_z]^T = R_z^T (R_x R_y)^T = R_z^T R_y^T R_x^T$$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

$$\dot{R}R^T = (\dot{R}_x R_y R_z + R_x \dot{R}_y R_z + R_x R_y \dot{R}_z) R_z^T R_y^T R_x^T$$
$$= \dot{R}_x R_y R_z R_z^T R_y^T R_x^T + R_x \dot{R}_y R_z R_z^T R_y^T R_x^T + R_x R_y \dot{R}_z R_z^T R_y^T R_x^T =$$
$$\dot{R}_x R_x^T + R_x (\dot{R}_y R_y^T) R_x^T + R_x R_y (\dot{R}_z R_z^T) R_y^T R_x^T$$

$\widehat{\omega} = \dot{R}R^T$

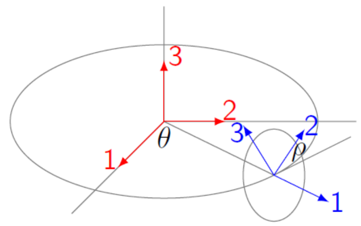
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} * \sin(\alpha(t)) - \dot{\gamma} * \cos(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) & \dot{\beta} * \cos(\alpha(t)) - \dot{\gamma} * \sin(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) \\ \dot{\beta} * \sin(\alpha(t)) + \dot{\gamma} * \cos(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) & 0 & -\dot{\alpha} - \dot{\gamma} * \sin(\beta(t)) \\ -\dot{\beta} * \cos(\alpha(t)) + \dot{\gamma} * \sin(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) & \dot{\alpha} + \dot{\gamma} * \sin(\beta(t)) & 0 \end{bmatrix}$$

可以提取出反对称阵的原向量(一般情况角速度):

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \dot{\gamma} * \sin(\beta(t)) \\ \dot{\beta} * \cos(\alpha(t)) - \dot{\gamma} * \sin(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) \\ \dot{\beta} * \sin(\alpha(t)) + \dot{\gamma} * \cos(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\beta(t)) \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) * \cos(\beta(t)) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Example. Rotate first around z-axis by $\theta(t)$, then x-axis by $\rho(t)$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\rho & -\sin\rho \\ 0 & \sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix} = R_{3\theta} R_{1\rho}.$$



We have

$$\dot{R}R^{-1} = (\dot{R}_{3\theta} R_{1\rho} + R_{3\theta} \dot{R}_{1\rho}) R^{-1} = (\dot{R}_{3\theta} R_{1\rho} + R_{3\theta} \dot{R}_{1\rho}) R_{1\rho}^{-1} R_{3\theta}^{-1}$$
$$= \dot{\theta}\hat{e}_3 + \dot{\rho} R_{3\theta} \hat{e}_1 R_{3\theta}^{-1} = \dot{\theta}\hat{e}_3 + \dot{\rho}\widehat{R_{3\theta} e_1}.$$

The angular velocity is

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_3 + \dot{\rho} R_{3\theta} \vec{e}_1 = (\dot{\rho}\cos\theta, \dot{\rho}\sin\theta, \dot{\theta}).$$

以上推导使用到的结论为:$(R\omega)^{\wedge} = R\widehat{\omega}R^T$

证明过程见:SDM283 Assignment1-Problem1 判断两个向量是否正交,做内积为 0 则正交。

3. 转动加速度:

$$\dot{q}(t) = \widehat{\omega} * q(t)$$
$$\ddot{q}(t) = \dot{\widehat{\omega}} * q(t) + \widehat{\omega} * \dot{q}(t) = \dot{\widehat{\omega}} * q(t) + \widehat{\omega} * \widehat{\omega} * q(t) = \dot{\widehat{\omega}} * q(t) + \widehat{\omega}^2 * q(t)$$
$$\ddot{q}(t) = (\dot{\widehat{\omega}} + \widehat{\omega}^2) q(t) \quad \textbf{1}$$

