Struktury Danych i Złożoność Obliczeniowa - Projekt: Sprawozdanie

Wydział Elektroniki	Kierunek: Informatyka Techniczna
Grupa zajęciowa Wt 15:15	Semestr: 2020/2021 Lato
Prowadzący:	Dr inż. Dariusz Banasiak

Autor
Byczko Maciej 252747

Wstęp

Zadanie projektowym było napisanie programu i zmierzenie czasu wykonywania działań na:

- Tablicy dynamicznej
- Liście dwukierunkowej
- Kopcu binarnym typu MAX
- drzewie czerwono-czarnym

Działania wykonywane na powyższych strukturach były następujące:

- Dodawanie
- Usuwanie
- Znajdowanie

Założenia

- 4 bajtowa liczba całkowita ze znakiem (int w C++)
- wszystkie struktury danych powinny być alokowane dynamicznie
- należy zmierzyć czasy wykonywania poszczególnych operacji w funkcji rozmiaru danej struktury
- językami programowanie są języki kompilowane do kodu natywnego (C, Objective C, C++, Rust, GO)
- nie wolno korzystać z gotowych bibliotek np. STL, Boost lub innych – wszystkie algorytmy i struktury muszą być zaimplementowane przez studenta
- realizacja zadania powinna być wykonana w formie jednego programu
- kod źródłowy powinien być komentowany
- program musi skompilowany do wersji exe

Dodatkowe funkcje

- utworzenie struktury na podstawie danych zapisanych w pliku tekstowym. Pierwsza liczba określa rozmiar struktury, następnie należy wprowadzić odpowiednią liczbę danych np. każda liczba w osobnej linii
- wyświetlenie struktury na ekranie (w przypadku drzew zaproponować odpowiednią formę, która uwzględni relacje między elementami tej struktury)
- możliwość wykonania wszystkich przewidzianych operacji na danej strukturze (wybór operacji najlepiej zrealizować w formie menu)
- Projekt został napisany w języku C++ w standardzie C++20
- Do pisania oraz kompilacji zostało użyte środowisko CLion
- Wykresy oraz dane zostały przetworzone za pomocą skryptu napisanego w Pythonie w wersji 3.9.4
- Losowe dane do losowych struktur są generowane za pomocą funkcji rand()

- Wyniki zostały uśrednione za pomocą biblioteki statistics w Pythonie

Złożoności obliczeniowe

Ogólne informacje

Złożoność obliczeniowa jest nam potrzebna aby określić ilość zasobów potrzebnych do rozwiązania problemu obliczeniowego. Rozważanymi zasobami są głównie:

- Czas (Czasowa złożoność obliczeniowa)- ilość czasu potrzebna do wykonania algorytmu
- Pamięć (Pamięciowa złożoność obliczeniowa)- ilość pamięci wykorzystanej w celu realizacji algorytmu

Dla każdego algorytmu można wyróżnić trzy typy złożoności:

- Optymistyczna - Najkrótszy możliwy czas wykonania algorytmu dla najkorzystniejszego zbioru danych (nie będę jej umieszczał w tabelach ponieważ wynosi ona zawsze O(-) (Dodanie elementu do pustej struktury))
- Średnia - Typowe zużycie zasobów dla losowego zbioru danych
- Pesymistyczna - Najdłuższy czas wykonania algorytmu dla najmniej korzystnego zbioru danych

W tabelach litera **n** oznacza ilość elementów w strukturze

Złożoność tablicy dynamicznej

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	\$O(n)\$	\$O(n)\$
Usuwanie	\$O(n)\$	\$O(n)\$
Znajdowanie	\$O(n)\$	\$O(n)\$
Dostęp	\$O(1)\$	\$O(n)\$

Złożoność listy dwukierunkowej

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	\$O(1)\$	\$O(n)\$
Usuwanie	\$O(1)\$	\$O(n)\$
Znajdowanie	\$O(n)\$	\$O(n)\$
Dostęp	\$O(n)\$	\$O(n)\$

Złożoność kopca binarnego

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	\$O(\log(n))\$	\$O(n)\$
Usuwanie	\$O(\log(n))\$	\$O(n)\$
Znajdowanie	\$O(n)\$	\$O(n)\$

Złożoność drzewa czerwono-czarnego

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(\log(n))$	$O(n)$
Usuwanie	$O(\log(n))$	$O(n)$
Znajdowanie	$O(\log(n))$	$O(n)$

Złożoność drzewa AVL

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(\log(n))$	$O(1.44(\log_2(n)))$
Usuwanie	$O(\log(n))$	$O(1.44(\log_2(n)))$
Znajdowanie	$O(\log(n))$	$O(1.44(\log_2(n)))$

Plan eksperymentu

Informacje ogólne

- Pomiar czasu podczas dodawania elementów od 1000 do 45000
- Funkcja mierząca czas: `std::chrono::high_resolution_clock`
- Sposób generacji struktur:
    - Tworzenie struktury z losowymi danymi o podanym rozmiarze
    - Wykonanie operacji mierzonej
    - Zapisanie wyniku do pliku
    - Powtórzenie operacji (wartość zadana przez użytkownika)

Pomiary czasowe

Pomiar czasowe były mierzone w **nanosekundach** $(1 [ns] = 1 * 10^9 [s])$ za pomocą następującej funkcji:

```
template<typename T>
double Timer(T i) {
auto start = chrono::high_resolution_clock::now();// Start the counter
i();// our function
auto end = chrono::high_resolution_clock::now();// Get value after executing function
auto duration = end - start;// get time difference
auto elapsed_time = chrono::duration_cast<chrono::nanoseconds> (duration).count();//
calculate time
return elapsed_time;// Return executing time in nanoseconds
}
```

Wyniki wykonanych eksperymentów

Pomiary tablicy dynamicznej

Opis ogólny operacji na tablicy

Jedna z najprostszych struktur – jest ona zbiorem elementów z przypisanym indeksem który zależy od jej kolejności w strukturze – każdy element ma swój indeks. W tym przypadku będzie to tablica dynamiczna której wielkość może być dowolnie zadawana i zmieniana operacjami. Ważna jest tutaj relokacja pamięci – swoiste zbudowanie tablicy od nowa po wykonaniu operacji aby 'odświeżyć' zawartość tablicy.

