LOMONOSOV MOSCOW
STATE UNIVERSITY

Волатильность и методы её расчёта

Бузанов Никита
Moscow State University
8 мая 2023 г.

Оглавление

Историческая волатильность (Historical Volatility)

Историческая волатильность (Historical Volatility)

Доходность:

$$u_i = ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)$$

где P_i - цена закрытия актива в день i.

Средняя ежедневная доходность за период n дней может быть рассчитанна как сумма доходностей, деленная на количество дней:

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$$

Таким образом, историческая волатильность закрытия-к-закрытию (Historical Close-to-Close Volatility), рассчитанная на основе n дней, оценивается как:

$$HV = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}$$

Историческая волатильность по Паркинсону (Historical High-Low Volatility)

$$HL\_HV = \sqrt{\frac{1}{4nln2}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\frac{H_i}{L_i}\right)^2}$$

где H_i и L_i - максимальное и минимальное значение цены в течении i-го дня соответственно.

Историческая волатильность по Роджурсу-Сатчеллу (Historical Open-High-Low-Close Volatility)

$$HL\_HV = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[ln\frac{H_i}{O_i}ln\frac{H_i}{C_i} + ln\frac{L_i}{O_i}ln\frac{L_i}{C_i}\right]}$$

где O_i - цена открытия в день i, а C_{i-1}- цена закрытия в день $i-1$.

EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) или Экспоненциально взвешенная скользящая средняя

- Шаг 1: Ежедневная логарифмическая доходность:

$$u_i = ln(\frac{P_i}{P_{i-1}})$$

- Шаг 2:

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{n-i}^2$$

- Шаг 3:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, ..., m\}.$$

Фиксируем λ - коэффициент затухания (0<λ<1). Положим $\lambda_1 = 1 - \lambda$, $\lambda_{i+1} = \lambda\lambda_i$, для $i \geq 2$

	A	B	C	D	E	F
1	Day	Stock Pric	Period returns	Return^2	w	R^2*w
2	1	29.66				
3	2	30.14	1.6054%	0.0258%	6%	0.00155%
4	3	29.85	-0.9668%	0.0093%	5.64%	0.00053%
5	4	30.10	0.8340%	0.0070%	5.30%	0.00037%
6	5	30.95	2.7848%	0.0776%	4.98%	0.00386%
7	6	31.72	2.4574%	0.0604%	4.68%	0.00283%
8	7	31.30	-1.3329%	0.0178%	4.40%	0.00078%
9	8	30.59	-2.2945%	0.0526%	4.14%	0.00218%
10	9	29.06	-5.1311%	0.2633%	3.89%	0.01024%
11	10	29.42	1.2312%	0.0152%	3.66%	0.00055%
12	11	28.76	-2.2689%	0.0515%	3.44%	0.00177%
13	12	27.77	-3.5029%	0.1227%	3.23%	0.00397%
14	13	28.00	0.8248%	0.0068%	3.04%	0.00021%
15	14	26.62	-5.0542%	0.2554%	2.86%	0.00729%
16	15	25.91	-2.7034%	0.0731%	2.68%	0.00196%
17	16	26.05	0.5389%	0.0029%	2.52%	0.00007%
18	17	26.51	1.7504%	0.0306%	2.37%	0.00073%
19	18	26.93	1.5719%	0.0247%	2.23%	0.00055%
20	19	26.26	-2.5194%	0.0635%	2.10%	0.00133%
21	20	27.36	4.1035%	0.1684%	1.97%	0.00332%
22	21	27.41	0.1826%	0.0003%	1.85%	0.00001%
23						
24			λ 94%		EWMA	**0.04410%**

EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) или Экспоненциально взвешенная скользящая средняя

- Шаг 4: Наконец, историческая волатильность может быть вычислена как квадратный корень из среднего значения квадрата доходности:

$$HV = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_{n-i}^2}$$

В нашем примере:

$$HV = \sqrt{\frac{1}{20}\cdot 0.04410} \approx 0.047\%$$

Неявная или подразумеваемая волатильность (Implied Volatility)

Опцион

Опцион - это право держателя купить или продать определённый актив по заранее оговорённой цене в определённый промежуток времени.

- Call опцион - право купить
- Put опцион - право продать

Срок действия опциона ограничен **датой эксперации**.
Цена исполнения (strike) - установленная цена, по которой покупатель опциона может купить или продать актив.



