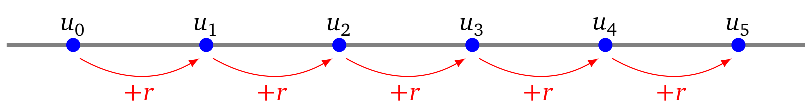
Suites arithmétiques – Suites géométriques

Tu vas manipuler deux types de suites fondamentales : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Cours 1 (Suites arithmétiques)**.**

Une suite arithmétique est une suite telle que la différence entre deux termes consécutifs ait toujours la même valeur.



1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite arithmétique*** de ***raison*** r si on a $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. **Formule de récurrence.** Une suite arithmétique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison r :

terme initial u_0 et formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$

3. **Formule directe.** On calcule u_n directement par la formule :
   $$\boxed{u_n = nr + u_0}$$
4. **Exemple.**
   $$7 \quad 10 \quad 13 \quad 16 \quad 19 \quad \ldots$$
   C'est la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 7$ et de raison $r = 3$. La formule directe est $u_n = 3n+7$.
5. **Somme.** La somme des termes de u_0 jusqu'à u_n est donnée par la formule :
   $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

Activité 1 (Suites arithmétiques)**.**

Objectifs : programmer les différentes formules autour des suites arithmétiques.

1. Programme une fonction `arithmetique_1(n,u0,r)` qui renvoie le terme de rang n de la suite arithmétique définie par le terme initial u_0 et la raison r, en utilisant la formule de récurrence. Quel est le terme u_{100} de la suite arithmétique définie par $u_0 = 13$ et $r = 5$?
2. Programme une fonction `arithmetique_2(n,u0,r)` qui fait la même chose mais en utilisant cette

fois la formule directe.

3. Programme une fonction `liste_arithmetique(n,u0,r)` qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$.
4. Programme une fonction `est_arithmetique(liste)` qui teste si les termes $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$ de la liste donnée forment le début d'une suite arithmétique.

   Indications.
   - Le programme renvoie `True` ou `False`.
   - On suppose que la liste contient au moins deux éléments.
   - Si la liste est constituée des premiers termes d'une suite arithmétique alors, le terme initial est u_0 et la raison est $r = u_1 - u_0$. Et on doit avoir $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n. Tu peux alors utiliser la question précédente.
   - Exemple : avec $[3, 5, 7, 10]$ la fonction renvoie « Faux ».
5. Programme une fonction `somme_arithmetique_1(n,u0,r)` qui calcule, en additionnant les éléments, la somme des termes de rang 0 à n d'une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r. Retrouve le même résultat par une fonction `somme_arithmetique_2(n,u0,r)` qui utilise la formule de la somme donnée dans le cours ci-dessus.

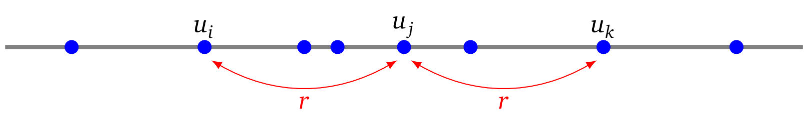
   Combien vaut la somme :
   $$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1000\ ?$$

Activité 2 (Trois termes d'une suite arithmétique)**.**

Objectifs : déterminer si dans une liste donnée il existe trois termes d'une suite arithmétique.

On te donne une liste ordonnée $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$. Tu dois déterminer si dans cette liste on peut trouver trois termes u_i, u_j, u_k qui font partie d'une suite arithmétique. Autrement dit, tels que :

$$u_i = u_j - r \quad u_k = u_j + r \quad \text{pour un certain } r.$$



Par exemple dans la liste :

$$[10, 11, 13, 17, 19, 20, 23, 29, 31]$$

les trois termes $u_i = 11$, $u_j = 17$, $u_k = 23$ sont en progression arithmétique, de raison $r = 6$.
Programme l'algorithme ci-dessous en une fonction `chercher_arithmetique(u)` qui à partir d'une liste de termes `u` renvoie trois termes en progression arithmétique (ou `None` s'il n'y en a pas).

