第三次作业

辛柏赢 2020111753 20 金统 2 班

2023-03-31

第一题

长度为 n = 100 的时间序列{Zt}，已知 r1 = 0.615、r2 = 0.505、r3 = 0.364，样本均值 为 1.999，样本方差为 1.701。为该序列识别一个 AR(2) 模型，请计算模型参数的矩估计。

对于该 AR(2)：

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

首先可求其总体矩：

$$E(Z_t) = \frac{\theta_0}{1-\phi_1-\phi_2} \quad \cdots \quad ①$$

由 Yule-Walker Eqn：

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad ②$$

又可求：$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_a^2 = \phi_1\rho_1\gamma_0 + \phi_2\rho_2\gamma_0 + \sigma_a^2$

$$\Rightarrow \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2} \quad \cdots \quad ③$$

分别用样本矩替代总体矩进行矩估计：

②：

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0.4896 \\ 0.2038 \end{bmatrix}$$

①：

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\theta}_0}{1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2} \Rightarrow \hat{\theta}_0 = \hat{\mu}(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2) = 0.6129$$

③：

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{\gamma}_0(1-\hat{\phi}_1\hat{r}_1 - \hat{\phi}_2\hat{r}_2) = 1.0138$$

第二题

使用 R 软件模拟样本量为 n = 36 的零均值 MA(1) 序列，其中 θ = −0.6，白噪声 at ~ N(0, 1)，且模拟设定随机种子数为 1。

```
# Z_t = a_t + 0.6a_t-1 library(TSA)
set.seed(1)
offset <- 300
n <- 36
theta <- -0.6
at <- rnorm(n + offset)
Zt <- NULL
Zt[1] <- at[1] - theta * 0
for (i in 2:(n + offset)) {
    Zt[i] <- at[i] - theta * at[i - 1]
}
Zt <- Zt[(offset + 1):(offset + n)]
plot(Zt, type = "o", main = "", xlab = "t", ylab = expression(Z[t]))
```

(a) 求 θ 的矩估计；

```
ma1.mme <- function(x) {
    r = TSA::acf(x, plot = F)$acf[1]
    if (abs(r) < 0.5)
        return((-1 + sqrt(1 - 4 * r^2))/(2 * r)) else return(NA)
}
mme <- ma1.mme(Zt)
cat(paste("MME result:", mme, ""))

## MME result: -0.417855739742642
```

(b) 求 θ 的条件最小二乘估计，并且与(a) 中的结果进行比较；

```
arima(Zt, order = c(0, 0, 1), method = "CSS")$coef[1]

##       ma1
## 0.5892244
```

由代码可知，条件最小二乘的计算结果是-0.5892，要明显优于矩估计。

(c) 求 θ 的极大似然估计，并且与(a) 和(b) 中的结果进行比较；

```
arima(Zt, order = c(0, 0, 1), method = "ML")$coef[1]

##       ma1
## 0.7224018
```

由代码可知，MLE 的估计结果为-0.7224.因此矩估计的效果最差，误差最大；条件最小二乘的估计效果最好，误差最小。

(d) **设定随机种子数为 5，选取相同参数和样本量产生新的模拟序列，使用新的模拟序 列重复 (a)、(b) 和(c)，并将两次模拟结果进行比较。**

```
set.seed(5)
offset <- 300
n <- 36
theta <- -0.6
et <- rnorm(n + offset)
Yt <- NULL
Yt[1] <- et[1] - theta * 0
for (i in 2:(n + offset)) {
    Yt[i] <- et[i] - theta * et[i - 1]
}
Yt <- Yt[(offset + 1):(offset + n)]
mme <- ma1.mme(Yt)
print("MME result:")
mme
print("CSS result:")
arima(Yt, order = c(0, 0, 1), method = "CSS")
print("MLE result:")
arima(Yt, order = c(0, 0, 1), method = "ML")
```

```
## [1] "MME result:"
## [1] -0.4922402
## [1] "CSS result:"
##
## Call:
## arima(x = Yt, order = c(0, 0, 1), method = "CSS")
##
## Coefficients:
##          ma1  intercept
##       0.7102     0.0604
## s.e.  0.1221     0.2626
##
## sigma^2 estimated as 0.8707:  part log likelihood = -48.59
## [1] "MLE result:"
##
## Call:
## arima(x = Yt, order = c(0, 0, 1), method = "ML")
##
## Coefficients:
##          ma1  intercept
##       0.7661     0.0031
## s.e.  0.1099     0.2633
##
## sigma^2 estimated as 0.8196:  log likelihood = -47.94,  aic = 101.89
```

