# Схема курса на 7 семестр
# +
# МКР и МКЭ для уравнения диффузии

Ануприенко Денис Валерьевич

6 сентября 2024 года

# О чем курс

Основной предмет – уравнение **диффузии**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\mathbb{D}\nabla u\right) = f$$

Что в него входит?

- $u$ – основная неизвестная (концентрация вещества)
- $\mathbb{D} = \mathbb{D}^T > 0$ – тензор диффузии
- $f$ – источниковый член

Курс посвящен **численному решению** задач для уравнения диффузии

# Аналогичные уравнения

Основной предмет – уравнение **диффузии**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\mathbb{D}\nabla u\right) = f$$

Некоторые сферы применения:

- **диффузия** в растворах: биологические ткани, подземные воды и др.
- **фильтрация** подземных вод, нефти, газа: $\mathbb{D}$ – тензор фильтрации, $u$ – давление
- **теплоперенос**: $\mathbb{D}$ – тензор телопроводности, $u$ – температура
- **экономика**: $\mathbb{D}$ – . . . , $u$ – цена опциона

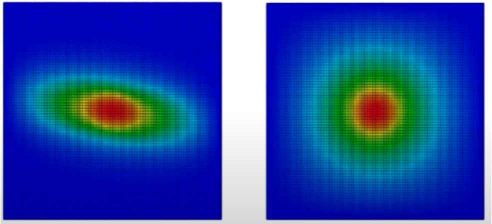
# О тензоре диффузии

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d_x & d_{xy} \\ d_{xy} & d_y \end{bmatrix}$$

Для изотропного материала обычно

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = d\mathbb{I}$$

Полный тензор возникает для сложно анизотропных материалов



# Связь с уравнением Лапласа

Если уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\mathbb{D}\nabla u\right) = f$$

рассмотреть в стационарном случае для изотропного материала с единичным тензором, получим

$$\operatorname{div}\left(-\nabla u\right) = f,$$

то есть уравнение Лапласа

$$-\Delta u = f$$

# Краевая задача Дирихле для стационарного уравнения

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathbb{D}\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{\partial\Omega} = g_D \end{cases}$$

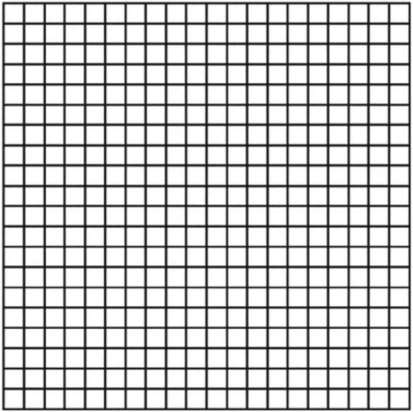
Наши первые шаги:

- Граничные условия исключительно Дирихле
- Область $\Omega$ – единичный квадрат
- Тензор диагональный: $\mathbb{D} = diag\{d_x, d_y\}$

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

# Квадратные сетки

Структурированная квадратная сетка $\omega_h = \{ih, jh\}, \quad h = 1/N$



# МКР: основные положения

- Численное решение – **набор значений в узлах**:

$$u_{ij}^h \approx u(x_i, y_j)$$

- Уравнение раскрывается до выражений с **производными**:

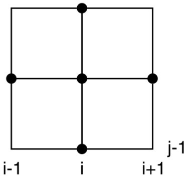
$$\operatorname{div}\left(-\mathbb{D}\nabla u\right) = f$$

$$\Downarrow$$

$$-d_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

- Производные заменяются на **конечные разности**

# Аппроксимации на 5-точечном шаблоне




$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u^h_{i+1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i-1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u^h_{i,j+1} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i,j-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

# МКР: граничные условия

Значения в граничных точках известны из граничных условий.
Уравнения в них не записываются

