方程组的几何解释

概述

本节的主要目的是从**行图像(row picture)**和**列图像(column picture)**的角度来理解方程。

方程组的几何解释

在本节中以方程

$$\begin{cases} 2x - y & = & 0 \\ -x + 2y & = & 3 \end{cases}$$

为例，通过行图像和列图像来阐释此方程组的含义。

行图像角度

首先我们可以按照行将方程写成如下的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

约定将前面的2X2矩阵记为A，称作系数矩阵。将后面的系数向量记为**X**，称作系数向量，最后的结果向量记为b。

```
系数矩阵(A)：将方程组系数按行提取出来，构造完成的一个矩阵。
未知向量(x)：将方程组的未知数提取出来，按列构成一个向量。
向量(b)：将等号右侧结果按列提取，构成一个向量。
```

行图像则是将改方程组中的方程绘制出来，交点即是改方程组的解。

列图像角度

首先同行图像方法相同，我们将上面的方程组按照列提取出来构成如下矩阵：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

此时我们就将方程组的问题转化成寻找一组合适的参数，将向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$线性组合构成$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$。因此$AX$可以看作是A各列的线性组合。

方程组的几何解释推广

在这部分中我们以方程组

$$
\begin{cases}
2x-y=0\\
-x+2y-z=-1\\
-3y+4z=4
\end{cases}
$$

为例。

行图像角度

同上面的相同，将上面的方程组按照行改写成矩阵的形式可以得到

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

这个矩阵的行图像若有解则是三个平面相交得到一点。而随着维度增加，行图像的绘制会越来越难，因此在高维上行图像的局限越来越多。

列图像角度

对于上述方程，如果使用列图像的角度，可写出对应的矩阵：

$$
x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

因此同样可以将上述方程组看作是寻找三个向量的线性组合。