

Struktury Danych i Złożoność Obliczeniowa - Projekt: Sprawozdanie

Wydział Elektroniki

Kierunek: Informatyka Techniczna

Grupa zajęciowa Wt 15:15

Semestr: 2020/2021 Lato

Prowadzący:

Dr inż. Dariusz Banasiak

Autor

Byczko Maciej

Wstęp

Zadanie projektowym było napisanie programu i zmierzenie czasu wykonywania działań na:

- Tablice dynamicznej
- Liście dwukierunkowej
- Kopcu binarnym typu MAX
- drzewie czerwono-czarnym

Działania wykonywane na powyższych strukturach były następujące:

- Dodawanie
- Usuwanie
- Znajdowanie

Założenia

- 4 bajtowa liczba całkowita ze znakiem (int w C++)
- wszystkie struktury danych powinny być alokowane dynamicznie
- należy zmierzyć czasy wykonywania poszczególnych operacji w funkcji rozmiaru danej struktury
- językami programowania są języki komplilowane do kodu natywnego (C, Objective C, C++, Rust, GO)
- nie wolno korzystać z gotowych bibliotek np. STL, Boost lub innych – wszystkie algorytmy i struktury muszą być zaimplementowane przez studenta
- realizacja zadania powinna być wykonana w formie jednego programu
- kod źródłowy powinien być komentowany
- program musi skompilowany do wersji exe

Dodatkowe funkcje

- utworzenie struktury na podstawie danych zapisanych w pliku tekstowym. Pierwsza liczba określa rozmiar struktury, następnie należy wprowadzić odpowiednią liczbę danych np. każda liczba w osobnej linii
- wyświetlenie struktury na ekranie (w przypadku drzew zaproponować odpowiednią formę, która uwzględnia relacje między elementami tej struktury)
- możliwość wykonania wszystkich przewidzianych operacji na danej strukturze (wybór operacji najlepiej zrealizować w formie menu)
- Projekt został napisany w języku C++ w standardzie C++20
- Do pisania oraz komplikacji zostało użyte środowisko CLion
- Wykresy oraz dane zostały przetworzone za pomocą skryptu napisanego w Pythonie w wersji 3.9.4
- Losowe dane do losowych struktur są generowane za pomocą funkcji rand()

- Wyniki zostały uśrednione za pomocą biblioteki statistics w Pythonie

Złożoności obliczeniowe

Ogólne informacje

Złożoność obliczeniowa jest nam potrzebna aby określić ilość zasobów potrzebnych do rozwiązania problemu obliczeniowego. Rozważanymi zasobami są głównie:

- Czas (Czasowa złożoność obliczeniowa)- ilość czasu potrzebna do wykonania algorytmu
- Pamięć (Pamięciowa złożoność obliczeniowa)- ilość pamięci wykorzystanej w celu realizacji algorytmu

Dla każdego algorytmu można wyróżnić trzy typy złożoności:

- Optymistyczna - Najkrótszy możliwy czas wykonania algorytmu dla najkorzystniejszego zbioru danych (nie będę jej umieszczał w tabelach ponieważ wynosi ona zawsze $O(1)$ (Dodanie elementu do pustej struktury))
- Średnia - Typowe zużycie zasobów dla losowego zbioru danych
- Pesymistyczna - Najdłuższy czas wykonania algorytmu dla najmniej korzystnego zbioru danych

W tabelach litera **n** oznacza ilość elementów w strukturze

Złożoność tablicy dynamicznej

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(n)$	$O(n)$
Usuwanie	$O(n)$	$O(n)$
Znajdowanie	$O(n)$	$O(n)$
Dostęp	$O(1)$	$O(n)$

Złożoność listy dwukierunkowej

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(1)$	$O(n)$
Usuwanie	$O(1)$	$O(n)$
Znajdowanie	$O(n)$	$O(n)$
Dostęp	$O(n)$	$O(n)$

Złożoność kopca binarnego

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(\log(n))$	$O(n)$
Usuwanie	$O(\log(n))$	$O(n)$
Znajdowanie	$O(n)$	$O(n)$

Złożoność drzewa czerwono-czarnego

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
---------	---------	---------------

Funkcja	Średnia	Pesymistyczna
Dodawanie	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$
Usuwanie	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$
Znajdowanie	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$

Plan eksperymentu

Informacje ogólne

- Pomiar czasu podczas dodawania elementów od 1000 do 45000
- Funkcja mierząca czas: `std::chrono::high_resolution_clock`
- Sposób generacji struktur:
 - Tworzenie struktury z losowymi danymi o podanym rozmiarze
 - Wykonanie operacji mierzonej
 - Zapisanie wyniku do pliku
 - Powtórzanie operacji (wartość zadana przez użytkownika)

Pomiary czasowe

Pomiar czasowe były mierzone w **nanosekundach** $(1 \text{ [ns]} = 1 * 10^9 \text{ [s]})$ za pomocą następującej funkcji:

```
template<typename T>
double Timer(T i) {
    auto start = chrono::high_resolution_clock::now(); // Start the counter
    i(); // our function
    auto end = chrono::high_resolution_clock::now(); // Get value after executing function
    auto duration = end - start; // get time difference
    auto elapsed_time = chrono::duration_cast<chrono::nanoseconds> (duration).count(); // calculate time
    return elapsed_time; // Return executing time in nanoseconds
}
```

Wyniki wykonanych eksperymentów

Pomiary tablicy dynamicznej

Opis ogólny operacji na tablicy

Jedna z najprostszych struktur – jest ona zbiorem elementów z przypisanym indeksem który zależy od jej kolejności w strukturze – każdy element ma swój indeks. W tym przypadku będzie to tablica dynamiczna której wielkość może być dowolnie zadawana i zmieniana operacjami. Ważna jest tutaj relokacja pamięci – swoiste zbudowanie tablicy od nowa po wykonaniu operacji aby ‘odświeżyć’ zawartość tablicy.

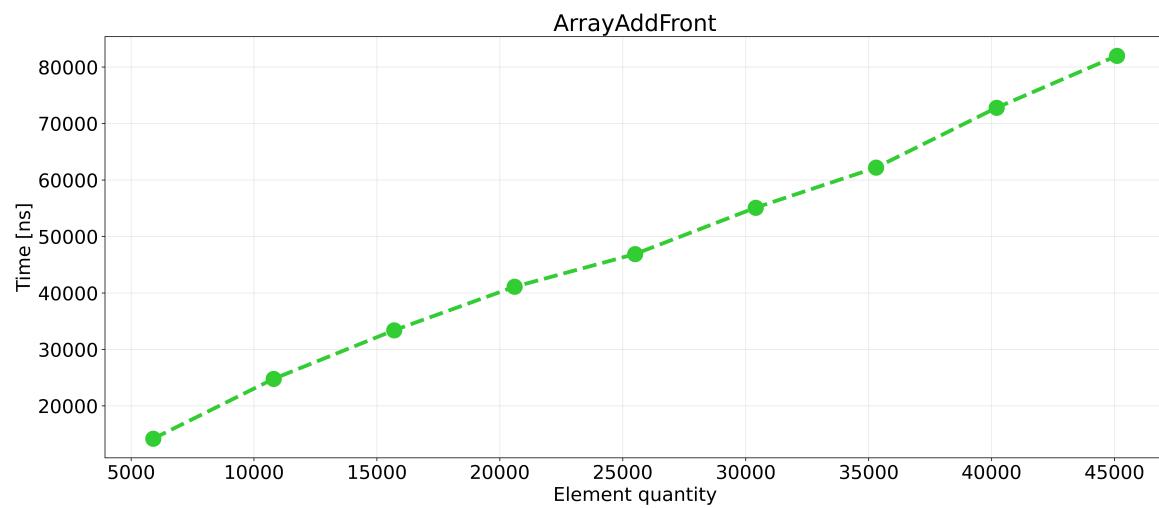
- Dodawanie na początku - Najpierw wymagane jest zwiększenie indeksu liczby elementów w tablicy o jeden, a następnie przesunięcie ich wszystkich o adres wyżej, tak aby pierwsze miejsce (początek) było puste. W to miejsce też (używając adresu początku tablicy) wstawiamy zadaną wartość.