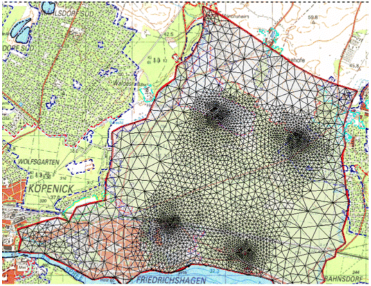
# МКР: итоговая система уравнений

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\
 & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
 & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\
\hline
-1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 \\
\hline
 & & & & & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\
 & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4
\end{array}\right]
*
\begin{bmatrix}
U(1,1) \\ U(2,1) \\ U(3,1) \\ U(4,1) \\ U(1,2) \\ U(2,2) \\ U(3,2) \\ U(4,2) \\ U(1,3) \\ U(2,3) \\ U(3,3) \\ U(4,3) \\ U(1,4) \\ U(2,4) \\ U(3,4) \\ U(4,4)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b(1,1) \\ b(2,1) \\ b(3,1) \\ b(4,1) \\ b(1,2) \\ b(2,2) \\ b(3,2) \\ b(4,2) \\ b(1,3) \\ b(2,3) \\ b(3,3) \\ b(4,3) \\ b(1,4) \\ b(2,4) \\ b(3,4) \\ b(4,4)
\end{bmatrix}
$$

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

# Пример практической необходимости

- Необходимо рассчитать диффузию в реальном объекте **сложной формы**




- Струкутрированная сетка не годится, но можно построить **треугольную сетку**
- Метод конечных элементов – один из **подходящих методов дискретизации**

# МКЭ: история

- Основа – методы решения **операторных уравнений**
- **Вариационно-проекционные** методы (Ритца, Бубнова-Галеркина, ...) – конец XIX – начало XX вв.

- **Кусочные функции** в качестве базисных – середина XX в.

# МКЭ: краткая схема метода Ритца

1. Операторное уравнение в гильбертовом пространстве:

$$\mathcal{A}u = f, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^* : H \to H$$

2. Решение в конечномерном подпространстве:

$$u \approx u^h = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \in H_N \subset H$$

3. Коэффициенты разложения $c_1, \ldots, c_N$ ищутся из условий, приводящих к линейной системе:

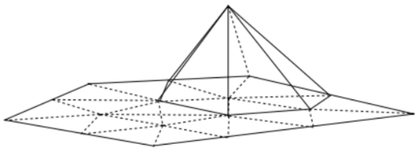
$$(\mathcal{A}u^h, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\downarrow$$

$$Ac = b, \quad A_{ij} = (\mathcal{A}\varphi_i, \varphi_j), \;\; b_i = (f, \varphi_i)$$

# МКЭ: как метод Ритца наконец стал практичным

- Первоначальный выбор базиса в инженерных приложениях: тригонометрия
- Возникали плотные матрицы, что непрактично
- 1940-е: выбор кусочных функций



- Для большинства $i, j$ выходит $(\mathcal{A}\varphi_i, \varphi_j) = 0$
- Разреженные матрицы, как в МКР!

# МКЭ: общие положения

- Как и в МКР, ищутся **значения в узлах**
- В отличие от МКР, можно найти **решение и вне узлов**!
- Работа на **треугольных сетках**
- Разреженные матрицы, как и в МКР

# План курса

**Темы:**

1. МКР на квадратных сетках
2. МКЭ на треугольных сетках
3. МКО на многоугольных сетках
4. Дискретизация по времени

**Оценки:**

- 3 – задания по любым двум пунктам
- 4 – задания по любым трем пунктам
- 5 – задания по всем пунктам

**Правила сдачи заданий**:

- Код в репозиторий
- Отчет в LaTeX

## Советы по написанию кода

Сверьте результаты с аналитическим решением

1. Посмотрите теорию: как должны убывать нормы ошибки решения? Обычно 1-й или 2-й порядок
2. Проверьте, получается ли нужный порядок сходимости в вашем коде

# Советы по написанию кода

Вы написали код, формирующий линейную систему и решающий ее. С чего начать его проверку?

1. **Подайте нулевую правую часть**. Решение должно тоже получаться нулем. Убедитесь, что линейный решатель сходится к нулевому решению с разных начальных приближений
2. **Подставьте линейное решение**. Многие методы дискретизации точны на линейных решениях. Если у вас не так – где-то в коде ошибка
3. **Переходите к более сложным решениям**