角加速度变换矩阵: $\dot{\widehat{\omega}} + \widehat{\omega}^2$

二维情况: $\widehat{\omega} = \omega J = \dot{\theta} J$ $\quad \dot{\widehat{\omega}} = \dot{\omega} J = \ddot{\theta} J$ $\quad \widehat{\omega}^2 = \omega^2 J^2 = -\omega^2 I = -\dot{\theta}^2 I$

$$\ddot{q}(t) = (\dot{\omega} J - \omega^2 I) q(t) = \begin{bmatrix} -\omega^2 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & -\omega^2 \end{bmatrix} q(t) \quad \textbf{2}$$

三维情况: $\widehat{\omega}^2 = \omega\omega^T - \|\omega\|^2 I$ (本结论证明见 SDM283 Assignment1-Problem4(b))

$$\dot{\widehat{\omega}} + \widehat{\omega}^2 = \dot{\widehat{\omega}} + \omega\omega^T - \|\omega\|^2 I$$

$$\ddot{q}(t) = (\dot{\widehat{\omega}} + \omega\omega^T - \|\omega\|^2 I) q(t) = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 - \omega_3^2 & -\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2 & \dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2 & -\omega_1^2 - \omega_3^2 & -\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 \\ -\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 & \dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{bmatrix} q(t) \quad \textbf{3}$$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

E. 刚体空间运动分析（Rotation）

1. 空间位移与速度

齐次矩阵：

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix} = G(t) * \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \end{bmatrix} = G(t)^{-1} * \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1} \quad \begin{bmatrix} \dot{q(t)} \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{G(t)} * \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{G(t)} G(t)^{-1} * \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{G(t)} = \begin{bmatrix} \dot{R(t)} & \dot{p(t)} \\ 0_{1\times3} & 0 \end{bmatrix} \qquad G(t)^{-1} = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R(t)^{-1} & -R(t)^{-1}p(t) \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

定义：$\widehat{V(t)} = \dot{G(t)} G(t)^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{R(t)} & \dot{p(t)} \\ 0_{1\times3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(t)^{-1} & -R(t)^{-1}p(t) \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \dot{R(t)} R(t)^{-1} & \dot{p(t)} - \dot{R(t)} R(t)^{-1} p(t) \\ 0_{1\times3} & 0 \end{bmatrix}$$

根据之前定义：$\widehat{\omega} = \dot{R(t)} R(t)^{-1}$

定义：$v = \dot{p(t)} - \dot{R(t)} R(t)^{-1} p(t) = \dot{p(t)} - \widehat{\omega}\, p(t)$

得到$\widehat{V(t)} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{2} \quad \begin{bmatrix} \dot{q(t)} \\ 0 \end{bmatrix} = \widehat{V(t)} * \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{3} \quad \begin{bmatrix} \dot{q(t)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

空间速度（Spatial Velocity/Twist）$V = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p(t)} - \widehat{\omega} * p(t) \\ \omega \end{bmatrix}$

补充$R(t) = e^{\widehat{\omega} t}$及 $G(t) = e^{\widehat{V} t}$证明过程：

$R(t) = e^{\widehat{\omega} t}$：

$$R_x(\omega_1 t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(\omega_1 t) & -sin\,(\omega_1 t) \\ 0 & sin\,(\omega_1 t) & cos\,(\omega_1 t) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\omega_2 t) = \begin{bmatrix} cos\,(\omega_2 t) & 0 & sin\,(\omega_2 t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\omega_2 t) & 0 & cos\,(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\omega_3 t) = \begin{bmatrix} cos\,(\omega_3 t) & -sin\,(\omega_3 t) & 0 \\ sin(\omega_3 t) & cos\,(\omega_3 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

$$R(\dot{\omega t}) = \left(R_x(\omega_1 t)\dot{R_y}(\omega_2 t)\right)R_z(\omega_3 t) + \left(R_x(\omega_1 t)R_y(\omega_2 t)\right)R_z(\dot{\omega_3 t})$$

$$= \dot{R_x}(\omega_1 t)R_y(\omega_2 t)R_z(\omega_3 t) + R_x(\omega_1 t)\dot{R_y}(\omega_2 t)R_z(\omega_3 t) + R_x(\omega_1 t)R_y(\omega_2 t)\dot{R_z}(\omega_3 t)$$