- Dodawanie na końcu - Podobnie jak wyżej liczba elementów zostaje zwiększona o jeden jednak przesuwanie nie jest wymagane gdyż nowo stworzony indeks jest 'pusty' – tam wstawiamy zadaną wartość.
- Dodawanie w wybranym miejscu - Zwiększenie ilości elementu o jeden, a następnie iteracja do podanego indeksu, po wstawieniu elementu następuje operacja wpisania do pozostałych pól wartości ze starej tablicy
- Usuwanie z początku tablicy - Operacja ta wpierw usuwa wartość z pierwszej komórki tablicy, a następnie przesuwa wszystkie pozostałe elementy wstecz. Wtedy ostatnia komórka jest pusta i zostaje usunięta, zmniejszając liczbę elementów o jeden.
- Usuwanie z końca tablicy - Usuwa ostatni element z tablicy, zmniejszając liczbę elementów o jeden.
- Usuwanie z wybranego miejsca - Szukamy zadanego indeksu z następnie usuwamy z niego wartość. Potem wszystkie elementy powyżej są przesuwane do tyłu, a ostatnia (pusta) komórka jest usuwana zmniejszając liczbę elementów.
- Wyszukiwanie:
 - Wartości - Przeszukuje wszystkie indeksy od początku i sprawdza ich wartość z zadaną. Jeśli element został znaleziony – daje komunikat i wartość indeksu pod którą się znajduje. Jeśli element nie istnieje lub jest na końcu złożoność czasowa jest równa $O(n)$ gdzie n to liczba elementów tablicy. W innym przypadku jest zależna od pozycji szukanego klucza.
 - Indeksu - Rzuca wartość znajdująca się pod danym indeksem, w innym przypadku rzuca bool=false

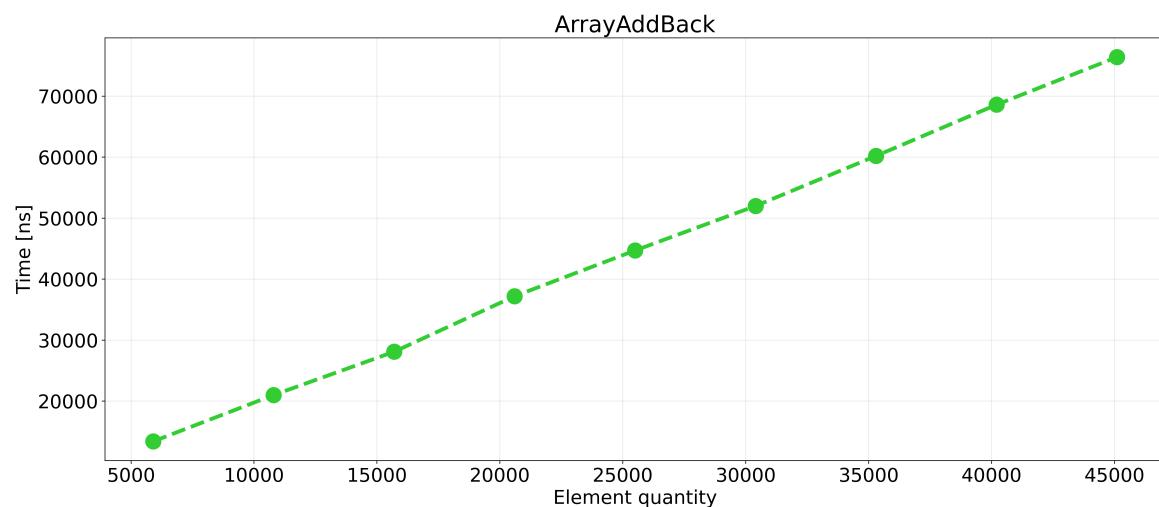
Wyniki pomiarów tablicy

Liczba danych	Dodawanie na początek	Dodawanie na koniec	Dodawanie gdziekolwiek	Usuwanie początek	Usuwanie koniec	Usuwanie gdziekolwiek	Szukanie
L.p.	j	[\$ns]\$	[\$ns]\$	[\$ns]\$	[\$ns]\$	[\$ns]\$	[\$ns]\$
1	5000	14200	13400	208300	10200	92700	175800
2	10000	24800	21000	219700	18300	103700	185800
3	15000	33400	28100	231200	27000	109600	196600
4	20000	41100	37200	240300	34700	118300	203400
5	25000	46900	44700	251800	43000	126300	215500
6	30000	55100	52000	266200	51700	135300	266100
7	35000	62200	60200	395640	59600	142800	360100
8	40000	72800	68600	413800	67500	150900	376100
9	45000	82000	76400	428800	75800	189700	389200
							117400

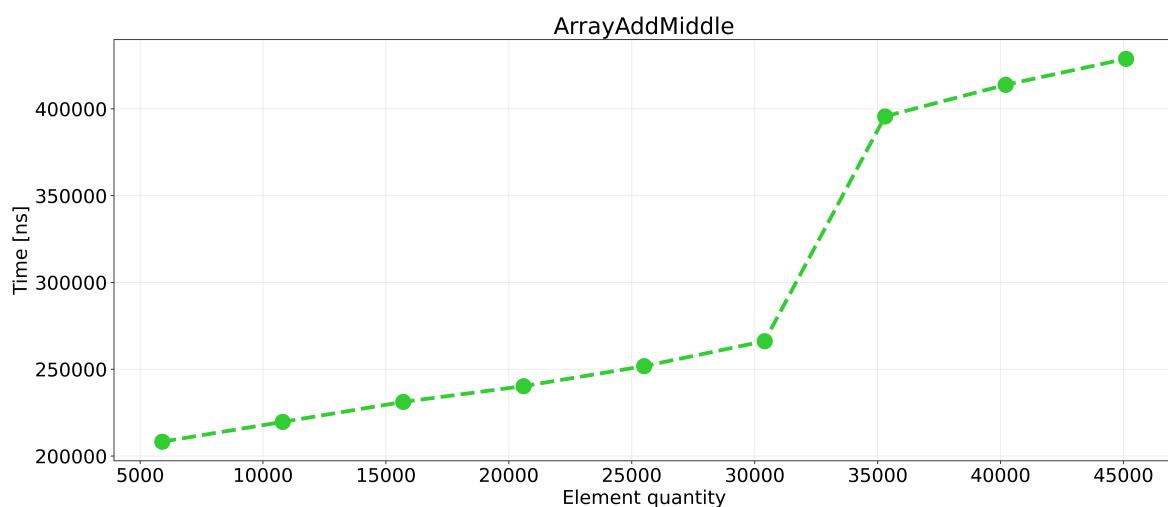
Wykres dodawania elementu z przodu tablicy



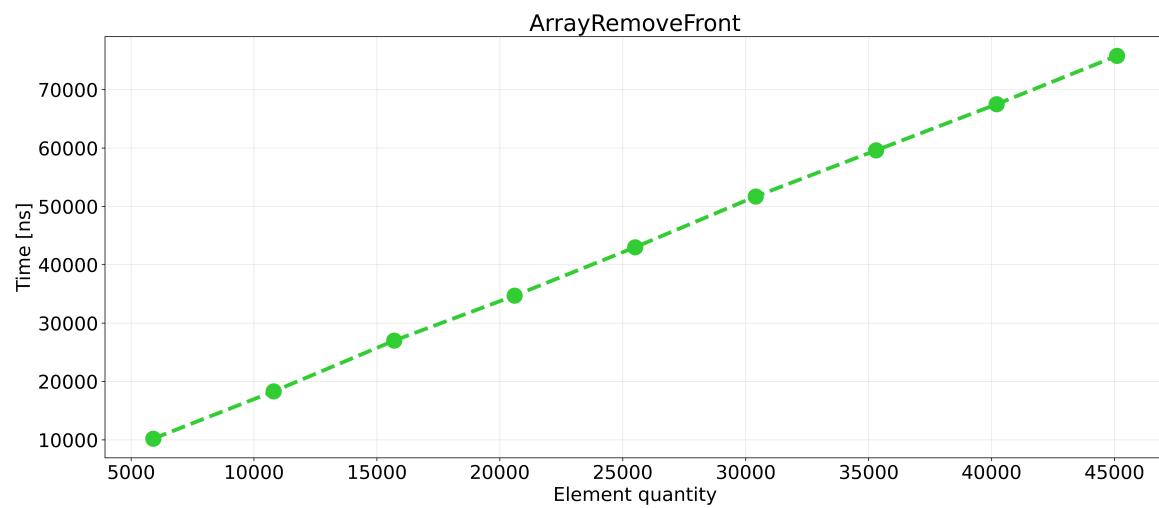
Wykres dodawania elementu z tyłu tablicy