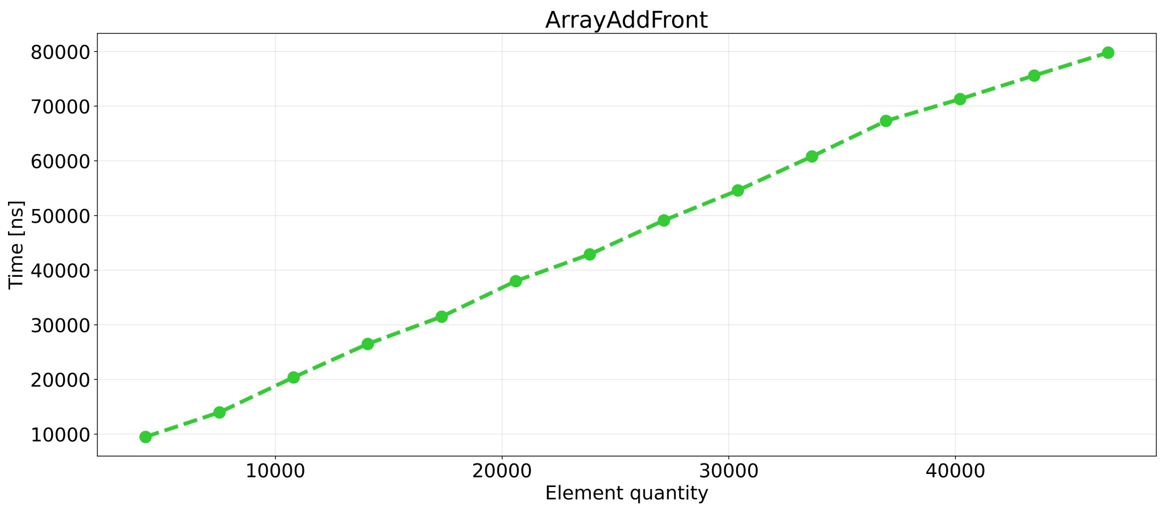
- Dodawanie na początku - Najpierw wymagane jest zwiększenie indeksu liczby elementów w tablicy o jeden, a następnie przesunięcie ich wszystkich o adres wyżej, tak aby pierwsze miejsce (początek) było puste. W to miejsce też (używając adresu początka tablicy) wstawiamy zadaną wartość.
- Dodawanie na końcu - Podobnie jak wyżej liczba elementów zostaje zwiększona o jeden jednak przesuwanie nie jest wymagane gdyż nowo stworzony indeks jest 'pusty' – tam wstawiamy zadaną wartość.
- Dodawanie w wybranym miejscu - Zwiększenie ilości elementu o jeden, a następnie iteracja do podanego indeksu, po wstawieniu elementu następuje operacja wpisania do pozostałych pól wartości ze starej tablicy
- Usuwanie z początku tablicy - Operacja ta wpierw usuwa wartość z pierwszej komórki tablicy, a następnie przesuwa wszystkie pozostałe elementy wstecz. Wtedy ostatnia komórka jest pusta i zostaje usunięta, zmniejszając liczbę elementów o jeden.
- Usuwanie z końca tablicy - Usuwa ostatni element z tablicy, zmniejszając liczbę elementów o jeden.
- Usuwanie z wybranego miejsca - Szukamy zadanego indeksu z następnie usuwamy z niego wartość. Potem wszystkie elementy powyżej są przesuwane do tyłu, a ostatnia (pusta) komórka jest usuwana zmniejszając liczbę elementów.
- Wyszukiwanie:
  - Wartości - Przeszukuje wszystkie indeksy od początku i sprawdza ich wartość z zadaną. Jeśli element został znaleziony – daje komunikat i wartość indeksu pod którą się znajduje. Jeśli element nie istnieje lub jest na końcu złożoność czasowa jest równa O(n) gdzie n to liczba elementów tablicy. W innym przydatku jest zależna od pozycji szukanego klucza.
  - Indeksu - Rzuca wartość znajdującą się pod danym indeksem, w innym przypadku rzuca bool=false

Wyniki pomiarów tablicy

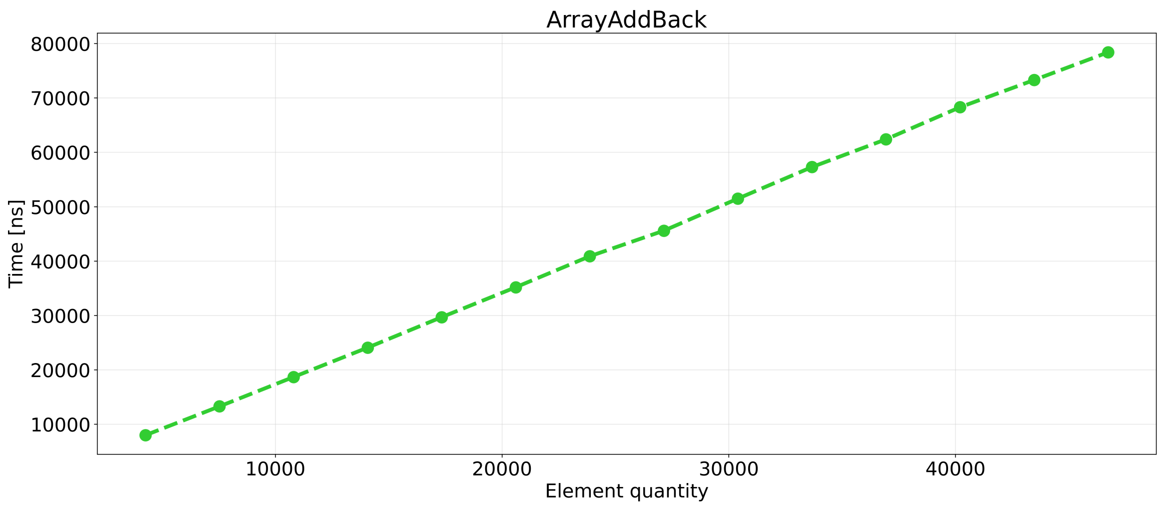
	Liczba danych	**Dodawanie na koniec**	**Dodawanie na początek**	**Dodawanie gdziekolwiek**	**Szukanie**	**Usuwanie koniec**	**Usuwanie początek**	**Usuwanie gdziekolwiek**
L.p.	j	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$
1	1000	3300	5500	195300	1000	84500	3202	165800
2	5000	9000	10300	204100	5100	90600	8900	172300
3	10000	17900	19300	215600	11100	99600	17700	183400
4	15000	25600	28000	227300	17600	107500	25700	192600
5	20000	34300	36300	238700	24900	116100	33300	203000
6	30000	51500	54600	262400	44700	133100	50900	258500
7	35000	60100	63800	400900	57500	141700	59300	366600
8	40000	68300	71300	415900	74400	151000	66800	381300

	Liczba danych	Dodawanie na koniec	Dodawanie na początek	Dodawanie gdziekolwiek	Szukanie	Usuwanie koniec	Usuwanie początek	Usuwanie gdziekolwiek
9	45000	74900	77300	431200	116800	158000	75700	395000
10	50000	86600	97500	520796	202993	214198	87698	466100

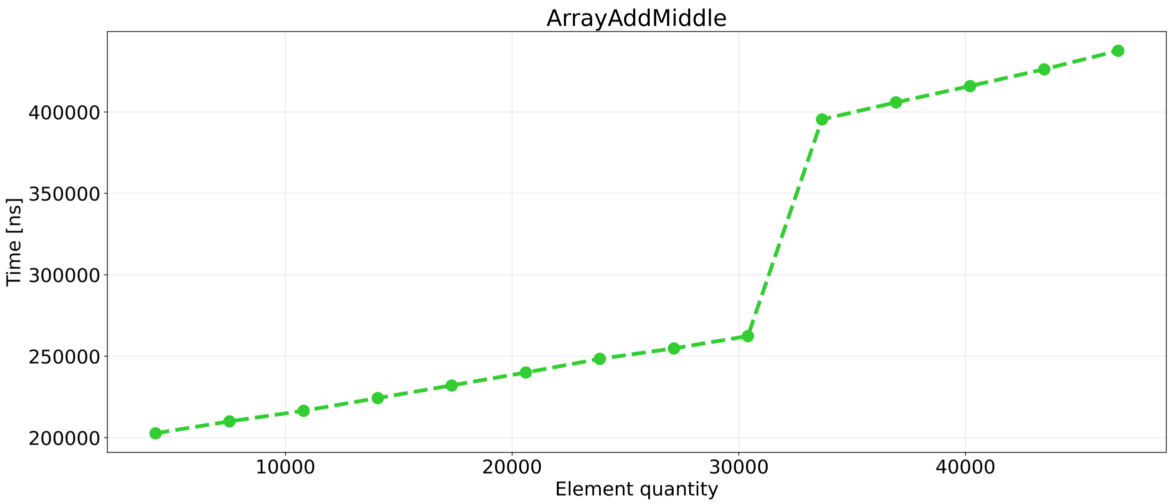
Wykres dodawania elementu z przodu tablicy



