Probabilidade

Probabilidade

- ↳ É um evento que pode acontecer
- ↳ Experimento Aleatório ⇒ Aquele que apresenta resultados imprevisíveis
  - Loteria de números
  - Jogar dado para cima
- ↳ Espaço Amostral
  - Conjunto de todos os resultados possíveis
    - ↳ Exemplo: se jogo uma moeda eu tenho cara ou coroa logo o espaço amostral é $S = \{\text{cara}; \text{coroa}\}$
- ↳ Evento
  - É todo o subconjunto do espaço amostral S
  - Exemplo $E = \{1, 3, 5, 7\}$ ⇒ números ímpares
- ↳ Se o evento for igual ao espaço amostral
  - ↳ Chamamos de evento certo. Exemplo se jogarmos o dado para cima e for igual a 0. No caso o dado lançado sempre será maior que 0.
- ↳ Como calcular probabilidade?
  - $n(E)$ o número de elementos E
  - $n(S)$ o número de elementos S
  - $P(E)$ a probabilidade de ocorrer E

Temos:

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

- ↳ $P(E)$ possui um intervalo fixo: $0 \leq P(E) \leq 1$
  - Quando $P(E) = 0$. O evento é impossível de acontecer
  - Quando $P(E) = 1$, o evento é certo.

Exemplo: no lançamento de um dado qual a probabilidade de ocorrer números ímpares?

↳ Espaço Amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

↳ Evento E: "ocorrer número ímpar" $E = \{1, 3, 5\}$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \implies P(E) = \frac{3^{:3}}{6_{:3}} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

Exemplo 2 → uma urna contém 7 bolas vermelhas e 28 brancas. Qual a probabilidade de sortearmos uma bola branca?

↳ Espaço Amostral $S\{7 + 28\}$

↳ Evento bola branca Evento_bola_branca $= E\{28\}$

$$P(E) = \frac{28^{:7}}{35_{:7}}$$

⇓

$$P(E) = \frac{4}{5} \Rightarrow 0{,}8 \cdot 100 = \boxed{80\%}$$

Exercício Vestibular

01 - (PM-PA) Um saco contém 8 bolas idênticas, mas com cores diferentes: três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul

Espaço Amostral: $S\{3 \text{ bolas azuis} + 4 \text{ vermelhas} + 1 \text{ amarela}\} \Rightarrow S\{8\}$

Evento: $E\{3\}$

$$P(\text{bolas azuis}) = \frac{3}{8} \Rightarrow 0{,}375 \cdot 100$$

⇓

$\boxed{37{,}5\%}$ → Resposta

2) (IFMA) Se lançarmos dois dados ao mesmo tempo, qual a probabilidade aproximada de dois números iguais ficarem voltados para cima

↳ Espaço Amostral $S \{ 6 \times 6 = 36 \}$

↳ Evento $E \{ (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6) \}$

$P(\text{Dois iguais}) \Rightarrow \dfrac{6^{:6}}{36_{:6}} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow P = 0{,}166 \cdot 100$

$\Downarrow$

$P = 16{,}6\%$

3) (Unrio) Uma senha é composta por 4 algarismos, qual a probabilidade de criarmos uma senha com todos os algarismos distintos

Espaço Amostral = { números possíveis

$\Downarrow$

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Mas podemos usar esse conjunto 4x dado que a senha é composta de 4 dígitos

Logo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$\Downarrow$

10000 => Espaço Amostral

Evento = { $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

$\Downarrow$

Dado que os números não podem repetir, logo o evento é

5040

$P(E) = \dfrac{5040}{10000} \Rightarrow 0{,}504 \cdot 100$

$\Downarrow$

$50{,}4\%$

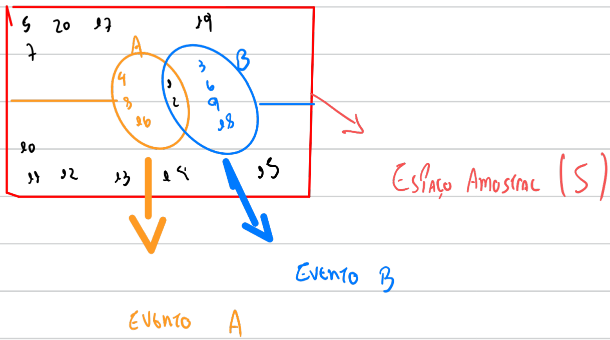
Probabilidade da união de eventos

Exemplo: Vamos retirar uma bola de uma urna que contém 20 bolas numeradas de 1 a 20 e considerar os eventos A {obtenção de divisor 16} e B {obtenção de divisor de 18}

$S = \{1, 2, 3 \dots 20\} = 20$

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\} = 5$

$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = 6$



Note que existem elementos que satisfazem

Apenas o evento A: $\{4, 8, 16\}$

Apenas o evento B: $\{3, 6, 9, 18\}$

O evento A e B: $\{1, 2\}$

O evento A ou B: $\{1, 2, 4, 3, 8, 6, 9, 16, 18\}$

Logo

↳ sabemos que $\{1, 2\} = A \cap B$

↳ sabemos que $\{4, 8, 16, 3, 6, 9, 18, 1, 2\} = A \cup B$

Importante

- A ocorrência do evento A **E** evento B é dada por $A \cap B$
- A ocorrência do evento A **OU** do evento B é dada por $A \cup B$