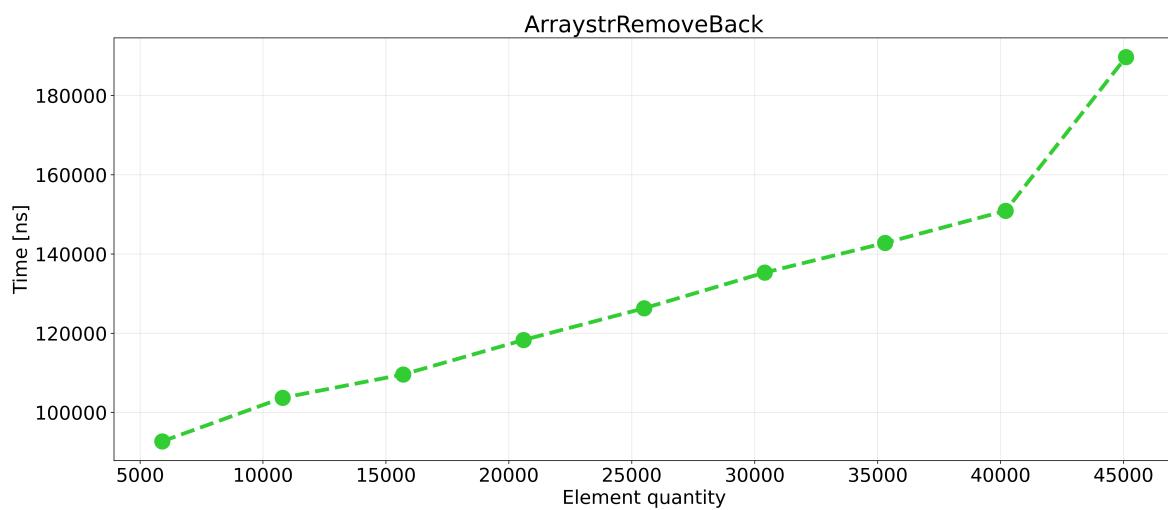
Wykres dodawania elementu w środku tablicy



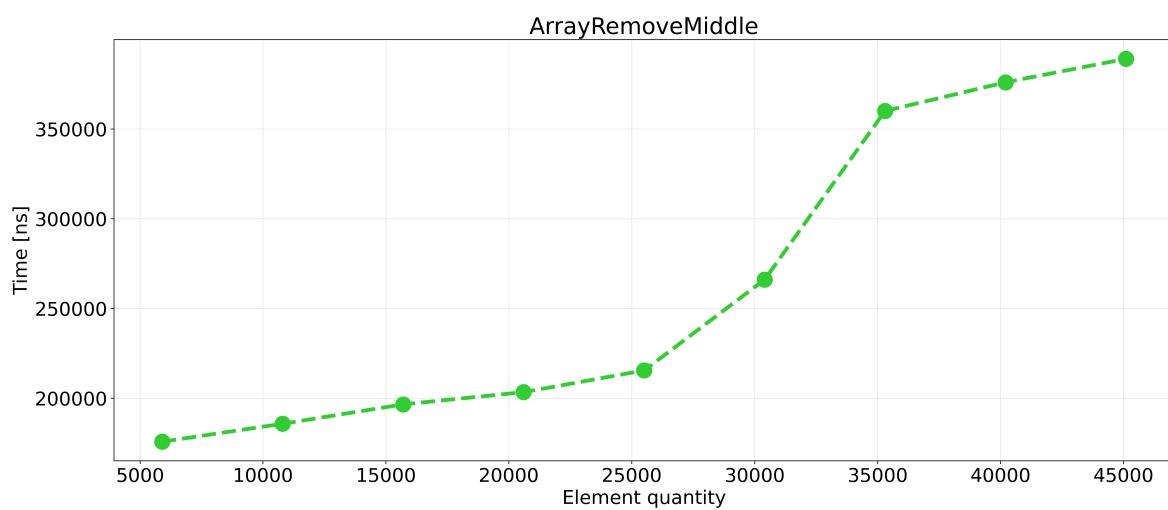
Wykres usuwania elementu z przodu tablicy



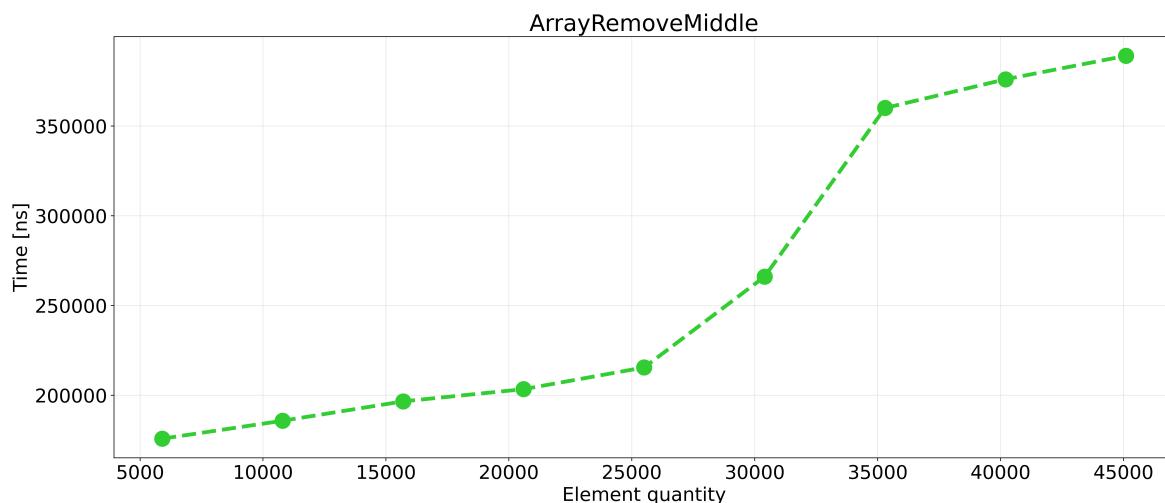
Wykres usuwania elementu z tyłu tablicy



Wykres usuwania elementu w środku tablicy



Wykres znajdowania elementu w tablicy



Wnioski na temat tablicy

Czas wykonywania operacji wzrastał wraz z ilością elementów w tablicy, więc czas potrzebny na dodawanie, usuwanie bądź znajdowanie elementu zależy od wielkości tej struktury. Wykresy są w większości funkcją liniową.

Pomiary listy dwukierunkowej

Opis ogólny operacji na liście dwukierunkowej

Lista jest podobna do tablicy – jest to ciąg elementów ustawionych w szeregu. Każdy element tablicy posiada dwa wskaźniki – na element znajdujący się przed i za nim w liście. Pierwszy element ma wskaźnik na poprzedni element warty NULL a więc wskazuje na 'nic', tak samo jest w przypadku ostatniego elementu listy którego wskaźnik na następny element też jest równy NULL.

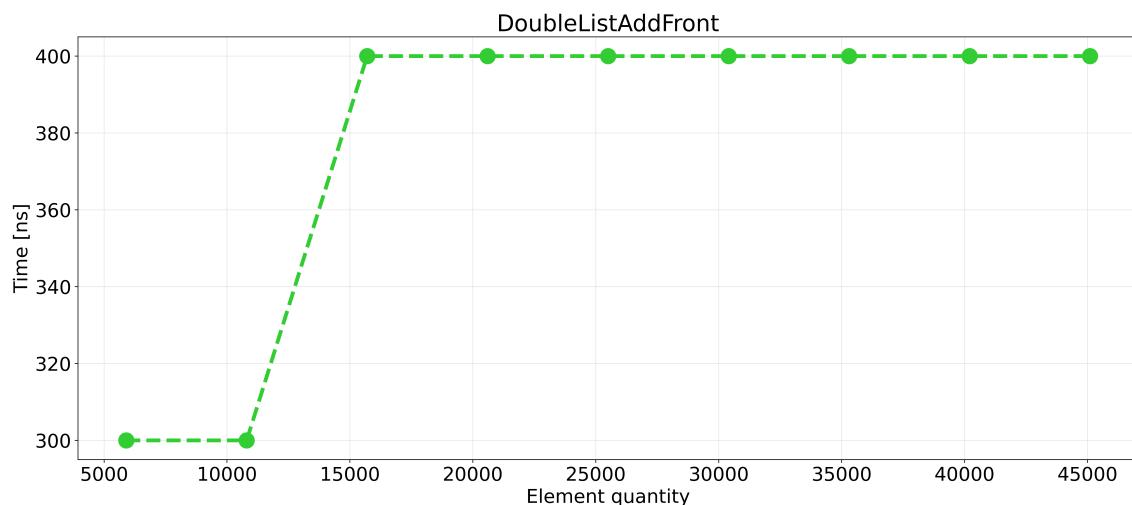
- Dodawanie na początek listy - Tworzony jest nowy element o zadanej wartości, do którego wskaźnika na element poprzedni wstawiamy NULL, a dla obecnego pierwszego elementu do wskaźnika na element poprzedni wstawiamy adres nowego elementu, by wreszcie przypisać nowemu elementowi status "głowy". Zwiększamy liczbę elementów. Jeśli lista była pusta to nowy element jest jednocześnie głową i ogonem.
- Dodawanie na koniec listy - Iterujemy na koniec listy, następnie gdy dojdziemy do ostatniego elementu dajemy mu wskaźnik na nasz nowo dodany element a nasz element dostaje wskaźnik na byłego ostatni element.
- Dodawanie na wybrane miejsce - Tworzymy nowy element i w adresie poprzednika wstawiamy adres elementu będącego na podanym adresie, a do adresu następcy – adres elementu będącego następcą elementu o zadanym adresie. Następnie zmieniamy adresy następcy (dla elementu o wybranym adresie) i poprzednika (dla elementu będącym następcą nowego elementu) aby wskazywały na nowy element i zwiększamy liczbę elementów.
- Usuwanie z początku listy - Zamieniamy status "głowy" z elementu pierwszego na element następny. Do adresu poprzednika nowej głowy wstawiamy adres NULL. Usuwamy niepotrzebny element z pamięci i zmniejszamy liczbę elementów.
- Usuwanie z końca listy - Iterujemy na ostatni element listy, usuwamy ostatni element a przedostatniemu dajemy wskaźnik na ostatni element = NULL.
- Usuwanie z wybranego miejsca - Do adresu następcy elementu o wybranym elemencie wstawiamy adres poprzednika wybranego elementu. Do adresu poprzednika elementu występującego po wybranym wstawiamy taki sam adres jaki posiadał usuwany element. Potem usuwamy z pamięci niepotrzebny element i zmniejszamy licznik elementów.

