Contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde: la méthode de contrôlabilité

Bylli Andre Guel

25 juin 2024

1 Position du problème

On considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ deux fois continûment différentiable, Ω étant localement d'un seul côté de Γ, soit que $\overline{\Omega}$ est un ouvert est une variété à bord de classe $\mathscr{C}^2$.

Pour $T > 0$, on note $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, et $\mathscr{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

L'étude de l'évolution de la chaleur dans le domaine Ω à un instant $t \in]0, T[$, connaissant la valeur de la température à l'instant final est connu pour être le prototype des problèmes mal posés. Elle consiste à trouver l'état $z \in L^2(Q)$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = v & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z|_{t=T} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où v, donné dans $L^2(Q)$, est la variable de contrôle.

On dit qu'un couple contrôle-état $(v, z) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ est admissible s'il vérifie (1) avec $v \in \mathscr{U}_{ad}$.

Supposant que l'ensemble des couples contrôle-état admissible, noté χ_{ad}, est non vide, on introduit la fonctionnelle coût

$$J(v, z) = \frac{1}{2}\|z - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2}$$

avec $z_d \in L^2(Q)$ et $N > 0$.

On s'intéresse alors au problème de contrôle consistant à trouver un couple contrôle-état $(u, y) \in \chi_{ad}$ solution de

$$J(u, y) = \inf_{(v,z) \in \chi_{ad}} J(v, z). \tag{3}$$

On a immédiatement le résultat suivant.

Théorème 1. *Le problème de contrôle optimal* (3) *admet une solution unique* (u, y) *appelée couple optimal.*

Démonstration. L'ensemble des couples admissibles étant non vide et J étant une fonction semi-continue inférieurement, strictement convexe et coercive, il existe un unique couple admissible (u, y) solution de (3). $\square$

Remarque 1. *En utilisant la condition d'optimalité d'Euler-Lagrange :*

$$\forall\,(v, z) \in \chi_{ad}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(u + \lambda(v-u), y + \lambda(z-y))\bigg|_{\lambda=0} \geq 0,$$

le couple optimal (u, y) *est caractérisé par*

$$\forall\,(v, z) \in \chi_{ad}, \quad (y - z_d\,,\, z - y)_{L^2(Q)} + N(u\,,\, v - u)_{L^2(Q)} \geq 0.$$

L'objectif est alors ici de trouver un système d'optimalité découplé caractérisant (u, y). Une méthode classique en la matière est la méthode pénalisation de J.-L. Lions, consistant à approcher (u, y) par un problème pénalisé.

2 Contrôlabilité de l'équation de la chaleur rétrograde

On interprète la problème (1) comme un problème inverse ; on considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v & \text{dans } Q, \\[2ex] y = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{4}$$

se posant le problème de trouver $y_0 \in L^2(\Omega)$ tel que si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v & \text{dans } Q, \\[2ex] y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\[2ex] y|_{t=0} = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

alors

$$y|_{t=T} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{6}$$

On dit que (5)(6) constitue un problème de contrôlabilité exacte associée au problème (1).

Remarque 2. *Le problème de contrôlabilité est bien défini. En effet, pour tous* $v \in L^2(Q)$ *et* $y_0 \in L^2(\Omega)$*, on sait que l'équation de la chaleur* (5) *est bien posé au sens de Hadamard. Soit qu'elle admet une solution unique*

$$y(v, y_0) \in L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big([0, T]; L^2(\Omega)\big) \tag{7}$$

dépendant continûment des données. On en déduit, qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la solution $y(v, y_0)$ *de* (5) *se confond à une fonction continue de* $[0, T]$ *dans* $L^2(\Omega)$*. De sorte qu'on peut bien parler de la valeur terminale* $y(\cdot, T; v, y_0)$ *de* $y(v, y_0)$ *dans* Ω*.*

Remarque 3. *De plus, l'application*

$$(v, y_0) \longmapsto y(v, y_0) = y(v, 0) + y(0, y_0) \tag{8}$$

étant linéaire continue de $L^2(Q) \times L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathscr{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \subset L^2(Q)$*, le problème de contrôlabilité exacte* (5)(6) *est équivalent à celui consistant à trouver* $y_0 \in L^2(\Omega)$ *tel que, si*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 \quad \textit{dans } Q, \\ \\ y = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \\ \\ y(\cdot, y_0) = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

alors y *satisfait* (6)*.*

On approche, par argument de densité, le problème de contrôlabilité exacte (9)(6), par un problème, dit de contrôlabilité approchée et en réponse de quoi on a le résultat suivant.

