

南方科技大学

SDM 283

DESIGN THE SHOCK ABSORBERS (SPRING AND DAMPER)
FOR A VEHICLE BEAM SYSTEM RIDING ON A BUMPY ROAD

关于车辆系统的减震器设计、计算与仿真

何不为 李心洁 肖云中 张恒斌 莫中天

Group 7

2022 年 11 月 6 日

目录

1 概述	3
2 建模及运动方程推导	3
2.1 变量名称解释	3
2.1.1 小车相关变量	3
2.1.2 刚性梁相关变量	5
2.1.3 动态梁相关变量	6
2.2 计算中的近似	6
2.3 小车运动方程推导	8
2.4 悬臂梁的运动方程推导	10
2.4.1 刚性梁的运动方程推导	10
2.4.2 弹性梁的运动方程推导	11
2.5 矩阵形式下的运动方程	14
2.5.1 刚性梁假设下的运动方程	14
2.5.2 弹性梁假设下的运动方程	15
2.5.3 运动方程假设修正	15
3 运动方程求解	17
3.1 使用拉普拉斯变换求解	17
3.2 转化为一阶微分方程组求解	20
4 刚性梁参数设计	23
4.1 底盘劲度系数的优化	23
4.2 底盘阻尼系数的优化	26

4.3	仿真、验证与分析	29
5	弹性梁参数设计	31
5.1	弹性梁劲度与阻尼系数优化	31
5.2	仿真、验证与分析	33
6	速度分析与实用性判断	35
6.1	小车速度分析	35
6.2	小车实用性判断	38

1 概述

在这个项目中，我们根据给定的车辆模型和假设情景为一个行驶在崎岖道路上的车辆系统设计梁减震器以减少梁的自由端挠度。其中，该车辆系统具有叉骨式悬挂，每个车轮独立悬挂并配有单独的减震器，铰接梁安装在车辆顶部；梁的支架配备了一个额外的减震器，可以安装在三个预先指定的位置之一。

2 建模及运动方程推导

在这一节中，我们根据给定的模型、将梁系统简化为二维系统，运用刚体动力学、材料强度、振动等模块学习的方程推导该系统的运动方程。

2.1 变量名称解释

对计算中设定的参数或计算量做如下规定：

2.1.1 小车相关变量

1. t : 小车运动的时刻；
2. v : 小车近似的平动速度；
3. g : 重力加速度；
4. m : 小车总质量（除去 Beam）；
5. J : 小车绕质心的转动惯量；
6. Lb : 小车质心到后轮的距离；

7. L_f : 小车质心到前轮的距离;
8. y_c : 小车质心在世界坐标系下的 y 坐标, y_c 原点的定义为小车初始受力平衡位置;
9. \dot{y}_c : 小车质心在世界坐标系 y 方向的速度;
10. \ddot{y}_c : 小车质心在世界坐标系 y 方向的加速度;
11. θ : 小车车身相对水平方向逆时针旋转的角度;
12. $\dot{\theta}$: θ 的角速度;
13. $\ddot{\theta}$: θ 的角加速度;
14. θ_0 : 始状态下小车质心到 Beam 转轴的连线与水平方向的夹角;
15. D : 小车质心到 Beam 转轴的直线长度;
16. D_x : 小车质心到 Beam 转轴的的水平长度;
17. k_b : 小车后轮阻尼器 k 值;
18. c_b : 小车后轮阻尼器 c 值;
19. k_f : 小车前轮阻尼器 k 值;
20. c_f : 小车前轮阻尼器 c 值;
21. $h_b = 20 * \cos\left(\frac{v}{100} * \left(t - \frac{L}{v}\right)\right)$: 小车后轮所在地面的高度
22. $h_f = 20 * \cos\left(\frac{v}{100} * t\right)$: 小车前轮所在地面的高度

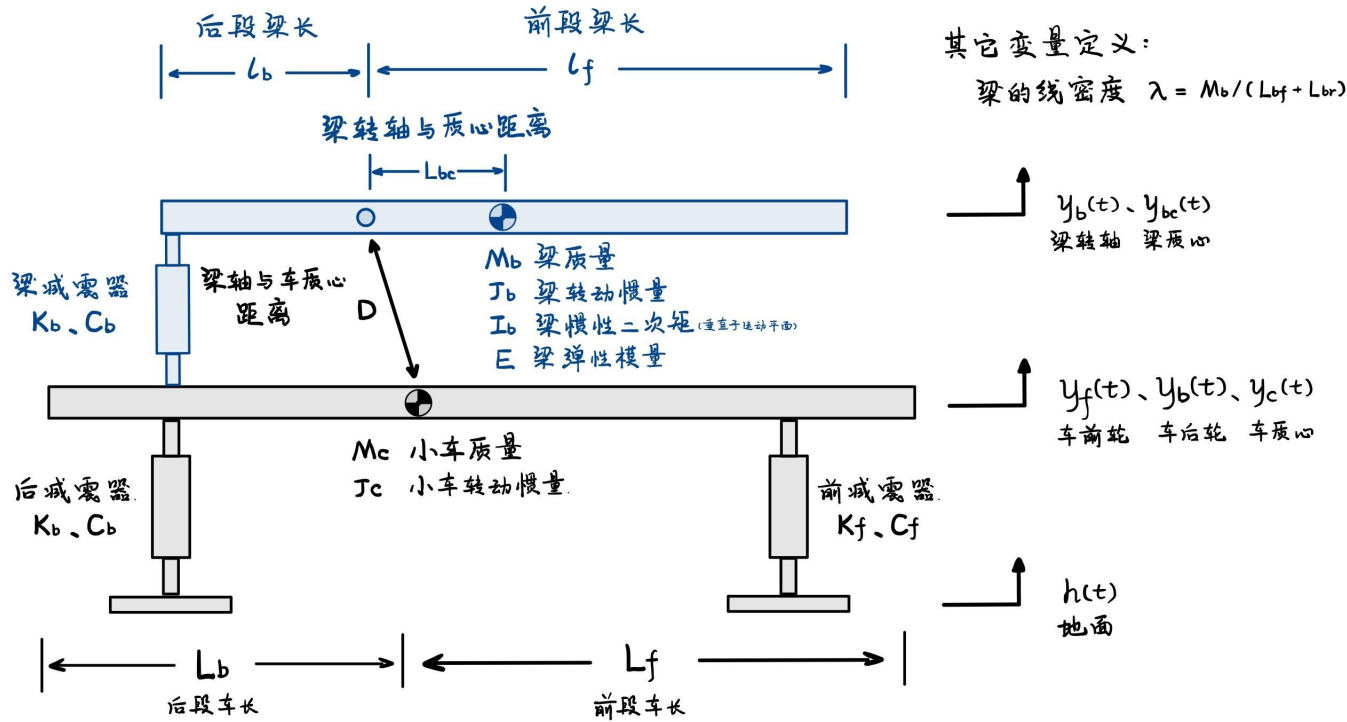


图 1: 变量定义

2.1.2 刚性梁相关变量

1. $L_1 = 0.36$: Beam 旋转轴距离第一个阻尼器放置点的距离;
2. $L_2 = 0.36$: Beam 旋转轴距离第二个阻尼器放置点的距离;
3. $L_3 = 0.60$: Beam 旋转轴距离第三个阻尼器放置点的距离;
4. $L = L_1$: Beam 阻尼器弹力与阻力的力臂等于 $L_1/L_2/L_3$;
5. $l_b = 0.74$: Beam 旋转轴距离 Beam 末端 (back) 的长度;
6. $l_f = 2.12$: Beam 旋转轴距离 Beam 前段 (front) 的长度;

7. $\lambda = 15.602$: 前段 Beam 的线密度 kg/m ;

8. $m_b = \lambda * l_f + 2.5 * \lambda * l_b$: Beam 的总质量;

9. $J_b = \int (2.5 * \lambda * x^2, x, -l_b, 0) + \int (\lambda * x^2, x, 0, l_f)$: Beam 绕旋转轴旋转的转动惯量;

10. $l_{bc} = (\lambda * l_f * l_f / 2 + 2.5 * \lambda * l_b * (-l_b / 2)) / m_b$: Beam 旋转轴到质心的长度 (旋转轴 x 坐标为 0);

2.1.3 动态梁相关变量

1. $E = 2.07 * 10^{11}$: Beam 的弹性模量;

2. $I_z = 0.1 * 0.02^3 / 12$: Beam 的惯性二次矩;

2.2 计算中的近似

在计算中, 由于小车运动过程中相关角度 (θ, ϕ) 值均在 5° 内, 故将所有 $\sin \theta$ 近似为 θ , $\cos \theta$ 近似为 0。

$$\begin{aligned}\Delta y_b &= y_c - L_b \sin \theta - h_b \approx y_c - L_b \theta - h_b \\ \Delta y_f &= y_c + L_f \sin \theta - h_f \approx y_c + L_f \theta - h_f \\ \Delta \dot{y}_b &= \dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b \\ \Delta \dot{y}_f &= \dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f\end{aligned}\tag{1}$$

