# Unicidad del polinomio de Lagrange

Sergio David López Becerra
Sergio Montoya

10 septiembre de 2022

## 1

Tomemos como caso base un polinomio de grado 2, entonces se tiene que:
$P(x) = c_0 + c_1 x + c_1 x^2,$ donde $c_i$ son coeficientes.
Luego, podemos sustituir $P(x)$ por los $x_i$, tq:
$P(x_0) = y_0 \longrightarrow c_0 + c_1 x_0 + c_1 x_0^2 = y_0,$
$P(x_1) = y_1 \longrightarrow c_0 + c_1 x_1 + c_1 x_1^2 = y_1,$
$P(x_2) = y_2 \longrightarrow c_0 + c_1 x_2 + c_1 x_2^2 = y_2.$
En base al sistema de ecuaciones, podemos expresarlo de forma matricial:
$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$
Luego, como los $x_i$ son diferentes entre sí, entonces el determinante de la matriz es diferente de cero. Ergo, el sistema tiene una única solución.

Supongamos ahora, que el polinomio interpolante de Lagrange es único para el grado n.

Entonces ahora, tomemos el polinomio de grado $n+1$, luego se tiene un sistema de $n+1$ ecuaciones para las $n+1$ incognitas. En consecuencia, podemos construir un nuevo sistema matricial a partir de las ecuaciones:
$\left[x_j^k\right]_{j,k=0}^{n} \cdot \left[c_k\right]_{k=0}^{n} = \left[y_j\right]_{j=0}^{n} \longrightarrow (x_0, \ldots, x_n)c = y.$
Luego, por hipotesis los $x_i$ son diferentes entre sí, se tiene que su determinante es diferente de cero. Por consiguiente, el polinomio de Lagrange es único