TAP-1 Matemáticas 3

- Juan Diego Castro Padilla
- Ariana Lizeth Sánchez Ramos
- Isaac Guzman Dueñas
- Luis Oliveros Vegas
- Fernando Castro Ayala

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

Donde los valores de R_a, R_b y R_c son:

$R_a = 6\Omega$; $R_b = 12\Omega$; $R_c = 18\Omega$

Operando los valores:

$R_1 + R_2 = 9$

$R_2 + R_3 = 5$

$R_1 + R_3 = 8$

1. Modelando el sistema de ecuaciones en su forma matricial $\mathrm{Ax} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

```
%{
    Estas definiciones servirán más adelante.
%}

A = [1 1 0;
     0 1 1;
     1 0 1];

b = [9; 5; 8];
```

Para hallar el rango de la matriz ampliada $[A \mid b]$, primero la llevaremos a su forma escalonada. Para ello, utilizaremos el método de eliminación Gaussiana con pivoteo.

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mid 9 \\ 0 & 1 & 1 & \mid 5 \\ 1 & 0 & 1 & \mid 8 \end{bmatrix}$$

Para $i \geq 1$: $\max|a_{i\,1}| = \text{pivote} = a_{11}$

$m_{21} = 0/1 = 0 \qquad m_{31} = 1/1 = 1$

$f_2 \to f_2 - (0)(f_1) \quad f_3 \to f_3 - (f_1)$

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mid & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & 5 \\ 0 & -1 & 1 & \mid & -1 \end{bmatrix}$$

Para $i \geq 2$: $\max|a_{i\,2}| = \text{pivote} = a_{22}$

$m_{32} = (-1)/1 = -1$

$f_3 \to f_3 - (-1)(f_2)$

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mid 9 \\ 0 & 1 & 1 & \mid 5 \\ 0 & 0 & 2 & \mid 4 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es igual al número de filas no ceros de su versión escalonada. Por lo tanto, $\text{rank}([A \mid b]) = 3$.

```
%{
    La función rank nos ayuda a
    calcular el rango de la matriz
    ampliada inicial.
%}

r = rank([A b]);
fprintf('El rango de la matriz [A b] es: %d', r)
```

```
El rango de la matriz [A b] es: 3
```

2. Para que un sistema de ecuaciones tenga solución única, $\mathrm{rank}([A \mid b])$ tiene que ser igual a $\mathrm{rank}(A)$ e igual al número de columnas de la matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La cantidad de filas no ceros de la matriz escalonada es 3. Entonces, $\mathrm{rank}(A) = 3$. Además, la matriz original tiene 3 columnas. Como el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz original, e igual al número de columnas, entonces el sistema es compatible determinado y tiene solución única.

```
% Comprobando el teorema de Rouché–Frobenius

[~, m] = size(A);

if rank([A b]) ~= rank(A)
    fprintf('El sistema es no compatible')
elseif rank([A b]) == m
    fprintf('El sistema es compatible determinado')
else
    fprintf('El sistema es compatible indeterminado')
end
```

```
El sistema es compatible determinado
```

3. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, usaremos la matriz ampliada obtenida en el ejercicio 1, en el que se usó eliminación Gaussiana con pivoteo.

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | \, 9 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 5 \\ 0 & 0 & 2 & | \, 4 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo otra vez en la forma $\mathrm{Ax} = b$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ahora, utilizamos el método de sustitución inversa para hallar el vector x.

$2\,R_3 = 4$

$R_3 = 2$

$R_2 + R_3 = 5$

$R_2 + 2 = 5$

$R_2 = 3$

$R_1 + 3 = 9$

$R_1 = 6$

La solución al S.E.L es:

$x = (R_1, R_2, R_3)^t$

$x = (6, 3, 2)^t$

```
%{
    Usamos la función linsolve, que retorna
    un vector columna con la solución del
    S.E.L.
%}

x = linsolve(A, b);
[n, ~] = size(x);


% Con un bucle for, imprimimos
% cada valor del vector

for i=1:n
    fprintf('R%d = %d\n', i, x(i, 1))
end
```

```
R1 = 6
R2 = 3
R3 = 2
```

4. Utilizando el método de factorización de Crout para resolver el S.E.L.

Tenemos la matriz de coeficientes original A, que será factorizada en LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{LU}$$

Donde LU tiene la forma:

$$\mathrm{LU} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le daremos a la matriz A la forma de L, y los multiplicadores nos ayudarán a completar la matriz U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = L_{12}/L_{11} = 1/1 = 1 \qquad U_{13} = L_{12}/L_{11} = 0/1 = 0$$

$c_2 \to c_2 - (1)c_1$ $\qquad$ $c_3 \to c_3 - (0)c_1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U_{23} = L_{23}/L_{23} = 1/1 = 1$$

$c_3 \to c_3 - (1)c_2$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Una vez hemos llevado la matriz L a su forma triangular inferior, se puede afirmar que:

$$A = \mathrm{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos llevar la ecuación $\mathrm{Ax} = b$ a la forma $\mathrm{LUx} = b$. Ahora, podemos asignarle al producto de Ux el valor de c, tal que $\mathrm{Ux} = c$. Después, lo reemplazamos en la ecuación, quedando la expresión $\mathrm{Lc} = b$.

Hallamos el vector c con la ecuación $\mathrm{Lc} = b$ utilizando el método de sustitución directa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 9$

$c_2 = 5$

$c_1 - c_2 + 2(c_3) = 8$

$9 - 5 + 2(c_3) = 8$

$c_3 = 2$

$c = (c_1,\ c_2,\ c_3)^t$

$c = (9,\ 5,\ 2)^t$

Ahora hallamos el vector x con la ecuación $\mathrm{Ux} = c$ utilizando el método de sustitución inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$R_3 = 2$

$R_2 + R_3 = 5$

$R_2 + 2 = 5$

$R_2 = 3$

$R_1 + R_2 = 9$

$R_1 + 3 = 9$

$R_1 = 6$

La solución al S.E.L es:

$x = (R_1, R_2, R_3)^t$

$x = (6, 3, 2)^t$