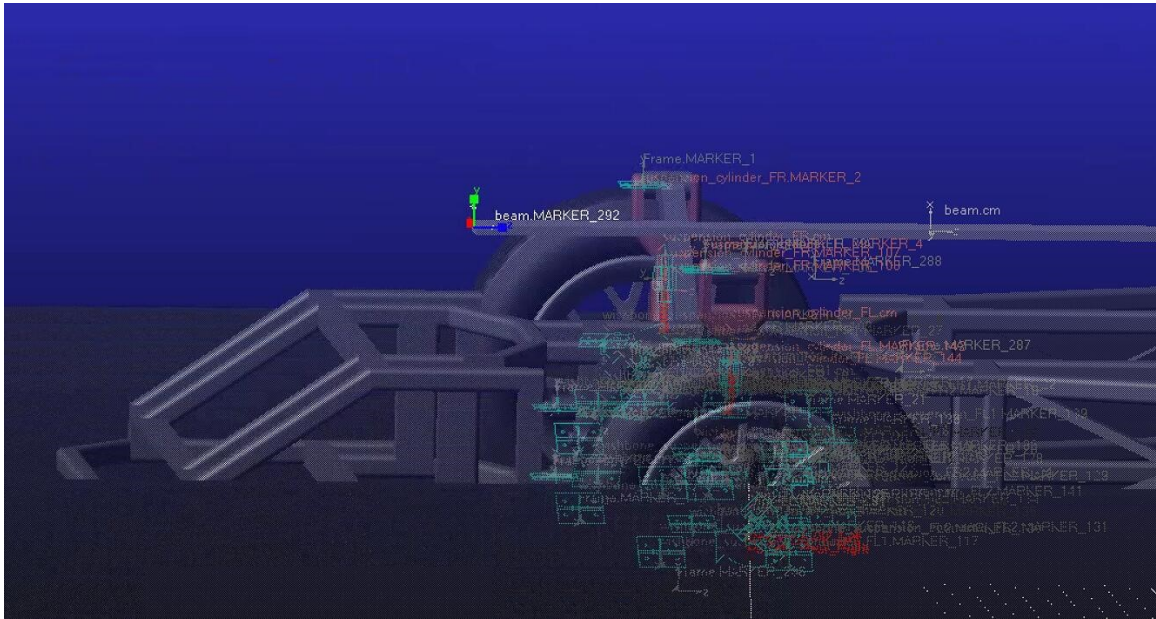


图 2: 刚性梁

如上图所示,刚性梁末端的初始坐标为 $0.0, 0.879, -1.5886151037$ (*meter, meter, meter*); 小车质心初始坐标为 $0, 0.4799051531, 0$ (*meter, meter, meter*); 初始差值为 0.3990948469 *meter*。

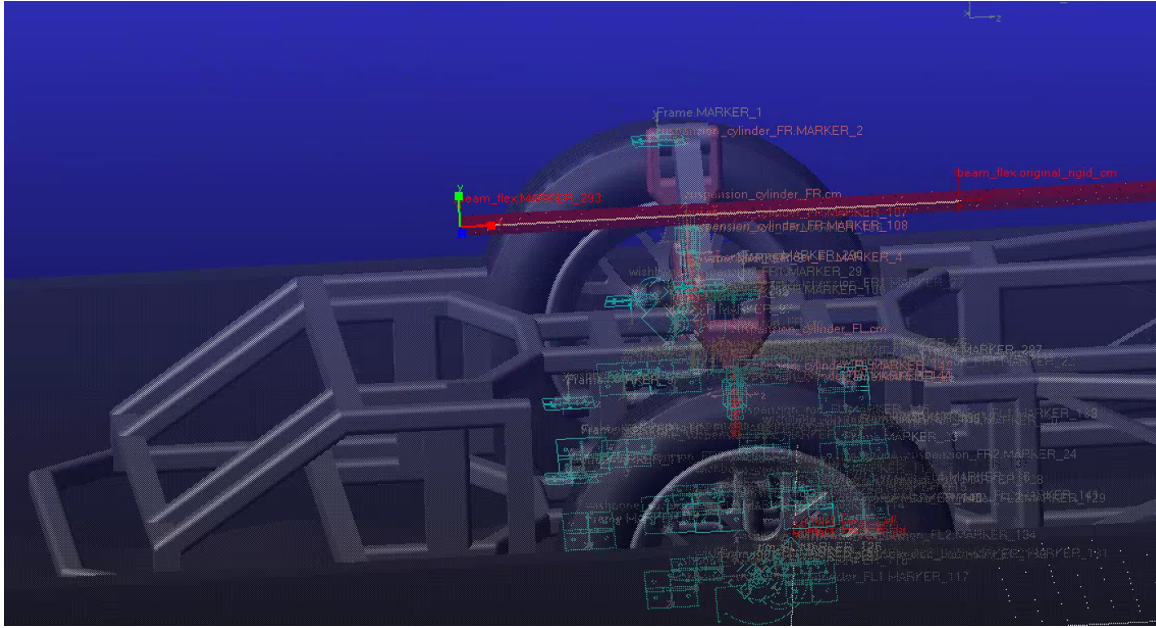


图 3: 动态梁

如上图所示, 动态梁末端的初始坐标为 $0, 0.8780558, -1.5880903$ (*meter, meter, meter*); 小车质心初始坐标为 $0, 0.4799051531, 0$ (*meter, meter, meter*); 初始差值为 0.3981506469 *meter*。

2.3 小车运动方程推导

在对小车的运动方程推导中, 研究对象为**不包含弹簧阻尼器和悬臂梁**的小车。在广义坐标中, 小车本身为两自由度系统, 分别定义广义坐标 y_c 为重心高度; θ 为小车车身相对水平方向绕质心逆时针旋转的角度。

对于广义力 Q_{y_c} , 设 y_c 为对应的广义力为前后轮弹簧阻尼器的弹力及阻力, y_c 对应的

广义力为三组弹簧阻尼器的弹力和阻力:

$$\begin{aligned}
Q_{y_c} &= -k_f \Delta y_f - k_b \Delta y_b - c_f \Delta \dot{y}_f - c_b \Delta \dot{y}_b - kL(\psi - \theta) \\
&= -k_f (y_c + L_f \theta - h_f) - k_b (y_c - L_b \theta - h_b) \\
&\quad - c_f (\dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f) - c_b (\dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b) - kL(\psi - \theta)
\end{aligned} \tag{2}$$

对于广义力矩 Q_θ (θ 对应的广义力矩为弹力和阻力相对于小车质心产生的力矩):

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= k_b (y_c - L_b \theta - h_b) L_b + c_b (\dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b) L_b - k_f (y_c + L_f \theta - h_f) L_f \\
&\quad - c_f (\dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f) L_f + kL(\psi - \theta) \cdot (L + D_x)
\end{aligned} \tag{3}$$

欧拉-拉格朗日函数为:

$$L_c = T_c - V_c = \left(\frac{1}{2} M \dot{y}_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right) - (mgy_c) \tag{4}$$

y_c 对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_c} = Q_{y_c} \tag{5}$$

由此得出小车关于 y_c 的运动方程:

$$\begin{aligned}
m\dot{y}_c - mg &= -k_f (y_c + L_f \theta - h_f) - k_b (y_c - L_b \theta - h_b) - c_f (\dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f) \\
&\quad - c_b (\dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b) - kl_b(\psi - \theta)
\end{aligned} \tag{6}$$

θ 对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \tag{7}$$

得出小车关于 θ 的运动方程为：

$$J\ddot{\theta} = k_b(y_c - L_b\theta - h_b)L_b + c_b(\dot{y}_c - L_b\dot{\theta} - \dot{h}_b)L_b - k_f(y_c + L_f\theta - h_f)L_f - c_f(\dot{y}_c + L_f\dot{\theta} - \dot{h}_f)L_f + kl_b(\psi - \theta) \cdot (L + D_x) \quad (8)$$

2.4 悬臂梁的运动方程推导

2.4.1 刚性梁的运动方程推导

对于广义力矩 τ_b (τ_b 为对应的广义力矩为悬臂梁弹簧阻尼器相对转轴的力矩)：

$$\begin{aligned} \tau_b &= [kL \sin(\psi - \theta) + cL(\dot{\psi} - \dot{\theta})]L \cos(\psi - \theta) \\ &\approx [kL^2(\psi - \theta) + cL^2(\dot{\psi} - \dot{\theta})] \end{aligned} \quad (9)$$

拉格朗日函数：

$$\begin{aligned} L_b &= T_b - V_b \\ &= \left[\frac{1}{2}m_b(\dot{y}_{pb} + l_{bc}\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\psi}^2 \right] - [m_bg(y_{pb} + l_{bc}\sin\psi)] \end{aligned} \quad (10)$$

刚性梁 ψ 对应的欧拉-拉格朗日方程：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L_b}{\partial \psi} &= -\tau_b \\ \frac{\partial L_b}{\partial \psi} &= -m_bg l_{bc} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_b l_{bc} \ddot{\psi} + J_b \ddot{\psi} \end{aligned} \quad (11)$$

刚性梁关于 ψ 的运动方程为：

$$(m_b l_{bc} + J_b) \ddot{\psi} + m_b g l_{bc} = -\tau_b = -kL^2(\psi - \theta) - cL^2(\dot{\psi} - \dot{\theta}) \quad (12)$$

2.4.2 弹性梁的运动方程推导

梁的动能:

$$T_b = \frac{1}{2} \int_{-l_b}^0 \frac{5}{2} \rho A (\dot{\psi} x + \dot{y}_b)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \rho A (\dot{\psi} x + \dot{y}_b - \phi \dot{q})^2 dx \quad (13)$$

梁的势能:

$$\begin{aligned} V_b &= \left(\frac{5}{2} \lambda l_b\right) g \left[y_b - \frac{1}{2} l_b (\psi - \theta)\right] + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \lambda g (y_b + x \sin \psi - y(x, t)) dx + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \\ &= \frac{5}{2} \lambda l_b g \left[[y_c(t) + D(\theta_0 - \theta(t)) - \frac{1}{2} l_b (\psi - \theta)]\right. \\ &\quad \left.+ \int_0^{l_f} \lambda g ([y_c(t) + D(\theta_0 - \theta(t))] + x\psi - \phi(x)q(t)) dx\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}\right) \cdot I_z dx\right] \end{aligned} \quad (14)$$

拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L_b &= T_b - V_b \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l_b}^0 \frac{5}{2} \rho A (\dot{\psi} x + (\dot{y} - d\dot{\theta}))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \rho A (\dot{\psi} x + (\dot{y} - D\dot{\theta}) - \phi \dot{q})^2 dx \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{5}{2} \lambda l_b g \left[[y_c(t) + D(\theta_0 - \theta(t)) - \frac{1}{2} l_b (\psi - \theta)]\right. \right. \\ &\quad \left. \left.+ \int_0^{l_f} \lambda g ([y_c(t) + D(\theta_0 - \theta(t))] + x\psi - \phi(x)q(t)) dx\right. \right. \\ &\quad \left. \left.+ \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}\right) \cdot I_z dx \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