由本次模拟可知（具体输出结果见上），矩估计的估计效果依然是最差的，MLE 和 CSS 的估计效果大致相似，其中 CSS 在本题中效果略好。此外，MLE 和 CSS 的估计结果由其 s.e.可知，真实值均落在其 95%置信区间内。

第三题

使用 R 软件模拟样本量为 n = 72 的零均值 ARMA(1,1) 序列，其中，ϕ = 0.7，θ = 0.4， 白噪声 at ~ N(0, 1)，且模拟设定随机种子数为 1。

```
# Z_t=0.7Z_t-1 + a_t - 0.4a_t-1 library(TSA)
set.seed(1)
offset <- 300
n <- 72
theta <- 0.4
phi <- 0.7
at <- rnorm(n + offset)
Zt <- NULL
Zt[1] <- at[1] - theta * 0
for (i in 2:(n + offset)) {
    Zt[i] <- at[i] - theta * at[i - 1] + phi * Zt[i - 1]
}
Zt <- Zt[(offset + 1):(offset + n)]
plot(Zt, type = "o", main = "", xlab = "t", ylab = expression(Z[t]))
```

(a) 求 ϕ 和 θ 的矩估计；

```
rho1 <- acf(Zt, plot = FALSE)$acf[2]
rho2 <- acf(Zt, plot = FALSE)$acf[3]
# phi MME:
phi_hat <- rho2/rho1
cat("phi's MME: ", phi_hat, "\n")

# solve the eqn to get theta_hat MME, note that only keep the reversable
# solution.
func <- function(theta) rho1 - (1 - theta * phi_hat) * (phi_hat - theta)/(1 - 2 *
    theta * phi_hat + theta * theta)
theta_hat <- uniroot(func, c(0, 1), tol = 1e-05)$root
cat("theta's MME:", theta_hat)

## phi's MME:  0.7487895
## theta's MME: 0.4320485
```

MME 估计结果如上所示

(b) 求 ϕ 和 θ 的条件最小二乘估计，并且与(a) 中的结果进行比较；

```
arima(Zt, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")

##
## Call:
## arima(x = Zt, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")
##
## Coefficients:
```

```
##          ar1      ma1  intercept
##       0.6145  -0.2544     0.0875
## s.e.  0.1911   0.2265     0.2287
##
## sigma^2 estimated as 0.9894:  part log likelihood = -101.78
```

本次 CSS 的估计结果，ϕ_hat = 0.6145，θ_hat = 0.2544；与真实值 ϕ = 0.7，θ = 0.4 相比，MME 的估计效果此处要优于 CSS.

(c) 求 ϕ 和 θ 的极大似然估计，并且与(a) 和(b) 中的结果进行比较；

```
arima(Zt, order = c(1, 0, 1), method = "ML")
```

```
##
## Call:
## arima(x = Zt, order = c(1, 0, 1), method = "ML")
##
## Coefficients:
##          ar1      ma1  intercept
##       0.6194  -0.2628     0.1279
## s.e.  0.1773   0.2074     0.2223
##
## sigma^2 estimated as 0.9822:  log likelihood = -101.62,  aic = 211.23
```

本次 MLE 的估计结果，ϕ_hat = 0.6194，θ = 0.2628；与真实值 ϕ = 0.7，θ = 0.4 相比，MME 的估计效果此处要优于 MLE, MLE 与 CSS 的估计效果近似相同.

