

<알고리즘 실습> - 탐색트리

※ 입출력에 대한 안내

- 특별한 언급이 없으면 문제의 조건에 맞지 않는 입력은 입력되지 않는다고 가정하라.
- 특별한 언급이 없으면, 각 줄의 맨 앞과 맨 뒤에는 공백을 출력하지 않는다.
- 출력 예시에서 □는 각 줄의 맨 앞과 맨 뒤에 출력되는 공백을 의미한다.
- 입출력 예시에서 □ 이 후는 각 입력과 출력에 대한 설명이다.

* 이 문제에서 사용되는 알고리즘은 교재를 중심으로 기술되었음.

[문제 1] (이진탐색트리 구현) 주어진 조건을 만족하는 이진탐색트리를 구현하는 프로그램을 작성하라.

※ 조건: 종료(**q**) 명령 때까지 삽입(**i**), 탐색(**s**), 삭제(**d**), 인쇄(**p**), 명령을 반복 입력받아 수행한다.

i <키> : 입력 <키>에 대한 노드 생성 및 트리에 삽입

d <키> : 입력 <키>가 트리에 존재하면 해당 노드 삭제 후 삭제된 키를 출력, 없으면 'X'를 출력

s <키> : 입력 <키>가 트리에 존재하면 해당 키를 출력, 없으면 'X'를 출력

p : 현재 트리를 전위순회로 인쇄

q : 프로그램 종료

주의:

1. 중복 키가 없는 것으로 전제한다.
2. 문제를 단순화하기 위해, 키만 존재하고 원소(element)는 없는 것으로 구현한다.
3. **main** 함수는 반복적으로 명령을 입력받기 전에 빈(empty) 이진탐색트리를 초기화해야 한다 - 즉, 외부노드 1개로만 구성된 이진트리를 말한다.

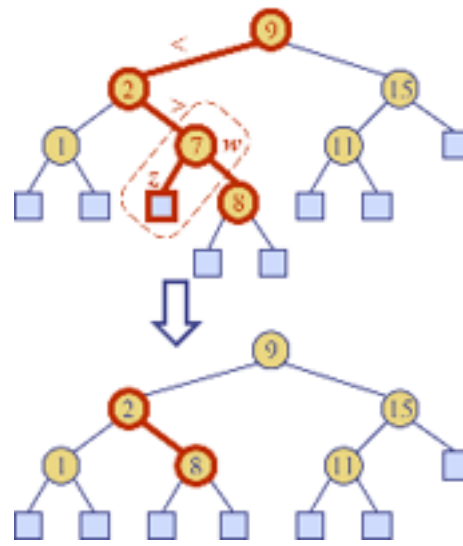
힌트:

1. 트리 노드는 아래의 구조체를 이용하여 구현한다.

IChild	parent key	rChild
--------	---------------	--------

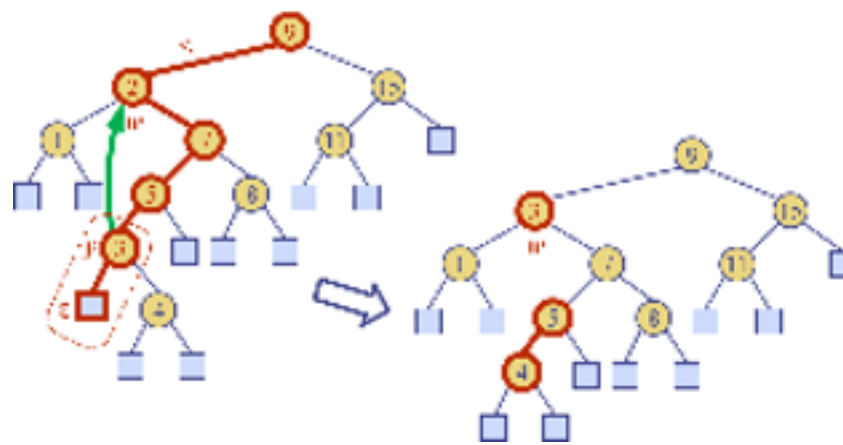
node

2. 전위순회는 루트 노드를 먼저 방문하고, 왼쪽 부트리, 오른쪽 부트리 순서로 순회한다.
3. 트리 노드 삭제 시, 삭제할 노드 **w**의 자식 중 하나(**z**이라 하자)라도 앞인 경우는 아래 그림 <삭제 예시 1>처럼 **w**를 **z**과 함께 삭제하고, 반대쪽 자식 노드(그림에서 **8**을 저장한 노드)가 **w**를 계승한다 - **reduceExternal(z)** 함수 사용.