弹性梁 ψ 对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \lambda \left[\frac{5}{6} \ddot{\psi} (l_f^3 + l_b^3) + \frac{1}{2} (\ddot{y} - d\ddot{\theta}) (l_f^2 - l_b^2) - \frac{11}{40} \ddot{q} l_f^2 \right] \\ \frac{\partial L_b}{\partial \psi} &= -l_b \lambda g \left(-\frac{5}{4} l_b\right) - \int_0^{l_f} \lambda g x dx \\ &= \lambda \left[g \left(\frac{5}{4} l_b^2 - \frac{1}{2} l_f^2\right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

弹性梁关于 ψ 的运动方程：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\tau_b = - \left[kl_b^2(\psi - \theta) + cl_b(\psi - \dot{\theta}) \right] \\ \lambda \left[\frac{5}{6} \ddot{\psi} (l_f^3 + l_b^3) + \frac{1}{2} (\ddot{y} - d\ddot{\theta}) (l_f^2 - l_b^2) + g \left(\frac{1}{2} l_f^2 - \frac{5}{4} l_b^2 \right) - \frac{11}{40} \ddot{q} l_f^2 \right] \\ &= -\tau_b = - \left[kL^2(\psi - \theta) + cL(\dot{\psi} - \dot{\theta}) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

弹性梁 q 对应的欧拉-拉格朗日方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= - \int_0^{l_f} \lambda g(-\phi) dx - \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot 2q \cdot (\phi''(x))^2 \cdot I_z dx \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \int_0^{l_f} \lambda (\ddot{\psi} x + \ddot{y} - d\ddot{\theta} - \phi \ddot{q}) \cdot (-\phi) dx \end{aligned} \quad (18)$$

弹性梁关于 q 的运动方程：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \\ \int_0^{l_f} \lambda (\ddot{\psi} x + \ddot{y} - d\ddot{\theta} - \phi \ddot{q}) \cdot (-\phi) dx + \int_0^{l_f} \lambda g(-\phi) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot 2q \cdot (\phi''(x))^2 \cdot I_z dx &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

形状函数与相关计算：

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{3x^2 l_f - x^3}{2l_f^3} \\ \Phi'(x) &= \frac{3}{l_f^2} x - \frac{3}{2l_f^3} x^2 \\ \Phi''(x) &= \frac{3}{l_f^2} - \frac{3}{l_f^3} x \\ (\Phi'')^2 &= \frac{9}{l_f^4} \left(1 + \frac{1}{l_f^2} x^2 - \frac{2}{l_f} x \right) \\ \Phi^2(x) &= \frac{9}{4l_f^4} x^4 + \frac{1}{4l_f^6} x^6 - \frac{3}{2l_f^5} x^5 \\ \Phi(x) \cdot x &= \frac{3x^3 l_f}{2l_f^3} - \frac{x^4}{2l_f^3} \end{aligned} \quad (20)$$

对函数中积分的计算：

$$\begin{aligned}
& \int_0^{l_f} \lambda(\ddot{\varphi}x + \ddot{y} - D\ddot{\theta} - \phi\ddot{q}) \cdot (-\phi)dx \\
&= -\lambda\ddot{\varphi} \int_0^{l_f} \phi(x)dx - \lambda(\ddot{y} - D\ddot{\theta}) \int_0^{l_f} \phi(x)dx + \lambda\ddot{q} \int_0^{l_f} \phi^2(x)dx \\
&= -\frac{11}{40}\lambda\ddot{\varphi}l_f^2 - \frac{3}{8}l_f\lambda(\ddot{y} - D\ddot{\theta}) + \lambda\ddot{q} \left(\frac{33}{140}l_f \right)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_f} \lambda g(-\phi)dx &= -\lambda g \int_0^{l_f} \phi(x)dx \\
&= -\lambda g \cdot \frac{3}{8}l_f
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot 2q \cdot (\phi''(x))^2 \cdot I_z dx &= EI_z q \int_0^{l_f} (\phi''(x))^2 dx \\
&= EI_z q \frac{9}{l_f^4} \left(l_f + \frac{1}{3}l_f - l_f \right) \\
&= EI_z q \frac{3}{l_f^3}
\end{aligned} \tag{23}$$

弹性梁的运动学方程为：

$$-\frac{11}{40}\lambda\ddot{\varphi}l_f^2 - \frac{3}{8}l_f\lambda(\ddot{y} - D\ddot{\theta}) + \frac{33}{140}\lambda\ddot{q}l_f - \frac{3}{8}l_f\lambda g + EI_z q \frac{3}{l_f^3} = 0 \quad (24)$$

2.5 矩阵形式下的运动方程

2.5.1 刚性梁假设下的运动方程

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ m_b l_{bc} & -m_b l_{bc} D & m_b l_{bc}^2 + J_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 \\ 0 & -cL^2 & cL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 \\ 0 & -kL^2 & kL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ -m_b g l_{bc} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

2.5.2 弹性梁假设下的运动方程

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda l_f^2 - \frac{5}{4}\lambda l_b^2 & \frac{5}{4}\lambda D l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda D l_f^2 & \frac{5}{6}\lambda l_b^3 + \frac{1}{3}\lambda l_f^3 & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 \\ -\frac{3}{8}\lambda l_f & \frac{3}{8}\lambda D l_f & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 & \frac{33}{140}\lambda l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 & 0 \\ 0 & -cL^2 & cL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 & 0 \\ 0 & -kL^2 & kL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l_f^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \\ \psi \\ q \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ \frac{5}{4}\lambda g l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda g l_f^2 \\ \frac{3}{8}\lambda g l_f \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{26}$$

2.5.3 运动方程假设修正

在上一部分的假设中，我们都没有考虑小车与悬臂梁之间弹簧与阻尼器对小车的作用力，因为小车的质量相对于悬臂梁较大，这一作用力的影响较小，所以暂时忽略。但是在上述矩阵建立、验算与修改的过程中，我们仍然建立了考虑这一作用力的矩阵，并检验两

者之间的差别。考虑这一作用力的矩阵表示如下：

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda l_f^2 - \frac{5}{4}\lambda l_b^2 & \frac{5}{4}\lambda D l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda D l_f^2 & \frac{5}{6}\lambda l_b^3 + \frac{1}{3}\lambda l_f^3 & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 \\ -\frac{3}{8}\lambda l_f & \frac{3}{8}\lambda D l_f & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 & \frac{33}{140}\lambda l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 & 0 \\ 0 & -c L^2 & c L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b - k L & k L & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b + k L(L + D x) & -k L(L + D x) & 0 \\ 0 & -k L^2 & k L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3 E I_z}{l_f^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \\ \psi \\ q \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + m g \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ \frac{5}{4}\lambda g l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda g l_f^2 \\ \frac{3}{8}\lambda g l_f \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{27}$$

3 运动方程求解

3.1 使用拉普拉斯变换求解

方法一主要是基于拉普拉斯变换的求解方法。对于上一部分中求得的线性方程组，做拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned}(Ms^2 + cs + K)X(s) &= L_Q + Mx_0s + M\dot{x}_0 + Cx_0X(s) \\ &= (Ms^2 + cs + K)^{-1}(L_Q + Mx_0s + M\dot{x}_0 + Cx_0)\end{aligned}\tag{28}$$

根据理论计算部分的近似，初始条件满足：

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &= 0\end{aligned}\tag{29}$$

因此，频域解和时域解为：

$$\begin{aligned}X(s) &= (Ms^2 + cs + K)^{-1}L_Q \\ x(s) &= \mathcal{L}^{-1}(Ms^2 + cs + K)^{-1}L_Q\end{aligned}\tag{30}$$

以下是 Matlab 求解程序的核心部分：

```

%% 四阶矩阵
InvLeftD = M_D*s^2+ C_D*s+ K_D;

LapD= InvLeftD \ F_Ds;

InvLapD=ilaplace(LapD,s,t);
DeltaD = InvLapD(1,1)+ D*(theta0 - 0.04 - InvLapD(2,1))+ lf*InvLapD(3,1)- InvLapD(4,1) - 0.3981506469;
DeltaD = vpa(DeltaD,25);
DeltaDIntegral = simplify(int(DeltaD^2*v,t,0,33.91593/v));
figure
fsurf(DeltaD, [0, 7])
view (0, 0)
DeltaD3 = vpa(DeltaD,3);

```

图 4: Matlab 求解程序的核心部分

在刚性梁假设下，求得方程的瞬态解和稳态解如下：

$$\begin{aligned}
 x_h(t) = & -0.1e^{-10.1t} - 0.0158e^{-10.2t} - 0.00231e^{-584.0t} - 0.00102 \sin 50.3t \\
 & - 0.0133e^{-1020.0t} + 0.129(\cosh 493.0t + 0.768 \sinh 493.0t)e^{-503.0t} \\
 x_s(t) = & 0.0227 \cos 50.3t - 0.0166
 \end{aligned} \tag{31}$$

在弹性梁假设下，求得方程的瞬态解和稳态解如下：

$$\begin{aligned}
 x_h(t) = & 0.00362e^{-10.2t} \sin(0.156t) - 1.0 \times 10^{-4}e^{-584.0t} - 7.56 \times 10^{-6}e^{-10.0t} \\
 & - 1.95 \times 10^{-4}e^{-1020.0t} - 0.00227e^{-10.2t} \cos 0.156t - 3.17 \times 10^{-6}e^{-9080.0t} \\
 & + e^{-0.173t} \cos 23.5t(0.0339 + 0.00135i) + (0.0339 - 0.00135i)e^{-0.173t} \cos 23.5t \\
 & + (0.00135 - 0.0339i)e^{-0.173t} \sin 23.5t + (0.00135 + 0.0339i)e^{-0.173t} \sin 23.5t \\
 x_s(t) = & -0.0173 \cos(50.3t) - 0.00722 \sin(50.3t) - 0.0446
 \end{aligned} \tag{32}$$

