第三次作业

辛柏赢 2020111753

1. 假定黄金价格在昨天收盘价格为 300 美元，其波动率为每天 1.3%，今天黄金的收盘价为 298 美元。请采用以下模型来更新波动率：

   （a）采用 EWMA 模型，其中，$\lambda = 0.94$；

   （b） 采用 GARCH(1,1)模型，其中参数选择为 $\omega = 0.000002$，$\alpha = 0.04$以及$\beta = 0.94$。

解：

(a) 按照 EWMA 模型：

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2 = 0.94 \times 1.3\%^2 + 0.06 \times \left(\frac{298-300}{300}\right)^2 = 0.00016153$$

(b) 按照 GARCH 模型：

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2 = 0.000002 + 0.04 \times \left(\frac{298-300}{300}\right)^2 + 0.94 \times 0.013^2 = 0.00016264$$

2. 假定有两项相互独立的投资，任何一项都有 4%的概率会引发 1000 万美元损失，2%的概率会引发 100 万美元损失，94%的概率盈利 100 万美元。

   1）对应于 95%的置信水平，任意一项投资的 VaR 和 ES 为多少；

   2）将两项投资叠加在一起，对应于 95%的置信水平的 VaR 和 ES 为多少；

   3） 说明此例的 VaR 不满足次可加性，而 ES 满足次可加性。

解：

1) 由于有累计 5%的可能性损失 100 万美元，故对应的 VaR 为 100 万美元；在尾部 5%的损失中，有 4/5 的概率损失 1000 万美元，由 1/5 的概率损失 100 万美元，因此总的 ES 为二者的期望即 820 万美元。

2) 此时的损失可能情况为：有$4\% \times 4\% = 0.0016$的概率损失 2000 万，有$2 \times 4\% \times 2\% = 0.0016$的概率损失 1100 万，有$2 \times 4\% \times 94\% = 0.0752$的概率损失 900 万，有$2\% \times 2\% = 0.0004$的概率损失 200 万，有$2 \times 2\% \times 94\% = 0.0376$的概率不赚不赔，有$94\% \times 94\% = 0.8836$的概率获利 200 万。

综上所属，由分位数情况可知 VaR 为 900 万。

另一方面，在 5%的尾部情况中，有 0.032 的概率损失 2000 万，有 0.032 的概率损失 1100 万，有 0.936 的概率损失 900 万，故其期望即 ES 为 941.6 万美元。

3) 在 VaR 的计算中，若单纯将两资产 VaR 相加，$100 + 100 < 900$（万美元），但对于 ES 而言，$820 + 820 > 941.6$（万美元）。因此 VaR 不具有次可加性而 ES 具有。

3. 假定由 2000 个数据所得到的一天展望期的，97.5%VaR 的估计值为 1300 万，假定我们观测到的每天价格变化大致服从正态分布，分布的期望值为 0，标准差为 600 万美元，求取 97.5%VaR 的置信区间.

解：

由 Kendall 和 Stuart 的估计标准误计算公式：

$$\frac{1}{f(q)}\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}$$

其中$n = 2000, q = 0.975, f(x)$为对应于损失估计量$x$的损失分布的密度函数值，具体而言，为方便计算，记此处的单位为百万美元，则价格变化的分布服从$N(0,6)$. 经查表可知，该分布下对应的 97.5%分位数点为 11.76，对应$f(q) = 0.0097$.

将上述数值带入计算可得标准误为 0.358.故相应 95%的置信区间为$13 \pm 0.358 \times 1.96$，即$[12.29832, 13.70168]$ （单位：百万美元）

4. 某交易组合的构成为价值 300000 美元的黄金投资及价值为 500000 美元的白银投资，假定以上两资产变化的日波动率分别为 1.8%和 1.2%，并且两资产回报的相关系数为 0.6，问交易组合 10 天展望期的 97.5%VaR 为多少？投资分散效用所减少的 VaR 数量为多少？

解：

首先可以计算该投资组合的波动标准差为（为计算方便这里采用万美元为单位）：

$$\sqrt{1.8\%^2 \times 30^2 + 1.2\%^2 \times 50^2 + 2 \times 30 \times 50 \times 0.6 \times 1.8\% \times 1.2\%} = \sqrt{1.0404} = 1.02$$

因此一天的$VaR_{1-day} = 1.02 \times 1.96 = 1.9992$，再扩展到 10 天为$VaR_{10-days} = 1.9992 \times \sqrt{10} = 6.322$（即 63220 美元）。

再分别计算两投资的各自 VaR。对于黄金投资：$VaR_{gold} = 1.8\% \times 300000 \times \sqrt{10} \times 1.96 = 33470$，对于白银投资：$VaR_{silver} = 0.012 \times 500000 \times \sqrt{10} \times 1.96 = 37188.$

由此可以计算减少的 VaR 为$33470 + 37188 - 63220 = 7438$美元。

5. 假定某交易组合的每天价值变化与由主成分分析法（PCA）所计算出的两个因子呈很好的线性关系，交易组合对于第 1 个因子的 Delta 为 6，交易组合对于第 2 个因子的 Delta 为-4，两个因子的标准差分别为 20 及 8，交易组合 5 天展望期的 90%VaR 为多少?

解：

投资组合每天交易的标准差为（单位：美元）：

$$\sqrt{6^2 \times 20^2 + 4^2 \times 8^2} = \sqrt{15424} = 124.19$$

又知在正态假设下 90%的分位数点为 1.282，故 5 天展望期 90%的 VaR 为（单位：美元）：

$$\sqrt{5} \times 124.19 \times 1.282 = 356.01$$