*Вариант 3.*

*Бузанов Никита, 217*

# Математическая постановка задачи:

Найти решение задачи Коши:

$$\frac{du}{dx} = \int_0^x f(t)dt,\ u = u(x),$$
$$0 < x < l,\ u(0) = u_0$$

методом Рунге–Кутта второго порядка
Функция $f(t)$ задана и может быть найдена как в точках сетки
$x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = l/N$
так и в любой точке отрезка $[0, l]$
а) Исследовать поведение решения на сгущающихся сетках (при увеличении $N$).
б) Выяснить, будет ли сходимость.

# Входные данные:

Функция $f(t)$ = $sin(t^2 + t)$,

отрезок [0,1], начальное значение $N$ = 20

# Решение:

Рассмотрим сначала задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$u'(x) = f(x, u(x)),\ u(x_0) = u_0$$

Пусть решение имеет производные достаточно высокого порядка. Выпишем для него в таком случае разложение по формуле Тейлора:

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \dots$$

и оборвем его на члене порядка $h^2$ .

$$u'(x) = f(x, u(x))$$
$$u''(x) = f'(x, u(x)) = \frac{df}{dx}(x, u(x)) + \frac{df}{du}(x, u(x))u'(x) =$$
$$= \frac{df}{dx}(x, u(x)) + \frac{df}{du}(x, u(x))f(x, u(x))$$

Тогда,

$$u_{i+1} = u_i + f(x_i, u_i)h + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{df}{dx}(x_i, u_i) + \frac{df}{du}(x_i, u_i)f(x_i, u_i)\right)$$

Положим, что

$$f(x_i, u_i) + \frac{1}{2}h\left(\frac{df}{dx}(x_i, u_i) + \frac{df}{du}(x_i, u_i)f(x_i, u_i)\right) =$$
$$= \beta f(x_i, u_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, u_i + \psi h) + O\left(h^2\right)$$

Разложим функцию $f(x_i + \gamma h, u_i + \psi h)$ по степеням h, подставим в уравнение выше и приравняем слева и справа члены, содержащие и не содержащие h. Получим 3 уравнения, связывающих параметры.

Получаем:

$$\beta = 1 - \alpha, \ \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \ \psi = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, u_i)$$

В итоге, отбросив члены порядка $O(h^2)$, имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$u_{i+1} = u_i + h\left((1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ (схема предиктор-корректор) рекуррентная формула принимает вид

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(x_i, u_i) + f(x_i + h, u_i + hf(x_i, u_i)))$$

В нашем случае $f(x, u(x)) = \int_0^x \sin\left(t^2 + t\right) dt$

Посчитаем для каждого $x_i$ правый интеграл методом Симпсона (метод Симпсона дает погрешность $O(h^4)$,следовательно у нас остаётся погрешность порядка $O(h^2)$).

В main.cpp - реализация.

В schedule.py - программа для построения граффика.

График для $N = 20, \ u(0) = 0$

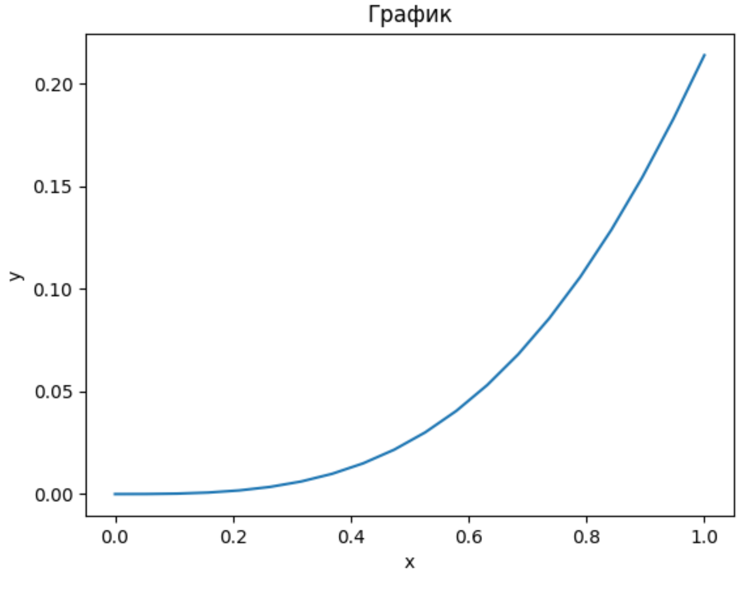
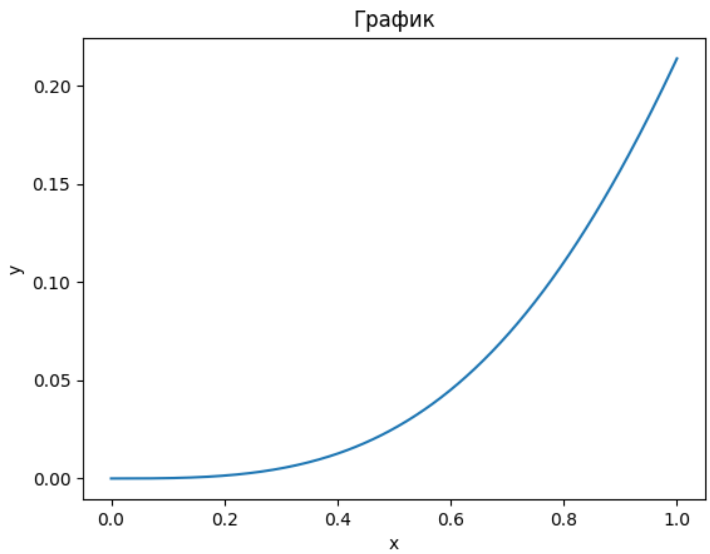