以下为刚性梁和弹性梁的 Matlab Simulink 理论计算数据；所有弹簧与阻尼器设置均为初始值 (5000N/mm, 500N·s/mm)：

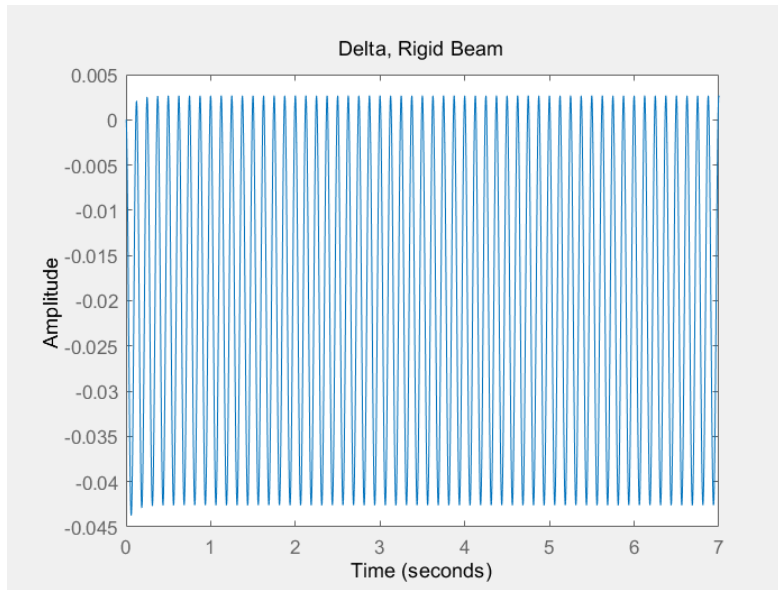


图 5: 刚性梁的 Matlab Simulink 计算结果, δ

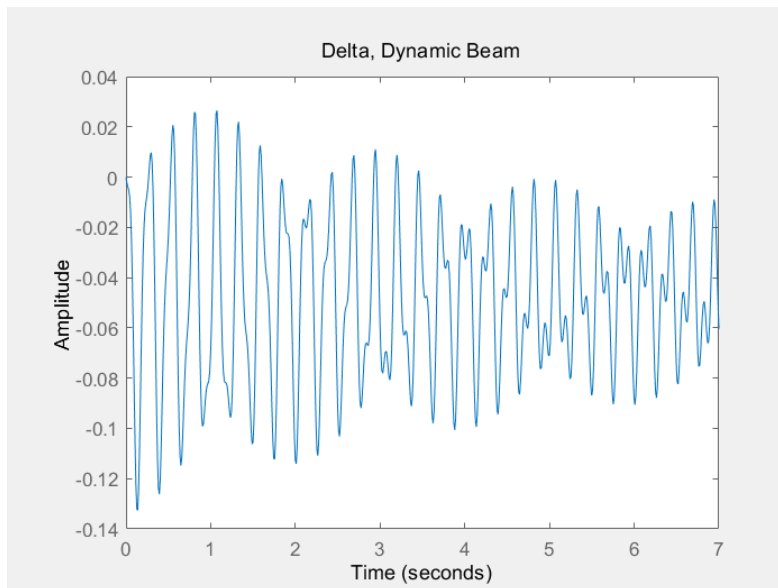


图 6: 弹性梁的 Matlab Simulink 计算结果, δ

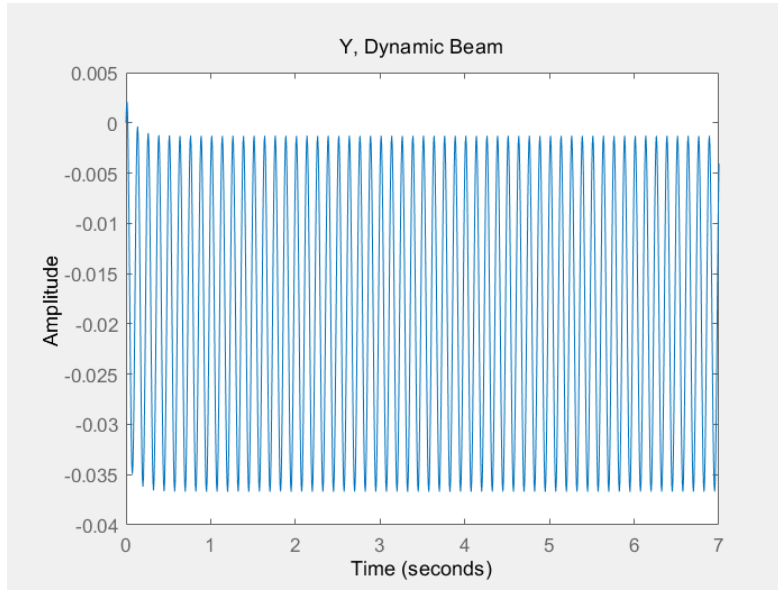


图 7: 弹性梁的 Matlab Simulink 计算结果, Y

弹性梁的 Y 与刚性梁的 δ 振动波形频率一致，一定程度上验证了模型。刚性梁和弹性梁的理论计算波形与仿真结果对比，仍然有一定的差别。对误差原因的分析如下：

1. Adams 仿真中模型碰撞与仿真步长均会影响仿真的精度；
2. 理论计算中线性化近似与模型简化会带来一定的误差；
3. 无论是使用 Matlab 还是 Mathematica 进行计算，在计算过程中都会丢失一定的精度，特别是进行拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换时，可能出现未知问题；
4. Adams 仿真中考虑了空间中更多的模态，只考虑有限模态的分析会带来误差。

3.2 转化为一阶微分方程组求解

方法二的基本思路是把二阶问题转化为一阶问题，然后求解一阶非齐次常系数常微分方程组。

本项目中涉及的变量 x 最高有二阶项 ($order = 2$), 因此将 x 转化成 v :

$$x = \begin{bmatrix} y_c & \theta & \psi & q \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

$$v = \begin{bmatrix} y_c & \theta & \psi & q & \dot{y}_c & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{q} \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

然后对原有的 M、C、K 矩阵同时左乘 M^{-1} , 得到以下矩阵:

$$M_e = M^{-1}M = I \quad (35)$$

$$C_e = M^{-1}C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$K_e = M^{-1}K = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (37)$$

然后构建分块矩阵 A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_{ij} & -a_{ij} \end{bmatrix} \quad (39)$$

然后矩阵就可以转化为一阶微分方程形式:

$$\frac{dv}{dt} = Av + b \quad (40)$$

假设其解的形式为 $v = e^{At}c(t)$, 可以得到:

$$x(t) = e^{tA} \left[x(0) + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right] \quad (41)$$

```

function A = OdeMatrix(num, M, C, K)
% 确定原始方程变量数 (3/4) ;
varN = num;
order = 2;
% 确定v和dv的变量数; 此处阶数order固定为2;
% 原始方程最高有二阶导项, 所以v包含一阶导和原变量, dv有二阶导和一阶导
dv = zeros(order*num,1);
% 对M、C、K同时左乘inv(M), 得到归一化的Me、Ce、Ke
% M需要是可逆矩阵...
Me = eye(num);
Ce = M\C;
Ke = M\K;
% 建立变换方程 (我也不知道怎么叫) A
% 表达式: (dv/dt) = Av + Const.
% A矩阵应该是可逆的...
A = zeros(order*varN,order*varN);
for ie = 1:varN
    for je = 1:varN
        A(order*ie,order*je) = -Ce(ie,je);
        A(order*ie-1,order*je) = Me(ie,je);
        A(order*ie,order*je-1) = -Ke(ie,je);
    end
end
end

```

图 8: 实现方法二所述计算的 Matlab 方法

4 刚性梁参数设计

为得到在刚性梁前提下能使系统振动最小的小车/悬臂梁劲度系数和阻尼系数, 我们用悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差反应系统的振动程度, 在 Adams 中通过更改劲度系数/阻尼系数的数值, 得出在某一条件下悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差, 比较各标准差并逐步收敛到标准差最小值, 将其对应的劲度系数/阻尼系数的数值作为最优解。

4.1 底盘劲度系数的优化

在设定小车底盘阻尼系数为 500、范围搜索小车底盘劲度系数为 1-1500 时悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差后, 我们将底盘劲度系数范围缩小到 200 300; 随后对局