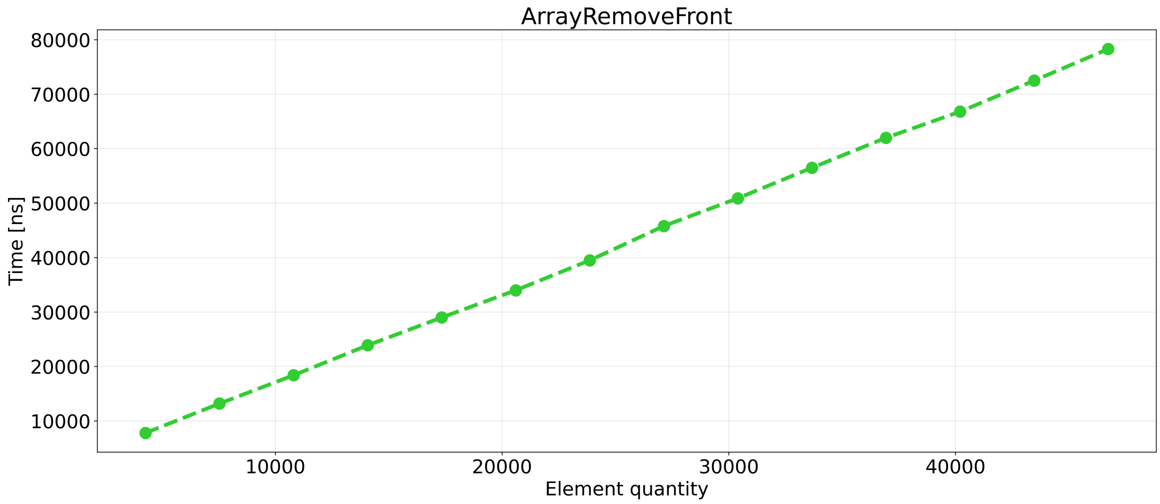
Wykres dodawania elementu z tyłu tablicy



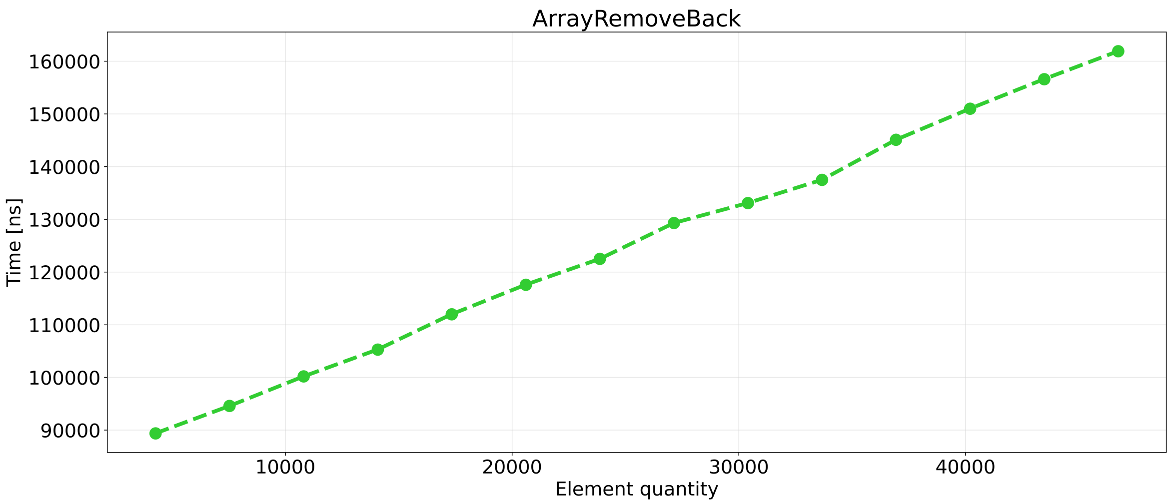
Wykres dodawania elementu w środku tablicy



Wykres usuwania elementu z przodu tablicy



Wykres usuwania elementu z tyłu tablicy



Wykres usuwania elementu w środku tablicy

Wykres znajdowania elementu w tablicy

Wnioski na temat tablicy

Czas wykonywania operacji wzrastał wraz z ilością elementów w tablicy, więc czas potrzebny na dodawanie, usuwanie bądź znajdowanie elementu zależy od wielkości tej struktury. Wykresy są w większości funkcją liniową.

Pomiary listy dwukierunkowej

Opis ogólny operacji na liście dwukierunkowej

Lista jest podobna do tablicy – jest to ciąg elementów ustawionych w szereg. Każdy element tablicy posiada dwa wskaźniki – na element znajdujący się przed i za nim w liście. Pierwszy element ma wskaźnik na poprzedni element warty NULL a więc wskazuje na 'nic' , tak samo jest w przypadku ostatniego elementu listy którego wskaźnik na następny element też jest równy NULL.

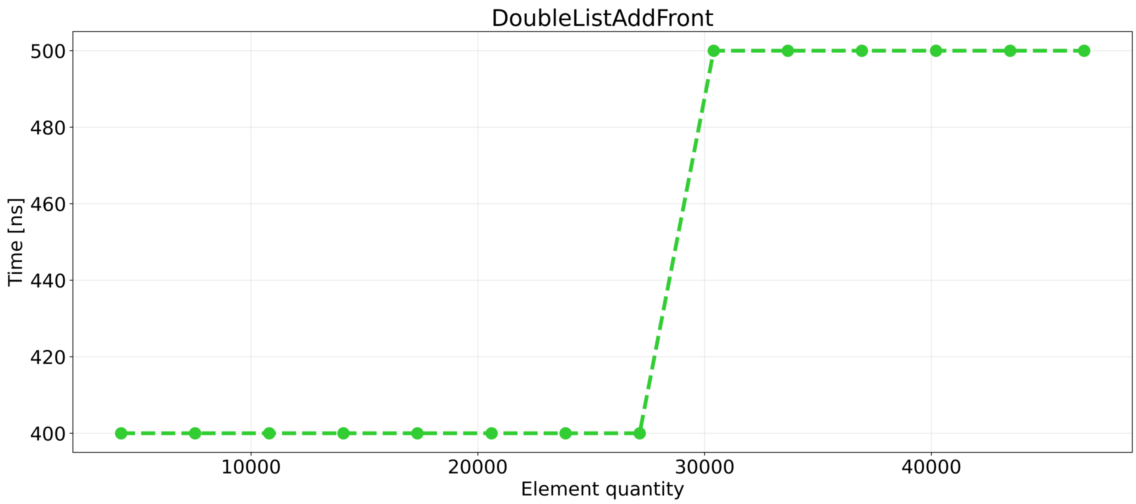
- Dodawanie na początek listy - Tworzony jest nowy element o zadanej wartości, do którego wskaźnika na element poprzedni wstawiamy NULL, a dla obecnego pierwszego elementu do wskaźnika na element poprzedni wstawiamy adres nowego elementu, by wreszcie przypisać nowemu elementowi status "głowy". Zwiększamy liczbę elementów. Jeśli lista była pusta to nowy element jest jednocześnie głową i ogonem.
- Dodawanie na koniec listy - Iterujemy na koniec listy, następnie gdy dojdziemy do ostatniego elementu dajemy mu wskaźnik na nasz nowo dodany element a nasz element dostaje wskaźnik na były ostatni element.

- Dodawanie na wybrane miejsce - Tworzymy nowy element i w adresie poprzednika wstawiamy adres elementu będącego na podanym adresie, a do adresu następcy – adres elementu będącego następcą elementu o zadanym adresie. Następnie zmieniamy adresy następcy (dla elementu o wybranym adresie) i poprzednika (dla elementu będącym następcą nowego elementu) aby wskazywały na nowy element i zwiększamy liczbę elementów.
- Usuwanie z początku listy - Zamieniamy status "głowy" z elementu pierwszego na element następny. Do adresu poprzednika nowej głowy wstawiamy adres NULL. Usuwamy niepotrzebny element z pamięci i zmniejszamy liczbę elementów.
- Usuwanie z końca listy - Iterujemy na ostatni element listy, usuwamy ostatni element a przedostatniemu dajemy wskaźnik na ostatni element = NULL.
- Usuwanie z wybranego miejsca - Do adresu następcy elementu o wybranym elemencie wstawiamy adres poprzednika wybranego elementu. Do adresu poprzednika elementu występującego po wybranym wstawiamy taki sam adres jaki posiadał usuwany element. Potem usuwamy z pamięci niepotrzebny element i zmniejszamy licznik elementów.
- Wyszukiwanie - Poczynając od głowy przeszukujemy zawartości komórek (klucze) pod kątem szukanej wartości. Przechodząc z elementu na element posługujemy się wskaźnikami zawierającymi adres następnego elementu. Operacja zwraca wskaźnik na nasz szukany element bądź wartość NULL.