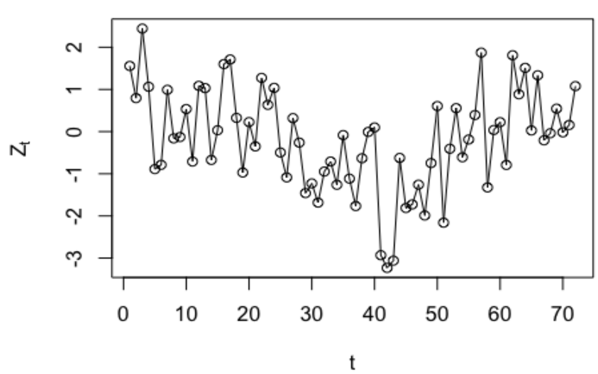
(d) 设定随机种子数为 5，选取相同参数和样本量产生新的模拟序列，使用新的模拟序 列重复 (a)、(b) 和(c)，并将两次模拟结果进行比较。

```
# Z_t=0.7Z_t-1 + a_t - 0.4a_t-1 library(TSA)
set.seed(5)
offset <- 300
n <- 72
theta <- 0.4
phi <- 0.7
at <- rnorm(n + offset)
Zt <- NULL
Zt[1] <- at[1] - theta * 0
for (i in 2:(n + offset)) {
    Zt[i] <- at[i] - theta * at[i - 1] + phi * Zt[i - 1]
}
Zt <- Zt[(offset + 1):(offset + n)]
plot(Zt, type = "o", main = "", xlab = "t", ylab = expression(Z[t]))
rho1 <- acf(Zt, plot = FALSE)$acf[2]
rho2 <- acf(Zt, plot = FALSE)$acf[3]
# phi MME:
phi_hat <- rho2/rho1
cat("phi's MME: ", phi_hat, "\n")
```

```
# solve the eqn to get theta_hat MME, note that only keep the reversable
# solution.
func <- function(theta) rho1 - (1 - theta * phi_hat) * (phi_hat - theta)/(1 - 2 *
    theta * phi_hat + theta * theta)
theta_hat <- uniroot(func, c(0, 1), tol = 1e-05)$root
cat("theta's MME:", theta_hat)

# CSS
arima(Zt, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")
# MLE
arima(Zt, order = c(1, 0, 1), method = "ML")
```

```
## phi's MME:  0.661981
## theta's MME: 0.2837916
## Call:
## arima(x = Zt, order = c(1, 0, 1), method = "CSS")
##
## Coefficients:
##          ar1      ma1  intercept
##       0.8854  -0.6561    -0.3286
## s.e.  0.0728   0.1206     0.3734
##
## sigma^2 estimated as 1.025:  part log likelihood = -103.07
##
## Call:
## arima(x = Zt, order = c(1, 0, 1), method = "ML")
##
## Coefficients:
##          ar1      ma1  intercept
##       0.9238  -0.6833     0.0319
## s.e.  0.0657   0.1209     0.4688
##
## sigma^2 estimated as 1.045:  log likelihood = -104.03,  aic = 216.06
```



输出结果如上所示，从上至下依次为参数的 MME，CSS 与 MLE。在本次模拟中，MME 的估计效果依然优于 MLE 或 CSS，但整体效果普遍差于第一次估计。

第四题

名为 robot 的数据文件中包含了一个来自工业机器人的时间序列。机器人需要完成一系列动作，并以英寸为单位记录与理想终点的距离，重复此过程 324 次得到该时间序列。

(a) 对 robot 序列建立 AR(1) 模型，并估计其参数；

```
library(TSA)

##
## Attaching package: 'TSA'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##     acf, arima

## The following object is masked from 'package:utils':
##
##     tar

data("robot")
plot(robot, type = "o")
robot.ar <- arima(robot, order = c(1, 0, 0), method = "ML")
robot.ar

##
## Call:
## arima(x = robot, order = c(1, 0, 0), method = "ML")
##
## Coefficients:
##          ar1  intercept
##       0.3076     0.0015
## s.e.  0.0528     0.0002
##
## sigma^2 estimated as 6.482e-06:  log likelihood = 1475.54,  aic = -2947.08
```

通过建立 AR(1)模型并根据 ML 进行参数估计，估计结果：

$$\hat{\phi} = 0.3085, s.e.(\hat{\phi}) = 0.0529$$

$$\hat{\mu} = 0.0015, s.e.(\hat{\mu}) = 0.0002$$

并且由上述估计结果可知，截距项与 phi 均在 5%的水平下显著不为零.