部最小值区间进行细分，找到细分后区间内的局部最小值区间并重复上述步骤。

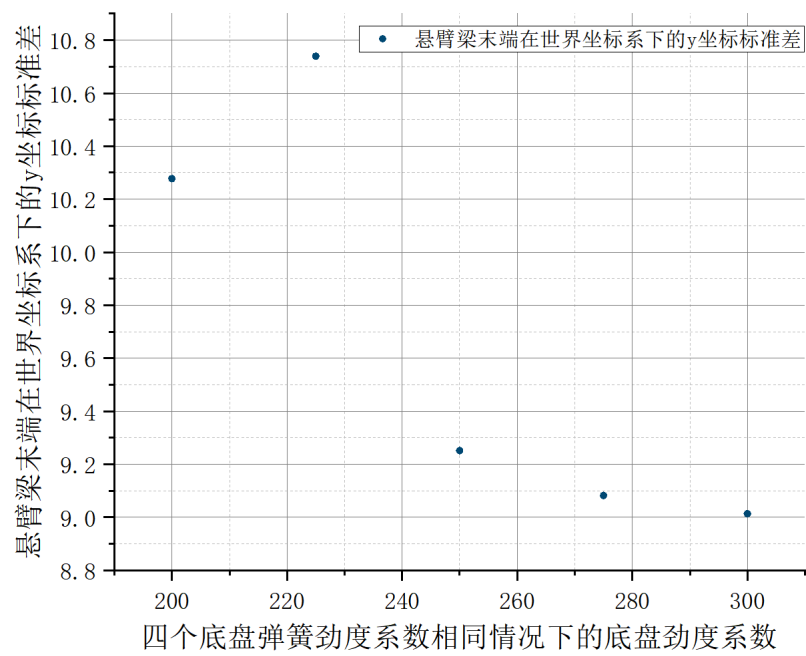


图 9: 底盘劲度系数的第一次收敛优化

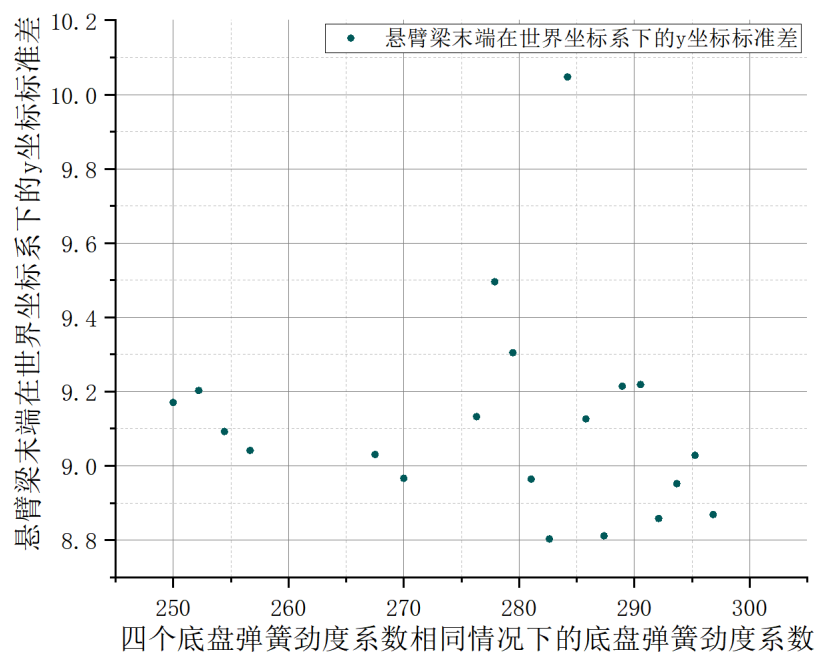


图 10: 底盘劲度系数的第二次收敛优化

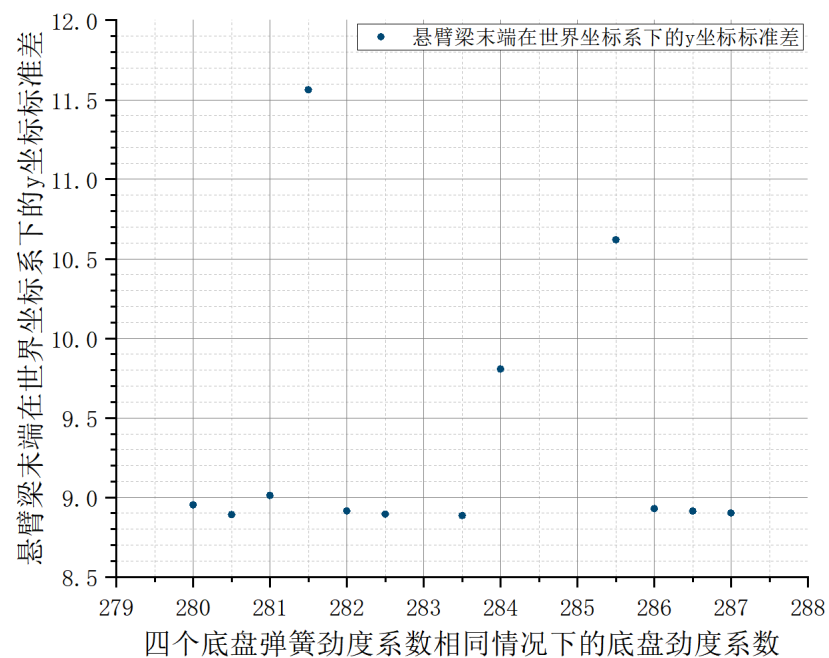


图 11: 底盘劲度系数的第三次收敛优化

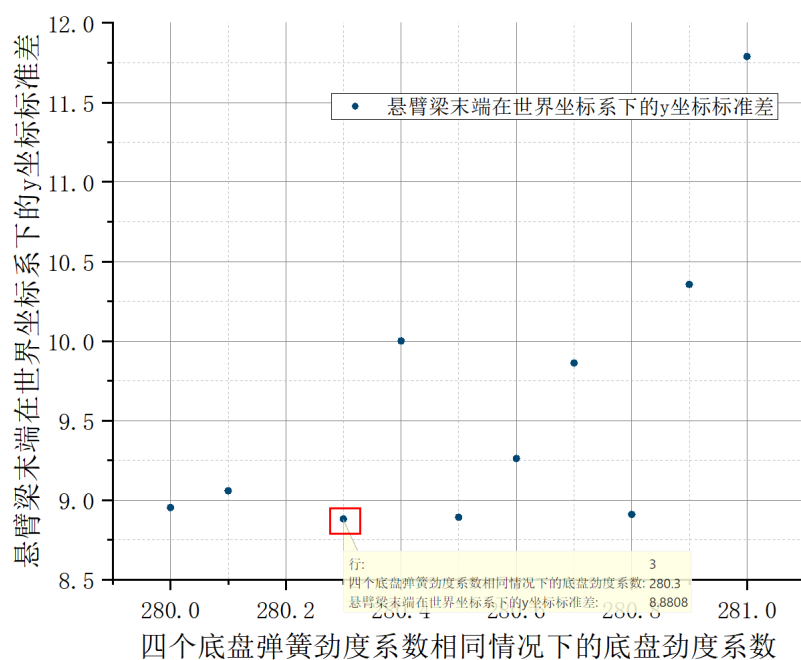


图 12: 底盘劲度系数的第四次收敛优化

经过四次收敛优化, 我们得到能使系统振动最小的小车底盘劲度系数为 280.3 ± 0.1 , 此时悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差为 8.8808。将劲度系数 280.3 代入仿真后, 得出

