Singular Distributed Systems by Controllability: The Ill-Posed Backwards Heat Equation

Bylli André Guel

22 août 2024

Résumé

This paper deals with the ill-posed backwards heat equation.
...

Keywords : Singular distributed systems, Optimal control, Ill-posed backwards heat equation, Controllability, Inverse Problem.

1 Introduction

On considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ deux fois continûment différentiable avec Ω localement d'un seul côté de Γ ; soit que $\overline{\Omega}$ est une variété à bord de classe $\mathscr{C}^2$.

Pour $T > 0$, on note $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, et $\mathscr{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

Étant donné $v \in L^2(Q)$, on considère le problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z & = & v & \text{dans} \quad Q, \\ \\ z & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ z(\cdot, T) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

étudiant l'évolution, dans le domaine Ω et à l'instant $t \in (0, T)$, de la chaleur (la température) z connaissant la valeur de celle-ci à l'instant final T.

Il est bien connu que le problème (1), dit équation de la chaleur rétrograde, n'admet pas de solution pour des données initiales quelconques.

On considère donc a priori les couples $(v, z) \in \left(L^2(Q)\right)^2$ satisfaisant (1), disant de ceux-ci qu'ils constituent l'ensemble des couples contrôle-état.

Un couple contrôle-état (v, z) de (1) sera dit admissible si on a en plus

$$v \in \mathscr{U}_{ad};$$

on notera alors $(v, z) \in \mathscr{A}$, désignant par $\mathscr{A}$ l'ensemble des couples contrôle-état admissibles.

Supposant que l'ensemble $\mathscr{A}$ des couples contrôle-état admissibles est non vide, on introduit la fonctionnelle

$$J(v,z) = \frac{1}{2}\|z - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)},$$

avec $z_d \in L^2(Q)$ et $N > 0$.

On s'intéresse alors au problème de contrôle consistant à trouver un couple contrôle-état

$$(u,y) \in \mathscr{A}_{ad} : \quad J(u,y) = \inf_{(v,z)\in\mathscr{A}_{ad}} J(v,z). \tag{2}$$

On a immédiatement le résultat suivant.

Théorème 1. *Le problème de contrôle optimal* (2) *admet une solution unique* (u,y) *appelée couple contrôle-état optimal.*

Démonstration. De par sa structure, que la fonctionnelle J est coercive, strictement convexe et semi-continue inférieurement. Ce qui, avec l'hypothèse de non vacuité du convexe fermé $\mathscr{A}$ des couples contrôle-état admissibles, permet bien de conclure à l'existence et l'unicité du couple contrôle-état optimal (u,y). □

Dès lors on établit (cf. [4]), avec la condition d'optimalité du premier ordre d'Euler-Lagrange, que le couple optimal (u,y) est caractérisé par

$$(y - z_d\,,\, z - y)_{L^2(Q)} + N(u\,,\, v - u)_{L^2(Q)} \;\geq\; 0, \qquad \forall\,(v,z) \in \mathscr{A}.$$

Le problème consiste alors à trouver un système d'optimalité découplé caractérisant (u,y).

Une méthode classique en la matière est la méthode de pénalisation introduite par J.-L. Lions dans [4]. Celle-ci consiste à approcher (u,y) par un problème pénalisé. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, on définit la fonction coût pénalisée

$$J_\varepsilon(v,z) = J(v,z) + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - v\right\|^2_{L^2(Q)}.$$

On établit alors que le couple optimal $(u_\varepsilon, z_\varepsilon)$ correspondant à cette nouvelle fonction coût converge vers le couple optimal (u,y). On a donc un procédé d'approximation théorique du couple optimal (u,y). À l'aide des conditions du premier ordre d'Euler-Lagrange, on caractérise le couple optimal approché $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ par un système d'inégalités variationnelles qu'on interprète en un système d'optimalité approché après introduction de l'état adjoint approché

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon - u_\varepsilon\right).$$

Le point essentiel de cette technique consiste en l'utilisation de la méthode des estimations *a priori* pour l'obtention d'un système d'optimalité découplé fort par passage à la limite dans le système d'optimalité approché. Mais cette ultime étape requiert l'hypothèse de type Slater que

$$\text{“}\mathscr{U}_{ad} \text{ soit d'intérieur non vide dans } L^2(Q)\text{”}. \tag{3}$$

Mais dans bien de situations, la condition de Slater n'est pas vérifiée ; on peut citer en exemple le cas

$$\mathscr{U}_{ad} = \left(L^2(Q)\right)^+ = \left\{v \in L^2(Q) :\; v \geq 0\right\}.$$

Il apparaît donc pertinent de savoir faire sans cette hypothèse très peu réaliste.

Pour ce faire, R. Dorville, O. Nakoulima et A. Omrane proposent dans [1], la notion de contrôle à moindres regrets, appliquée à une régularisée elliptique à données manquantes du problème (1). Une approche qui leur permet de caractériser le contrôle à moindres regrets u^γ via un système d'optimalité singulier découplé fort. Cela, certes sans recours à l'hypothèse (3), mais au détriment de la condition finale

$$y^\gamma(\cdot,T) \quad = \quad 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

soit plus précisément que l'état associé au contrôle à moindres regrets u^γ est alors tel qu'en toute généralité

$$y^\gamma(\cdot,T) \quad \neq \quad 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Pour contourner le problème, les auteurs introduisent la notion de correcteur d'ordre 0, laquelle appelle à l'hypothèse de régularité

$$y^\gamma(\cdot,T) \in H_0^1(\Omega) : \ \frac{\partial y^\gamma}{\partial t} \in L^2(Q)\,. \tag{4}$$

En définitive, le contrôle sans regret ainsi obtenu ne satisfait pas la condition finale

$$y(\cdot,T) \quad = \quad 0 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

de sorte qu'en toute généralité le problème reste, du mieux de nos connaissances, globalement ouvert.

