

Численное решение двумерной задачи Дирихле

Буюн Кирилл, 403 учебная группа

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Решается двумерная задача Дирихле для двумерного стационарного оператора диффузии:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-D \operatorname{grad} u) = f, x \in \Sigma, \\ u = g, x \in \delta \Sigma. \end{cases}$$

$$\Sigma = [0, 1]^2, D = \operatorname{diag}(d_x, d_y). (1)$$

Задача решается методом конечных объёмов на многоугольной сетке: уравнение интегрируется по ячейке, затем интеграл неизвестной функции расписывается через поток по граням этой ячейки. Неизвестными здесь являются концентрации в центрах масс ячеек.

Работа с сеткой, а также решение получившейся системы происходит с помощью библиотеки INMOST.

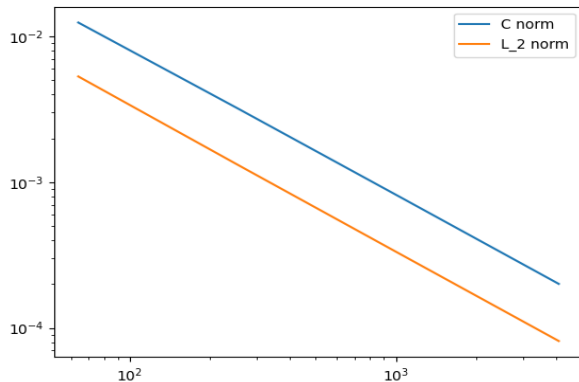
Эксперимент проводился для задач, в которых известно аналитическое решение, а именно

- $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $d_x = d_y = 1$, $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$
- $f = 200 \sin(10x) \sin(10y)$, $d_x = d_y = 1$, $u = \sin(10x) \sin(10y)$
- $f = 16(d_x + d_y) \sin(4x) \sin(4y)$, $d_x = 5$, $d_y = 1$, $u = \sin(4x) \sin(4y)$

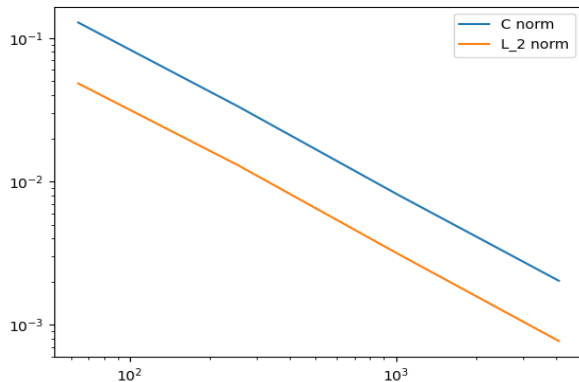
Заметим, что во втором случае краевое значение является неоднородным. Также в третьем случае тензор диффузии является неоднородным. Для всех трех экспериментов построены графики C-нормы и L2-нормы отклонения при сгущении сетки.

N в дальнейшем обозначает число узлов.

$$f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), d_x = d_y = 1, u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$



$$f = 200\sin(10x)\sin(10y), d_x = d_y = 1, u = \sin(10x)\sin(10y)$$



$$f = 16(d_x + d_y)\sin(4x)\sin(4y), d_x = 5, d_y = 1, u = \sin(4x)\sin(4y)$$