4.2 底盘阻尼系数的优化

得出底盘最优劲度系数后, 我们控制底盘劲度系数为 280.3, 对底盘阻尼系数进行同理的区间收敛优化。

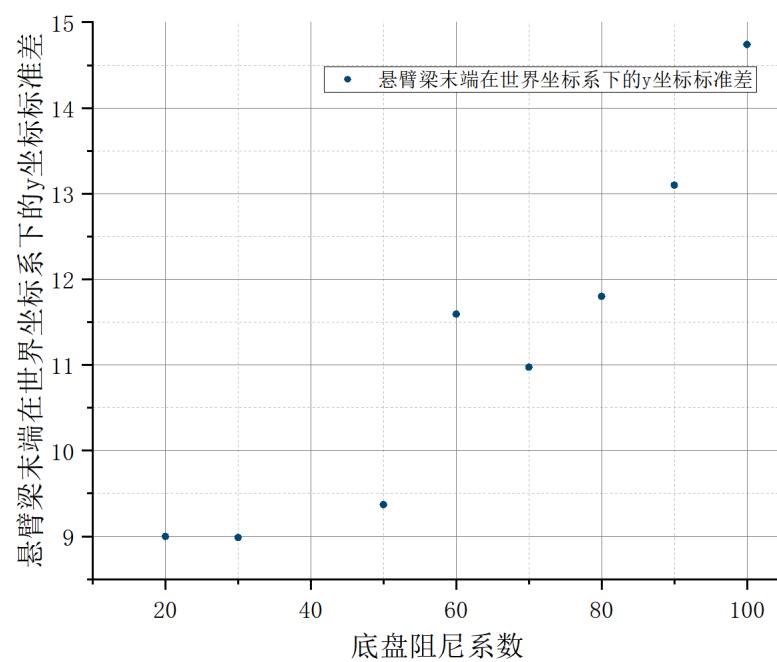


图 13: 底盘阻尼系数的第一次收敛优化

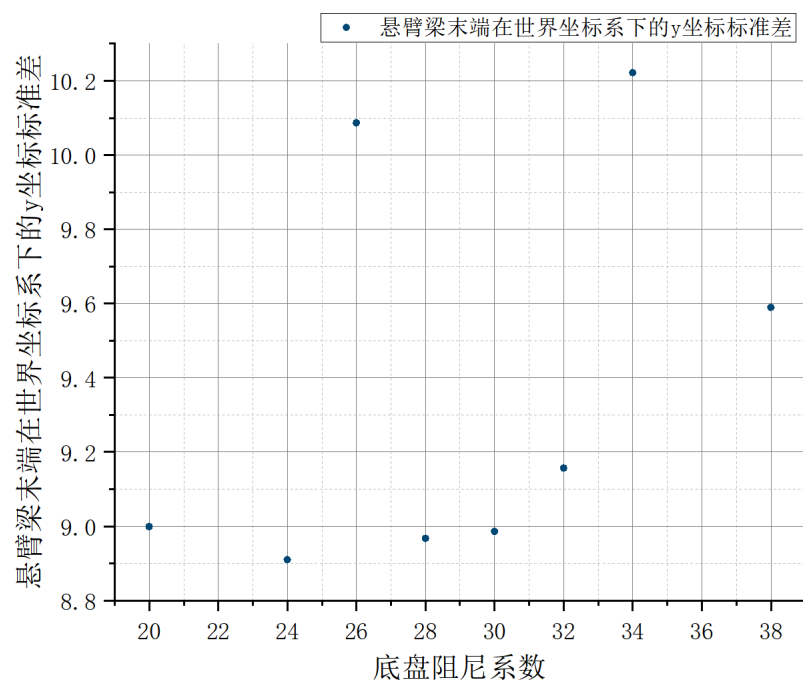


图 14: 底盘阻尼系数的第二次收敛优化

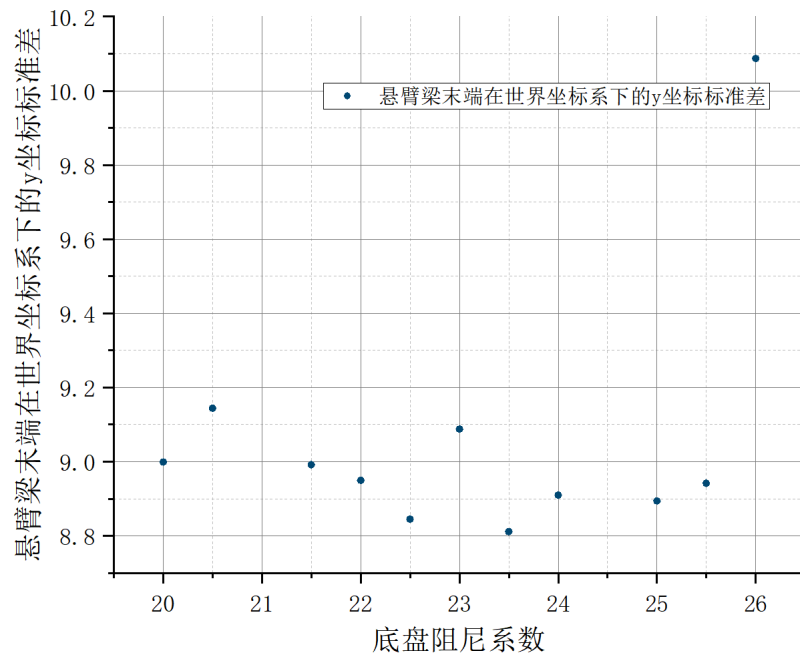


图 15: 底盘阻尼系数的第三次收敛优化

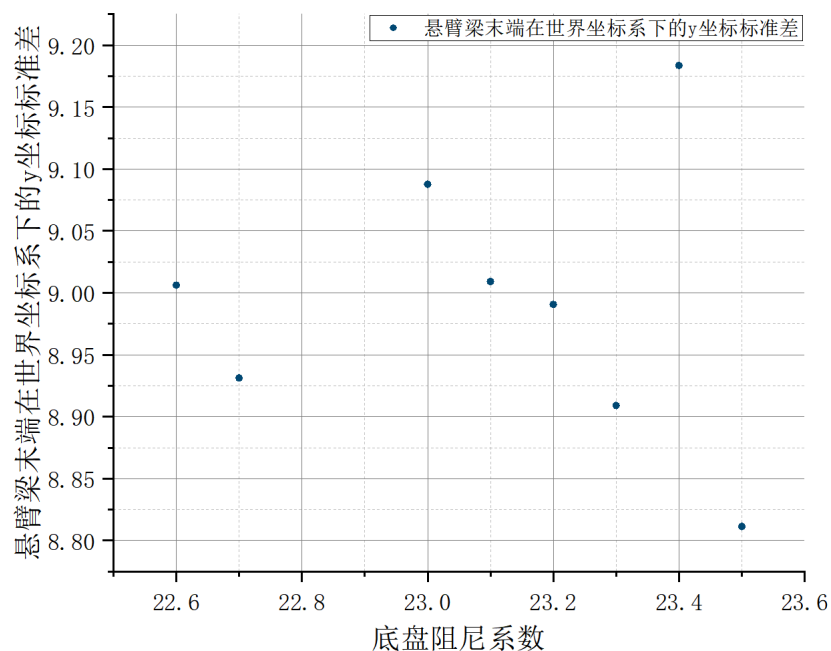


图 16: 底盘阻尼系数的第四次收敛优化

由图 13-图 15，改变底盘阻尼系数大小时，悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差基本位于 8.8-9.2 范围内；当收敛区间较小时，数据分布较无规律，这里取 23.5 ± 0.1 为底盘最优阻尼系数区间。

4.3 仿真、验证与分析

仿真结果如下：

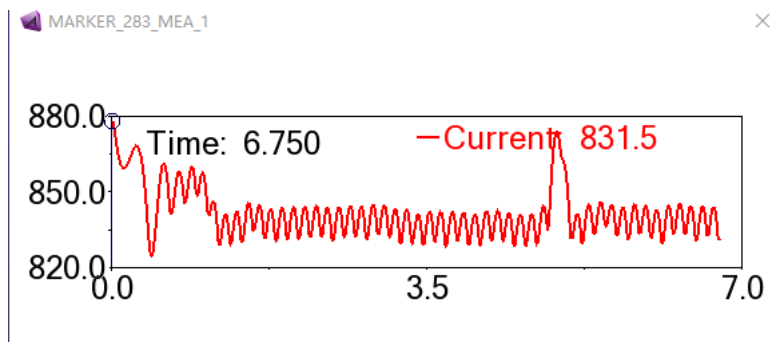


图 17: 任务三仿真结果

积分数值为 $7395.20650832709 \times 10^{-6}$ ，相对于原积分结果 $17806.6266019661 \times 10^{-6}$ 有显著改善。

根据本部分的仿真结果，Simulink 理论计算的输入参数如下：

$$cf = cb = 23.3$$

$$kf = kb = 208.3 \quad (42)$$

$$c = 500$$

$$k = 5000$$

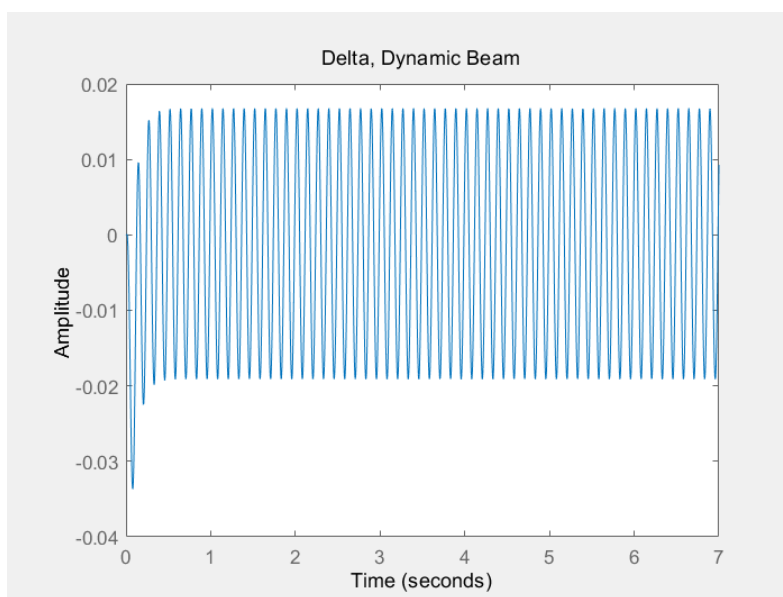


图 18: Simulink 理论计算结果

Matlab 中的积分是连续积分，而 Adams 中是离散近似积分，所以有一定的差距。在 Matlab 程序中，原始积分值为 1.8170×10^{-2} ，而改用上述输入参数后积分值减小为 5.7533×10^{-3} ，证明结果具有一定的参考价值。

5 弹性梁参数设计

在这一部分，我们沿用第四节中刚性梁参数设计的方法，用悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差反应系统的振动程度，在 Adams 中通过更改弹性梁劲度系数/阻尼系数的数值，得出在某一条件下悬臂梁末端在世界坐标系下的 y 坐标标准差，比较各标准差并得到最小值，将其对应的劲度系数/阻尼系数的数值作为最优解。

5.1 弹性梁劲度与阻尼系数优化

1. 弹性梁劲度系数优化

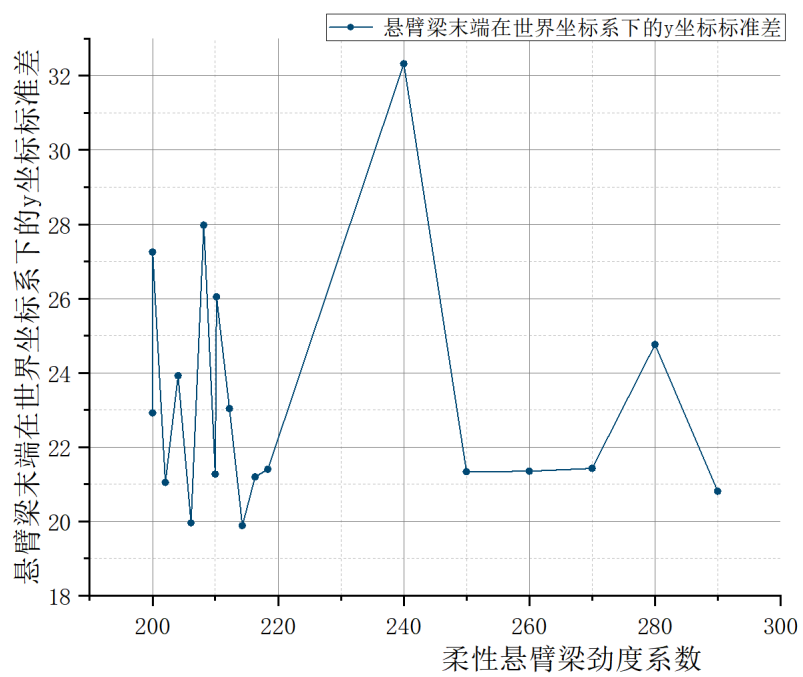


图 19: 弹性梁劲度系数设计优化

2. 弹性梁阻尼系数优化

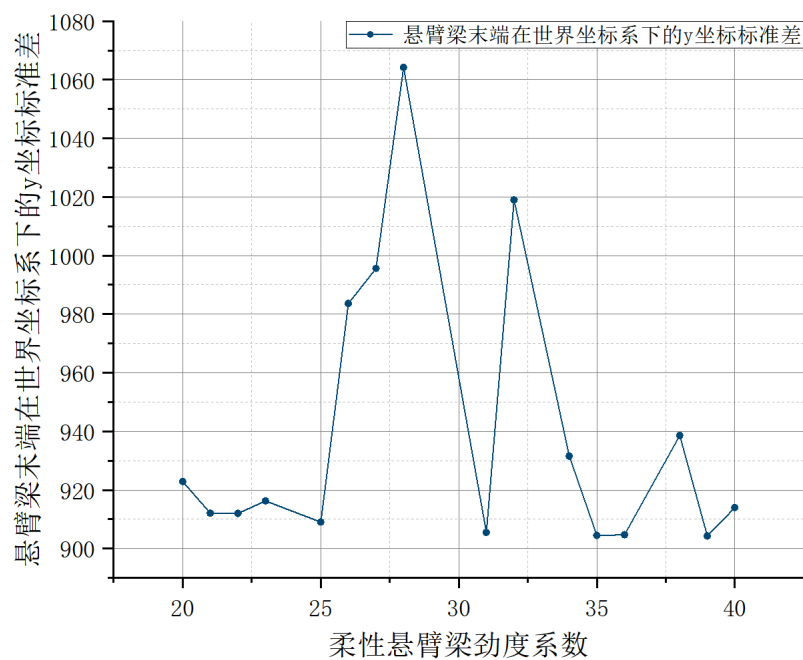


图 20: 弹性梁阻尼系数设计优化

出现上述来回震荡的数据的可能原因如下：

1. 数据采样数较少，不能准确反映积分结果变化趋势；
2. 在某一区间数据显著增大（如大于平均值的 100 倍，已经作为无效数据滤除，故未在图表中显示），可能是接近某一自然频率，导致一定程度的激振。