Nous proposons à travers le présent article la méthode de contrôlabilité pour l'analyse, sans recours à l'hypothèse (3), du problème de contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde. Notons que cette méthode a permis de proposer dans [2], puis [3], une réponse à la même question du contrôle, sans recours à (3), de problèmes de contrôle du système de Cauchy mal posé pour opérateur elliptique.

La suite de cet article se présente comme suit. La Section 2 est consacrée à l'interprétation annoncée du problème initial comme un problème inverse. On y définit le problème dit de contrôlabilité exacte que nous approchons, par argument de densité, par un problème équivalent (celui-ci dit de contrôlabilité approchée). Dans la Section 3, nous revenons au problème de contrôle (2), commençant par le régulariser d'après les résultats de contrôlabilité précédemment obtenus. Après avoir établit la convergence du procédé dans la Section 3.1, puis le système d'optimalité approché dans la Section 3.2, nous finissons dans la Section 3.3 par le système d'optimalité singulier.

2 Contrôlabilité de l'équation de la chaleur rétrograde

Dans la présente section, nous introduisons le point de vue par contrôlabilité ici proposé. Lequel consiste, partant de la notion de contrôlabilité introduite par J.-L. Lions dans [5, p. 222], à interpréter le problème initial comme un problème inverse (nous disons aussi un problème de contrôlabilité).

On établit que, lorsqu'elle existe, la solution de l'équation de la chaleur rétrograde (1) est aussi solution du problème de contrôlabilité. Ce qui permet alors d'établir une condition nécessaire et suffisante caractérisant l'existence d'une solution régulière au problème (1).

On interprète donc (1) comme un problème inverse dont l'objectif d'observation consiste en la condition finale

$$z(\cdot,T) \quad = \quad 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Plus précisément, on considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases}$$

se posant le problème de trouver $y_0 \in L^2(\Omega)$ tel que si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y(\cdot, 0) &= y_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

alors

$$y(\cdot, T) \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{6}$$

On dit que (5)(6) constitue un problème de contrôlabilité exacte associé à l'équation de la chaleur rétrograde (1).

Remarque 1. *Le problème de contrôlabilité est bien défini. En effet, il est bien connu que pour tous $v \in L^2(Q)$ et $y_0 \in L^2(\Omega)$, (5) est bien posé au sens de Hadamard, soit qu'il admet une solution unique*

$$y(v, y_0) \in \mathbb{V} := L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big([0, T]; L^2(\Omega)\big)$$

qui dépend continûment des données. On en déduit, qu'après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la solution $y(v, y_0)$ de (5) se confond à une fonction continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$.

Ainsi on peut bien parler de la valeur finale $y(\cdot, T; v, y_0)$ de $y(v, y_0)$ dans Ω.

Remarque 2. *Notons*

- *y^v la solution unique de (5) ;*
- *$y_0^v \in \mathbb{V} \subset L^2(Q)$ celle de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0^v}{\partial t} - \Delta y_0^v &= v \quad \textit{dans} \quad Q, \\ \\ y_0^v &= 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y_0^v(\cdot, 0) &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

- *et $y^0 \in \mathbb{V} \subset L^2(Q)$ celle de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^0}{\partial t} - \Delta y^0 &= 0 \quad \textit{dans} \quad Q, \\ \\ y^0 &= 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y^0(\cdot, 0) &= y_0 \quad \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

On a alors que l'application

$$(v, y_0) \longmapsto y^v = y_0^v + y^0,$$

est linéaire continue de $L^2(Q) \times L^2(Q)$ dans $\mathbb{V} \subset L^2(Q)$.

On en déduit que le problème de contrôlabilité exacte (5)(6) *est équivalent au suivant*

$$\begin{cases} \textit{trouver } y_0 \in L^2(\Omega) \ \textit{ tel que :} \\ \textit{si } y^0 \textit{ est solution de } (7), \ \textit{alors} \\ y^0(\cdot, T) = -y_0^v(\cdot, T) \quad \textit{dans } \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

On approche, par argument de densité, le problème de contrôlabilité exacte (8) par un problème, dit de contrôlabilité approchée et en réponse duquel on a le résultat suivant.

Proposition 1. *Lorsque la donnée initiale y_0 parcourt $L^2(\Omega)$, l'ensemble*

$$E = \left\{ y^0(\cdot, T) \ ; \ y_0 \in L^2(\Omega) \right\},$$

décrit par les valeurs finales de la solution y^0 de (7)*, est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. On a clairement que E est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$. D'où, par le Théorème de Hahn-Banach, E est dense dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si $E^\perp = \{0\}$.

