Stochastik Revision

WRaum: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω: Ereignisraum

$\mathcal{A}$: Ereignis-Algebra

P: W-Maß

σ-Algebra:
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $X \in \mathcal{A} \Rightarrow X^c := \Omega \setminus X \in \mathcal{A}$
- $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup X_i \in \mathcal{A}$

$\Sigma(\Omega) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ ist σ-Alg. über $\Omega\}$
- halbgeordnet (Inklusion)
- $\{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^\Omega \quad \forall \mathcal{A} \in \Sigma(\Omega)$
- $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\Omega) \quad \forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \Sigma(\Omega)$

$P: \mathcal{A} \to [0,1]$ ist WMaß falls:
- $P(\Omega) = 1$ NORMIERUNG
- $P(\bigsqcup A_i) = \sum P(A_i)$ σ-ADDITIVITÄT

Gleichverteilung: $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|}$

Zufallsvariablen: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ WRaum

$(\Omega', \mathcal{A}')$ Modell

$X: \Omega \to \Omega'$ Kompression

X ist ZV wenn: $\forall A' \in \mathcal{A}': X^{-1}[A'] := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$

$P'(A') := P(X^{-1}[A']) = P(\{X \in A'\}) =: P(X \in A')$

Urnenmodelle: N : # Kugeln

F : {Farben}

N_f : |{Kugel | Kugel ist von Farbe f}|

n : # Ziehungen

ΩZR : $P_{ZR}(f) = \prod_{i=1}^{n} \frac{N_{f_i}}{N}$

n-faches Produktmaß

z.B. Würfeln:

$P_{ZR}((1,2,3)) = \prod_{i=1}^{3} \frac{N_{f_i}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Ω_{Zr} :

Multinomialv.

$$P_{Zr}(H) = \binom{n}{H} \cdot \prod_{f \in F} \left(\frac{N_f}{N} \right)^{H(f)}$$

mit $\binom{n}{H} = n! \Big/ \prod_{f \in F} H(f)!$

sei $N_r = 4;\ N_b = 1;\ N_s = 3$

$$P_{Zr} \begin{pmatrix} r & b & s \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$= \frac{n!}{H(r) \cdot H(b) \cdot H(s)} \cdot \left(\frac{N_r}{N}\right)^{H(r)} \cdot \left(\frac{N_b}{N}\right)^{H(b)} \cdot \left(\frac{N_s}{N}\right)^{H(s)}$$

Binomialverteilung: $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$

Ω_{zr} :

HyperG.V.

$$P_{zr}(H) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{h_f}}{\binom{N}{n}}$$

Royal Flush

$$4 \cdot P_{zr}(H) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{52}{7}}$$

$\Omega_2 R$:

GeoV.

$$P_{2R}(H) = \frac{\prod_{f \in F} \binom{N_f}{n_f}}{\left(\frac{N!}{(N-n)!}\right)} \leftarrow \binom{N}{n} \cdot n!$$

Poisson V.: sei $\lambda := q \cdot t$ und $p_n := \lambda / n$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{n \to \infty} B_{n,p_n}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =: P_\lambda(k)$$

Gauß V.: —

Bed. Wahrscheinlichkeiten: $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Fall U: sei $\Omega = \bigcup_i B_i$: $P(A) = \sum P(B_i) P(A|B_i)$

Bayes: $$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Fall U + Bayes: $$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_i P(B_i) P(A|B_i)}$$

Stochastische Unabhängigkeit: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \iff A, B$ stoch. unabh.

bzw: $P(\bigcap_j A_j) = \prod_j P(A_j)$

Erwartungswert: $E(X) = \sum_{x \in X[\Omega]} x \cdot P(X = x)$

monoton: $\forall \omega \in \Omega: X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

linear: $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

σ-additiv: $X = \sum X_n,\ X_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow E(X) = \sum E(X_n)$

mon. konvergent: $Y_n \uparrow Y$ für $n \uparrow \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} E(Y_n) = E(Y)$

Produktregel: falls X, Y stoch. unabh. $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Varianz: $V(X) := E(X^2) - E(X)^2$

Standardabw.: $\sqrt{V(X)}$

Kovarianz: $E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

Regeln: $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$

$Cov(\alpha \cdot X + \beta, \gamma \cdot Y + \delta) = \alpha \cdot \gamma \cdot Cov(X, Y)$

$Cov(X, Y)^2 \leq V(X) V(Y)$ Cauchy-Schwarz

Zeilenstochastisch: $\Pi \in [0,1]^{V\times V} : \sum_{y\in V} \Pi(x,y) = 1 \ \forall x \in V$

Markoveigenschaft: $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (V, 2^V)$
ist Markovkette, falls gilt:
Gedächtnis von einer ZE und keine innere Uhr

Matrixpotenz: $P^x(X_n = y) = \Pi^n(x,y)$

Graphen: $G = (V, E, \Pi)$; $E := \{(x,y) \in V\times V \mid \Pi(x,y) > 0\}$

Ergodensatz: sei $\Pi = (\pi_{ij}) \in [0,1]^{N\times N}$

$\exists L \geq 1 : \forall (x,y) \in N\times N : \Pi^L(x,y) \geq 0$

$\Rightarrow \Pi^\infty := \lim_{n\to\infty} \Pi^n = \rho = \rho \cdot \Pi$

Maximum-Likelihood: $T : \mathcal{X} \to \Theta$ mit $p(x, T(x)) = \max_{\theta \in \Theta} p(x, \theta)$