<삭제 예시 1>

4. 삭제할 노드 **w**의 자식 둘 다 내부 노드인 경우는 **w**의 **중위순회 후계자 y**가 삭제한 노드 위치에 오도록 한다. 중위순회 후계자를 찾는 방법은 오른쪽 자식으로 이동한 후, 거기서부터 왼쪽 자식들만을 끝까지 따라 내려가서 도달하게 되는 내부노드를 찾는 것이다(그림 <삭제 예시 2> 참고).



<삭제 예시 2>

입출력 형식:

- 1) **main** 함수는 아래 형식으로 명령을 표준입력받는다.

입력 : 문자(**i**, **d**, **s**)와 정수형 <키> 또는 문자(**p**, **q**)

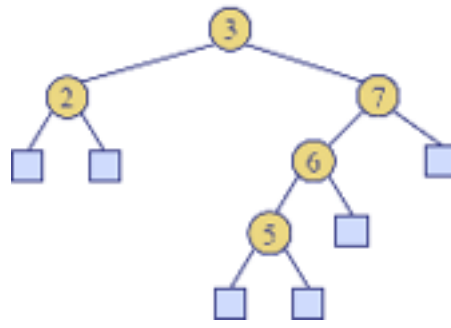
- 2) **main** 함수는 각 명령에 대해 아래 형식으로 표준출력한다.

출력 : 키 또는 X (**d**, **s** 명령인 경우)

트리의 전위순회 인쇄 (**p** 명령인 경우)

입력 예시 1

i 3	<input type="checkbox"/> 3 삽입		
i 2	<input type="checkbox"/> 2 삽입		
i 7	<input type="checkbox"/> 7 삽입		
s 4	<input type="checkbox"/> 4 탐색	X	<input type="checkbox"/> 4 탐색 결과
i 6	<input type="checkbox"/> 6 삽입		
p	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄	<input type="checkbox"/> 3 2 7 6	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄
i 5	<input type="checkbox"/> 5 삽입		
s 6	<input type="checkbox"/> 6 탐색	6	<input type="checkbox"/> 6 탐색 결과
q	<input type="checkbox"/> 종료		



<구축된 이진탐색트리>

입력 예시 2

출력 예시 2

i 9	<input type="checkbox"/> 9 삽입	
i 2	<input type="checkbox"/> 2 삽입	
i 15	<input type="checkbox"/> 15 삽입	
i 1	<input type="checkbox"/> 1 삽입	
i 7	<input type="checkbox"/> 7 삽입	
i 11	<input type="checkbox"/> 11 삽입	
i 5	<input type="checkbox"/> 5 삽입	
i 8	<input type="checkbox"/> 8 삽입	
i 3	<input type="checkbox"/> 3 삽입	
i 4	<input type="checkbox"/> 4 삽입	
p	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄	<input type="checkbox"/> 9 2 1 7 5 3 4 8 15 11 <input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄
d 2	<input type="checkbox"/> 2 삭제	2 <input type="checkbox"/> 2 삭제 결과
d 13	<input type="checkbox"/> 13 삭제	X <input type="checkbox"/> 13 삭제 결과
p	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄	<input type="checkbox"/> 9 3 1 7 5 4 8 15 11 <input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄
q	<input type="checkbox"/> 종료	

주요 필요 함수:

- **main()** 함수
 - 인자: 없음
 - 반환값: 없음
 - 내용: 빈 트리를 초기화한 후 반복적으로 명령을 입력받아 처리
- **findElement(k)** 함수
 - 인자: 탐색 키 **k**
 - 반환값: 원소(이 문제에서 원소 = 키)
 - 내용: 현재 트리에서 키 **k**를 저장한 노드를 찾아 그 노드에 저장된 원소를 반환
- **insertItem(k)** 함수
 - 인자: 삽입 키 **k**
 - 반환값: 없음
 - 내용: 현재 트리에 키 **k**를 저장한 새 노드를 삽입
- **treeSearch(k)** 함수
 - 인자: 탐색 키 **k**
 - 반환값: 키 **k**를 저장한 내부 노드 반환, 혹은 그런 노드가 없으면 만약 있었다면 위치할 외부 노드를 반환
 - 내용: 현재 트리에서 키 **k**를 저장한 노드를 반환
- **removeElement(k)** 함수
 - 인자: 삭제 키 **k**
 - 반환값: 삭제된 원소(이 문제에서 원소 = 키)
 - 내용: 현재 트리에서 키 **k**를 저장한 노드를 삭제한 후 원소를 반환