Soit $k \in E^\perp$; on a

$$\forall\, y_0 \in L^2(\Omega)\,, \qquad \big(k\,,\, y^0(\cdot, T)\big)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Mais il vient de (7) que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y^0}{\partial t} - \Delta y^0\,,\, \varphi \right)_{L^2(Q)} = 0 \iff & \left(\frac{\partial y^0}{\partial t}\,,\, \varphi \right)_{L^2(Q)} - \big(\Delta y^0\,,\, \varphi\big)_{L^2(Q)} = 0 \\ \iff & \big(y^0(\cdot, T)\ ,\ \varphi(\cdot, T)\big)_{L^2(\Omega)} - (y_0\,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} \\ & - \left(y^0\,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{L^2(Q)} - \big(y^0\,,\, \Delta\varphi\big)_{L^2(Q)} + \left(y^0\,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma)} \\ & - \left(\frac{\partial y^0}{\partial \nu}\,,\, \varphi \right)_{L^2(\Sigma)} = 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \big(y^0(\cdot, T)\ ,\ \varphi(\cdot, T)\big)_{L^2(\Omega)} - (y_0\,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} - \left(y^0\,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{L^2(Q)} \\ - \big(y^0\,,\, \Delta\varphi\big)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial y^0}{\partial \nu}\,,\, \varphi \right)_{L^2(\Sigma)} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Choisissons dans ce qui précède φ telle que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ \varphi & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) & = & k & \text{dans} & \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Alors il vient que (9) équivaut à

$$\big(k\,,\, y^0(\cdot,T)\big)_{L^2(\Omega)} - \left(y_0\,,\, \varphi(\cdot,0)\right)_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{11}$$

où

$$k \in E^{\perp} \iff \big(k\,,\, y^0(\cdot,T)\big)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Ainsi (11) devient

$$\forall\, y_0 \in L^2(\Omega)\,, \qquad \left(y_0\,,\, \varphi(\cdot,0)\right)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{12}$$

Mais on peut encore choisir dans (12), $y_0 = \varphi(\cdot,0)$ dans Ω, et alors il suit

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad i.e. \qquad \varphi(\cdot,0) \;=\; 0 \;\text{ dans }\; \Omega.$$

Ce qui amène, avec (10), que φ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans} \quad Q, \\[2ex] \varphi & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\[2ex] \varphi(\cdot,0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que $\varphi \equiv 0$ et par suite que

$$\varphi(\cdot,T) \;=\; k = 0 \;\text{ dans }\; \Omega.$$

D'où on déduit bien que $E^{\perp} = \{0\}$ et donc que E est dense dans $L^2(\Omega)$. $\square$

Le résultat suivant est alors immédiat.

Corollaire 1. *Pour tous $\varepsilon > 0$ et $\kappa \in L^2(\Omega)$, il existe $y_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ tel que la solution $y^0_\varepsilon \in \mathbb{V}$ de*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y^0_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y^0_\varepsilon & = & v & \textit{dans} \quad Q, \\[2ex] y^0_\varepsilon & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\[2ex] y^0_\varepsilon(\cdot,0) & = & y_{0\varepsilon} & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{13}$$

satisfait

$$\left\|y^0_\varepsilon(\cdot,T) - \kappa\right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

D'où il découle aussi que

Corollaire 2. *Pour tous $v \in L^2(Q)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ tel que la solution $y^v_\varepsilon \in \mathbb{V}$ de*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y^v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y^v_\varepsilon & = & v & \textit{dans} \quad Q, \\[2ex] y^v_\varepsilon & = & 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\[2ex] y^v_\varepsilon(\cdot,0) & = & y_{0\varepsilon} & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{14}$$

satisfait

$$\|y^v_\varepsilon(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $v \in L^2(Q)$ et $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un unique $y_0^v \in \mathbb{V}$, égal presque partout à une fonction continue de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$, solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0^v}{\partial t} - \Delta y_0^v &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y_0^v &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y_0^v(\cdot,0) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Il suit, avec le Corollaire 1, qu'il existe bien $y_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ tel que la solution $y_\varepsilon^0 \in \mathbb{V}$ de (13) vérifie

$$\left\| y_\varepsilon^0(\cdot,T) - (-y_0^v(\cdot,T)) \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Ce qui permet bien de conclure que $y_\varepsilon^v = \left(y_0^v + y_\varepsilon^0\right) \in \mathbb{V}$ est solution unique de (14) avec

$$\|y_\varepsilon^v(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} = \|y_0^\varepsilon(\cdot,T) + y_0^v(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

□

De plus, on a le théorème suivant caractérisant l'existence d'une solution régulière à l'équation de la chaleur rétrograde.

Théorème 2. *Soit $v \in L^2(Q)$. L'équation de la chaleur rétrograde*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= v \quad \textit{dans} \quad Q, \\ \\ z &= 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma, \\ \\ z(\cdot,T) &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

admet une solution régulière $z \in \mathbb{V}$, si et seulement si la suite $(y_{0\varepsilon})_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Corollaire 1, il existe $y_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega)$ tel que $y_\varepsilon^v \in \mathbb{V}$ soit solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon^v}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon^v &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y_\varepsilon^v &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y_\varepsilon^v(\cdot,0) &= y_{0\varepsilon} \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

avec l'estimation

$$\|y_\varepsilon^v(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

On génère ainsi des suites

$$(y_{0\varepsilon})_\varepsilon \subset L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad (y_\varepsilon^v)_\varepsilon \subset \mathbb{V}.$$

Supposons alors que la suite $(y_{0\varepsilon})_\varepsilon$ bornée dans $L^2(\Omega)$. Il suit que, le problème (16) de Dirichlet homogène pour l'équation de la chaleur, étant bien posé, que la suite $(y_\varepsilon^v)_\varepsilon$ est bornée dans $\mathbb{V}$, et donc encore dans $L^2(Q)$.