Le principe de l'algorithme est le suivant. Pour chaque élément u_j de la suite (qui va jouer le rôle du potentiel élément central) :

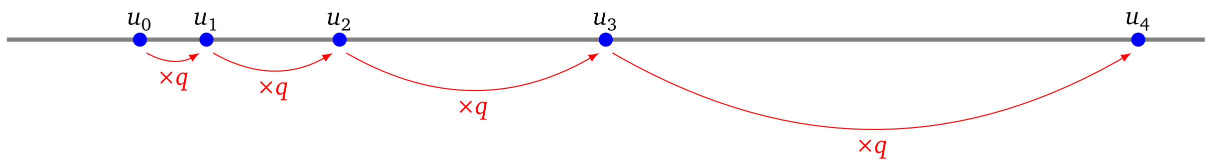
- On cherche un élément u_i de rang i plus petit que j et un élément u_k de rang k plus grand que j avec $u_j - u_i = u_k - u_j$ (on aura alors $u_j = u_i + r$ puis $u_k = u_j + r$). Si on a cette égalité alors c'est gagné !
- Si on n'a pas cette égalité alors on prend un i plus petit ou bien un k plus grand.

Algorithme.

- — Entrée : une liste de termes $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ ordonnée.
  — Sortie : trois termes en progression arithmétique (ou rien s'il n'y en pas).
- Pour j parcourant les indices de 1 à $n-1$:
  — Poser $i = j-1$, $k = j+1$.
  — Tant que $i \geqslant 0$ et $k \leqslant n$:
    — Si $u_j - u_i = u_k - u_j$ renvoyer le triplet u_i, u_j, u_k (qui forme une progression arithmétique). Le programme s'arrête là avec succès.
    — Si $u_j - u_i < u_k - u_j$ alors faire $i \leftarrow i-1$.
    — Si $u_j - u_i > u_k - u_j$ alors faire $k \leftarrow k+1$.
- Lorsque la boucle « pour » se termine sans avoir obtenu de triplet, c'est qu'il n'y en a pas.

Cours 2 (Suites géométriques).

Pour une suite géométrique le quotient entre deux termes consécutifs est toujours le même.



1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite géométrique*** de ***raison*** q si on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. **Formule de récurrence.** Une suite géométrique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison q :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{terme initial } u_0 \text{ et}\\ \text{formule de récurrence } u_{n+1} = qu_n\end{array}}$$

3. **Formule directe.** On calcule u_n directement par la formule :

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$$

4. **Exemple.**

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \quad \dots$$

est le début de la suite géométrique de terme initial $u_0 = 2$, de raison $q = 3$. La formule directe est $u_n = 2 \times 3^n$.

5. **Somme.** La somme des termes de u_0 jusqu'à u_n (pour $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

que l'on mémorise par :

$$\text{somme suite géométrique} = \text{terme initial} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Activité 3 (Suites géométriques).

Objectifs : refaire la première activité sur les suites arithmétiques, mais cette fois pour les suites géométriques.

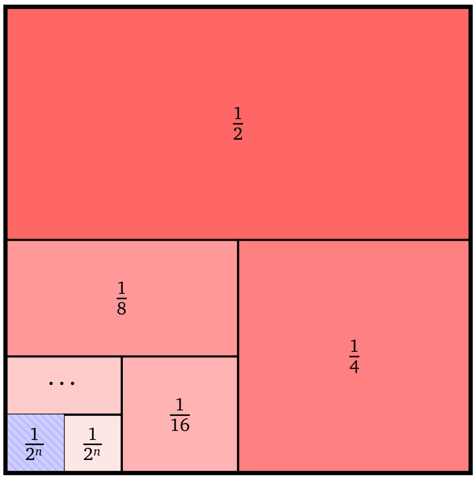
1. Programme une fonction `geometrique_1(n,u0,q)` qui renvoie le terme de rang n de la suite géométrique définie par le terme initial u_0 et la raison q, en utilisant la formule de récurrence. Quel est le terme u_{10} de la suite géométrique définie par $u_0 = 13$ et $r = 5$?
2. Programme une fonction `geometrique_2(n,u0,q)` qui fait la même chose mais en utilisant cette fois la formule directe.
3. Programme une fonction `liste_geometrique(n,u0,q)` qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$.
4. Programme une fonction `est_geometrique(liste)` qui teste si les termes $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ de la liste donnée forment le début d'une suite géométrique.
   Indications. Si la liste est constituée des premiers termes d'une suite géométrique alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_1}{u_0}$ pour tout n. Utilise la question précédente.
5. Programme une fonction `somme_geometrique_1(n,u0,q)` qui calcule, en additionnant les éléments, la somme des termes de rang 0 à n d'une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q. Retrouve le même résultat par une fonction `somme_geometrique_2(n,u0,q)` qui utilise la formule de la somme donnée dans le cours ci-dessus.
   Vers quelle valeur a l'air de tendre la somme :
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
   lorsque n tend vers l'infini ?