Модель Блэка-Шоулза

Текущая справедливая цена $c = c(\sigma)$ европейского опциона call:

$$c = P_0 N(d_+) - X e^{-rT} N(d_-)$$

P_0 - текущая цена актива, X - цена исполнения (strike), T - время экспирации,
r - безрисковая процентная ставка.
$N(\cdot)$ - стандартная нормальная функция распределения.

$$d_+(\sigma) = \frac{ln\left(\frac{P(t)}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_-(\sigma) = \frac{ln\left(\frac{P(t)}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Неявная волатильность

Неявной или **подразумеваемой волатильностью** σ_{impied} принято называть такое значение волатьности исходных активов (то есть значение коэффициента σ), при котором теоритически справедоивая цена $c = c(\sigma)$ европейского опциона call (вычисленной по формуле Блэка-Шоулза) совпадает с его рыночной ценой c_m.

Другими словами, $\sigma_{implied}$ - решение уравнения:

$$c_m = c \Rightarrow$$

$$c_m = P_0 N(d_+(\sigma)) - Xe^{-rT} N(d_-(\sigma))$$

Расчёт неявной волатильности

Метод Ньютона нахождения корня уравнения

$$f(x) = 0 \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Рассмотрим уравнение:

$$c(\sigma) - c_m = 0$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{c(\sigma_n) - c_m}{\frac{\partial c}{\partial \sigma}(\sigma_n)} = \sigma_n - \frac{c(\sigma_n) - c_m}{vega(\sigma_n)}$$

$$
\begin{aligned}
vega(\sigma) = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \left(P_0 N(d_-) - Xe^{-rT} N(d_2)\right)'_\sigma = \\
= P_0 \cdot \frac{e^{-\frac{d_+^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{\sigma}\right) d_- - Xe^{-rT} \cdot \frac{e^{-\frac{d_-^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{\sigma}\right) d_+ = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_+^2}{2}} \left[-\frac{P_0 d_-}{\sigma} + \frac{Xe^{-rT} d_+}{\sigma} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}}\right] = \\
= N'(d_+) \left[-\frac{P_0 d}{\sigma} + \frac{XerTd_+}{\sigma} e^{\frac{1}{2}(d_+ - d_-)(d_+ + d_-)}\right] = \\
= N'(d_+) \left[-\frac{P_0 d}{\sigma} + \frac{XerTd_+}{\sigma} e^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\frac{2ln\frac{P_0}{X} + 2rT}{\sigma\sqrt{T}}}\right] = \\
= N'(d_+) \left[-\frac{P_0 d}{\sigma} + \frac{P_0 d_+}{\sigma}\right] = P_0 N'(d_+)\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

Пример

$$P = 100$$
$$X = 105$$
$$r = 0.01$$
$$T = 30.0/365$$
$$c_m = 2.30$$
$$\sigma_0 = 0.5$$

$$\sigma_{implied} = 0.3688563$$

```python
from scipy.stats import norm
from math import sqrt, exp, log, pi

def d(sigma, P, X, r, t):
    d1 = 1 / (sigma * sqrt(t)) * ( log(P/X) + (r + sigma**2/2) * t)
    d2 = d1 - sigma * sqrt(t)
    return d1, d2

def call_price(sigma, P, X, r, t, d1, d2):
    C = norm.cdf(d1) * P - norm.cdf(d2) * X * exp(-r * t)
    return C

#S  = spot
#K  = strike
#C  = price of call as predicted by Black-Scholes model
#r  = risk-free interest rate
#t  = time to expiration expressed in years
#C0 = price of call option from option chain

P = 100.0
X = 105.0
r = 0.01
t = 30.0/365
C0 = 2.30
```

```python
#We need a starting guess for the implied volatility.  We chose 0.5
#arbitrarily.
 vol = 0.5
 epsilon = 1.0  #  Define variable to check stopping conditions
 abstol = 1e-4  #  Stop calculation when abs(epsilon) < this number

 i = 0   #  Variable to count number of iterations
 max_iter = 1e3  #  Max number of iterations before aborting

 while epsilon > abstol:
 #if-statement to avoid getting stuck in an infinite loop.
 if i > max_iter:
 break

 i = i + 1
 orig = vol
 d1, d2 = d(vol, P, X, r, t)
 function_value = call_price(vol, P, X, r, t, d1, d2) - C0
 vega = P * norm.pdf(d1) * sqrt(t)
 vol = -function_value/vega + vol
 epsilon = abs(function_value)

 print ("Implied volatility = ",  vol)
 print ("Code required", "iterations.")
```


Thank You
For Your Attention

References

References

- книга "Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов" В.Ю.Королёва
- Историческая волатильность
- Определения доходности
- EWMA
- Exploring the Exponentially Weighted Moving Average
- Some Advanced Methods for Volatility estimation
- Derive vega for Black-Scholes
- Метод Ньютона
- Код для расчёта неявной волатильности