(b) 对 robot 序列建立 IMA(1,1) 模型，并估计其参数；

```
robot.ima <- arima(robot, order = c(0, 1, 1), method = "ML")
robot.ima
```

```
##
## Call:
## arima(x = robot, order = c(0, 1, 1), method = "ML")
##
## Coefficients:
##           ma1
##       -0.8713
## s.e.   0.0389
##
## sigma^2 estimated as 6.069e-06:  log likelihood = 1480.95,  aic = -2959.9
```

通过建立 IMA(1,1)模型并根据 ML 进行参数估计，估计结果：

$$\hat{\theta} = 0.8659,\ s.e.\left(\hat{\theta}\right) = 0.0362$$

并且由上述估计结果可知，theta 均在 5%的水平下显著不为零.

(c) 应用 AIC 准则比较(a) 和(b) 的结果；

参考两次模型的输出结果， aic_1 = -2947.08，aic_2 = -2959.9，对比可知两模型的 AIC 较为接近，相对而言 IMA 模型略小，在该信息准则下表现效果略优于 AR 模型.

(d) 通过 Ljung-Box 检验，对 robot 序列拟合的 AR(1) 模型和 IMA(1,1) 模型进行诊断， 并比较两个模型的诊断结果(设定最大滞后阶数为 12)。

```
Box.test(rstandard(robot.ar), lag = 6, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(robot.ar), lag = 12, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(robot.ar), lag = 18, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)

Box.test(rstandard(robot.ima), lag = 6, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(robot.ima), lag = 12, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(robot.ima), lag = 18, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ar)
## X-squared = 26.894, df = 5, p-value = 5.983e-05
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ar)
## X-squared = 52.477, df = 11, p-value = 2.234e-07
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ar)
## X-squared = 66.12, df = 17, p-value = 9.93e-08
```

```
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ima)
## X-squared = 5.0925, df = 5, p-value = 0.4047
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ima)
## X-squared = 17.131, df = 11, p-value = 0.1041
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(robot.ima)
## X-squared = 21.386, df = 17, p-value = 0.2095
```

根据上述输出内容可知，AR(1)的 Ljung—Box 检验在 5%的水平下需要拒绝原假设，说明拟合效果较差；IMA(1)的 Ljung-Box 检验结果 p 值均大于 10%，且大多数保证了在 20%水平之上，可以认为拟合效果比较充分。

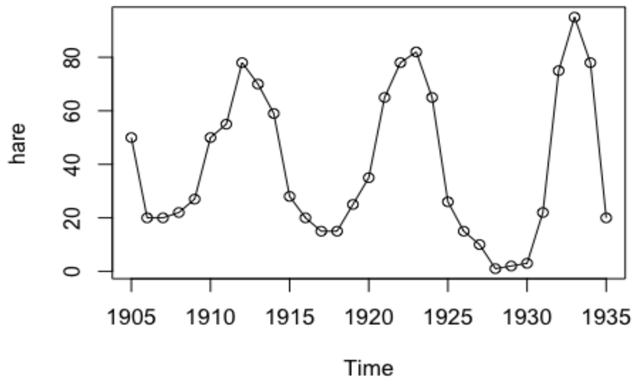
第五题

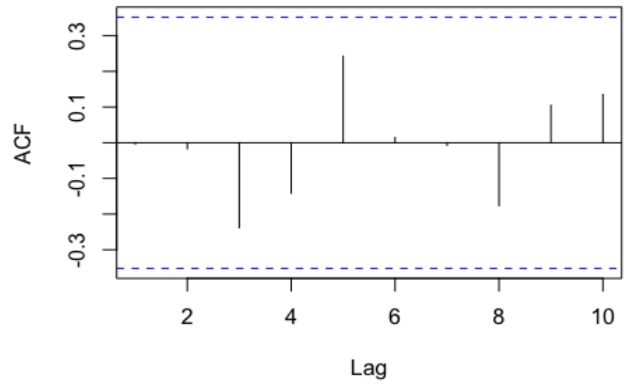
对文件名为 hare 的序列建立 AR(3)模型，并运用极大似然估计方法拟合模型。