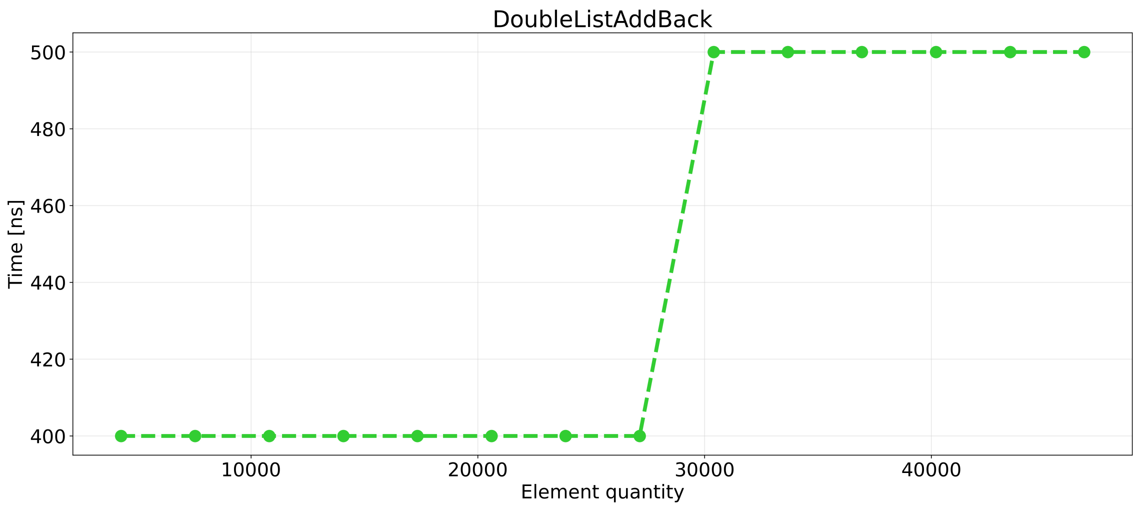
Wyniki pomiarów listy

	Liczba danych	**Dodawanie na koniec**	**Dodawanie na początek**	**Dodawanie gdziekolwiek**	**Szukanie**	**Usuwanie koniec**	**Usuwanie początek**	**Usuwanie gdziekolwiek**
L.p.	j	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$
1	1000	400	400	4600	2600	400	200	4500
2	5000	400	400	15900	14700	400	300	15800
3	10000	400	400	33700	35000	400	300	33600
4	15000	400	400	50900	55800	400	300	49900
5	20000	400	400	66800	79100	400	300	66800
6	30000	500	500	105000	142500	500	300	100900
7	35000	500	500	121200	183900	500	300	117200
8	40000	500	500	137800	244160	500	400	133900
9	45000	500	500	151300	383400	500	400	150400
10	50000	600	700	171000	735800	700	400	169100

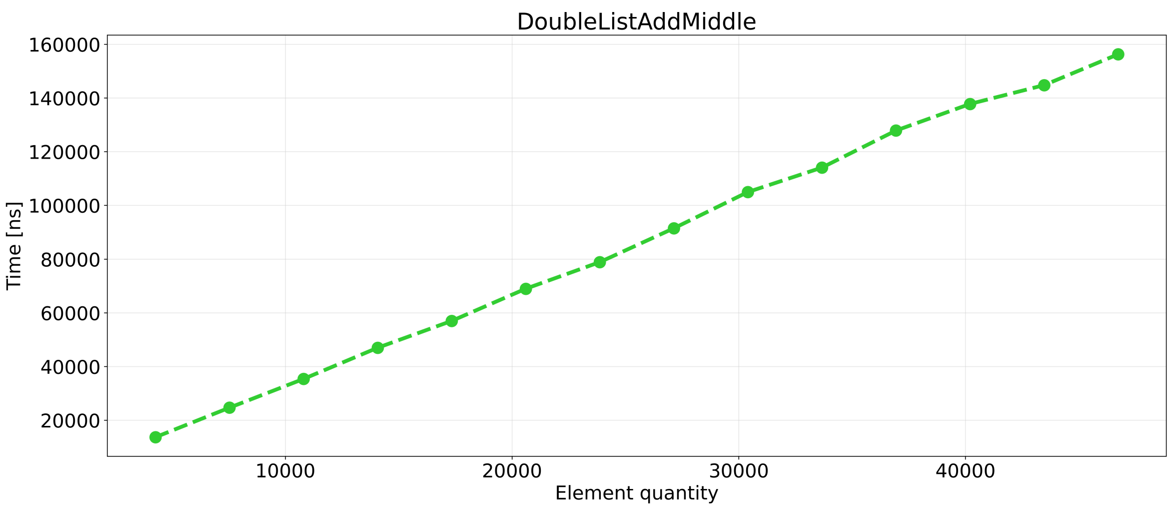
Wykres dodawania elementu z przodu listy



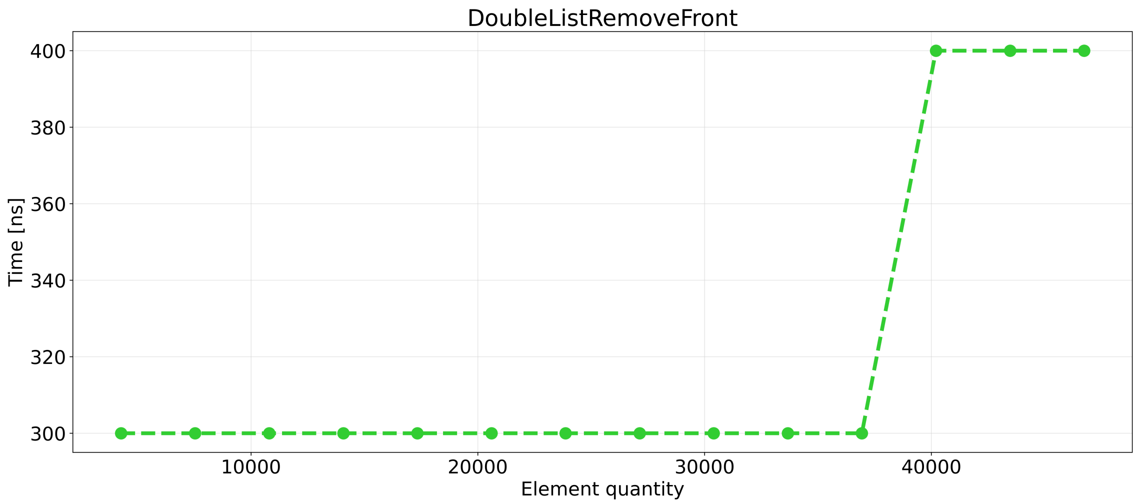
Wykres dodawania elementu z tyłu listy



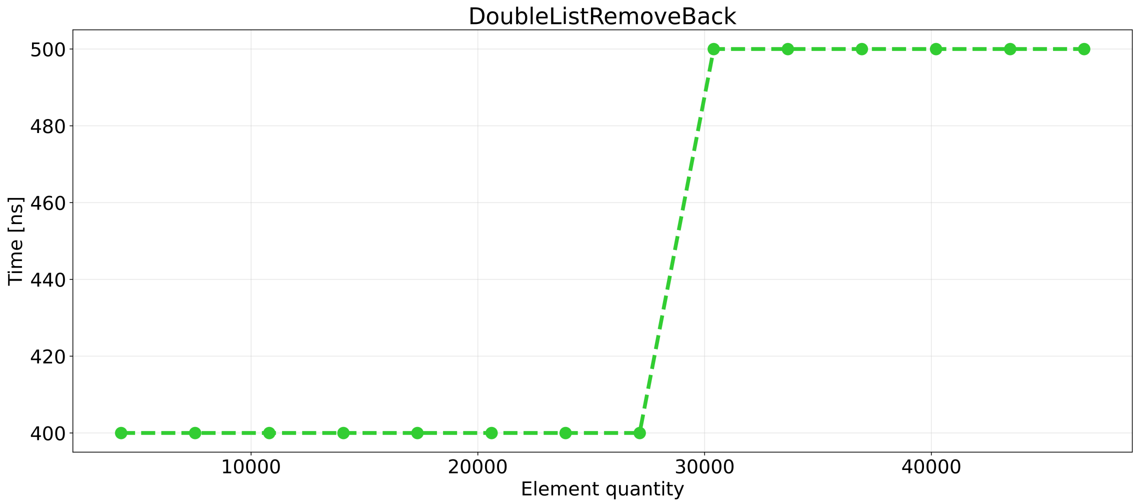
Wykres dodawania elementu w środku listy