- **isExternal(w)** 함수
 - 인자: 노드 **w**
 - 반환값: 참 또는 거짓
 - 내용: 노드 **w**가 외부노드인지 여부를 반환
- **isInternal(w)** 함수
 - 인자: 노드 **w**
 - 반환값: 참 또는 거짓
 - 내용: 노드 **w**가 내부노드인지 여부를 반환
- **inOrderSucc(w)** 함수
 - 인자: 내부노드 **w**
 - 반환값: 내부노드
 - 내용: 노드 **w**의 중위순회 후계자를 반환

알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

Alg isExternal(w)

input node **w**

output boolean

```
1. if (w.left =  $\emptyset$  and w.right =  $\emptyset$ )
  return True
  else {w.left  $\neq \emptyset$  or w.right  $\neq \emptyset$ }
  return False
```

Alg isInternal(w)

input node **w**

output boolean

```
1. if (w.left  $\neq \emptyset$  or w.right  $\neq \emptyset$ )
  return True
  else {w.left =  $\emptyset$  and w.right =  $\emptyset$ }
  return False
```

Alg sibling(w)

input node **w**

output sibling of **w**

```
1. if (isRoot(w))
  invalidNodeException(){root has no sibling}
2. if (leftChild(parent(w)) = w)
  return rightChild(parent(w))
  else
  return leftChild(parent(w))
```

Alg inOrderSucc(w)

input internal node **w**

output inorder successor of **w**

```
1. w  $\leftarrow$  rightChild(w)
2. if (isExternal(w))
  invalidNodeException(){No inorder successor}
3. while (isInternal(leftChild(w)))
  w  $\leftarrow$  leftChild(w)
4. return w
```

Alg reduceExternal(z)

input external node **z**

output the node replacing the parent node of the removed node **z**

1. **w** \leftarrow **z.parent**

2. **zs** \leftarrow **sibling(z)**

3. if (**isRoot(w)**)

root \leftarrow **zs** {renew **root**}

zs.parent \leftarrow \emptyset

else

g \leftarrow **w.parent**

zs.parent \leftarrow **g**

if (**w = g.left**)

g.left \leftarrow **zs**

else {**w = g.right**}

g.right \leftarrow **zs**

4. **putnode(z)** {deallocate node **z**}

5. **putnode(w)** {deallocate node **w**}

6. return **zs**

- * 수록되지 않은 함수의 의사코드는 교재의 코드를 참고할 수 있다. 하지만 가능하면 교재를 참조하지 않고 스스로 작성해본다.

[문제 2] (AVL 트리 생성) 주어진 조건을 만족하는 AVL 트리를 구현하는 프로그램을 작성하라.

- 1) 기본적인 입출력 구조는 문제 1과 동일하나 삭제를 제외한 삽입, 탐색, 출력을 구현한다.
- 2) **main** 함수에서 명령과 <키>를 입력받는다.
- 3) 명령에 따라 AVL 트리를 생성, 탐색한다.

