Stochastik Abgabe 4

Lennart Hein, Maurice Happe

s6lehein@uni-bonn.de

6. Mai 2018

Aufgabe 1

$\not{Z} : \sigma(\mathfrak{G}') = \mathfrak{A}' \wedge X : \Omega \mapsto \Omega' \wedge \forall A' \in \mathfrak{G}' : X^{-1}[A'] \in \mathfrak{A} \implies$ X ist ZV

Aussage gilt gdw. $\forall G' \in \mathfrak{G}' : X^{-1}[A'] \in \mathfrak{A} \implies \forall A' \in \mathfrak{A}' : X^{-1}[A'] \in \mathfrak{A}$
Da $\mathfrak{G}' \subseteq 2^{\Omega'}$ gilt: $\mathfrak{A}' \supseteq \{\{\varnothing, \Omega'\} \cup \{g', g'^{C} \ |g \in \mathfrak{G}'\}$
(1) $\varnothing \in \mathfrak{A}'$ gilt unabhängig von $\mathfrak{G}'$ dass $X^{-1}[\varnothing] = \varnothing \in \mathfrak{A}$
(2) $\Omega' \in \mathfrak{A}'$ gilt: $\exists A' \in \mathfrak{G}' : A' \cup A'^{c} = \Omega$
Durch (3) folgt $X^{-1}[A' \cup A'^{c}] \in \mathfrak{A}$, daher gilt auch $\Omega \in \mathfrak{A}$
(3) $D \in \mathfrak{A}' \setminus \{\Omega, \varnothing\}$ gilt: $D \in \mathfrak{G}' \vee D^c \in \mathfrak{G}' \vee D = E \cup F$ mit $E, F \in \mathfrak{G}'$
(3.1) $D \in \mathfrak{G}'$ dann gilt $X^{-1}[D] \in \mathfrak{A}$
(3.2) $D^c \in \mathfrak{G}'$ dann gilt $X^{-1}[D^c] \in \mathfrak{A}$, da $\forall A \in \mathfrak{A} \implies A^c \in \mathfrak{A}$ gilt auch $X^{-1}[D^c] \in \mathfrak{A}$
(3.3) $D = E \cup F$ mit $E, F \in \mathfrak{G}'$, gilt also dass $X^{-1}[E] \in \mathfrak{A} \wedge X^{-1}[F] \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} X^{-1}[D] = X^{-1}[E \cup F] &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E \cup F\} \in \mathfrak{A} \\ &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E\} \cup \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in F\} \in \mathfrak{A} \\ &= X^{-1}[E] \cup X^{-1}[F] \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{A}$ unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen, gilt:
$X^{-1}[E] \in \mathfrak{A} \wedge X^{-1}[F] \in \mathfrak{A} \implies X^{-1}[E] \cup X^{-1}[F] \in \mathfrak{A} \ \square$

Aufgabe 2

a) $$\forall x, y, z \in [1:6] : Y((x,y,z)) = \begin{cases} (x,y,z) & x \leq y \leq z \\ (x,z,y) & x \leq z < y \\ (y,x,z) & y < x \leq z \\ (y,z,x) & y \leq z < x \\ (z,x,y) & z < x \leq y \\ (z,y,x) & z < y < x \end{cases}$$

$Y(\Omega)$ ist eine stabile Sortierfunktion.

b)

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$
$$p(\omega') = \frac{1}{|\Omega'|}$$

Aufgabe 3

a) $f(x)$ ist nicht stetig, daher nicht integrierbar.

b) $\int_A f(x)dx = 0$ da $|\{x|f(x) = 1\}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ und $|\{x|f(x) = 0\}| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$

Aufgabe 4

a)

$$(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1) = ([1:6]^6, 2^{\Omega_1}, P_1(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|})$$
$$(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, P_2) = ([1:6]^{12}, 2^{\Omega_2}, P_2(A) = \frac{|A|}{|\Omega_2|})$$
$$|\Omega_1| = 6^6$$
$$|\Omega_2| = 6^{12}$$

b)

$$A_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_6)|x_i \in [1:6] \wedge \exists j \in [1:6] : x_j = 6\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_{12})|x_i \in [1:6] \wedge \exists j, k \in [1:12] : x_j = 6 \wedge x_k = 6 \wedge j \neq k\}$$

c)

$$P_1(A_1) = (1 - (5/6)^6) \approx 67\%$$
$$P_2(A_2) = (1 - (5/6)^{11}) \approx 87\%$$

$\neg P_1$ ist das 6-malige Würfeln von $x \in [1:5]$, also $5/6^6$
$\neg P_2$ ist das 11-malige Würfeln von $x \in [1:5]$, also $5/6^{11}$

Also ist Alternative 2 besser.