- Wyszukiwanie - Poczynając od głowy przeszukujemy zawartości komórek (klucze) pod kątem szukanej wartości. Przechodząc z elementu na element posługujemy się wskaźnikami zawierającymi adres następnego elementu. Operacja zwraca wskaźnik na nasz szukany element bądź wartość NULL.

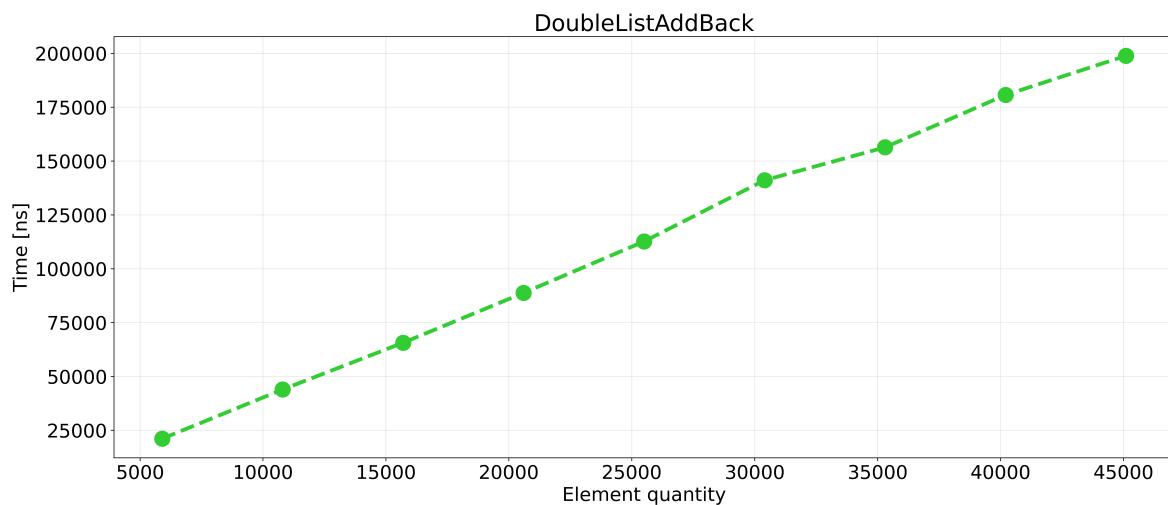
Wyniki pomiarów listy

Liczba danych	Dodawanie na początek	Dodawanie na koniec	Dodawanie gdziekolwiek	Usuwanie początek	Usuwanie koniec	Usuwanie gdziekolwiek	Szukanie
L.p.	j	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$
1	5000	300	21100	19500	100	400	19400
2	10000	300	43940	36900	100	400	36000
3	15000	400	65660	52900	100	400	52800
4	20000	400	88800	70800	100	400	69400
5	25000	400	112700	86500	100	400	85800
6	30000	400	141100	100500	100	400	02000
7	35000	400	156400	117000	100	400	18900
8	40000	400	180700	133100	100	400	35900
9	45000	400	198900	149800	100	500	55900
							277400

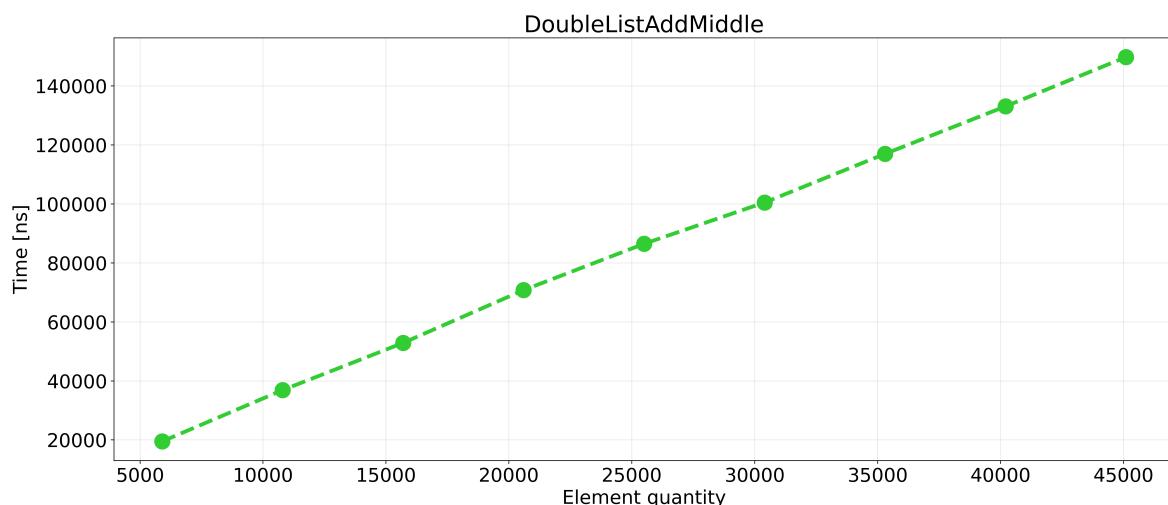
Wykres dodawania elementu z przodu listy