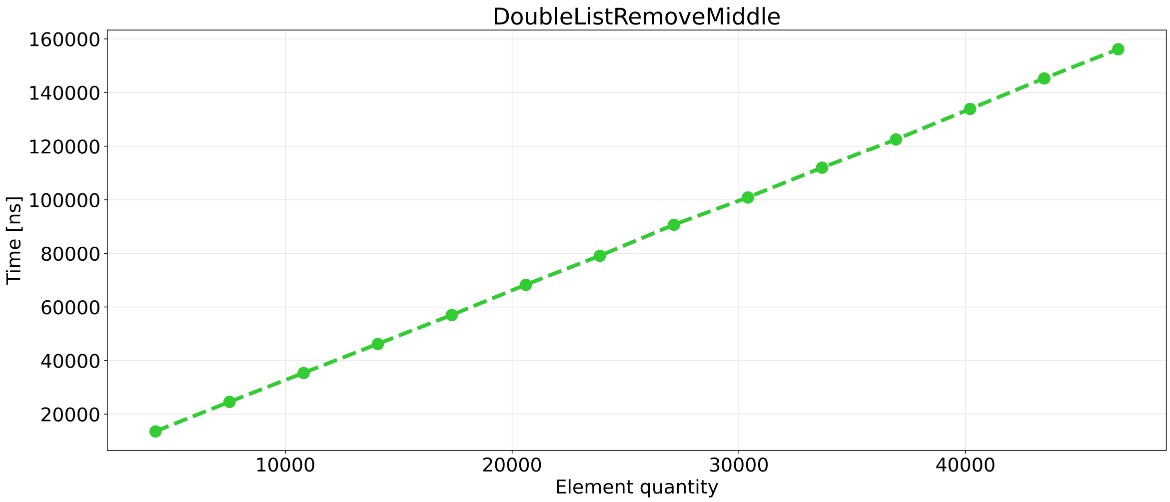
Wykres usuwania elementu z przodu listy



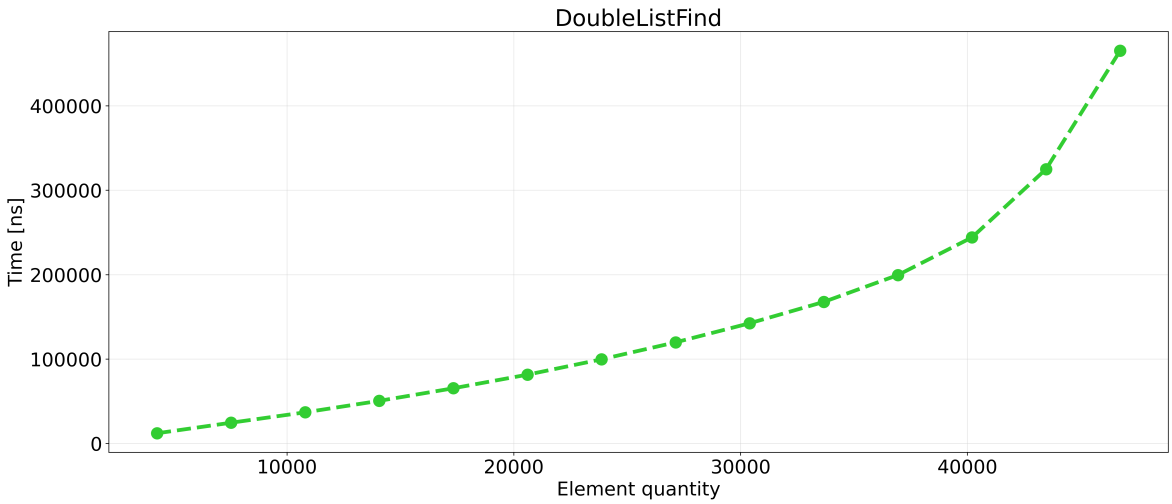
Wykres usuwania elementu z tyłu listy



Wykres usuwania elementu w środku listy



Wykres znajdowania elementu w liście



Wnioski na temat listy

Zgodnie z przewidywaniami czas operacji na przodzie tablicy był wręcz zerowy niezależnie od ilości elementów, reszta operacji była głównie liniowa.

Pomiary kopca binarnego

Opis ogólny operacji na kopcu binarnym typu maksimum

Tablicowa struktura danych reprezentująca drzewo binarne, którego wszystkie poziomy z wyjątkiem ostatniego muszą być pełne. W przypadku, gdy ostatni poziom drzewa nie jest pełny, liście ułożone są od lewej do prawej strony drzewa. W kopcu typu MAX wartość danego węzła niebędącego korzeniem jest zawsze mniejsza niż wartość jego rodzica.

- Dodawanie elementu - Dodawany element jest umieszczany na ostatniej pozycji w tablicy reprezentującej kopiec, a więc jako najmniejszy 'liść'. Potem jego wartość jest sprawdzana z wartością rodzica i jeśli jest od niej większy – zamieniamy the elementy miejscami. Idziemy tak długo aż warunek nie zostanie spełniony. Budujemy kopiec od nowa korzystając z nowej tablicy.

- Usuwanie elementu - Wyrzucamy dany element z tabeli i ponownie budujemy kopiec z nowych wartości (przypisanych do nowych indeksów). W najgorszym przypadku jest to wyrzucenie korzenia co oznacza zamianę pozycji wszystkich elementów.

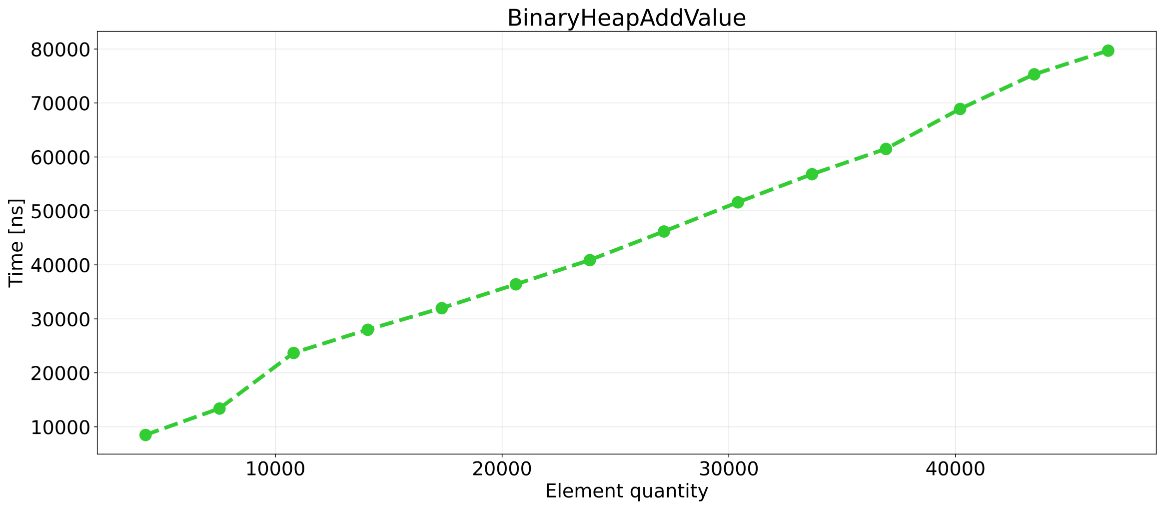
- Wyszukiwanie zadanej wartości - Wyszukiwanie elementu nie różni się niczym od innych struktur opartych na tabeli - Operacja zwraca wartość indeksu pod którą znajduje się wartość bądź liczbę -1.

