波动率

波动率与幂律

1. 波动率的概念

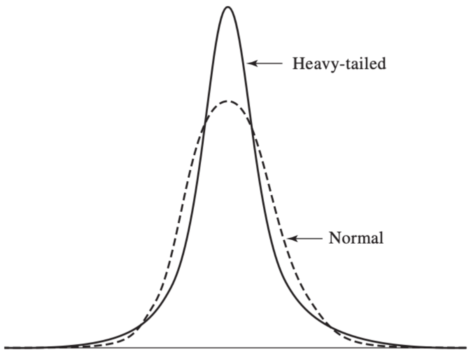
- 在单位时间内，用连续复利的条件下，某个变量收益波动的**标准差**
- 记S_i是第i天结束时的某变量价格，则在连续复利下，每日的收益为 $\ln S_i/S_{i-1}$
- 在研究股票等资产的波动率时，通常认为大多数的资产价格波动发生在交易日中，若假定每年有252个交易日，则年波动率和日波动率可以如下相互转换：

$$\sigma_{year} = \sigma_{day} \times \sqrt{252}$$

- 隐含波动率：通过BSM公式计算出的价格反推出的波动率
- VIX指数：S&P500 指数的波动率指数，越大表示波动率越大

2. 金融市场的收益分布

- 许多市场变量的收益不服从正态分布，相比而言其呈现尖峰肥尾趋势



- 幂律分布是在金融市场中一些情况下对于收益的更好估计分布，其计算公式：

$$Prob(v > x) = Kx^{-\alpha}$$

波动率估计模型

标准估计方法

- 记σ_n为在第$n-1$天估计的第n天的波动率，S_i为在第i天末的价格
- 则每日的变化为$u_i = \ln(S_i - S_{i-1})$
- 可以计算每日的变化均值$\bar{u} = \sum_{i=1}^{m} u_{n-i}/m$，以及变化的方差$\sum_{i=1}^{n}(u_{n-i} - \bar{u})^2/(n-1)$
- 计算时常用n代替$n-1$，并假变化率的期望为0，则有估计：

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} u_{n-i}^2/m$$

- 进一步也可以将上述的等权重模型根据不同日期的权重进行修正，得到

$$\sigma_n^2=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_{n-i}^2 \quad (\sum \alpha_i=1)$$

ARCH(m)

- 在上述模型的基础上增加一项长期平均方差V_L，并应用在上述加权模型中：

$$\sigma_n^2=\gamma V_L+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_{n-i}^2 \quad (\gamma+\sum \alpha_i=1)$$

EWMA （指数加权移动平均）

- 通过如下递归形式求解：

$$\sigma_n^2=\lambda\sigma_{n-1}^2+(1-\lambda)u_{n-1}^2$$

- EWMA的优点
  - 需要的数据较少
  - 每次可以直接根据最新值进行更新而不需要重新计算

GARCH(1,1)

$$\sigma_n^2=\gamma V_L+\alpha u_{n-1}^2+\beta\sigma_{n-1}^2 \quad (\gamma+\alpha+\beta=1)$$

GARCH(p,q)

$$\sigma_n^2=\gamma V_L+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i u_{n-i}^2+\sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{n-j}^2 \quad (\gamma+\sum\alpha+\sum\beta=1)$$