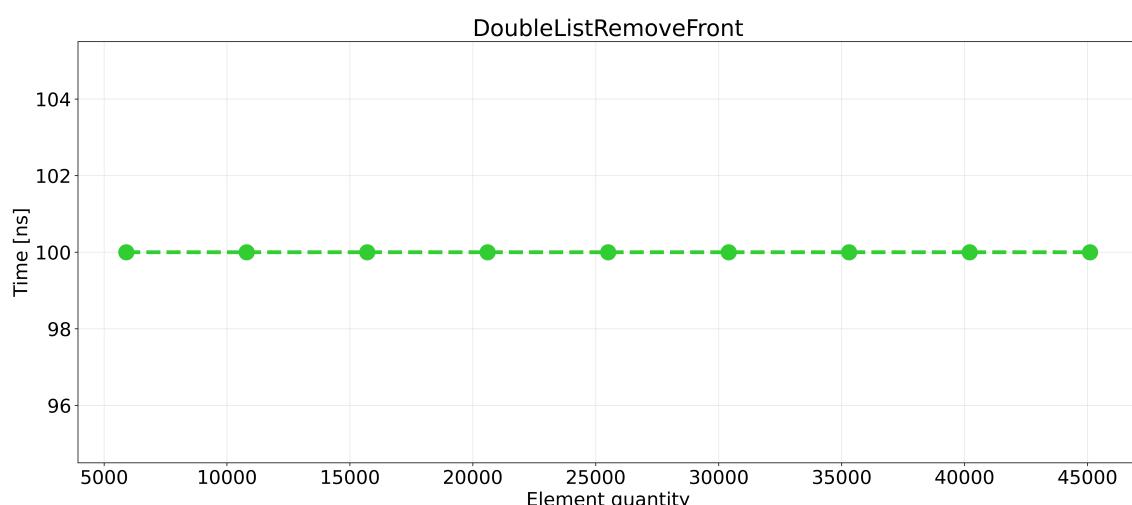
Wykres dodawania elementu z tyłu listy



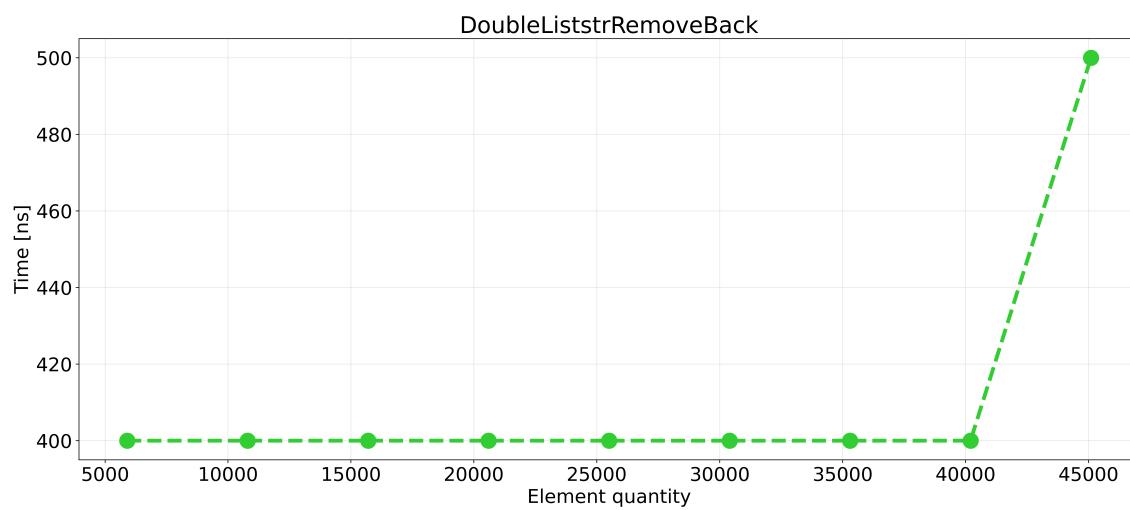
Wykres dodawania elementu w środku listy



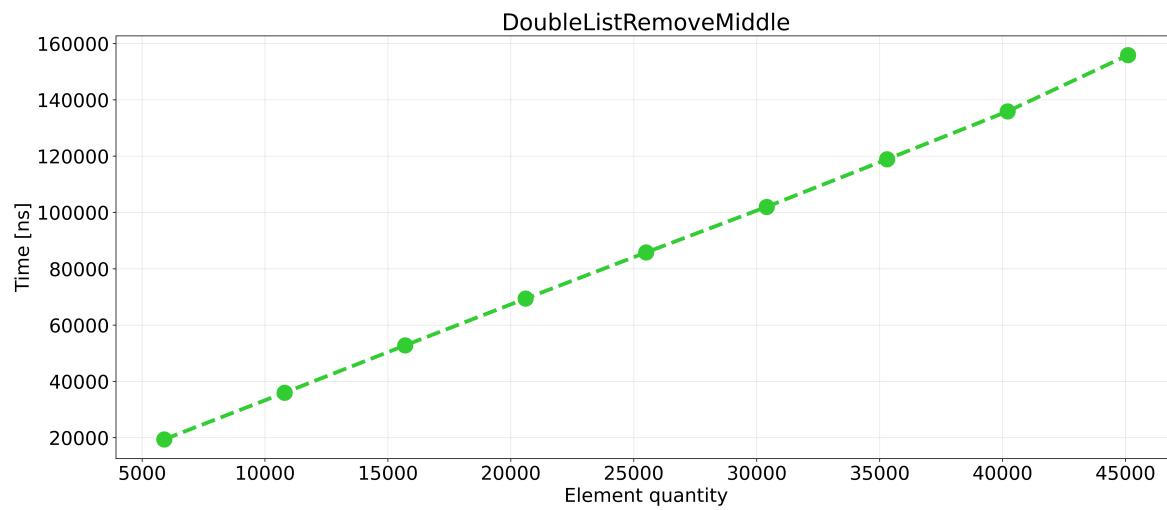
Wykres usuwania elementu z przodu listy



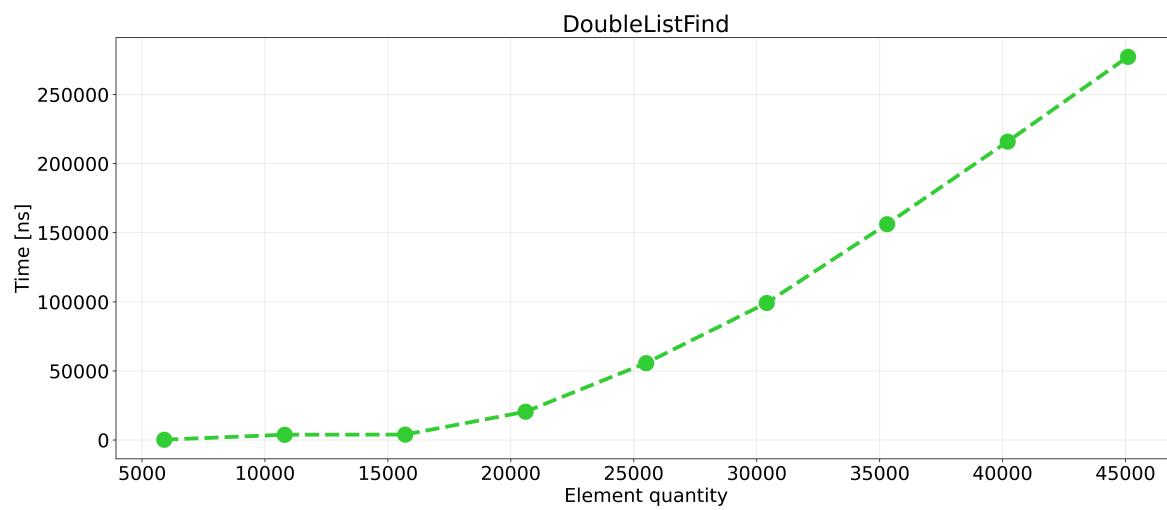
Wykres usuwania elementu z tyłu listy



Wykres usuwania elementu w środku listy



Wykres znajdowania elementu w liście



Wnioski na temat listy

Zgodnie z przewidywaniami czas operacji na przedzie tablicy był wręcz zerowy niezależnie od ilości elementów, reszta operacji była głównie liniowa.

Pomiary kopca binarnego

Opis ogólny operacji na kopcu binarnym typu maksimum

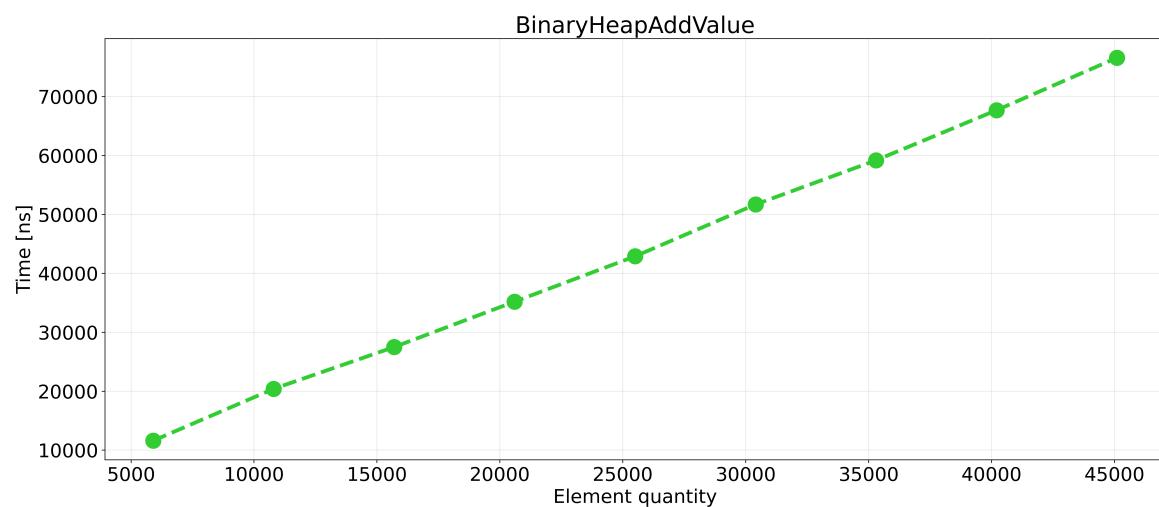
Tablicowa struktura danych reprezentująca drzewo binarne, którego wszystkie poziomy z wyjątkiem ostatniego muszą być pełne. W przypadku, gdy ostatni poziom drzewa nie jest pełny, liście ułożone są od lewej do prawej strony drzewa. W kopcu typu MAX wartość danego węzła niebędącego korzeniem jest zawsze mniejsza niż wartość jego rodzica.

