Aula 08/08/2018

José Luiz Padilha

08 de agosto de 2018

Inversibilidade e não unicidade de modelos MA (continuação)

Em particular, para processos MA(1) a função de autocorrelação fica

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \beta_1/(1+\beta_1^2), & k = \pm 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

Como vimos, tal processo é estacionário para qualquer valor de β_1.

Considere agora os seguintes processos MA(1)

$$\begin{aligned} a) \quad Z_t =& \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \\ b) \quad Z_t =& \varepsilon_t + \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t-1}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, votamos que ambos têm exatamente a mesma função de autocorrelação, não sendo possível distinguir entre eles. Assim, não é possível identificar um proceso MA(1) único a partir da função de autocorrelação.

Por outro lado, podemos fazer substituições sucessivas e reescrever estes dois processos colocando ε_t em função de $Z_1, Z_2, \ldots$, isto é

$$\begin{aligned} a) \quad \varepsilon_t =& Z_t - \theta Z_{t-1} + \theta^2 Z_{t-2} - \theta^3 Z_{t-3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j Z_{t-j}, \\ b) \quad \varepsilon_t =& Z_t - \frac{1}{\theta} Z_{t-1} + \frac{1}{\theta^2} Z_{t-2} - \frac{1}{\theta^3} Z_{t-3} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta}\right)^j Z_{t-j}. \end{aligned}$$

Se $|\theta| < 1$ a primeira série converge e o modelo é dito ser *inversível* mas a segunda não converge e o modelo é *não inversível*. Ou seja, a condição de inversibilidade, neste caso $\theta < 1$, garante que exista um único processo MA(1) para uma dada função de autocorrelação. Outra consequência da inversibilidade é que o processo MA(1) pode ser reescrito como uma regressão de ordem infinita nos seus próprios valores defasados.

Definindo o *operador de retardo*, denotado por B, como sendo

$$B^j Z_t = Z_{t-j}, \text{ para todo } j,$$

podemos reescrever o processo MA(q) como

$$Z_t = (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots + \beta_q B^q)\varepsilon_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

em que $\theta(B)$ é um polinômio de ordem q em B. Um processo MA(q) é inversível se as raízes da equação

$$\theta(B) = 1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \ldots + \beta_q B^q = 0$$

estiverem fora do círculo unitário. Ou seja, se $\delta_1, \ldots, \delta_q$ são q soluções de $\theta(B) = 0$ então o processo é inversível se $|\delta_i| > 1, i = 1, \ldots, q$. Teremos então 2^q modelos com a mesma função de autocorrelação, mas somente um deles será inversível.

Finalmente, vale notar que uma constante μ qualquer pode ser adicionada à definição do processo MA(q) dando origem a um processo com média μ. O processo continuará sendo estacionário, agora com média μ, e em particular a função de autocorrelação não será afetada.

4. Processos Autorregressivos

Seja $\{\varepsilon_t\}$ um processo discreto puramente aleatório com média zero e variância σ_ε^2. Um processo $\{Z_t\}$ é chamado de *processo autoregressivo de ordem p*, ou AR(p), se

$$Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \ldots + \alpha_p Z_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Note a similaridade com o modelo de regressão múltipla, em que os valores passados de Z_t fazem o papel das variáveis regressoras. Assim, os processos autorregressivos podem ser utilizados como modelos se for razoável assumir que o valor atual de uma série temporal depende do seu passado imediato mais um erro aleatório.

Por simplicidade vamos começar estudando em detalhes processos de primeira ordem, AR(1), ou seja,

$$Z_t = \alpha Z_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Observe que existe uma estrutura Markoviana no processo AR(1) no sentido de que, dado Z_{t-1}, Z_t não depende de $Z_{t-2}, Z_{t-3}, \ldots$. Fazendo substituições sucessivas, obtemos que

$$\begin{aligned}
Z_t =& \alpha(\alpha Z_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
=& \alpha^2 Z_{t-2} + \alpha\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
=& \alpha^2(\alpha Z_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
=& \alpha^3 Z_{t-3} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&\vdots \\
=& \alpha^{r+1} Z_{t-r-1} + \sum_{j=0}^{r} \alpha^j \varepsilon_{t-j}.
\end{aligned}$$

Se Z_t for estacionário com variância finita σ_z^2, podemos escrever

$$E\left[Z_t - \sum_{j=0}^{r} \alpha^j \varepsilon_{t-j}\right]^2 = \alpha^{2r+2} E[Z_{t-r-1}^2],$$

e se $|\alpha| < 1$ temos que $\alpha^{2r+2} \to 0$ quando $r \to \infty$. Portanto, esta condição nos permite escrever Z_t como o seguinte processo MA infinito,

$$Z_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

e assim $|\alpha| < 1$ é uma condição suficiente para que Z_t seja estacionário. Neste caso, reescrevendo o processo k períodos à frente, isto é

$$Z_{t+k} = \varepsilon_{t+k} + \alpha\varepsilon_{t+k-1} + \ldots + \alpha^k\varepsilon_t + \ldots$$

notamos como o efeito de ε_t sobre Z_{t+k} diminui à medida que k aumenta e por isso é chamado de *efeito transitório*.

Podemos também usar o operador de retardo e reescrever o processo AR(1) como

$$(1 - \alpha B)Z_t = \varepsilon_t,$$

ou equivalentemente,

$$Z_t = \frac{1}{(1-\alpha B)}\varepsilon_t = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \ldots)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

Escrevendo o processo AR(1) neste formato de MA infinito fica fácil ver que a sua média e variância são dados por

$$E(Z_t) = 0 \quad \text{e} \quad Var(Z_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}.$$

Para obter a função de autocovariância, reescreva Z_{t+k} como

$$\begin{aligned}Z_{t+k} =&\varepsilon_{t+k} + \ldots + \alpha^{k-1}\varepsilon_{t+1} + \alpha^k\varepsilon_t + \alpha^{k+1}\varepsilon_{t-1} + \alpha^{k+2}\varepsilon_{t-2} + \ldots \\ =&(\varepsilon_{t+k} + \ldots + \alpha^{k-1}\varepsilon_{t+1}) + (\alpha^k\varepsilon_t + \alpha^{k+1}\varepsilon_{t-1} + \alpha^{k+2}\varepsilon_{t-2} + \ldots)\end{aligned}$$

Pode-se então verificar que, para qualquer $k = 1, 2, \ldots,$

$$Cov(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \ldots, \varepsilon_{t+k} + \ldots + \alpha^{k-1}\varepsilon_{t+1}) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}E(Z_tZ_{t+k}) =&Cov(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \ldots, \alpha^k\varepsilon_t + \alpha^{k+1}\varepsilon_{t-1} + \alpha^{k+2}\varepsilon_{t-2} + \ldots) \\ =&\alpha^kE(\varepsilon_t^2) + \alpha^{k+2}E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha^{k+4}E(\varepsilon_{t-2}^2) + \ldots \\ =&\alpha^k\sigma_\varepsilon^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots) \\ =&\alpha^k\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2} = \alpha^k\sigma_z^2 = \gamma(k).\end{aligned}$$

Assim, a função de autocorrelação é $\rho(k) = \alpha^k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Como a média e a variância são constantes e $\gamma(k)$ não depende de t o processo $AR(1)$, com $|\alpha| < 1$, é estacionário.