(a) 绘制残差序列的样本 ACF 图(设定最大滞后阶数为 10)，并评述残差序列的相关性；

```
# library(TSA)
data("hare")
plot(hare, type = "o")
hare.ar3 <- arima(hare, order = c(3, 0, 0), method = "ML")
print("AR(3) MLE Model:")
hare.ar3
hare.ar3.resid <- hare.ar3$residuals
acf(hare.ar3.resid, lag.max = 10, main = "")
```

```
## [1] "AR(3) MLE Model:"
##
## Call:
## arima(x = hare, order = c(3, 0, 0), method = "ML")
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2      ar3  intercept
##       1.0956  -0.4321  -0.2778    38.0404
## s.e.  0.1884   0.2846   0.1951     3.8842
##
## sigma^2 estimated as 164.5:  log likelihood = -124.6,  aic = 257.21
```





模型拟合结果如上所示。残差序列样本 ACF 图如上图所示。由于前 10 阶的 ACf 均落在区间范围内，故其相关性统计意义上不显著，可以认为残差近似不相关。

(b) 设定 Ljung-Box 检验的最大滞后阶数为 9，计算 Ljung-Box 统计量，并给出检验结 论；

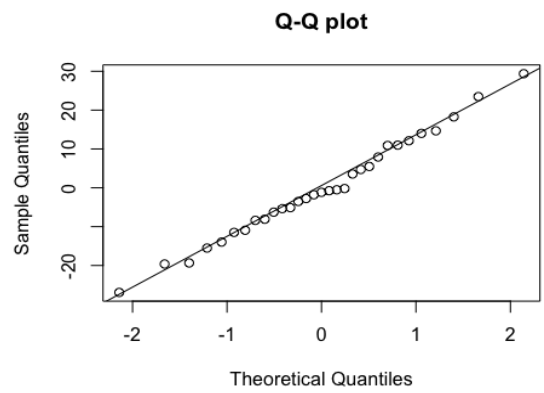
```
Box.test(rstandard(hare.ar3), lag = 3, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(hare.ar3), lag = 6, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)
Box.test(rstandard(hare.ar3), lag = 9, type = "Ljung-Box", fitdf = 1)

##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(hare.ar3)
## X-squared = 2.0847, df = 2, p-value = 0.3526
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(hare.ar3)
## X-squared = 5.1681, df = 5, p-value = 0.3957
##
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  rstandard(hare.ar3)
## X-squared = 7.0685, df = 8, p-value = 0.5293
```

Ljung-Box 的检验结果如上图所示，由统计量可知其 p 值均显著大于 20%，无法拒绝原假设，说明模型拟合充分。

(c) 展示残差的正态 Q-Q 图，并对图形进行评论；

```
qqnorm(hare.ar3$residuals, main = "Q-Q plot")
qqline(hare.ar3$residuals)
```



由该 Q-Q 图可知大多数数据都落在基准线上，整体散点可以近似认为排列成一条直线，说明残差数据的正态性较好。

(d) 请用 Shapiro-Wilk 检验考察残差序列的正态性。

```
shapiro.test(hare.ar3$residuals)

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  hare.ar3$residuals
## W = 0.99068, p-value = 0.9932
```

该检验的输出结果如上所示，其 p 值显著大于 5%，说明无法拒绝原假设，即可以认为残差序列是服从正态分布的。

第六题

假定某公司的年销售额(单位:百万美元)符合 AR(2) 模型 $Z_t = 5 + 1.1Z_{t-1} - 0.5Z_{t-2} + a_t$, i.i.d. 其中，$a_t \sim N(0, 2)$.
(a) 如果 2005 年、2006 年和 2007 年的销售额分别是 9、11 和 10(百万美元)，预测 2008 年和 2009 年的销售额;
(b) 证明该模型的 MA 展式中对应 $\psi_1 = 1.1$;
(c) 计算问题 (a) 中 2008 年的 95% 预测区间;
(d) 如果 2008 年的销售额为 1200 万美元，更新对 2009 年的预测。

6.