- Dodawanie elementu - Dodawany element jest umieszczany na ostatniej pozycji w tablicy reprezentującej kopiec, a więc jako najmniejszy 'liść'. Potem jego wartość jest sprawdzana z wartością rodzica i jeśli jest od niej większy – zamieniamy te elementy miejscami. Idziemy tak dugo aż warunek nie zostanie spełniony. Budujemy kopiec od nowa korzystając z nowej tablicy.
- Usuwanie elementu - Wyrzucamy dany element z tabeli i ponownie budujemy kopiec z nowych wartości (przypisanych do nowych indeksów). W najgorszym przypadku jest to wyrzucenie korzenia co oznacza zamianę pozycji wszystkich elementów.
- Wyszukiwanie zadanej wartości - Wyszukiwanie elementu nie różni się niczym od innych struktur opartych na tabeli - Operacja zwraca wartość indeksu pod którą znajduje się wartość bądź liczbę -1.

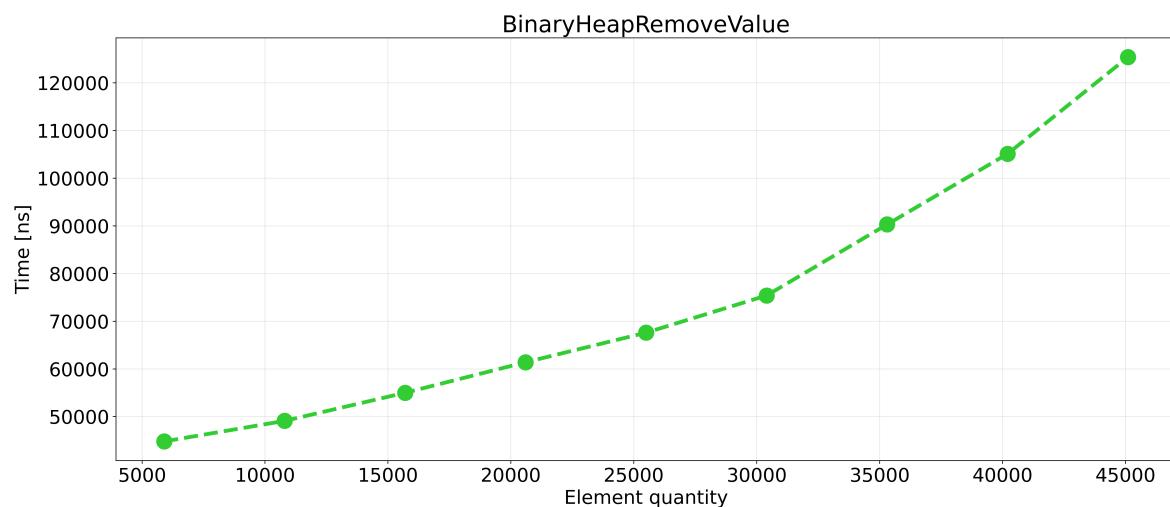
Wyniki pomiarów kopca

Liczba danych		Dodawanie	Usuwanie	Szukanie
L.p.	j	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$
1	5000	11600	44800	7900
2	10000	20400	49100	14000
3	15000	27500	55000	20300
4	20000	35200	61400	27300
5	25000	42900	67600	36000
6	30000	51700	75400	43000
7	35000	59200	90300	48200
8	40000	67700	105100	54800
9	45000	76600	125400	63200

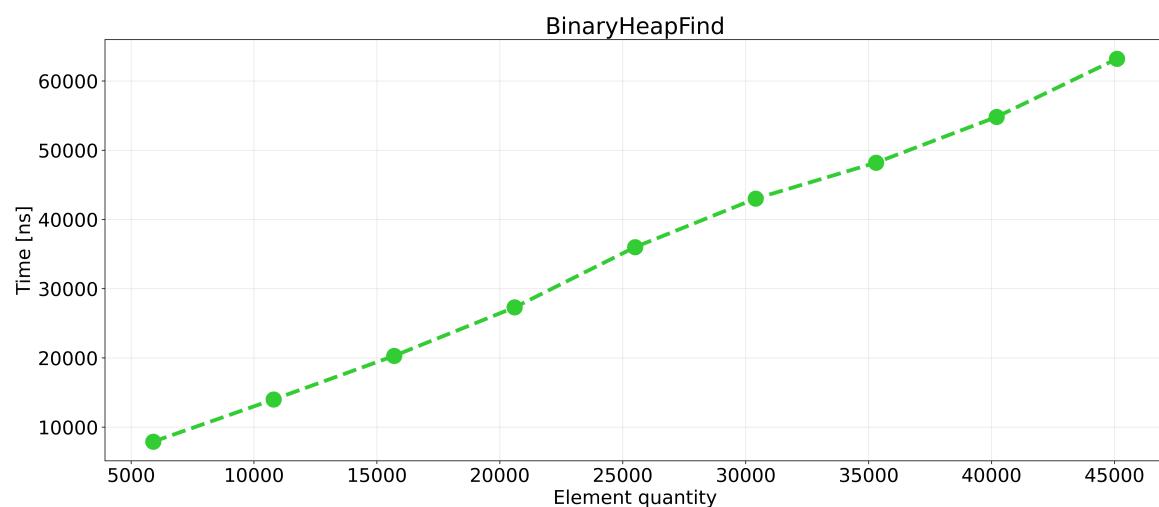
Dodawanie elementu w kopcu



Usuwanie elementu w kopcu



Znajdowanie elementu w kopcu



Wnioski na temat kopca

Można zauważyc że złożoność dodawania oraz odejmowania jest zawsze złożonością pesymistyczną, jest tak dlatego, że kopiec został zaimplementowany jako tablica, więc przy usuwaniu oraz przy dodawaniu jest za każdym razem tworzona nowa tablica.

Pomiary drzewa czerwono-czarnego

Opis ogólny operacji na drzewie czerwono-czarnym

Rodzaj samoorganizującego się binarnego drzewa poszukiwań. W porównaniu do zwykłego drzewa binarnego posiada ono dodatkowo parametr koloru za pomocą którego balansujemy drzewo. Podstawowymi zasadami drzewa czerwono-czarnego są:

- Każdy węzeł posiada kolor - czarny bądź czerwony
- Korzeń jest koloru czarnego
- Każdy liść (NULL) jest czarny
- Dla czerwonego węzła obydwoje dzieci jest czarnych
- Każda ścieżka od ustalonego węzła do liścia musi zawierać tą samą ilość czarnych węzłów
- Dodanie elementu - W odróżnieniu od drzew BST, wstawiając element musimy pamiętać, aby zachować zrównoważenie drzewa. Wstawienie elementu w dowolnym miejscu może powodować zaburzenie struktury kolorystycznej drzewa. Aby uniknąć pomyłek należy zastosować następujący algorytm:

1.Początkowo wstawiamy element tak, jak do standardowego drzewa BST. 2.Kolor każdego nowo dodanego elementu jest czerwony. 3.Jeżeli rodzic wstawionego węzła jest czarny to własność drzewa została zachowana. 4.Jeżeli rodzic wstawionego węzła jest czerwony to własność 3 została zaburzona (rodzic i syn mają kolor czerwony). Aby przywrócić własność należy przekolorować wybrane węzły i zmienić relację między konfliktującymi węzłami.

