Численное решение 1D-уравнения Лапласа

Буян Кирилл, 303 учебная группа

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Постановка задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x(0;1) \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} . \tag{1}$$

численно с помощью метода конечных разностей.
Для этого на отрезке [0; 1] вводится равномерная сетка $x_0, x_1, ..., x_N$, где $x_i = i * h, h = 1/N$ – шаг сетки.

Численное решение

В качестве решения вводятся дискретные неизвестные $y_i \approx u(x_i)$, и для каждого узла составляется дискретное уравнение, приближающее уравнение Лапласа на трехточечном шаблоне.
y_0, y_N известны из граничных условий.
Дискретная аппроксимация уравнения в оставшихся узлах:
$-\frac{y_{i-1} - 2 * y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i), i = 1, ..., N-1.$
Для приграничных узлов (x_1, x_{N1}) сюда войдут граничные условия.
Общая система уравнений представлет собой линейную систему с трехдиагональной матрицей, решить ее можно методом прогонки.

Тестирование решения

Ниже приведён график погрешности с- и L2- нормы полученного решения u^*. Решение искалось для функции $u(x) = x^6$. Формулы для норм:
$||u^* - u||_c = max_{i=0,N}|u^*(x_i) - u(x_i)|$; $||u^* - u||_{L2} = [\sum_{i=0}^{N} h * (u^*(x_i) - u(x_i))^2]^{1/2}$, где h - шаг сетки.