Activité 4 (Tracer la somme d'une suite géométrique).

Objectifs : illustrer géométriquement la formule de la somme d'une suite géométrique.

Voici un découpage d'un carré de côté 1 qui illustre la formule :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

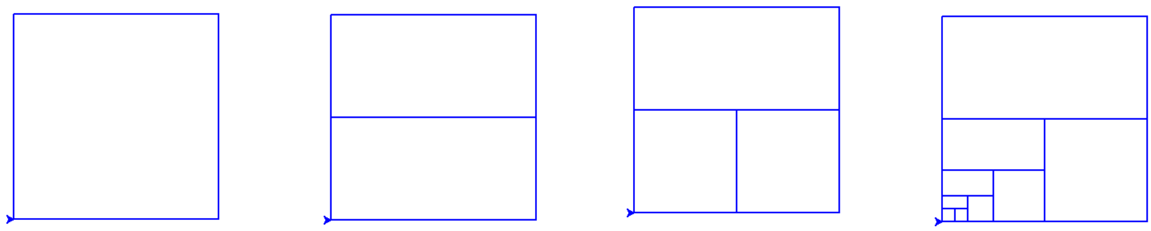


1. Programme une fonction `affiche_un_carre(longueur)` qui affiche un carré de la longueur donnée. Utilise la tortue accessible depuis le module `turtle`.

2. Programme une fonction `affiche_un_rectangle(longueur)` qui trace un rectangle de hauteur la moitié de sa longueur. Il coupe le carré précédent en deux parties égales.
3. Programme une fonction `affiche_les_carres(n)` qui construit notre figure.

   Indications.
   - Par exemple, on commence par tracer un carré de longueur 256,
   - on trace un rectangle qui coupe le carré en deux,
   - puis on trace un carré de longueur 128,
   - puis on le découpe en deux, etc.

De gauche à droite : le carré initial ; le carré coupé en deux rectangles ; un petit carré ; un découpage itéré.



Preuves de la formule.
On considère la suite :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots \quad \frac{1}{2^n} \quad \cdots$$

C'est la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
Preuve par le dessin.
Le grand carré a pour aire 1, l'aire totale des zones rouges est $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. La zone hachurée bleue a pour aire $\frac{1}{2^n}$. Les zones rouges et bleues recouvrent tout le carré, donc leur aire totale vaut 1. Ce qui prouve la formule annoncée :

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{aire rouge}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{aire bleue}} \quad = \quad \underbrace{1}_{\text{aire du grand carré}}$$

Preuve par le calcul.
La formule pour la somme est

$$S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

(attention il y a bien n termes dans la somme) et donc ici :

$$S_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Activité 5 (Meilleure suite arithmétique).

> *Objectifs : on te donne une liste ordonnée, tu dois trouver la suite arithmétique qui approche le mieux possible cette liste.*

Qu'est ce que la meilleure suite arithmétique qui approche une liste de nombres donnés ? Par exemple pour la liste $[3,6,9,11]$, on a envie de l'approcher par la progression arithmétique $[3,6,9,12]$.
On nous donne donc des termes $v_0, v_1, \ldots, v_n$ (ordonnés du plus petit au plus grand). On va chercher

une progression arithmétique $u_0, u_1, \ldots, u_n$ telle que

$$d = |v_0 - u_0| + |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + \cdots + |v_n - u_n|$$

soit le plus petit possible.

On appelle d la ***distance*** entre $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$. Pour l'exemple donné, $[3, 6, 9, 11]$ approchée par $[3, 6, 9, 12]$, la distance vaut 1.

1. **Distance.** Programme une fonction `distance(u,v)` qui calcule la distance

$$d = |v_0 - u_0| + |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + \cdots + |v_n - u_n|$$

entre deux listes $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ et $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$.