График для $N = 200$, $u(0) = 0$




Анализ:

Пусть $z_i = u(x_i) - y_i$ - сеточная функция (где $y_i$ численно полученное значение через рекуррентную формулу).

Из курса лекций:
Для сходимости нам достаточно чтобы
$\|z\|_c \to 0 \text{ при } h \to 0$.
$\|z\|_c \leqslant Mle^{Cl}h^2$ , где $C$- константа, такая что
$\left|\frac{df}{du}(x,u)\right| \leqslant C$, так как
$\frac{df}{du}(x,u) = 0$( $f$ не зависит от $u$). Существует, например, $C = 1$.
А $M$ - константа, такая что $Mh^2$ мажорирует погрешность аппроксимации.

Таким образом, при $h \to 0$ погрешность решения стремится к нулю со скоростью $h^2$. Это означает, что разностное уравнение, полученное по схеме Рунге-Кутта, имеет второй порядок точности относительно $h$.

Проводя дополнительные исследования, заметим, что метод Рунге-Кутта 2-го порядка несколько точнее, чем метод Эйлера, однако реализация его сложнее. Так на каждом шаге метода Рунге-Кутты 2-го порядка функцию $f(x,u)$ приходилось вычислять дважды, в то время как метод Эйлера на каждом своём шаге требует вычисления $f(x,u)$ только один раз.

Сравнение результатов на сгущающихся сетках:

Пусть $N = N_0 2^i$, где $N_0 = 20$, $i = 0, \dots, 4$. $\Delta(i) = |u(1)_i - u(1)_5|$ , где - $u(1)_i$значение функции в $u(x)$точки при $x = 1$, $N = N_0 2^i$.

Используя написанную программу получаем:

$$u(1)_0 = 0.213660 \quad u(1)_3 = 0.213452$$
$$u(1)_1 = 0.213499 \quad u(1)_4 = 0.213450$$
$$u(1)_2 = 0.213462 \quad u(1)_5 = 0.213450$$

(при вычислениях взяли $u(0) = 0$)

Используя вычисленные выше приближенные значения функции $u(x)$, получаем:

$$\begin{gathered} \Delta(0) = 0.000210 \\ \Delta(1) = 0.000049 \\ \Delta(2) = 0.000012 \\ \Delta(3) = 0.000002 \\ \Delta(4) = 0.000000 \end{gathered} \tag{1}$$

Для каждого $i$, найдем соответствующее $h$:

$$h_0 = 0.050000 \; h_3 = 0.006250$$
$$h_1 = 0.025000 \; h_4 = 0.003125$$
$$h_2 = 0.012500 \; h_5 = 0.001562$$

Для сравнения $\Delta(i)$ с $O\left(h_i^2\right)$, посчитаем $h_i^2$:

$$\begin{gathered} h_0^2 = 0.002500 \; h_3^2 = 0.000039 \\ h_1^2 = 0.000625 \; h_4^2 = 0.000010 \\ h_2^2 = 0.000156 \; h_5^2 = 0.000002 \end{gathered} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем, что $\Delta(i) \le O\left(h_i^2\right)$. Следовательно, данный метод имеет 2-ой порядок точности.