

Численное решение 1D-уравнения Лапласа

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x(0; 1) \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} \quad (1)$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Для этого на отрезке $[0; 1]$ вводится равномерная сетка x_0, x_1, \dots, x_N , где $x_i = i * h, h = 1/N$ – шаг сетки.

В качестве решения вводятся дискретные неизвестные $y_i \approx u(x_i)$, и для каждого узла составляется дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа на трехточечном шаблоне.

y_0, y_N известны из граничных условий.

Дискретная аппроксимация уравнения в оставшихся узлах:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i), i = 1, \dots, N - 1.$$

Для приграничных узлов (x_1, x_{N-1}) сюда войдут граничные условия.

Общая система уравнений представляет собой линейную систему с трехдиагональной матрицей, решить ее можно методом прогонки.

Тестирование решения

Ниже приведён график погрешности c- и L2- нормы полученного решения. Решение искалось для функции $u(x) = x^6$.