On en déduit qu'on peut extraire, de $(y_{0\varepsilon})_\varepsilon$ et $(y^v_\varepsilon)_\varepsilon$, des sous-suites encore notées de même qui convergent faiblement dans $L^2(\Omega)$ et $\mathbb{V}$, respectivement.

Soit qu'il existe $y_0 \in L^2(\Omega)$ et $y^v \in \mathbb{V}$, tels que

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_{0\varepsilon} & \longrightarrow & y_0 & \text{dans} & L^2(\Omega) \quad \text{faible,} \\ \\ y^v_\varepsilon & \longrightarrow & y^v & \text{dans} & \mathbb{V} \qquad\quad \text{faible.} \end{array}\right.$$

Mais alors, on a d'une part que

$$\|y^v_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon \quad \text{et} \quad y^v_\varepsilon \longrightarrow y^v \quad \text{dans} \quad \mathbb{V} \quad \text{faible}$$

entraînent, y^v_ε étant presque partout égale à une fonction continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$, que

$$y^v(\cdot, T) \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{17}$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}(Q)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y^v_\varepsilon = v \text{ dans } Q \iff & \left(\frac{\partial y^v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta y^v_\varepsilon \,,\, \varphi\right)_{L^2(Q)} = (v \,,\, \varphi)_{L^2(Q)} \\ \iff & (y^v_\varepsilon(\cdot, T) \,,\, \varphi(\cdot, T))_{L^2(\Omega)} - (y^v_\varepsilon(\cdot, 0) \,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} \\ & - \left(y^v_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)} - (y^v_\varepsilon \,,\, \Delta\varphi)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial y^v_\varepsilon}{\partial \nu} \,,\, \varphi\right)_{L^2(\Sigma)} \\ & + \left(y^v_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma)} = (v \,,\, \varphi)_{L^2(Q)} \\ \iff & (y^v_\varepsilon(\cdot, T) \,,\, \varphi(\cdot, T))_{L^2(\Omega)} - (y_{0\varepsilon} \,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} \\ & - \left(y^v_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)} - (y^v_\varepsilon \,,\, \Delta\varphi)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial y^v_\varepsilon}{\partial \nu} \,,\, \varphi\right)_{L^2(\Sigma)} \\ & = (v \,,\, \varphi)_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

soit, par passage à la limite,

$$\begin{aligned} & (y^v(\cdot, T) \,,\, \varphi(\cdot, T))_{L^2(\Omega)} - (y_0 \,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} - \left(y^v \,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)} \\ & \quad - (y^v \,,\, \Delta\varphi)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial y^v}{\partial \nu} \,,\, \varphi\right)_{L^2(\Sigma)} = (v \,,\, \varphi)_{L^2(Q)} \\ & \iff (y^v(\cdot, 0) - y_0 \,,\, \varphi(\cdot, 0))_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial y^v}{\partial t} - \Delta y^v \,,\, \varphi\right)_{L^2(Q)} \\ & \quad - \left(y^v \,,\, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma)} = (v \,,\, \varphi)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité valant pour tout $\varphi \in \mathscr{C}(Q)$, il en découle que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y^v}{\partial t} - \Delta y^v & = & v & \text{dans} \quad Q, \\ \\ y^v & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y^v(\cdot, 0) & = & y_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right.$$

soit, avec (17), que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^v}{\partial t} - \Delta y^v &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y^v &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y^v(\cdot, T) &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

c'est-à-dire que $y^v \in \mathbb{V}$ est solution de l'équation de la chaleur rétrograde (15).

2. On suppose à présent que l'équation de la chaleur rétrograde (15) admet une solution régulière $z \in \mathbb{V}$.

   Alors, comme $z \in \mathbb{V}$ implique que z est presque partout égale à une fonction continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$, on peut, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, parler de sa valeur initiale $z(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$.

   Et donc, posant pour tout $\varepsilon > 0$,

$$y_{0\varepsilon} \;=\; z(\cdot, 0) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

   on obtient que la suite $(y_{0\varepsilon})_\varepsilon$, puisque constante, est bornée dans $L^2(\Omega)$.

□

3 La méthode de contrôlabilité

Commençons par rappeler que nous sommes ici intéressés par le contrôle de l'équation de la chaleur rétrograde. Soit, plus précisément, que pour $v, z \in L^2(Q)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ z(\cdot, T) &= 0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \end{cases} \tag{18}$$

on pose

$$J(v, z) = \frac{1}{2}\|z - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{19}$$

s'intéressant au problème de contrôle

$$\inf\{J(v, z);\; (v, z) \in \mathscr{A}\}\,. \tag{20}$$

Comme souligné à l'introduction, le problème (18)(19)(20) admet une solution unique (u, y) dont la caractérisation, via un système d'optimalité singulier découplé fort, et cela sans recours à l'hypothèse de Slater (3), est le principal objet ici.