Wyniki pomiarów kopca

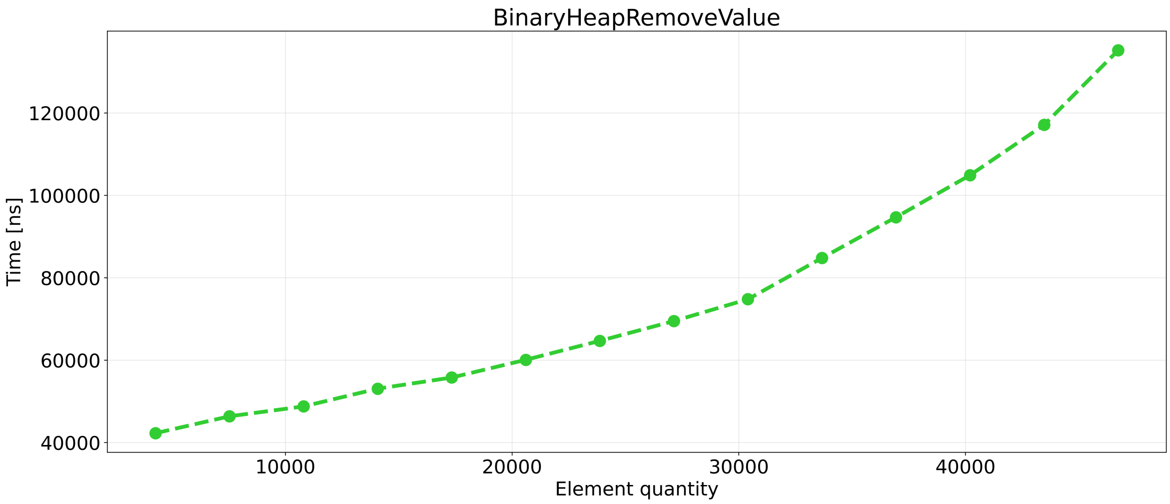
	Liczba danych	Dodawanie	Szukanie	Usuwanie
L.p.	j	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$
1	1000	3400	2000	40500
2	5000	9600	6700	43500
3	10000	23000	13200	48400
4	15000	29300	19700	54000
5	20000	35700	26600	59700

	Liczba danych	Dodawanie	Szukanie	Usuwanie
6	30000	51600	42500	74800
7	35000	59300	48300	89800
8	40000	68900	54700	104900
9	45000	77000	63800	125200
10	50000	95298	75600	170098

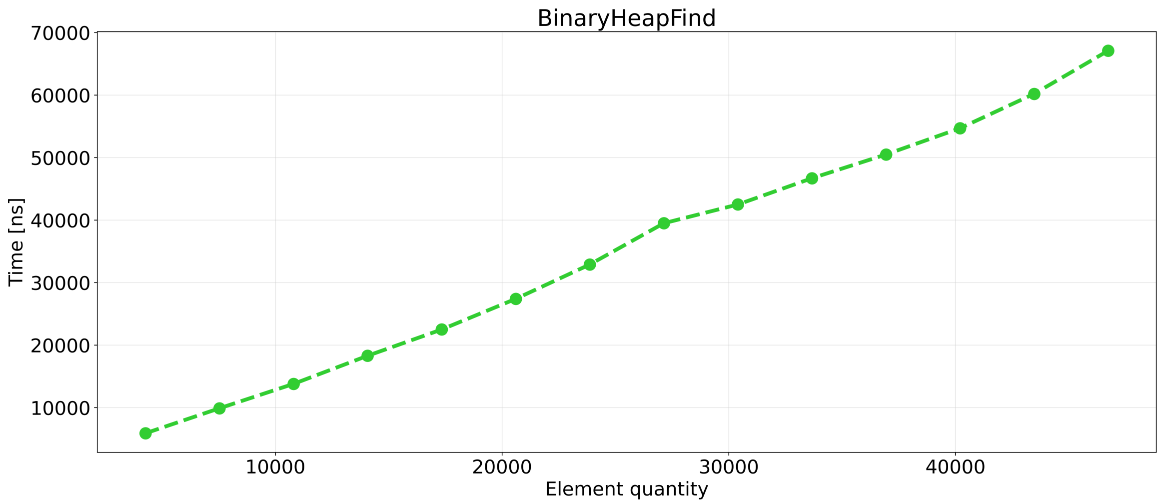
Dodawanie elementu w kopcu



Usuwanie elementu w kopcu



Znajdowanie elementu w kopcu



Wnioski na temat kopca

Można zauważyć że złożoność dodawania oraz odejmowania jest zawsze złożonością pesymistyczną, jest tak dlatego, że kopiec został zaimplementowany jako tablica, więc przy usuwaniu oraz przy dodawaniu jest za każdym razem tworzona nowa tablica.

Pomiary drzewa czerwono-czarnego

Opis ogólny operacji na drzewie czerwono-czarnym

Rodzaj samoorganizującego się binarnego drzewa poszukiwań. W porównaniu do zwykłego drzewa binarnego posiada ono dodatkowo parametr koloru za pomocą którego balansujemy drzewo. Podstawowymi zasadami drzewa czerwono-czarnego są:

- Każdy węzeł posiada kolor - czarny bądź czerwony
- Korzeń jest koloru czarnego
- Każdy liść (NULL) jest czarny
- Dla czerwonego węzła obydwoje dzieci jest czarnych
- Każda ścieżka od ustalonego węzła do liścia musi zawierać tą samą ilość czarnych węzłów
- Dodanie elementu - W odróżnieniu od drzew BST, wstawiając element musimy pamiętać, aby zachować zrównoważenie drzewa. Wstawienie elementu w dowolnym miejscu może powodować zaburzenie struktury kolorystycznej drzewa. Aby uniknąć pomyłek należy zastosować następujący algorytm:

1.Początkowo wstawiamy element tak, jak do standardowego drzewa BST. 2.Kolor każdego nowo dodanego elementu jest czerwony. 3.Jeżeli rodzic wstawionego węzła jest czarny to własność drzewa została zachowana. 4.Jeżeli rodzic wstawionego węzła jest czerwony to własność 3 została zaburzona (rodzic i syn mają kolor czerwony). Aby przywrócić własność należy przekolorować wybrane węzły i zmienić relację między konfliktującymi węzłami.

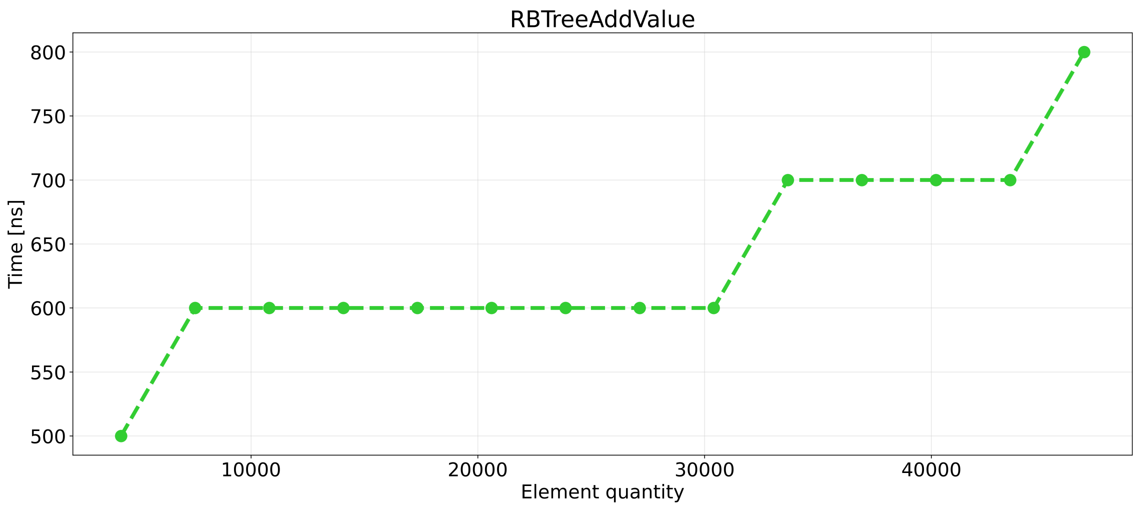
- Usunięcie elementu - Podobnie, jak w przypadku wstawiania, usuwanie wymaga dodatkowej uwagi w celu zachowania zrównoważenia drzewa. Tym razem, zamiast martwić się o rodzica wstawianego elementu, skupić należy uwagę na kolorze usuwanego węzła. Należy pamiętać, że jeżeli usuwany wierzchołek jest czerwony, czarna wysokość drzewa nie jest zakłócona, natomiast jeżeli usuwany wierzchołek jest czarny należy naprawić wysokość dla każdej ścieżki w drzewie.