주의: 문제 1과 동일

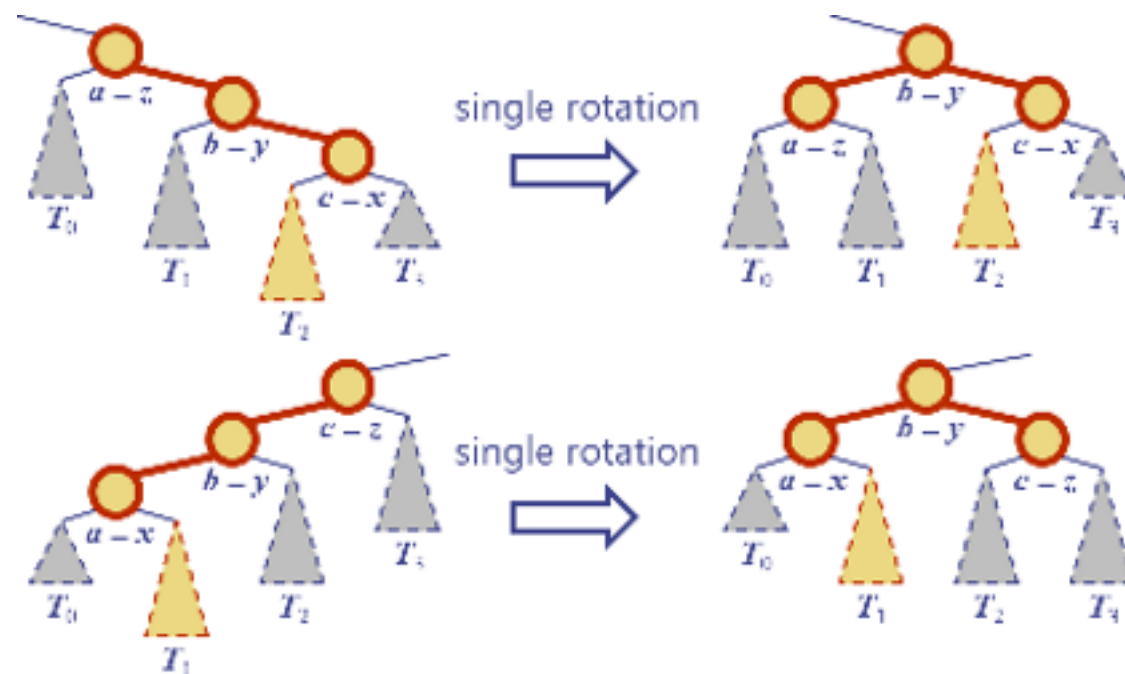
힌트:

1. 노드 구조체에 높이(height)를 추가한다.

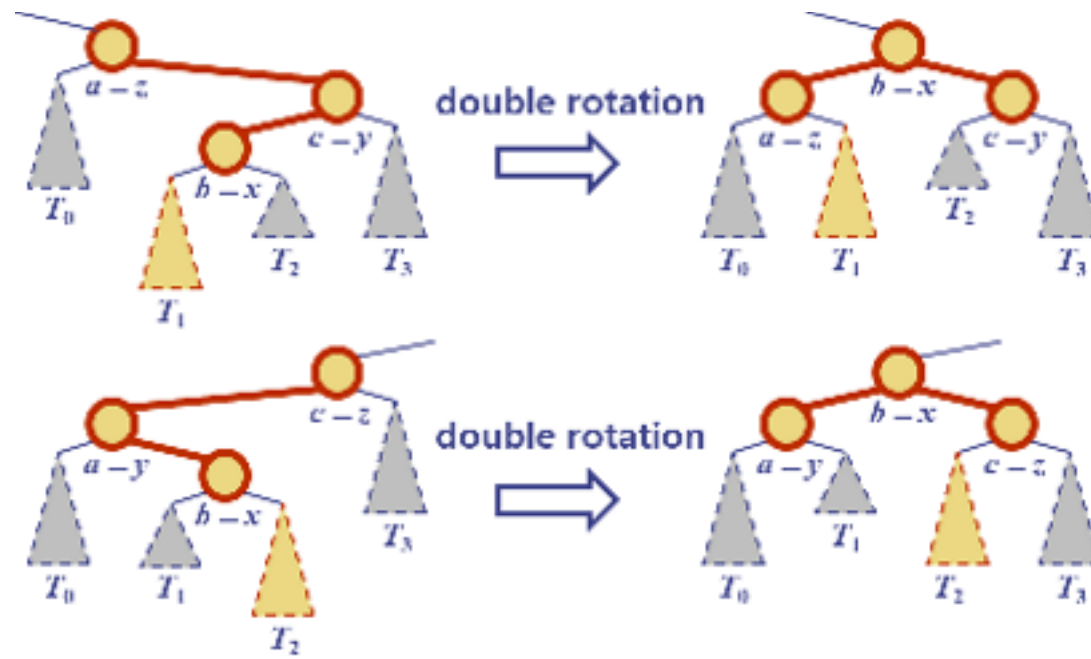
lChild	parent	rChild
	key	
	height	

node

2. 문제 1의 이진탐색트리에서 구현한 함수들을 그대로 또는 수정해서 사용하고 더 필요한 함수를 추가한다.
3. 키 삽입 후 트리에 불균형이 발생했을 경우, **개조(restructure)**를 수행한다. 개조는 종종 **회전(rotation)**이라고도 불리며, 좌우대칭을 포함하여 모두 4개 유형이 존재한다.