Pour ce faire, partant de l'hypothèse de non-vacuité de l'ensemble des couples contrôle-état admissibles pour (18)(19)(20) et des résultats de la section précédente, on a pour tous $v \in L^2(Q)$ et $\varepsilon > 0$ qu'il existe

$$y_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad y^v_\varepsilon \in \mathbb{V}$$

tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\varepsilon^v}{\partial t} - \Delta y_\varepsilon^v &= v \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ y_\varepsilon^v &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ y_\varepsilon^v(\cdot,0) &= y_{0\varepsilon} \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

avec l'estimation

$$\|y_\varepsilon^v(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Supposant alors que la solution optimale (u,y) de (18)(19)(20) est telle que $y(\cdot,0) \in L^2(\Omega)$, on introduit la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\|y_\varepsilon^v - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|y_{0\varepsilon} - y(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et on s'intéresse au problème

$$\inf\{J_\varepsilon(v);\ v \in \mathscr{U}_{ad}\}\,. \tag{21}$$

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de contrôle* (21) *admet une solution unique : le contrôle optimal approché $\overline{u}_\varepsilon$.*

3.1 Convergence de la méthode

Soit $\varepsilon > 0$. On a existence et unicité du contrôle approché $\overline{u}_\varepsilon$. Soit, avec les résultats de la section précédente, qu'il existe

$$\overline{y}_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \overline{y}_\varepsilon \in \mathbb{V}$$

vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{y}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \overline{y}_\varepsilon &= \overline{u}_\varepsilon \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ \overline{y}_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ \overline{y}_\varepsilon(\cdot,0) &= \overline{y}_{0\varepsilon} \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{22}$$

et l'estimation

$$\|\overline{y}_\varepsilon(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon,$$

avec

$$J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v), \quad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}.$$

En particulier donc

$$J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u), \tag{23}$$

où u est le contrôle optimal pour (18)(19)(20).

On a en fait que $J_\varepsilon(u)$ est indépendant de ε. En effet, comme l'état optimal y associé à u vérifie $y(\cdot,0)\in L^2(\Omega)$, on obtient en posant $y^*_{0\varepsilon}=y(\cdot,0)$ que y satisfait

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y &=& u & \text{dans} \quad Q,\\[2em] y &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma,\\[2em] y(\cdot,0) &=& y^*_{0\varepsilon} & \text{dans} \quad \Omega \end{array}\right.$$

avec

$$y(\cdot,T) \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad \textit{a fortiori} \qquad \|y(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon.$$

Il suit que $J_\varepsilon(u)$ est défini, avec

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}\|y-z_d\|^2_{L^2(Q)}+\frac{N}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)}+\frac{1}{2\varepsilon}\|y^*_{0\varepsilon}-y(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \frac{1}{2}\|y-z_d\|^2_{L^2(Q)}+\frac{N}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)}=J(u,y). \end{aligned}$$

Ainsi (23) devient

$$J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon)\le J_\varepsilon(u)=J(u,y), \tag{24}$$

et il vient qu'il existe des constantes $C_i\in\mathbb{R}^*$ indépendantes de ε telles qu'on a

$$\|\overline{y}_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\le C_1, \qquad \|\overline{u}_\varepsilon\|_{L^2(Q)}\le C_2 \qquad \text{et} \qquad \|\overline{y}_{0\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}\le C_3.$$

On en déduit immédiatement qu'il existe $\hat{u}\in L^2(Q)$, $\hat{y}\in L^2(Q)$ et $\hat{y}_0\in L^2(\Omega)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rcccl} \overline{u}_\varepsilon & \longrightarrow & \hat{u} & \text{dans} \quad L^2(Q) & \text{faible},\\ \overline{y}_\varepsilon & \longrightarrow & \hat{y} & \text{dans} \quad L^2(Q) & \text{faible},\\ \overline{y}_{0\varepsilon} & \longrightarrow & \hat{y}_0 & \text{dans} \quad L^2(\Omega) & \text{faible}. \end{array}\right.$$

Mais encore, (24) entraîne aussi

$$\|\overline{y}_{0\varepsilon}-y(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}\le 2\varepsilon\, C_4, \tag{25}$$

ce qui conduit, comme

$$\overline{y}_{0\varepsilon} \;\longrightarrow\; \hat{y}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{faible}, \tag{26}$$

à

$$\hat{y}_0 \;=\; y(\cdot,0) \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{27}$$

Alors, il vient avec (22), que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(Q)$,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\overline{y}_\varepsilon}{\partial t}\,,\,\varphi\right)_{L^2(Q)}-(\Delta\overline{y}_\varepsilon\,,\,\varphi)_{L^2(Q)}=(\overline{u}_\varepsilon\,,\,\varphi)_{L^2(Q)}\\ &\qquad\iff (\overline{y}_\varepsilon(\cdot,T)\;,\;\varphi(\cdot,T))_{L^2(\Omega)}-(\overline{y}_\varepsilon(\cdot,0)\;,\;\varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}-\left(\overline{y}_\varepsilon\,,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)}\\ &\qquad\quad -(\overline{y}_\varepsilon\,,\,\Delta\varphi)_{L^2(Q)}-\left(\frac{\partial\overline{y}_\varepsilon}{\partial\nu}\,,\,\varphi\right)_{L^2(\Sigma)}+\left(\overline{y}_\varepsilon\,,\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_{L^2(\Sigma)}=(\overline{u}_\varepsilon\,,\,\varphi)_{L^2(Q)}\\ &\qquad\iff (\overline{y}_\varepsilon(\cdot,T)\;,\;\varphi(\cdot,T))_{L^2(\Omega)}-(\overline{y}_{0\varepsilon}\,,\,\varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)}-\left(\overline{y}_\varepsilon\,,\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)}\\ &\qquad\quad -(\overline{y}_\varepsilon\,,\,\Delta\varphi)_{L^2(Q)}-\left(\frac{\partial\overline{y}_\varepsilon}{\partial\nu}\,,\,\varphi\right)_{L^2(\Sigma)}=(\overline{u}_\varepsilon\,,\,\varphi)_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