5.2 仿真、验证与分析

仿真结果如下：

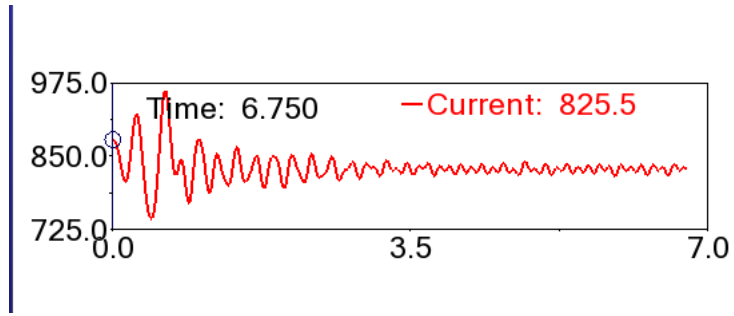


图 21: 任务四仿真结果

积分数值为 $26892.20650832709 \times 10^{-6}$ ，相对于原积分结果 $8467.35275604638 \times 10^{-6}$ 有显著改善。

根据本部分的仿真结果，Simulink 理论计算的输入参数如下：

$$cf = cb = 9$$

$$kf = kb = 490$$

$$c = 500$$

$$k = 5000$$

(43)

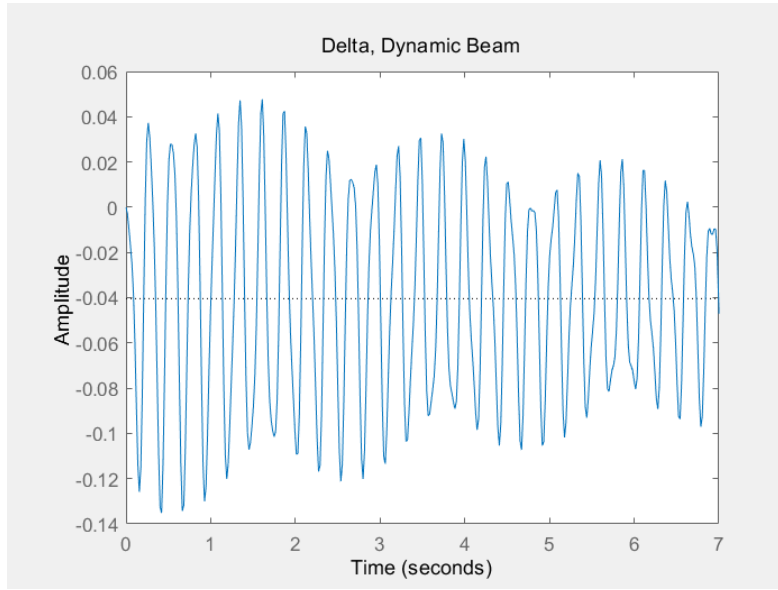


图 22: Simulink 理论计算结果

Matlab 中的积分是连续积分，而 Adams 中是离散近似积分，所以有一定的差距。在 Matlab 程序中，原始积分值为 0.10311，而改用上述输入参数后积分值减小为 0.084827，证明结果具有一定的参考价值。

6 速度分析与实用性判断

6.1 小车速度分析

我们沿用第四节中的方法，对小车的速度进行了区间收敛分析。在遍历搜索 500 2000 的速度区间（单位为 $^{\circ}/s$ ）后，我们将最佳速度区间限定在 700 1200 之间，并进行如下收敛优化。