<단일회전(single rotation) 예시>



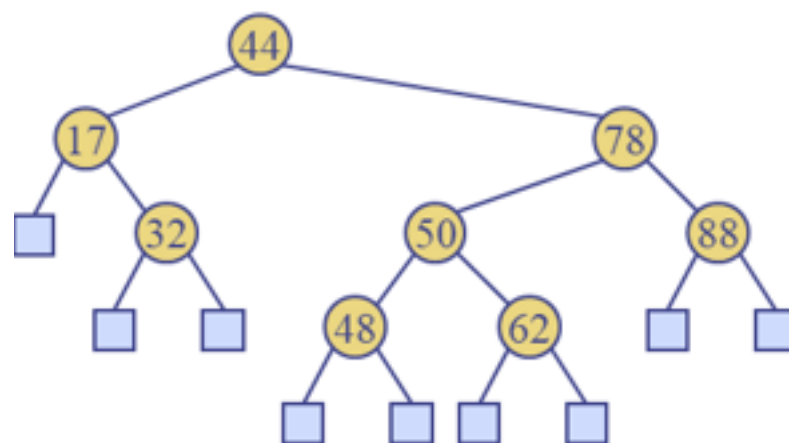
<이중회전(double rotation) 예시>

입출력 형식: 문제 1과 동일(삭제는 제외)

입력 예시 1

출력 예시 1

i 44	<input type="checkbox"/> 44 삽입	
i 17	<input type="checkbox"/> 17 삽입	
i 78	<input type="checkbox"/> 78 삽입	
i 32	<input type="checkbox"/> 32 삽입	
i 50	<input type="checkbox"/> 50 삽입	
i 88	<input type="checkbox"/> 88 삽입	
i 48	<input type="checkbox"/> 48 삽입	
i 62	<input type="checkbox"/> 62 삽입	
s 88	<input type="checkbox"/> 88 탐색	
p	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄	
q	<input type="checkbox"/> 프로그램 종료	<div>88</div> <div> <input type="checkbox"/> 44 17 32 78 50 48 62 88 <div> <input type="checkbox"/> 탐색 결과 <input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄 </div> </div>



<구축된 AVL 트리>

필요 함수:

- **insertItem(k)** 함수
 - 인자: 삽입 키 **k**
 - 반환값: 없음
 - 내용: 현재 트리에 **k**를 저장한 새 노드 **w**를 삽입하고, **searchAndFixAfterInsertion(w)** 함수를 호출
- **searchAndFixAfterInsertion(w)** 함수
 - 인자: 내부노드 **w**
 - 반환값: 없음
 - 내용: 균형검사를 수행하고 불균형이 있으면 개조를 통해 높이균형 속성을 회복
- **updateHeight(w)** 함수
 - 인자: 내부노드 **w**
 - 반환값: 참 또는 거짓
 - 내용: 노드 **w**의 높이를 (필요하면) 갱신한 후 갱신 여부를 반환
- **isBalanced(w)** 함수
 - 인자: 내부노드 **w**
 - 반환값: 참 또는 거짓
 - 내용: 노드 **w**의 높이균형 여부를 반환
- **restructure(x, y, z)** 함수
 - 인자: 내부노드 **x, y, z**
 - 반환값: 내부노드
 - 내용: 3-노드 개조를 수행한 후 (갱신된) 3-노드의 루트를 반환

