

Численное решение 2D-уравнения Лапласа

Буюн Кирилл, 303 учебная группа

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Необходимо решить двумерную краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(x) = f(x), x \in \Omega = (0, 1) * (0, 1) \\ u|_{x \in \delta\Omega} = g(x) \end{cases} . \quad (1)$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Для этого в единичном квадрате вводится равномерная сетка $\{(x_i, y_j)\}, i, j = 0, 1, \dots, N, x_i = i * h, y_j = j * h, h = \frac{1}{N}$ – шаг сетки.

В качестве решения вводятся дискретные неизвестные $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, и для каждого узла составляется дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа на пятиточечном шаблоне.

Значения u_{ij} при $i = 0$ или $j = 0$ известны из граничных условий.

Дискретная аппроксимация уравнения в узлах:

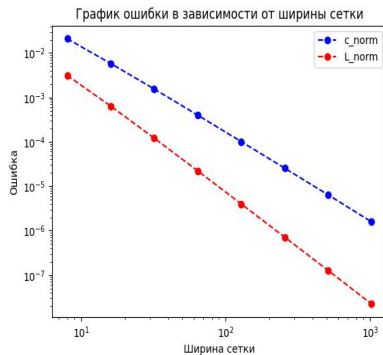
$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j), i = 1, \dots, N-1.$$

Для приграничных узлов (при $i = 1$ или $i = N-1$ или $j = 1$ или $j = N$) сюда войдут граничные условия.

Общая система уравнений представляет собой линейную систему с симметричной разреженной матрицей, которая решается методом сопряженных градиентов с использованием предобуславливателя.

Тестирование точности решения

Ниже приведён график погрешности c- и L2- нормы полученного решения u^* в зависимости от размера сетки. Решение искалось для функции $u(x, y) = \sin(5x) * \cos(y)$.
Формулы для норм: $\|u^* - u\|_c = \max_{i=0, N, j=0, N} |u^*(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)|$; $\|u^* - u\|_{L2} = [\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N h^2 * (u^*(x_i, y_i) - u(x_i, y_i))^2]^{1/2}$, где h - шаг сетки.



Тестирование скорости решения

Ниже приведён график зависимости времени выполнения одной итерации и всего решения в целом в зависимости от размера сетки.