Prática

Com isso vamos calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} = n(S) = 20$

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\} = n(A) = 5$

$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = n(B) = 6$

$A \cap B = \{1, 2\}$

$A \cup B = \{4, 8, 16, 3, 6, 9, 18, 1, 2\}$, $n(A \cup B) = 9$

$P(A) = \frac{5}{20} = 5\%$

$P(A \cap B) = \frac{2}{20} = 10\%$

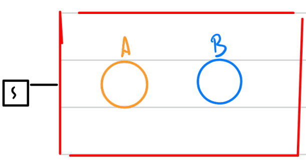
$P(B) = \frac{6}{20} =$

$P(A \cup B) = \frac{9}{20} =$

Esses resultados mostram que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (P \cap B)$ Formula

$$\frac{5}{20} + \frac{6}{20} - \frac{2}{20} \Rightarrow \boxed{\frac{9}{20}} \rightarrow P(A \cup B)$$

Se A e B são conjuntos disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos



$\rightarrow$ Nesse caso $n(A \cap B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0$

$\Downarrow$ vem

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemplo 9) Para preencher vagas de trabalho em uma indústria, 120 pessoas participaram do processo seletivo. A tabela abaixo mostra a distribuição dos candidatos por gênero e escolaridade

	Homens	Mulheres	Total
Ensino médio	18	27	45
Ensino superior	22	53	75
Total	40	80	120

Um candidato do grupo é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja

A) Mulher ou tenha ensino superior ?

B) Homem ou tenha só o ensino médio

S = { 120 }

mulher = { 80 }

homem = { 40 }

Ensino superior = { 75 }

Ensino médio = { 45 }

Exercício 1

$$\frac{n(\text{mulher})}{120} + \frac{n(\text{ensino s.})}{120} - \frac{n(m \cap es)}{120}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{80}{120} + \frac{75}{120} - \frac{53}{120} =$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{102^{:6}}{120_{:6}} \Rightarrow \frac{17}{20} = 85\%$$

Exercício 2)

$$\frac{n(\text{Homem})}{n(s)} + \frac{n(\text{Ensino médio})}{n(s)} - \frac{n(\text{Homem} \cap \text{médio})}{n(s)}$$

$$\frac{40}{120} + \frac{45}{120} + \frac{18}{120}$$

$$\frac{67}{120} \Rightarrow 55\%$$

$P(\text{Huem}) \cong 55\%$

Exercício Vestibular

1) (Unesp) Em uma sala, há 20 meninos e 30 meninas. Desses estudantes, 18 usam óculos e 8 são meninos. Se um estudante dessa sala for sorteado por acaso, qual a probabilidade de o sorteado usar óculos ou ser um menino?

$S = \{50\}$

meninos $= \{20\}$

meninas $= \{30\}$

usam óculos $= \{18\}$

meninos + óculos $= \{8\}$

$$P(\text{usa óculos} \cup \text{menino}) = \frac{n(\text{óculos})}{n(S)} + \frac{n(\text{menino})}{n(S)} - \frac{n(\text{menino} \cap \text{óculos})}{n(S)}$$

$$\frac{18}{50} + \frac{20}{50} - \frac{8}{50}$$

$$\frac{30}{50} = 0{,}60$$

$\boxed{60\%}$

Probabilidade Condicional

↳ Exercício irá restringir ou diminuir seu espaço amostral

Definição:

Sejam A e B eventos de Ω finito e não vazio. A probabilidade condicional do evento A sabendo que ocorreu o evento B, é indicada por $A|B$ e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{com } P(B) \neq 0$$

Evento ? Evento conhecido

Espaço amostral conhecido

Exemplo 1) Uma urna contém 15 estrelas numeradas de 1 a 15. Retira-se uma estrela ao acaso e observa-se que o número é maior que 7, qual a probabilidade desse número ser múltiplo de 4?

Múltiplos de 4: $A \{4, 8, 12\} = A = \{3\}$

Maior que 7: $B \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} : n\{8\} = 8$

$n(A \cap B) \Rightarrow 2$

$n(S) = 15$

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{\cancel{15}}}{\frac{8}{\cancel{15}}}$$

$\frac{2}{8} = 0{,}25 \cdot 100$

$\Downarrow$

25%

Exercício 2) Um dado honesto é lançado e sabe-se que a face superior tem um número par. Qual a probabilidade de que o número obtido seja primo?

Seja primo $\Rightarrow A = \{2, 3, 5\} = 3$

Seja par $B = \{2, 4, 6\}$ $n(B=) = 3$

$n(A \cap B) = \{1\}$

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \Rightarrow 0{,}33 \cdot 100$$

$\Downarrow$

33,3%