알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

<div><div>Alg expandExternal(w) input external node w output none</div><div><div>1. l ← getNode()</div><div>2. r ← getNode()</div><div>3. l.left = ∅</div><div>4. l.right = ∅</div><div>5. l.parent = w</div><div>6. l.height = 0</div><div>7. r.left = ∅</div><div>8. r.right = ∅</div><div>9. r.parent = w</div><div>10. r.height = 0</div><div>11. w.left = l</div><div>12. w.right = r</div><div>13. w.height = 1</div><div>14. return</div></div></div>	
<div><div>Alg insertItem(k) input AVL tree T, key k output none</div><div><div>1. w ← treeSearch(root(), k)</div><div>2. if (isInternal(w))</div><div>return</div><div>else</div><div>Set node w to k</div><div>expandExternal(w)</div><div>searchAndFixAfterInsertion(w)</div><div>return</div></div></div>	<div><div>{삽입 키를 저장한 노드 찾기}</div><div>{이미 존재하면 반환}</div></div>

다음 알고리즘은 교재의 연습문제 **11-15**의 답을 참고할 수 있다.

Alg searchAndFixAfterInsertion

Alg restructure

Alg updateHeight

Alg isBalanced

[문제 3] (AVL 트리 삭제) AVL 트리에서 삭제를 구현하라.

- 1) 기본적인 입출력 구조는 문제 2와 동일하며 삭제를 추가하여 구현한다.
- 2) **main** 함수에서 명령과 <키>를 입력받는다.
- 3) 명령에 따라 AVL 트리를 생성한다.

주의: 문제 1과 동일

힌트:

- 1. 문제 2에서 만든 함수들을 그대로 이용하고, **삭제 관련 함수**를 추가로 구현한다.
- 2. AVL 트리에서 삭제는 이진탐색트리에서와 동일하게 수행되지만, 마지막 단계에서 **reduceExternal** 작업으로 삭제된 노드의 부모 노드(그리고 조상 노드들)가 불균형이 될 수 있음에 유의한다.
- 3. 트리의 불균형을 해소하기 위한 개조는 문제 2에서 작성한 **restructure** 함수를 그대로 사용할 수 있다.

입출력 형식:

1) 문제 1과 동일

입력 예시 1		출력 예시 1	
i 9	<input type="checkbox"/> 9 삽입	30	<input type="checkbox"/> 30 탐색 결과
i 31	<input type="checkbox"/> 31 삽입		
i 66	<input type="checkbox"/> 66 삽입		
i 30	<input type="checkbox"/> 30 삽입		
i 1	<input type="checkbox"/> 1 삽입		
s 30	<input type="checkbox"/> 30 탐색	<input type="checkbox"/> 30 9 1 24 31 66 X	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄 <input type="checkbox"/> 47 탐색 결과
i 24	<input type="checkbox"/> 24 삽입		
p	<input type="checkbox"/> 전위순회 인쇄	30	<input type="checkbox"/> 30 삭제
s 47	<input type="checkbox"/> 47 탐색		
i 61	<input type="checkbox"/> 61 삽입		
d 30	<input type="checkbox"/> 30 삭제		
i 13	<input type="checkbox"/> 13 삽입		
q	<input type="checkbox"/> 프로그램 종료		

필요 함수:

- **removeElement(k)** 함수
 - 인자: 삭제 키 **k**
 - 반환값: 삭제된 원소(이 문제에서 원소 = 키)
 - 내용: 현재 트리에서 **k**를 저장한 노드를 삭제한 후, **reduceExternal** 작업으로 삭제된 노드의 부모 노드 **w**에 대해 **searchAndFixAfterRemoval(w)** 함수를 이용하여 균형검사 및 수리를 수행

알고리즘 설계를 위한 의사코드 가이드:

Alg **removeElement**(k)

input AVL tree T, key k

output key

1. w ← **treeSearch**(root(), k)

2. if (**isExternal**(w))

return **NoSuchKey**

3. z ← **leftChild**(w)

4. if (**!isExternal**(z))

z ← **rightChild**(w)

5. if (**isExternal**(z))

zs ← **reduceExternal**(z)

else

y ← **inOrderSucc**(w)

z ← **leftChild**(y)

Set node w to **key**(y)

zs ← **reduceExternal**(z)

6. **searchAndFixAfterRemoval**(parent(zs))

7. return k

{삭제 키를 저장한 노드 찾기}

{그런 노드가 없으면 반환}

{case 1}

{case 2}

다음 알고리즘은 교재의 연습문제 11-15의 답을 참고할 수 있다.

Alg **searchAndFixAfterRemoval**