- Wyszukanie wartości - Wyszukiwanie elementu o kluczu k odbywa się tak samo jak wyszukiwanie w standardowym drzewie BST. Funkcja wyszukująca jako parametry przyjmuje wskaźnik do korzenia drzewa oraz wartość do znalezienia. Funkcja bool zwraca prawdę, jeżeli element został znaleziony, lub fałsz, jeżeli nie występuje w drzewie.

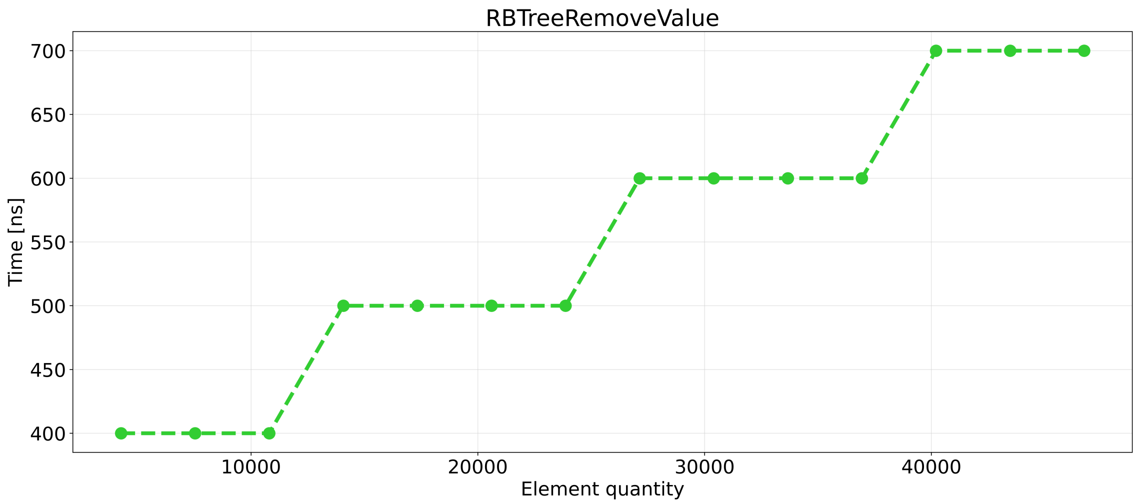
Wyniki pomiarów drzewa

	Liczba danych	Dodawanie	Szukanie	Usuwanie
L.p.	j	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$
1	1000	500	300	400
2	5000	500	400	400
3	10000	600	400	400
4	15000	600	400	500
5	20000	600	400	500
6	30000	600	400	600
7	35000	700	500	600
8	40000	700	500	700
9	45000	700	500	700
10	50000	1100	700	900

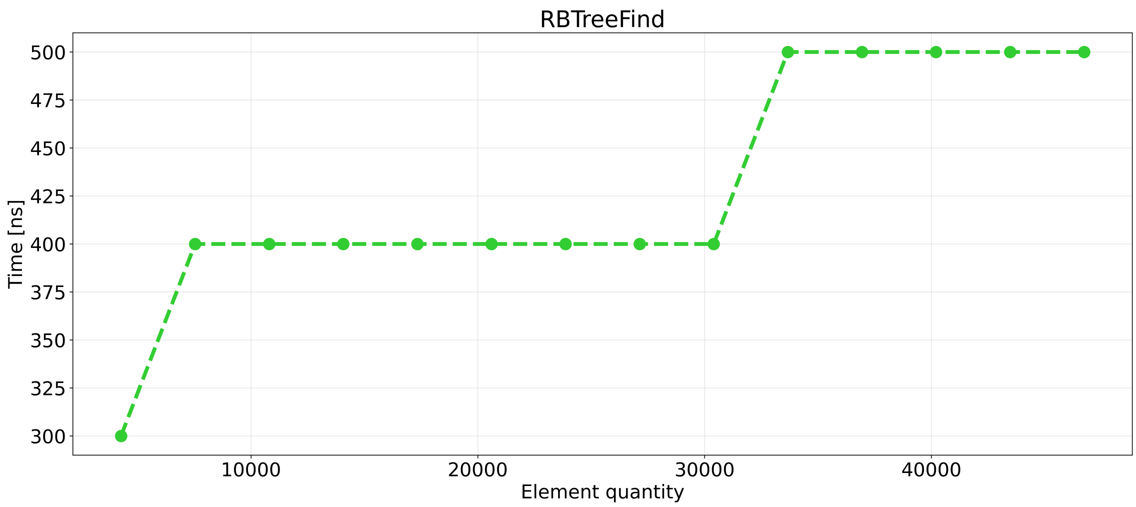
Dodawanie elementu w drzewie



Usuwanie elementu w drzewie



Znajdowanie elementu w drzewie



Wnioski na temat drzewa

Wykresy wyszły bardzo interesujące, widać wyraźnie momenty przejścia na dłuższe czasy wykonywania operacji lecz i tak wszystkie funkcje miały krótki czas wykonania.

Pomiary drzewa AVL

Opis ogólny operacji na drzewie AVL

Nazywane również drzewem dopuszczalnym – zrównoważone binarne drzewo poszukiwań (BST), w którym wysokość lewego i prawego poddrzewa każdego węzła różni się co najwyżej o jeden. Skrót AVL pochodzi od nazwisk rosyjskich matematyków: Adelsona-Velskiego oraz Landisa. Aby osiągnąć warunek rożnicy co najwyżej o 1, drzewo AVL posiada zmodyfikowane procedury wstawiania i usuwania węzłów. Równoważenie uzyskuje się poprzez odpowiednie rotacje w lewo i w prawo węzłów drzewa na ścieżce w kierunku korzenia, jeśli został zaburzony warunek drzewa AVL (wysokości poddrzew różnią się co najwyżej o 1) po wstawieniu nowego węzła lub po usunięciu istniejącego węzła. Koszty modyfikacji drzewa AVL są większe niż innych drzew lecz mamy gwarancję że pesymistyczny czas wyszukiwania nigdy nie przekroczy $1.44log_2(n+2)-0.328$.