2. **Meilleure constante.** On nous donne une liste $w = [w_0, w_1, \ldots, w_n]$, on cherche une constante m qui approche au mieux toutes les valeurs de la liste, c'est-à-dire telle que

$$d = |w_0 - m| + |w_1 - m| + |w_2 - m| + \cdots + |w_n - m|$$

soit le plus petit possible.

Un nombre m qui convient est simplement la médiane de la liste ! Par exemple pour $[3, 6, 9, 11]$, la médiane est $m = 7.5$ et on a

$$d = |3 - 7.5| + |6 - 7.5| + |9 - 7.5| + |11 - 7.5| = 11$$

et on ne peut pas faire moins.

Écris une fonction `calcule_mediane(liste)` qui calcule la valeur médiane des éléments d'une liste. Par définition, la moitié des valeurs est inférieure ou égale à la médiane, l'autre moitié est supérieure ou égale à la médiane. Voir le rappel de cours juste après cette activité pour ce calcul.

3. **Meilleure suite.** On va maintenant résoudre notre problème initial. On nous donne donc une liste $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et on cherche une progression arithmétique $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$. Pour trouver les (u_i) on doit donc trouver un terme initial u_0 et une raison r.

Méthode.

- On va d'abord trouver un r approché qui convient bien par une méthode de balayage. On cherche le meilleur r en commençant par $r = 0$ puis, par petits pas on teste jusqu'à, par exemple, $r = 2(v_1 - v_0)$.
- Pour chaque r, le terme initial u_0 qui convient est la médiane de la liste $(v_i - ir)$. (Justification : il faut minimiser la somme des $|v_i - u_i| = |v_i - ir - u_0|$; u_0 est donc la médiane des $(v_i - ir)$.)

Programme l'algorithme suivant en une fonction `balayage(v,N)` qui renvoie le terme initial u_0 et la raison r d'une suite arithmétique qui approche au mieux $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$. Le paramètre N correspond à la précision du balayage (plus N est grand, plus l'approximation sera bonne).

Algorithme.

- — Entrée : une liste ordonnée de termes $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et un entier N.
  — Sortie : un terme initial u_0 et une raison r.
- Définir un pas $p = 2\frac{v_1 - v_0}{N}$ (ce sera le pas pour le balayage de r).
- Initialise une valeur $d_{\min}$ par une très grande valeur (par exemple $d_{\min} = 10\,000$), cette variable stockera la distance la plus petite rencontrée. Deux variables $r_{\min}$ et $u_{0,\min}$ mémoriseront les meilleurs r et u_0 trouvés.
- Poser $r = 0$.
- Pour k allant de 0 à $N + 1$:
  — Calculer u_0 la médiane de $(v_i - ir)$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n$).
  — Définir u, la liste des premiers termes de la suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r (tu peux utiliser la fonction `liste_arithmetique(n,u0,r)` de la première activité).
  — Calcule la distance d entre les listes u et v.
  — Si $d < d_{\min}$ alors faire : $d_{\min} \leftarrow d$; $r_{\min} \leftarrow r$ et $u_{0,\min} \leftarrow u_0$.
  — Faire $r \leftarrow r + p$.
- Renvoyer $u_{0,\min}$ et $r_{\min}$.

Quelle est la meilleure progression arithmétique pour approcher la liste $[6, 11, 14, 20, 24, 29, 37]$?

Cours 3 (Médiane).
Par définition de la ***médiane***, la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane, l'autre moitié sont supérieures ou égales à la médiane.
Voici comment calculer la médiane. On note n la longueur de la liste, on suppose que la liste est ordonnée (du plus petit au plus grand élément).

- **Cas n impair.** La médiane est la valeur de la liste au rang $\frac{n-1}{2}$. Exemple avec `liste = [12,12,14,15,19]` :
  — la longueur de la liste est $n = 5$ (les indices vont de 0 à 4),
  — l'indice du milieu est l'indice 2,
  — la médiane est la valeur `liste[2]`, c'est donc 14.
- **Cas n pair.** La médiane est la moyenne entre la valeur de la liste au rang $\frac{n}{2} - 1$ et celle au rang $\frac{n}{2}$. Exemple avec `liste = [13,14,19,20]` :
  — la longueur de la liste est $n = 4$ (les indices vont de 0 à 3),
  — les indices du milieu sont 1 et 2,
  — la médiane est la moyenne entre `liste[1]` et `liste[2]`, c'est donc $\frac{14+19}{2} = 16.5$.