soit à la limite

$$\begin{aligned}
(\hat{y}(\cdot,T)\ ,\ \varphi(\cdot,T))_{L^2(\Omega)} - (\hat{y}_0\ ,\ \varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} - \left(\hat{y}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{L^2(Q)} - (\hat{y}\ ,\ \Delta\varphi)_{L^2(Q)} \\
- \left(\frac{\partial\hat{y}}{\partial\nu}\ ,\ \varphi\right)_{L^2(\Sigma)} = (\hat{u}\ ,\ \varphi)_{L^2(Q)} \\
\Longleftrightarrow\ (\hat{y}(\cdot,0) - \hat{y}_0\ ,\ \varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial\hat{y}}{\partial t} - \Delta\hat{y}\ ,\ \varphi\right)_{L^2(Q)} \\
- \left(\hat{y}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_{L^2(\Sigma)} = (\hat{u}\ ,\ \varphi)_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial\hat{y}}{\partial t} - \Delta\hat{y} & = & \hat{u} & \text{dans}\ \ Q, \\
\hat{y} & = & 0 & \text{sur}\ \ \ \Sigma, \\
\hat{y}(\cdot,0) & = & \hat{y}_0 & \text{dans}\ \ \Omega.
\end{array}\right. \tag{28}$$

Par ailleurs, la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ étant continue, *a fortiori* faiblement continue,

$$\overline{y}_\varepsilon \ \longrightarrow\ \hat{y}\ \ \text{dans}\ \ L^2(Q)\ \ \text{faible} \qquad \text{et} \qquad \|\overline{y}_\varepsilon(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

amènent

$$\hat{y}(\cdot,T)\ =\ 0\ \ \text{dans}\ \ \Omega. \tag{29}$$

Ainsi (28) et (29) permettent de conclure que $\hat{y} \in L^2(Q)$ satisfait

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial\hat{y}}{\partial t} - \Delta\hat{y} & = & \hat{u} & \text{dans}\ \ Q, \\
\hat{y} & = & 0 & \text{sur}\ \ \ \Sigma, \\
\hat{y}(\cdot,T) & = & 0 & \text{dans}\ \ \Omega,
\end{array}\right.$$

notant que $\hat{u} \in \mathscr{U}_{ad}$, puisque $\overline{u}_\varepsilon \in \mathscr{U}_{ad}$ et $\mathscr{U}_{ad}$ est fermé donc fermé faible : le couple $(\hat{u},\hat{y})$ est admissible pour (18)(19)(20), et donc

$$J(u,y) \leq J(\hat{u},\hat{y})\,. \tag{30}$$

D'autre part, passant (24) à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, il vient $J(\hat{u},\hat{y}) \leq J(u,y)$; soit, avec (30), que $J(u,y) = J(\hat{u},\hat{y})$.

On conclut bien alors, par unicité du couple contrôle-état optimal (u,y), que $(\hat{u},\hat{y}) = (u,y)$, ce qui finit de prouver le résultat suivant.

Proposition 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le contrôle optimal approché $\overline{u}_\varepsilon$ et l'état $\overline{y}_\varepsilon$ associé vérifient*

$$\left\{\begin{array}{l}
\overline{u}_\varepsilon\ \ \longrightarrow\ \ u\ \ \textit{dans}\ \ L^2(Q)\ \ \textit{faible}, \\
\overline{y}_\varepsilon\ \ \longrightarrow\ \ y\ \ \textit{dans}\ \ L^2(Q)\ \ \textit{faible},
\end{array}\right.$$

où (u,y) est le couple contrôle-état optimal pour (18)(19)(20).

On établit ci-après, qu'on a en fait plus : la convergence forte.

Théorème 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le contrôle optimal approché $\overline{u}_\varepsilon$ et l'état $\overline{y}_\varepsilon$ associé sont tels que, lorsque $\varepsilon \to 0$,*

$$\begin{cases} \overline{u}_\varepsilon \longrightarrow u \quad \textit{dans} \quad L^2(Q) \quad \textit{fort}, \\ \\ \overline{y}_\varepsilon \longrightarrow y \quad \textit{dans} \quad L^2(Q) \quad \textit{fort}, \end{cases}$$

où (u, y) est le couple contrôle-état optimal pour (18)(19)(20).