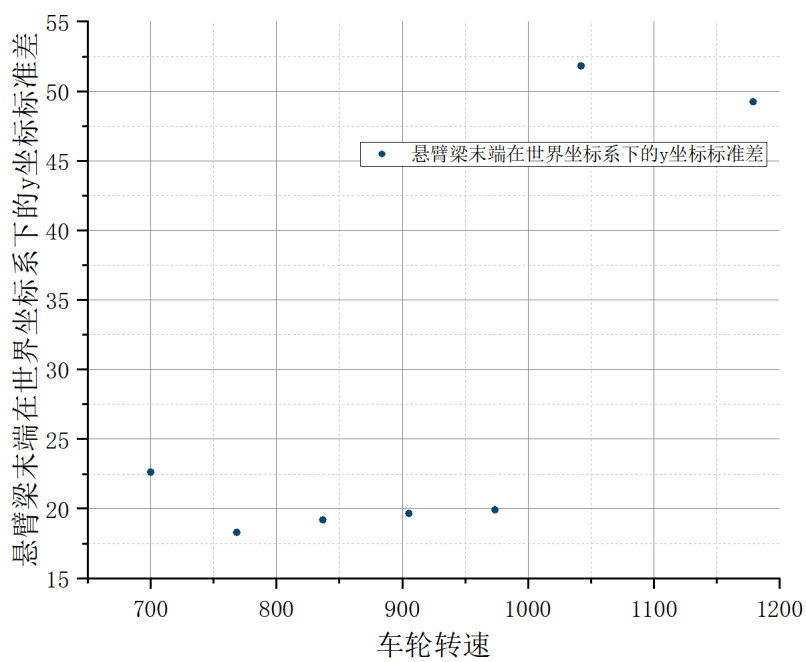


图 23: 改变小车速度的第一次收敛优化

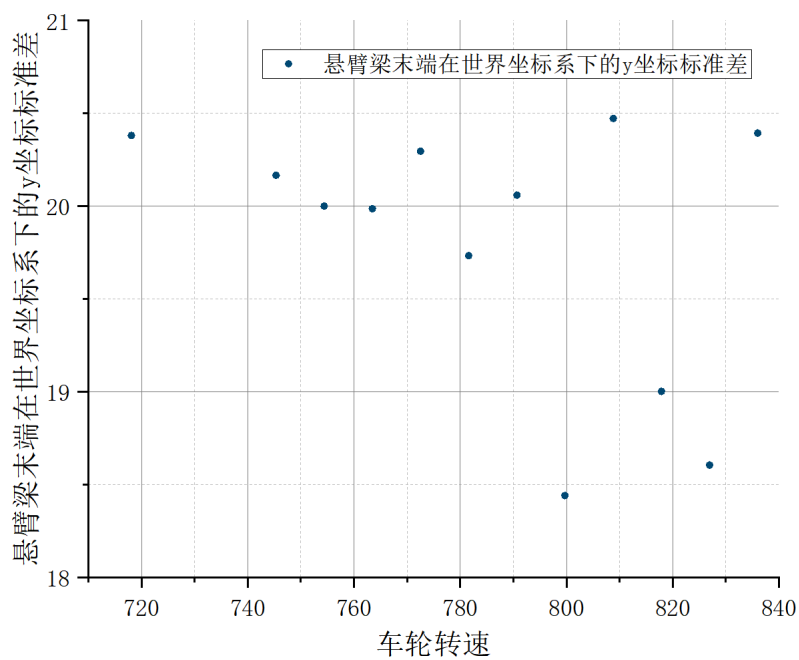


图 24: 改变小车速度的第二次收敛优化

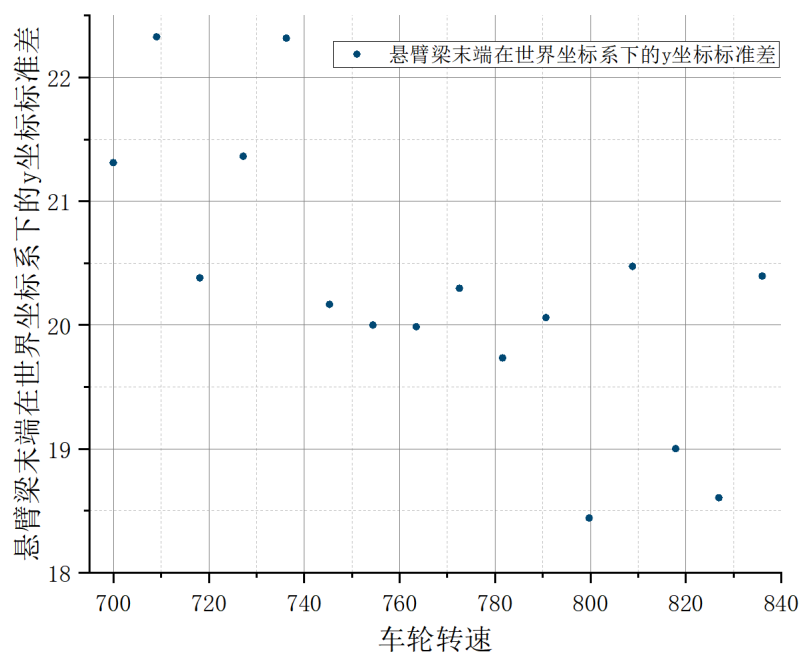


图 25: 改变小车速度的第三次收敛优化

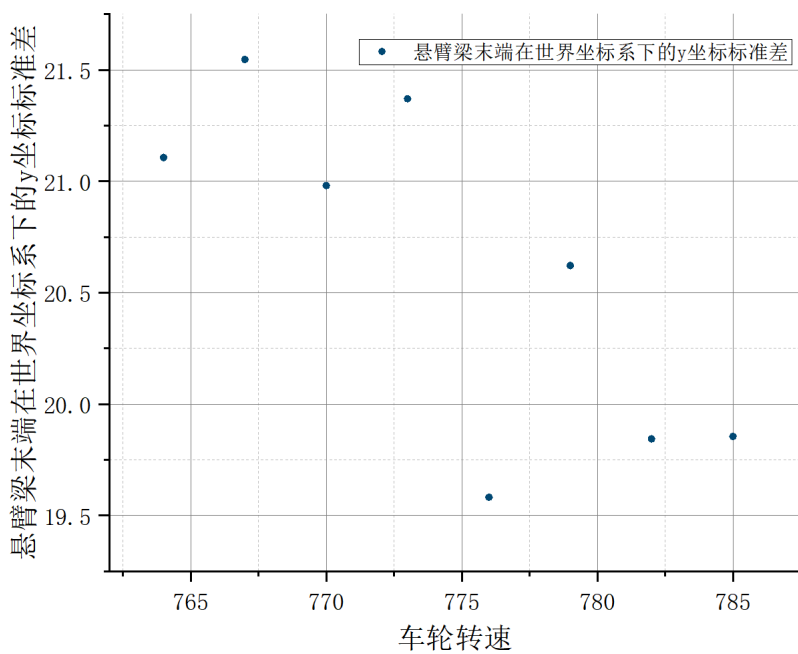


图 26: 改变小车速度的第四次收敛优化

由图 23、图 24，标准差主要集中在 19.5-21.5 区间范围内，可作为粗略判断数据准确性和可靠性的依据；由图 25、图 26，数据分布虽然基本集中在 19.5-22 区间范围内、但较为分散，不具有明显特征。由于此处转速单位为度每秒，对于宏观小车运动来说，1-5 度每秒范围内的转速变化对小车实际运动状态影响较小，因此我们将最优转速总结为 $777 \pm 2^\circ \text{ s}$ ，对应的最优标准差值为 19.361 ± 2.2 。

6.2 小车实用性判断

目前市场上已有很多成熟的减震器方案，部分样例如下：

<i>Car type</i>	<i>Damping coefficient</i>
Comfortable car	0.20–0.25
Semi-sport car	0.25–0.30
Sport car	0.30–0.35
Racing car	0.35–0.40

图 27: 普通车辆的阻尼系数

Stiffness parameters	Front-left	Front-right	Rear-left	Rear-right
Tested (N/m)	23,812	23,126	23,897	23,112
Identified (N/m)	25,115	25,114	25,614	25,507
Absolute deviation (N/m)	1303	1988	1717	2395
Relative deviation (%)	5.47	8.60	7.19	10.40
Damping parameters	Front-left	Front-right	Rear-left	Rear-right
Tested (N s/m)	1401	1399	1392	1406
Identified (N s/m)	1528	1542	1543	1534
Absolute deviation (N s/m)	127	143	151	128
Relative deviation (%)	9.06	10.22	10.85	9.10

图 28: 例 1

m_s	Sprung mass	1200kg
m_t	Un-sprung mass	125kg
k	Suspension stiffness	60000 N/m
k_t	Tire stiffness	220000 N/m
C	Suspension damping	2500 Ns/m

图 29: 例 2

可以看出，我们所设计的减震器的参数不在市面上提供的减震器劲度系数或阻尼系数的范围之内。我们使用例 2 中的减震器参数进行 adams 仿真，得到了下图所示的结果：

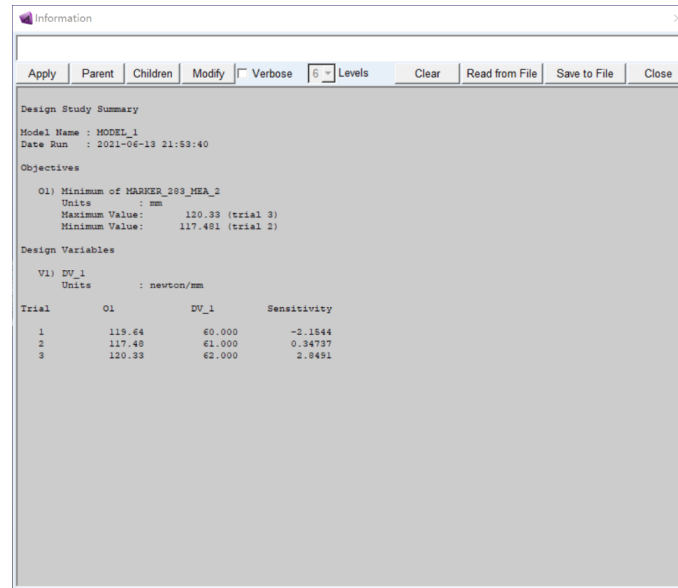


图 30: 使用例 2 中的减震器参数进行的仿真结果

小车的振动明显增大，与我们的最优情况偏离。我们推测：由于物体的振动有多个模式，其中对于小车来说，前后向的振动和侧向振动对车对状态影响都非常大。而市面上大部分的车底盘上有变截面积的弹簧片，能维持车的侧向稳定，我们的小车模型中只有略倾斜的弹簧（如下图所示，弹簧为图中粉色部分），只能起到减小前后向振动的作用而不能充分维持车的侧向稳定，因此和使用例 3 中的减震器参数进行仿真所得效果相差较大。

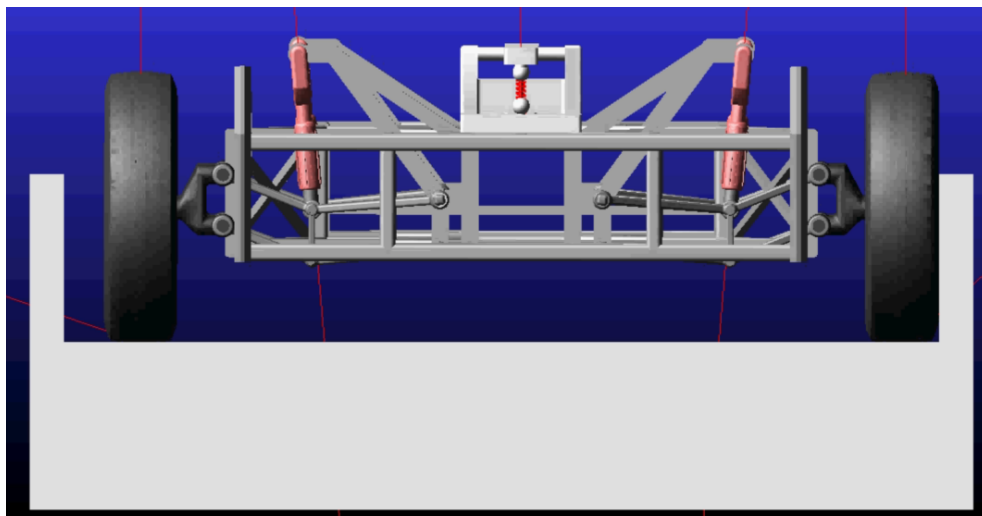


图 31: 小车模型正视图

member	task 1	task 2	task 3	task 4	task 5	
李心洁	15%	20%	40%	20%	25%	120%
肖云中	5%	0%	10%	0%	75%	90%
张恒斌	0%	0%	50%	80%	0%	130%
何不为	80%	80%	0%	0%	0%	160%
莫中天	0%	0%	0%	0%	0%	0%
	100%	100%	100%	100%	100%	500%

图 32: 分工表

References

Xie Z., Wong K., Jing Z., et al. A noise-insensitive semi-active air suspension for heavy-duty vehicles with an integrated fuzzy-wheelbase preview control. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2013, 2013, p. 121953.

Buhari R., Rohani M., Abdullah M. Dynamic load coefficient of tyre forces from truck axles. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 405, Issue 408, 2013, p. 1900-1911.

Zhao, L., Zhou, C., Yu, Y., Yang, F. (2016). A method to evaluate stiffness and damping parameters of cabin suspension system for heavy truck. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(7), 1687814016654429

Sun, S., Deng, H., Du, H., Li, W., Yang, J., Liu, G., ... Yan, T. (2015). A compact variable stiffness and damping shock absorber for vehicle suspension. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(5), 2621-2629

Rao, M. D., Gruenberg, S. (2002). Measurement of equivalent stiffness and damping of shock absorbers. *Experimental Techniques*, 26(2), 39-42. *Nguyen V., Zhang J., et al. Effect of the off-road terrains on the ride comfort of construction vehicles. Journal of Southeast University (English Edition), Vol. 35, Issue 2, 2019, p. 191-197.*

Xie Z., Wong K., Jing Z., et al. A noise-insensitive semi-active air suspension for heavy-duty vehicles with an integrated fuzzy-wheelbase preview control. Mathematical Prob-

lems in Engineering, Vol. 2013, 2013, p. 121953.

Buhari R., Rohani M., Abdullah M. Dynamic load coefficient of tyre forces from truck axles. Applied Mechanics and Materials, Vol. 405, Issue 408, 2013, p. 1900-1911.

Zhao, L., Zhou, C., Yu, Y., Yang, F. (2016). A method to evaluate stiffness and damping parameters of cabin suspension system for heavy truck. Advances in Mechanical Engineering, 8(7), 1687814016654429

Sun, S., Deng, H., Du, H., Li, W., Yang, J., Liu, G., ... Yan, T. (2015). A compact variable stiffness and damping shock absorber for vehicle suspension. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 20(5), 2621-2629

Rao, M. D., Gruenberg, S. (2002). Measurement of equivalent stiffness and damping of shock absorbers. Experimental Techniques, 26(2), 39-42. ;

Nguyen Vanliem, Le Vanquynh, Jiao Renqiang, Yuan Huan Low-frequency vibration analysis of heavy vehicle suspension system under various operating conditions. Mathematical Models in Engineering, Vol. 6, Issue 1, 2020, p. 13-22. <https://doi.org/10.21595/mme.2019.21229>