- Dodanie elementu - Wstawiamy element jak do zwykłego drzewa BST, następnie wykonujemy aktualizację wyważeń węzłów od wstawionego elementu korzenia. Jeżeli w danym węźle współczynnik wyważenia $|x| > 1$ to należy przywrócić właściwości drzewa rotacjami (max. potrzebne będą dwie rotacje)

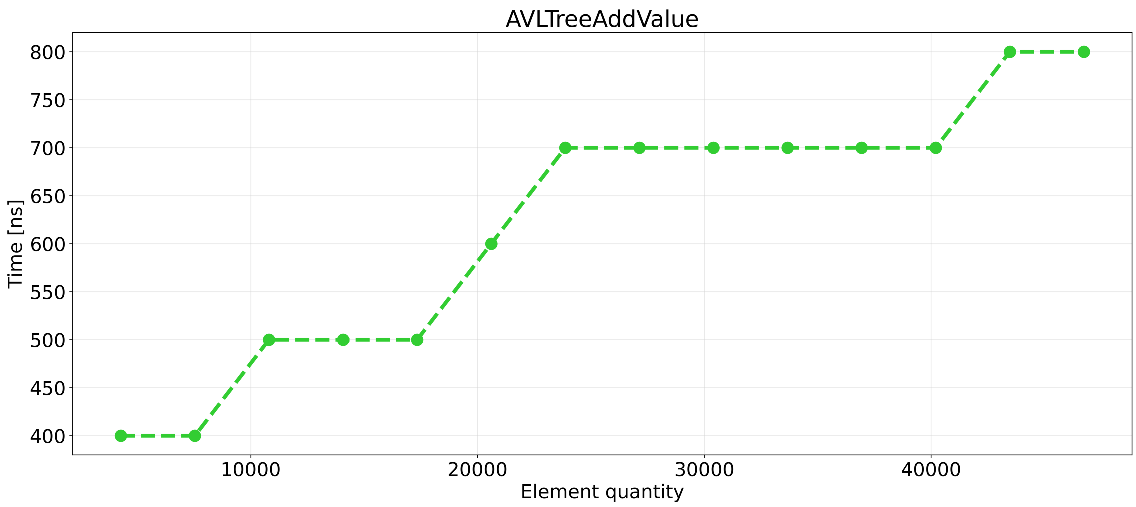
- Usuwanie elementu - usuwamy element jak w zwykłym BST, wykonujemy wyważenie od rodzica do usuniętego elementu aż do korzenia. jeżeli współczynnik wyważenia $|x| > 1$ to należy przywrócić właściwości drzewa za pomocą rotacji.

- Wyszukanie wartości - Wyszukiwanie elementu o kluczu k odbywa się tak samo jak wyszukiwanie w standardowym drzewie BST. Funkcja wyszukująca jako parametry przyjmuje wskaźnik do korzenia drzewa oraz wartość do znalezienia. Funkcja bool zwraca wskaźnik na element, jeżeli wartość została znaleziona, lub NULL, jeżeli nie występuje w drzewie.

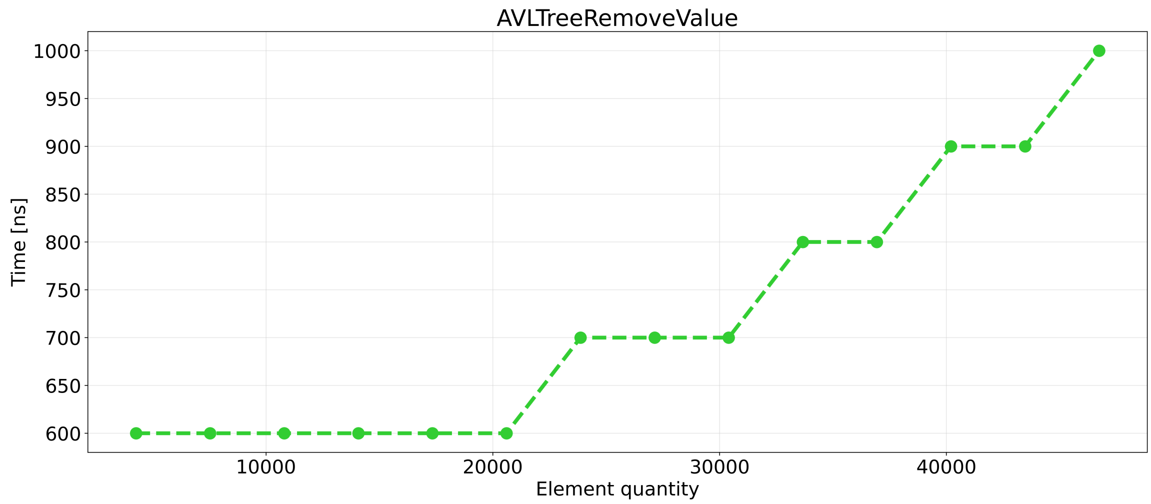
Wyniki pomiarów drzewa AVL

	Liczba danych	Dodawanie	Szukanie	Usuwanie
L.p.	j	$[ns]$	$[ns]$	$[ns]$
1	1000	300	300	500
2	5000	400	300	600
3	10000	500	400	600
4	15000	500	400	600
5	20000	600	400	600
6	30000	700	400	700
7	35000	700	400	800
8	40000	700	400	900
9	45000	800	500	900
10	50000	1000	600	1100

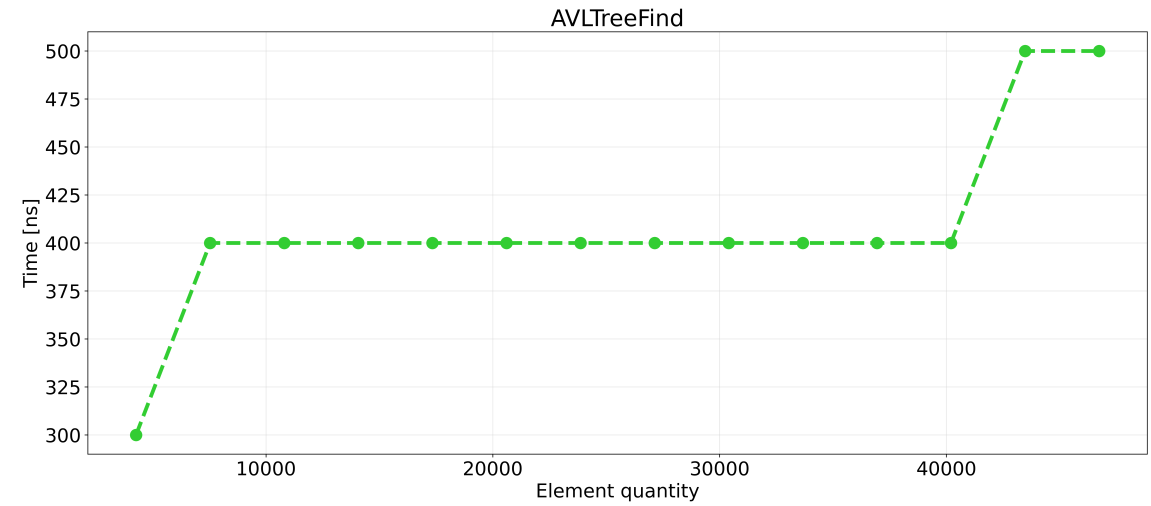
Dodawanie elementu w drzewie AVL



Usuwanie elementu w drzewie AVL



Znajdowanie elementu w drzewie AVL



Wnioski na temat drzewa AVL

Podobnie do drzewa czerwono-czarnego na wykresach są widoczne sekcje, czasy wykonania są dłuższe ponieważ w drzewie AVL dodatkowo występuje balansowanie drzewa.

Wnioski końcowe

Podsumowując wykonane pomiary większość wyszła zgodnie z przewidywaniami, w niektórych miejscach mamy dziwne przesunięcia, najprawdopodobniej jest to spowodowane:

- Słabo zoptymalizowane algorytmy
- Działanie innych programów podczas wykonywania pomiarów co spowodowało odchylenia i błędy pomiarowe

Eksperymenty wykazały, że najbardziej efektywną strukturą do przechowywania wartości jest drzewo czerwono-czarne gdyż ma najmniejsze czasy wykonywania operacji ze wszystkich struktur. (Nawet jeżeli lista dwukierunkowa ma wręcz infinitezymalny czas operacji na elementach z przodu tablicy to i tak w większości przypadków potrzebujemy elementów z środkowych części struktury)

Bibliografia

Jarosław Mierzwa

Wikipedia - Array

Wikipedia - Double Linked List

Wikipedia - Red-Black Tree

Eduinf Waw - Red-Black Tree

Red-Black Tree Visualisation

Wikipedia - AVL Tree

Eduinf Waw - AVL Tree

AVL Tree Visualisation

Chrono Clock

Chrono High Resolution Clock

Python Pyplot

Python Statistics

Lambda in C++

StackOverflow - Access violation reading location