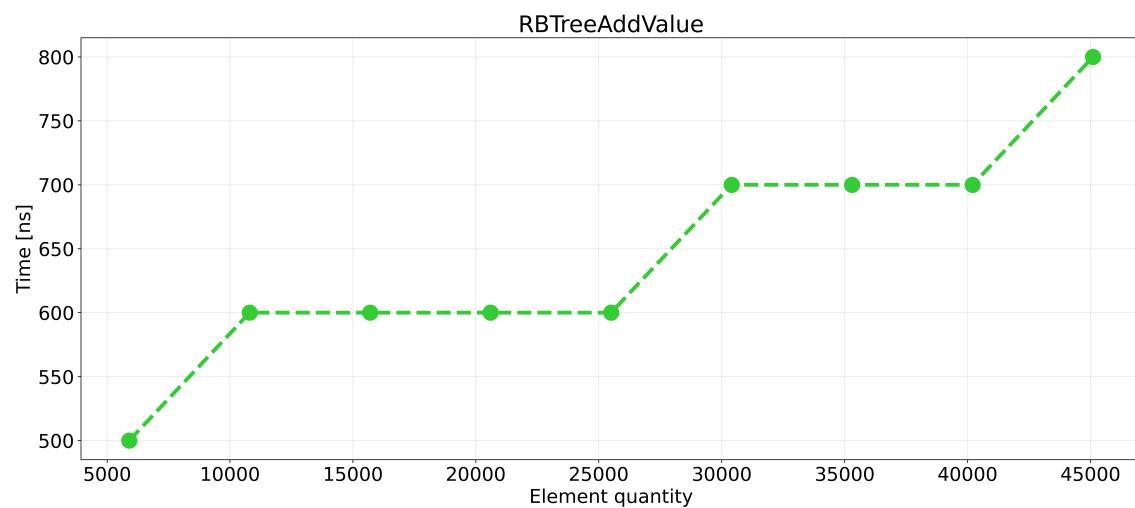
- Usunięcie elementu - Podobnie, jak w przypadku wstawiania, usuwanie wymaga dodatkowej uwagi w celu zachowania zrównoważenia drzewa. Tym razem, zamiast martwić się o rodzica wstawianego elementu, skupić należy uwagę na kolorze usuwanego węzła. Należy pamiętać, że jeżeli usuwany wierzchołek jest czerwony, czarna wysokość drzewa nie jest zakłócona, natomiast jeżeli usuwany wierzchołek jest czarny należy naprawić wysokość dla każdej ścieżki w drzewie.
- Wyszukanie wartości - Wyszukiwanie elementu o kluczu k odbywa się tak samo jak wyszukiwanie w standardowym drzewie BST. Funkcja wyszukująca jako parametry przyjmuje wskaźnik do korzenia drzewa oraz wartość do znalezienia. Funkcja bool zwraca prawdę, jeżeli element został znaleziony, lub fałsz, jeżeli nie występuje w drzewie.

Wyniki pomiarów drzewa

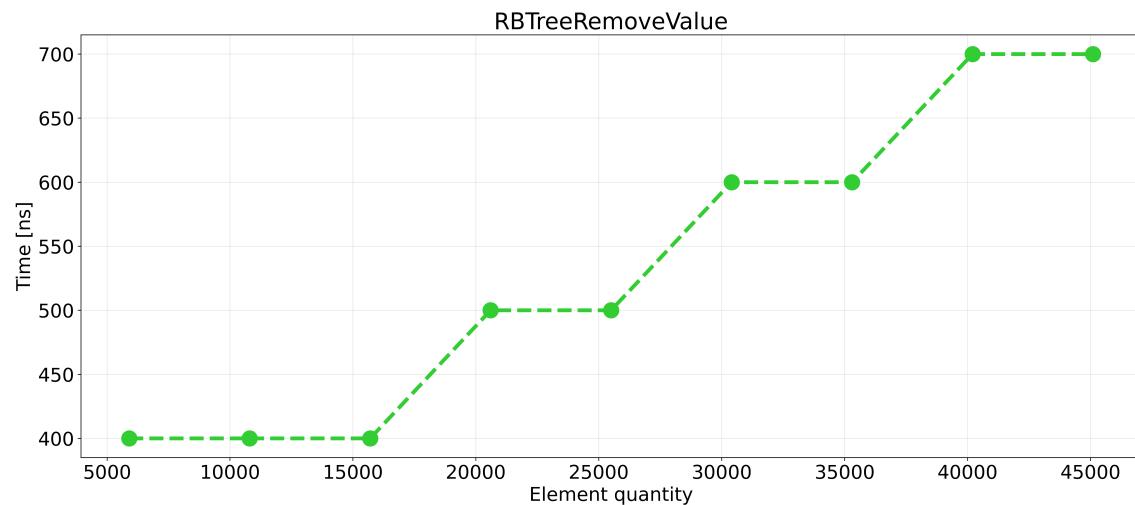
Liczba danych		Dodawanie	Usuwanie	Szukanie
L.p.	j	\$[ns]\$	\$[ns]\$	\$[ns]\$
1	5000	500	400	300
2	10000	600	400	400
3	15000	600	400	400
4	20000	600	500	400
5	25000	600	500	400

	Liczba danych	Dodawanie	Usuwanie	Szukanie
6	30000	700	600	400
7	35000	700	600	400
8	40000	700	700	500
9	45000	800	700	500

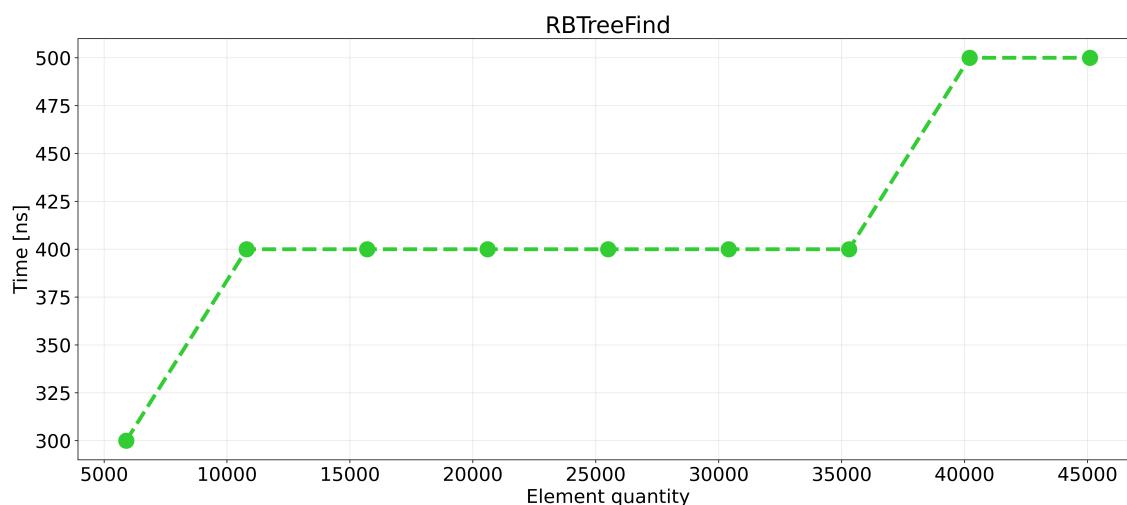
Dodawanie elementu w drzewie



Usuwanie elementu w drzewie



Znajdowanie elementu w drzewie



Wnioski na temat drzewa

Wykresy wyszły bardzo interesujące, widać wyraźnie momenty przejścia na dłuższe czasy wykonywania operacji lecz i tak wszystkie funkcje miały krótki czas wykonania.

Pomiary drzewa AVL

Opis ogólny operacji na drzewie AVL

Nazywane również drzewem dopuszczalnym – zrównoważone binarne drzewo poszukiwań (BST), w którym wysokość lewego i prawego poddrzewa każdego węzła różni się co najwyżej o jeden. Skrót AVL pochodzi od nazwisk rosyjskich matematyków: Adelsona-Velskiego oraz Landisa. Aby osiągnąć warunek różnicy co najwyżej o 1, drzewo AVL posiada zmodyfikowane procedury wstawiania i usuwania węzłów. Równoważenie uzyskuje się poprzez odpowiednie rotacje w lewo i w prawo węzłów drzewa na ścieżce w kierunku korzenia, jeśli został zaburzony warunek drzewa AVL (wysokość poddrzew różni się co najwyżej o 1) po wstawieniu nowego węzła lub po usunięciu istniejącego węzła. Koszty modyfikacji drzewa AVL są większe niż innych drzew lecz mamy gwarancję że pesymistyczny czas wyszukiwania nigdy nie przekroczy $1.44\log_2(n+2)-0.328$.