Démonstration. Des résultats précédents, on a

$$\overline{u}_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{faible}, \tag{31}$$

$$\overline{y}_\varepsilon \longrightarrow y \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{faible}, \tag{32}$$

et

$$J(u, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon)\,.$$

Où, d'après (25)(26) et (27), cette dernière égalité s'écrit encore

$$\|y - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|u\|^2_{L^2(Q)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\|\overline{y}_\varepsilon - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|\overline{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} \right). \tag{33}$$

Mais alors, la norme $\|\cdot\|_{L^2(Q)}$ étant continue, *a fortiori* semi-continue inférieurement faible, il vient avec (31) et (32) que

$$\begin{cases} \|y - z_d\|^2_{L^2(Q)} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\overline{y}_\varepsilon - z_d\|^2_{L^2(Q)}, \\ \\ \|u\|^2_{L^2(Q)} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|\overline{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}. \end{cases}$$

D'où il suit, avec (33), que

$$\|y - z_d\|^2_{L^2(Q)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\overline{y}_\varepsilon - z_d\|^2_{L^2(Q)}, \tag{34}$$

et

$$\|u\|^2_{L^2(Q)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\overline{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}. \tag{35}$$

Ainsi, comme

$$\|\overline{y}_\varepsilon - y\|^2_{L^2(Q)} = \|\overline{y}_\varepsilon - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \|y - z_d\|_{L^2(Q)} - 2(\overline{y}_\varepsilon - z_d\,,\, y - z_d)_{L^2(Q)},$$

on conclut avec (32) et (34) que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\overline{y}_\varepsilon - y\|^2_{L^2(Q)} = 0 \qquad i.e. \qquad \overline{y}_\varepsilon \longrightarrow y \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{fort.}$$

De manière analogue, (31) et (35) amènent que

$$\overline{u}_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{fort},$$

ce qui finit de prouver le résultat annoncé. □

3.2 Système d'optimalité approché

Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons qu'on a pour le contrôle $\overline{u}_\varepsilon \in \mathscr{U}_{ad}$, solution optimale de (21), qu'il existe

$$\overline{y}_{0\varepsilon} \in L^2(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \overline{y}_\varepsilon \in L^2(Q)\,,$$

vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{y}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \overline{y}_\varepsilon &= \overline{u}_\varepsilon \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ \overline{y}_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ \overline{y}_\varepsilon(\cdot, 0) &= \overline{y}_{0\varepsilon} \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

et l'estimation

$$\|\overline{y}_\varepsilon(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Soit alors $v \in \mathscr{U}_{ad}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on a :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon + \lambda\,(v - \overline{u}_\varepsilon)) &= \frac{1}{2}\|y(\overline{u}_\varepsilon + \lambda\,(v - \overline{u}_\varepsilon)\,, \overline{y}_{0\varepsilon}) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|\overline{u}_\varepsilon + \lambda\,(v - \overline{u}_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\|\overline{y}_{0\varepsilon} - y(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}\|\overline{y}_\varepsilon - z_d + \lambda\phi_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \frac{N}{2}\|\overline{u}_\varepsilon + \lambda\,(v - \overline{u}_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\|\overline{y}_{0\varepsilon} - y(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon) + \frac{\lambda^2}{2}\left(\|\phi_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + N\|v - \overline{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)}\right) \\ &\quad + \lambda(\overline{y}_\varepsilon - z_d\,,\, \phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} + \lambda N(\overline{u}_\varepsilon\,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

ce qui amène que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon + \lambda\,(v - \overline{u}_\varepsilon))\bigg|_{\lambda=0} = (\overline{y}_\varepsilon - z_d\,,\, \phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} + N(\overline{u}_\varepsilon\,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)},$$

où $\phi_\varepsilon = y(v - \overline{u}_\varepsilon, \overline{y}_{0\varepsilon}) - y(0, \overline{y}_{0\varepsilon})$ est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \phi_\varepsilon &= v - \overline{u}_\varepsilon \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ \phi_\varepsilon &= 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ \phi_\varepsilon(\cdot, 0) &= 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{36}$$

Ainsi donc on obtient par la condition d'optimalité du premier ordre d'Euler-Lagrange que le contrôle optimal approché $\overline{u}_\varepsilon$ est l'unique élément de $\mathscr{U}_{ad}$ satisfaisant

$$(\overline{y}_\varepsilon - z_d\,,\, \phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} + N(\overline{u}_\varepsilon\,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)} \geq 0, \qquad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}. \tag{37}$$

Introduisons alors l'état adjoint $p_\varepsilon \in L^2(Q)$ par

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \Delta p_\varepsilon &= \overline{y}_\varepsilon - z_d \quad \text{dans} \quad Q, \\ \\ p_\varepsilon &= 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \\ \\ p_\varepsilon(\cdot, T) &= 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Il vient avec (36) que

$$-\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \Delta p_\varepsilon \;\; = \;\; \overline{y}_\varepsilon - z_d \quad \text{dans} \quad Q$$

amène

$$\begin{aligned}
(\overline{y}_\varepsilon - z_d \,,\, \phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} &= -\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} \,,\, \phi_\varepsilon\right)_{L^2(Q)} - (\Delta p_\varepsilon \,,\, \phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} \\
&= (p_\varepsilon(\cdot,0) \,,\, \phi_\varepsilon(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} - (p_\varepsilon(\cdot,T) \,,\, \phi_\varepsilon(\cdot,T))_{L^2(\Omega)} + \left(p_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t}\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad - (p_\varepsilon \,,\, \Delta\phi_\varepsilon)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \,,\, \phi_\varepsilon\right)_{L^2(\Sigma)} + \left(p_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma)} \\
&= \left(p_\varepsilon \,,\, \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial t} - \Delta\phi_\varepsilon\right)_{L^2(Q)} = (p_\varepsilon \,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

de sorte que la condition d'optimalité (37) se réduit à

$$(p_\varepsilon + N\overline{u}_\varepsilon \,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)} \;\; \geq \;\; 0, \qquad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}.$$

On obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème 4. *Soit $\varepsilon > 0$. Le contrôle $\overline{u}_\varepsilon$ est solution unique de (21) si et seulement si le quadruplet*

$$\{\overline{y}_{0\varepsilon}, \overline{u}_\varepsilon, \overline{y}_\varepsilon, p_\varepsilon\} \in L^2(\Omega) \times \left(L^2(Q)\right)^3$$

est solution du système d'optimalité approché défini par les systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{y}_\varepsilon}{\partial t} - \Delta\overline{y}_\varepsilon \;\; = \;\; \overline{u}_\varepsilon \quad \textit{dans} \quad Q, \\[2ex] \overline{y}_\varepsilon \;\; = \;\; 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma, \\[2ex] \overline{y}_\varepsilon(\cdot,0) \;\; = \;\; \overline{y}_{0\varepsilon} \quad \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{38}$$

et

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} - \Delta p_\varepsilon \;\; = \;\; \overline{y}_\varepsilon - z_d \quad \textit{dans} \quad Q, \\[2ex] p_\varepsilon \;\; = \;\; 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma, \\[2ex] p_\varepsilon(\cdot,T) \;\; = \;\; 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{39}$$

l'estimation

$$\|\overline{y}_\varepsilon(\cdot,T)\|_{L^2(\Omega)} \;\; < \;\; \varepsilon, \tag{40}$$

et l'inégalité variationnelle

$$(p_\varepsilon + n\overline{u}_\varepsilon \,,\, v - \overline{u}_\varepsilon)_{L^2(Q)} \;\; \geq \;\; 0, \qquad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}. \tag{41}$$

3.3 Système d'optimalité singulier

D'après les résultats de la Section 3.1, on a :

$$\overline{u}_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{fort}$$

$$\overline{y}_\varepsilon \longrightarrow y \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{fort},$$

où (u, y) est le couple contrôle-état optimal pour (18)(19)(20).

Alors, (39) étant bien posé au sens de Hadamard, il suit qu'il existe $p \in L^2(Q)$ tel que

$$p_\varepsilon \longrightarrow p \quad \text{dans} \quad L^2(Q) \quad \text{fort}.$$

On passe alors aisément les résultats du Théorème 4 précédent à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, pour obtenir que le système d'optimalité singulier fort caractérisant le couple contrôle-état optimal pour (18)(19)(20) est tel que ci-dessous précisé.

Théorème 5. *Le couple* (u, y) *est solution unique du problème* (18)(19)(20) *si et seulement si le triplet*

$$\{u, y, p\} \in \left(L^2(Q)\right)^3$$

est solution du système d'optimalité singulier défini par les systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &=& u & \textit{dans} \quad Q, \\ y &=& 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ y(\cdot, T) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{42}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial p}{\partial t} - \Delta p &=& y - z_d & \textit{dans} \quad Q, \\ p &=& 0 & \textit{sur} \quad \Sigma, \\ p(\cdot, T) &=& 0 & \textit{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{43}$$

et l'inégalité variationnelle

$$(p + Nu\, ,\, v - u)_{L^2(Q)} \;\geq\; 0, \qquad \forall\, v \in \mathscr{U}_{ad}. \tag{44}$$

4 Conclusion

In this work, we succeed in characterizing the optimal control-state pair of the control problem for the ill-posed backwards heat equation, using the controllability concept. The method consists in interpreting the initial problem as an inverse problem, we are also saying a controllability problem. An approach that allows us to obtain a strong and decoupled singular optimality system. As expected, the approach here proposed here does without the regularity assumption (4) used in [1] and the Slater-type one (3). All that is required is the following

$$(u, y): \quad y(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)\,. \tag{45}$$

Finally, in view of the similar results obtained for the ill-posed Cauchy system for an elliptic operator (cf. [2] and [3]), the controllability method here proposed seems relevant for control problems (of singular distributed systems) which require recourse to Slater-type assumptions such as (3).

Références

[1] René DORVILLE, Ousseynou NAKOULIMA et Abdennebi OMRANE. « Low-Regret Control of Singular Distributed Systems : The Ill-Posed Backwards Heat Equation ». In : *Applied Mathematics Letters* 17 (2004), p. 549-552.

[2] Bylli André GUEL et Ousseynou NAKOULIMA. « The ill-posed Cauchy problem by Controllability the elliptic case ». In : *Results in Control and Optimization* 10 (2023), p. 100191. ISSN : 2666-7207. DOI : `https://doi.org/10.1016/j.rico.2022.100191`.

[3] Bylli André B. GUEL. « Control of the Cauchy System for an Elliptic Operator : The Controllability Method ». In : *Abstract and Applied Analysis* (2023). DOI : `https://doi.org/10.1155/2023/2503169`.

[4] Jacques-Louis LIONS. *Contrôle de systèmes distribués singuliers*. Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Paris : Bordas, 1983. 448 p.

[5] Jacques-Louis LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Études Mathématiques. Paris : Dunod, 1968. 426 p.