(a) $z_{2005}=9$. $z_{2006}=11$. $z_{2007}=10$.

$\hat{z}_{2007}(1) = E(z_{2008} \mid z_{2005}, z_{2006}, z_{2007}) \triangleq E(5+1.1z_{2007}-0.5z_{2006}+a_{2008} \mid \mathcal{F})$

$= 5+1.1\times 10-0.5\times 11 = 10.5$

$\hat{z}_{2007}(2) \triangleq E(z_{2009} \mid \mathcal{F}) = E(5+1.1z_{2008}-0.5z_{2007}+a_{2009} \mid \mathcal{F})$

$= 5+1.1\hat{z}_{2008}-0.5z_{2007} = 5+1.1\times 10.5-0.5\times 10 = 11.55$

(b) $z_t = 5+1.1z_{t-1}-0.5z_{t-2}+a_t$ 将 $z_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t-j}+\mu$ 代入

$\mu+\psi_0 a_t+\psi_1 a_{t-1}+\cdots = 5+1.1\mu+1.1\psi_0 a_{t-1}+1.1\psi_1 a_{t-2}+\cdots-0.5\mu-0.5\psi_0 a_{t-2}+\cdots+a_t$

故 $\begin{cases}\psi_0 a_t = a_t \\ \psi_1 a_{t-1} = 1.1\psi_0 a_{t-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\psi_0=1 \\ \psi_1 = 1.1\psi_0 = 1.1\end{cases}$

(c) $\hat{a}_{2007}(1) = z_{2008}-\hat{z}_{2007}(1) = z_{2008}-5-1.1z_{2007}-0.5z_{2006} = a_{2008}$

$Var(\hat{a}_{2007}(1)) = \sigma_a^2 = 2$.

故95%区间为 $\hat{z}_{2007}(1)\pm 1.96\sqrt{\sigma_a^2} \Rightarrow [10.5-1.96\sqrt{2},\ 10.5+1.96\sqrt{2}]$

$\Rightarrow [7.72,\ 13.27]$

(d) $\hat{z}_{2008}(1) = E(z_{2009} \mid z_{2008}, z_{2007}, z_{2006}, z_{2005})$

$\triangleq E(5+1.1z_{2008}-0.5z_{2007}+a_{2009} \mid \mathcal{F}_{2008})$.

$= 5+1.1z_{2008}-0.5z_{2007}$ (在此步骤可直接代数计算)

$= 5+1.1\hat{z}_{2008}-0.5z_{2007}-1.1\hat{z}_{2008}+1.1z_{2008}$

$= \hat{z}_{2007}(2)-1.1(\hat{z}_{2008}-z_{2008})$

$= 11.55-1.1(10.5-12) = 13.2$ (百万美元)

第七题

考虑模型: $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t$, 其中，$X_t = \varphi X_{t-1} + a_t$，$a_t \sim WN(0,\sigma_a^2)$. 假定 β_0，β_1 和 φ 已知，求证:前置 l 期的最 小均方误差预测是 $\hat{Z}_t(l) = \beta_0 + \beta_1(t+l) + \varphi^l (Z_t - \beta_0 - \beta_1 t)$.

Pf. 由引理，对于 Y 的预测 $h(X)$, $X = X_1, \cdots, X_n$, $MSE = E(Y \mid X_1, \cdots, X_n)$

故只需证 $\beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi^l (Z_t - \beta_0 - \beta_1 t)$ 是 Z_{t+l} 的条件期望.

$$E(Z_{t+l} \mid X_t, X_{t-1}, \cdots, X_1) \triangleq E(\beta_0 + \beta_1(t+l) + X_{t+l} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= E(\beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi X_{t+l-1} + a_{t+l} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= E(\beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi^2 X_{t+l-2} + \phi a_{t+l-1} + a_{t+l} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \cdots = E(\beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi^l X_{t+l-l} + \phi(a_t + \cdots + a_{t+l-1}) + a_{t+l} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi^l X_t = \beta_0 + \beta_1(t+l) + \phi^l (Z_t - \beta_0 - \beta_1 t).$$

Q.E.D