# AM: Stochastik
Abgabe 8

Lennart Hein, Maurice Happe
s6lehein@uni-bonn.de

_____/16 Punkte
BESTANDEN ☐ NICHT BESTANDEN ☐

## Aufgabe 1: Glückspiel

### a)

Sei X die ZV des Gewinns.
$X : [1:6]^2 \to \{1, -1, -9\}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1,\ falls\ x \neq 6 \wedge y \neq 6 \\ -9,\ falls\ x = y = 6 \\ -1,\ sonst,\ also\ falls\ x = 6 \text{ XOR } y = 6 \end{cases}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} P'(X=1) &= P(x \neq 6 \wedge y \neq 6) \\ P'(X=-9) &= P(x = y = 6) \\ P'(X=-1) &= P(x = 6 \text{ XOR } y = 6) \\ &= 1 - P'(X=1) - P(X=-9)^{[1]} \end{aligned}$$

[1] : Da $\Omega = \{(x,y) | x, y \in [1:6]\}$

Da $P(A)$ Gleichverteilt auf $\Omega$, gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Mit $|\Omega| = 6^2 = 36$ folgt:

$$\begin{aligned} P'(X=1) &= \frac{5*5}{36} \\ P'(X=-9) &= \frac{1}{36} \\ P'(X=-1) &= 1 - \frac{26}{36} \\ &= \frac{10}{36} \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \Sigma_{x \in X[\Omega]}\ |x| * P(X=x) \\ &= \frac{25}{36} + -9 * \frac{1}{36} + -1 * \frac{10}{36} \\ &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1\overline{6} \end{aligned}$$

**b)**

$X : 0,1^6 \rightarrow [1:6]$
$\{(w_1, ..w_6) | \forall i \in [1:6] : w_i \in \{Wappen, Zahl\}\} \rightarrow x\ falls\ \forall j \in [1 : x-1] : w_j \neq Wappen$
Da $P(A)$ Gleichverteilt auf $\Omega$, gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{2^{6-k}}{2^6},\ falls\ k \neq 6 \\ \frac{2}{64},\ sonst^{[2]} \end{cases}$$

[2]: Da Wir nach dem 6ten Wurf aufhöhren, ob Zahl oder Wappen
Also gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X[\Omega]} |x| * P(X = x) \\ &= \sum_{k=1}^{5} k * \frac{2^{6-k}}{64} + 6 * \frac{2}{64} \\ &\approx 1.96875 \end{aligned}$$

`https://goo.gl/wczqyU`

___/4

# Aufgabe 2: Poissonverteilung

`Wir wissen aus dem Skript, dass` $E(X) = \lambda$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k * P_\lambda(k) \\ &= \lambda \\ E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 * P_\lambda(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{\cancel{2}} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{(k-1)! * \cancel{k}} \\ &= e^{-\lambda} * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k * \lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} * \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k * \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} * \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{k * \lambda^{k-1}}\ \frac{\partial \lambda^k}{\partial \lambda}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} * \lambda * \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} * \lambda * \frac{\partial}{\partial \lambda} * e^{\lambda} \\ &= e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda} * (\lambda + 1) \\ &= \cancel{e^{-\lambda}} * \lambda * \cancel{e^{\lambda}} * (\lambda + 1) \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= (\cancel{\lambda^2} + \lambda) - \cancel{(\lambda)^2} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

___/4

# Aufgabe 3: Geometrische Verteilung

(2) und (3) sind die erste und zweite Ableitung der geometrischen Reihe respektive.

$$P(X = x) \overset{\text{def.}}{=} p * (1-p)^{x-1}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k * p * (1-p)^{k-1} \\
&= p * \sum_{k=0}^{\infty} k * (1-p)^{k-1} \\
&\overset{(2)}{=} p * \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 * p * (1-p)^{k-1} \\
&= p * k \sum_{k=0}^{\infty} k * (1-p)^{k-1} \\
&= p * (k-1) \sum_{k=0}^{\infty} k * (1-p)^{k-1} + p * k * (1-p)^{k-1} \\
&= p * (k-1) \sum_{k=0}^{\infty} k * (1-p)^{k-1} + \cancel{p * k * (1-p)^{k-1}} \quad \frac{1}{p} \\
&= p * \sum_{k=0}^{\infty} k * (k-1) * (1-p)^{k-1} + \frac{1}{p} \\
&= p * \sum_{k=0}^{\infty} k * (k-1) * (1-p)^{k-2} * (1-p) + \frac{1}{p} \\
&= p * (1-p) * \sum_{k=0}^{\infty} k * (k-1) * (1-p)^{k-2} + \frac{1}{p} \\
&\overset{(3)}{=} p * (1-p) * \frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{p * (1-p) * 2}{p^3} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{(1-p) * 2}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

___/4

# Aufgabe 4: Durchwürfeln

## a)

Schritt von i-ten bis zum (i-1) ist geometrisch verteilt mit $p_i = \frac{6}{6-(i-1)}$ i$\in \{1, ..., 6\}$
$q_i = 1 - p$
Erwartungswert pro Schritt ist $E(x) = \frac{1}{p_i}$ für 6 Schritte gilt $E(x_i) = \Sigma_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i}$
$\implies E(x_i) = \Sigma_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + 6 \approx 14.2$

## b)

Varianz beträgt: $Var(x) = \frac{q_i}{p_i^2}$ Vom 2. zum 3. verschiedenen Würfergebnis $Var(x) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

___/4