$$\dot{R_x}(\omega_1 t) = \omega_1 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_1 t) \\ 0 & \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{R_y}(\omega_2 t) = \omega_2 * \begin{bmatrix} -\sin(\omega_2 t) & 0 & \cos(\omega_2 t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\omega_2 t) & 0 & -\sin(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{R_z}(\omega_3 t) = \omega_3 * \begin{bmatrix} -\sin(\omega_3 t) & -\cos(\omega_3 t) & 0 \\ \cos(\omega_3 t) & -\sin(\omega_3 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(\dot{\omega} * 0) = \dot{R_x}(\omega_1 * 0)R_y(\omega_2 * 0)R_z(\omega_3 * 0) + R_x(\omega_1 * 0)\dot{R_y}(\omega_2 * 0)R_z(\omega_3 * 0) + R_x(\omega_1 * 0)R_y(\omega_2 * 0)\dot{R_z}(\omega_3 * 0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{\omega}$$

由可加性原理：$R(t) = e^{\widehat{\omega} t}$

$G(t) = e^{\widehat{V} t}$：（见 SDM283 Assignment1-Problem5）

$$e^{\widehat{V} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\widehat{V}^k = \widehat{V}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} \widehat{\omega}^k & \widehat{\omega}^{k-1} v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\widehat{\omega}^k & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\widehat{\omega}^k v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\widehat{\omega}^k & \widehat{\omega}^{-1} * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\widehat{\omega}^{k+1} v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\widehat{\omega} t} & \widehat{\omega}^{-1} * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!}\widehat{\omega}^k v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} R(t) & \widehat{\omega}^{-1} * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!} * (-\widehat{\omega}^{k+1} * \frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) & -\widehat{\omega}^{-1} * \widehat{\omega} * \frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!} * (\widehat{\omega}^k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} R(t) & -\frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k)!} * (\widehat{\omega}^k) + \frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * \widehat{\omega}^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(t) & -\frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * R(t) + \frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * I \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} R(t) & \frac{\widehat{\omega} v}{\|\omega\|^2} * (I - R(t)) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ （本处结果存疑）

其中$v = \dot{p(t)} - \widehat{\omega}\, p(t)$当 p 为常数时，$\dot{p(t)} = 0 \quad v = -\widehat{\omega}\, p(t)$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn

$$e^{\hat{V}t}=\begin{bmatrix}R(t) & \left(I-R(t)\right)*p(t)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}q(t)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(t) & \left(I-R(t)\right)*p(t)\\ 0 & 1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}q(0)\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}\quad q(t)=R(t)q(0)+(I-R(t))p(t)$$

$$\mathbf{2}\quad q(t)=e^{\hat{\omega}t}q(0)+(I-e^{\hat{\omega}t})p(t)$$

2. 空间加速度

$$\dot{q(t)}=\widehat{V(t)}*q(t)$$

$$\ddot{q}(t)=\hat{\dot{V}}q(t)+\hat{V}\dot{q}(t)=\hat{\dot{V}}q(t)+\hat{V}^2q(t)=\left(\hat{\dot{V}}+\hat{V}^2\right)*q(t)$$

$$\hat{\dot{V}}+\hat{V}^2=\begin{bmatrix}\hat{\dot{\omega}} & \ddot{p}-\hat{\dot{\omega}}p-\hat{\omega}\dot{p}\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\omega} & \dot{p}-\hat{\omega}p\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\hat{\dot{\omega}}+\hat{\omega}^2 & \ddot{p}-\left(\hat{\dot{\omega}}+\hat{\omega}^2\right)p\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中：角加速度为$\hat{\dot{\omega}}+\hat{\omega}^2$　　　线加速度为$\ddot{p}-\left(\hat{\dot{\omega}}+\hat{\omega}^2\right)p$

$$\hat{\dot{V}}+\hat{V}^2=\begin{bmatrix}-\omega^2 & -\dot{\omega} & \ddot{p}_1+\omega^2p_1+\dot{\omega}p_2\\ \dot{\omega} & \omega^2 & \ddot{p}_2-\dot{\omega}p_1+\omega^2p_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

MIAO Ziliang
11911901@mail.sustech.edu.cn