Proposition 1. *Notons*

$$E = \big\{ y(\cdot, T)\,;\; y_0 \in L^2(\Omega) \big\} \tag{10}$$

l'ensemble des valeurs terminales de y*, solution unique de* (9)*, lorsque la donnée initiale* y_0 *parcourt* $L^2(\Omega)$*. Alors l'ensemble* E *est dense dans* $L^2(\Omega)$*.*

Démonstration. On a clairement que E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$. D'où, par le Théorème de Hahn-Banach, E est dense dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si $E^\perp = \{0\}$.
Soit $k \in E^\perp$; on a

$$\forall\, y_0 \in L^2(\Omega)\,, \qquad (k\,,\, y(\cdot, T))_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{11}$$

Mais, de (9), on a pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$, que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y\,,\, \varphi \right)_{L^2(Q)} = 0 &\iff \left(\frac{\partial y}{\partial t}\,,\, \varphi \right)_{L^2(Q)} - (\Delta y\,,\, \varphi)_{L^2(Q)} = 0 \\ &\iff \left(\frac{\partial y}{\partial t}\,,\, \varphi \right)_{L^2(Q)} - (\Delta y\,,\, \varphi)_{L^2(Q)} = 0. \end{aligned}$$

□

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $y_{0_\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ *tel que la solution*

$$y_\varepsilon \in L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big(O, T; L^2(\Omega)\big) \tag{12}$$

de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon = v \quad \textit{dans } Q, \\ \\ y_\varepsilon = 0 \quad \textit{sur } \Sigma, \\ \\ y_\varepsilon(\cdot, 0) = y_{0_\varepsilon} \quad \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{13}$$

satisfait

$$\|y_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon. \tag{14}$$

De plus, on a le théorème caractérisant l'existence d'une solution régulière à l'équation de la chaleur rétrograde.

Théorème 2. *Soit $v \in L^2(Q)$. L'équation de la chaleur rétrograde*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = v & \textit{dans } Q, \\ \\ z = 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \\ z(\cdot, T) = 0 & \textit{dans } \Omega \end{cases} \tag{15}$$

admet une unique solution régulière

$$z \in L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big(0, T; L^2(Q)\big) \tag{16}$$

si et seulement si la suite $(y_{0\varepsilon})_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. ☐

3 Le problème de contrôle

4 Conclusion

Références

[1] Moussa Barry, Ousseynou Nakoulima et Gabriel Birame Ndiaye. « Cauchy System for Parabolic Operator ». In : *International Journal of Evolution Equations* 8.4 (2013), p. 277-290.

[2] Moussa Barry et Gabriel Birame Ndiaye. « Cauchy system for an hyperbolic operator ». In : *Journal of Nonlinear Equations and Applications* 2014.4 (2014), p. 37-52.

[3] A. Berhail et A. Omrane. « Optimal Control of the Ill-Posed Cauchy Elliptic Problem ». In : *International Journal of Differential Equations, Hindawi Publishing Corporation* (2015). pp.468918. 10.1155/2015/468918. hal-01891254.

[4] Bylli André Guel. « Control of the Cauchy System for an Elliptic Operator ». In : *SSRN* (2023). doi : `https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4483188`.

[5] Bylli André Guel et Ousseynou Nakoulima. « The ill-posed Cauchy problem by Controllability the elliptic case ». In : *Results in Control and Optimization* 10 (2023), p. 100191. issn : 2666-7207. doi : `https://doi.org/10.1016/j.rico.2022.100191`.

[6] Jean-Pierre Kernevez. *Enzyme Mathematics*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol.10. Amsterdam – New-York – Oxford : North-Holland Publishing Company, 1980. 277 p.

[7] Jacques-Louis Lions. *Contrôle de systèmes distribués singuliers*. Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Paris : Bordas, 1983. 448 p.

[8] Jacques-Louis Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Études Mathématiques. Paris : Dunod, 1968. 426 p.

[9] Ousseynou Nakoulima. « Contrôle de systèmes mal posés de type elliptique ». In : *J. Math. Pures et Appl.* 73 (1994), p. 441-453.

[10] Ousseynou Nakoulima et Gisèle M. Mophou. « Control of Cauchy System for an Elliptic Operator ». In : *Acta Mathematica Sinica (English Series)* 25.11 (2009), p. 1819-1834.