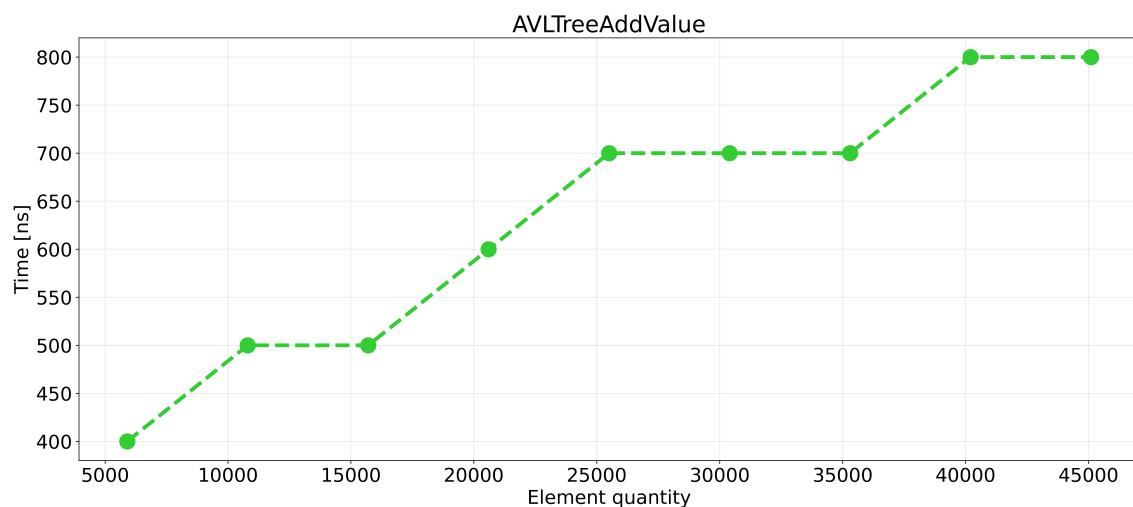
- Dodanie elementu - Wstawiamy element jak do zwykłego drzewa BST, następnie wykonujemy aktualizację wyważeń węzłów od wstawionego elementu korzenia. Jeżeli w danym węźle współczynnik wyważenia $|x| > 1$ to należy przywrócić właściwości drzewa rotacjami (max. potrzebne będą dwie rotacje)
- Usuwanie elementu - usuwamy element jak w zwykłym BST, wykonujemy wyważenie od rodzica do usuniętego elementu aż do korzenia. jeżeli współczynnik wyważenia $|x| > 1$ to należy przywrócić właściwości drzewa za pomocą rotacji.
- ZWyszukanie wartości - Wyszukiwanie elementu o kluczu k odbywa się tak samo jak wyszukiwanie w standardowym drzewie BST. Funkcja wyszukująca jako parametry przyjmuje wskaźnik do korzenia drzewa oraz wartość do znalezienia. Funkcja bool zwraca wskaźnik na element, jeżeli wartość została znaleziona, lub NULL, jeżeli nie występuje w drzewie.

Wyniki pomiarów drzewa AVL

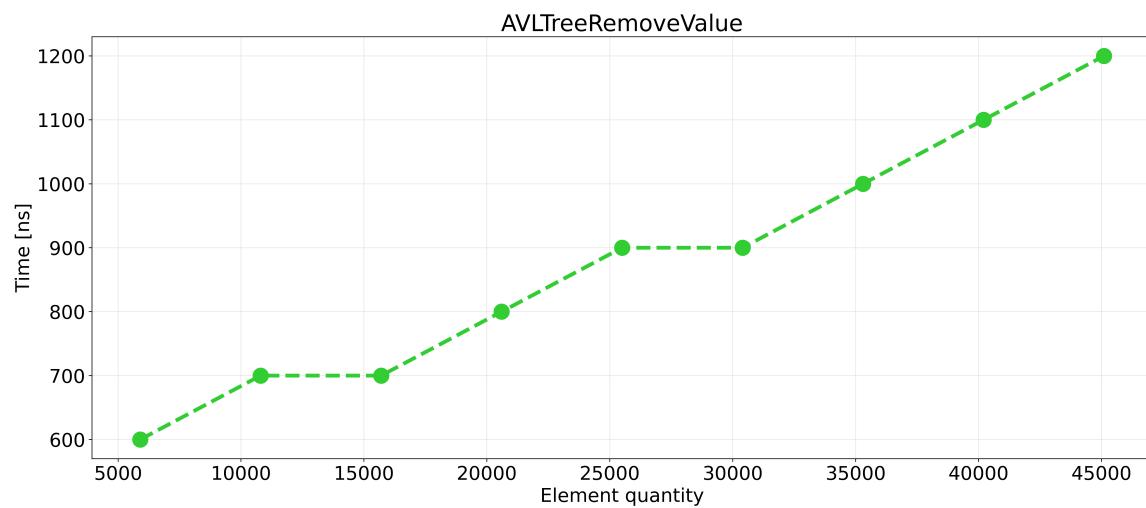
Liczba danych	Dodawanie	Usuwanie	Szukanie
L.p.	j	\$[ns]\$	\$[ns]\$
1	5000	400	600
			400

	Liczba danych	Dodawanie	Usuwanie	Szukanie
2	10000	500	700	400
3	15000	500	700	400
4	20000	600	800	400
5	25000	700	900	500
6	30000	700	900	500
7	35000	700	1000	500
8	40000	800	1100	600
9	45000	800	1200	700

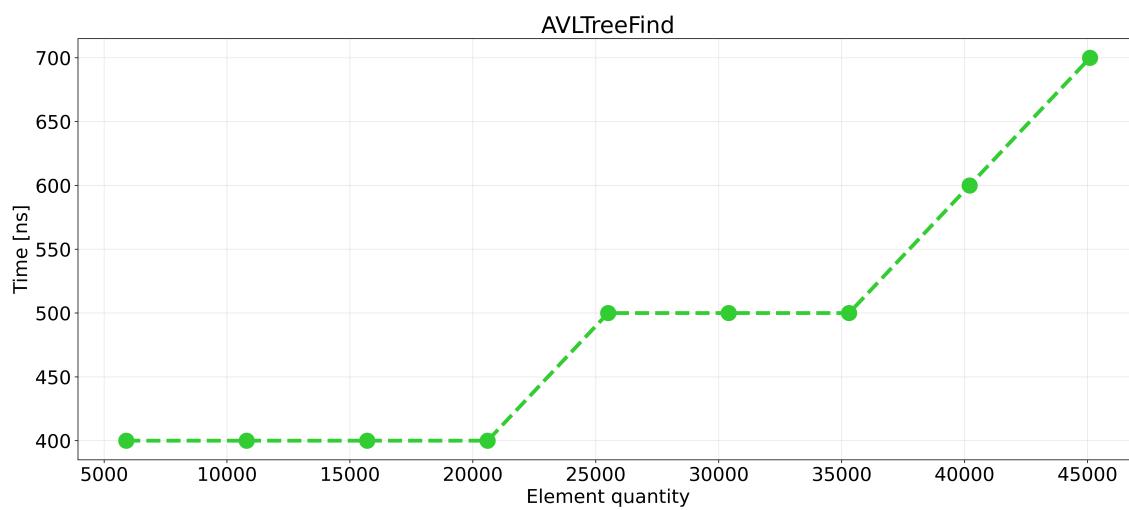
Dodawanie elementu w drzewie AVL



Usuwanie elementu w drzewie AVL



Znajdowanie elementu w drzewie AVL



Wnioski na temat drzewa AVL

Podobnie do drzewa czerwono-czarnego na wykresach są widoczne sekcje, czasy wykonania są dłuższe ponieważ w drzewie AVL dodatkowo występuje balansowanie drzewa.

Wnioski końcowe

Podsumowując wykonane pomiary większość wyszła zgodnie z przewidywaniami, w niektórych miejscach mamy dziwne przesunięcia, najprawdopodobniej jest to spowodowane:

- Słabo zoptymalizowane algorytmy
- Działanie innych programów podczas wykonywania pomiarów co spowodowało odchylenia i błędy pomiarowe

Eksperymenty wykazały, że najbardziej efektywną strukturą do przechowywania wartości jest drzewo czerwono-czarne gdyż ma najmniejsze czasy wykonywania operacji ze wszystkich struktur. (Nawet jeżeli lista dwukierunkowa ma wręcz infinitezymalny czas operacji na elementach z przodu tablicy to i tak w większości przypadków potrzebujemy elementów z środkowych części struktury)

Bibliografia

[Jarosław Mierzwa](#)

[Wikipedia - Array](#)

[Wikipedia - Double Linked List](#)

[Wikipedia - Red-Black Tree](#)

[Eduinf Waw - Red-Black Tree](#)

[Red-Black Tree Visualisation](#)

[Wikipedia - AVL Tree](#)

[Eduinf Waw - AVL Tree](#)

[AVL Tree Visualisation](#)

[Chrono Clock](#)

[Chrono High Resolution Clock](#)

[Python Pyplot](#)

[Python Statistics](#)

[Lambda in C++](#)

[StackOverflow - Access violation reading location](#)