转置、置换和向量空间R

概述

首先是对于置换矩阵和转置矩阵性质的再次探索，之后介绍向量空间和子空间

置换矩阵

在上一节中介绍了置换矩阵的概念和特点：

- 置换矩阵可逆，且逆矩阵是其本身
- 置换矩阵中两个矩阵相乘得到的结果仍然在这些矩阵中

置换矩阵的另一个重要的性质:

$$PP^T = I$$

即

$$P^{-1} = P^T$$

这个性质可以这样来理解，因为P是置换矩阵，因此每行或者每一列只有一个元素为1，而根据矩阵乘法的性质可以知道，要保证对角线上的元素为1，要求行和列1的出现位置是相同的，因此有$PP^T = I$这一性质。

在上一节中我们讲到**LU分解**的时候没有考虑主元为0的情况，因此有时候需要进行行变换才能使得分解得以进行，即：

$$PA = LU$$

这一形式，在分解过程中通过行变换使得主元不为0再进行LU分解。

对称阵

对称矩阵即：

$$A^T = A$$

关于对称矩阵有一个特殊的性质：矩阵A与矩阵A^T相乘得到的**方阵**一定是对称矩阵，因为有：

$$(A^TA)^T = A^TA^{TT} = A^TA$$

因此对于任意矩阵与其转置的乘积得到的方阵是对称阵。

向量空间与子空间

向量空间

在数学中，我们通常可以看到如R^n此类记号，在线性代数中表示向量空间。对于向量空间R^n，有如下定义：

向量空间R^n由所有包含n个元素的列向量组成。

且列向量中的每个元素都为实数，因此记号是以R为底的。

在课程里有讲到可以看作是一条空间的判断准则：**对数乘和加法这两种运算符封闭。**

- 数乘封闭：空间中的任意一个元素乘以一个数得到的元素依然在此空间中。
- 加法封闭：空间中任意两个元素的加和得到的结果依然在此空间中。

因此，每一个向量空间都必须要有该向量空间中的**zero vector**。因为要满足数乘封闭，如果没有0向量，数乘0就不封闭。

子空间（subspace）

一个向量空间的子空间是由满足**数乘和加法运算封闭**的向量所组成的集合。因此子空间有如下性质：

- 每个子空间都包含0向量
- 向量空间本身也是子空间
- 穿过原点的直线是子空间

列空间

回到最初的问题：解线性方程$Ax=b$，如果A是不可逆的，那么这个方程只对部分b有解而对其他的b则没有解，因此需要一个概念来描述具有一个好的性质的b：可以写成矩阵A乘以x形式的向量b。这些具有**好的性质**的b构成了矩阵A的列空间。而Ax又可以看成是A中列向量的线性组合。因此**列空间是A矩阵所有列向量的线性组合**。

从解方程的角度理解列空间

列空间在线性代数中有举足轻重的作用，因为线性代数中一个关键的问题就是求解$Ax=b$的问题，这个问题有解**当且仅当b是A的列空间。**而其中x的系数其实是就是给了一种A中列向量的线性组合。

假设在$Ax=b$中，A矩阵是3x2的矩阵，他的列向量是属于R^3的，且只有两个列向量，假如两个列向量线性无关，则组成的是一个平面，因此对于大多数R^3中的b都不会落在这个平面上，这也符合我们平时的直觉：3个方程两个未知数在大多数情况下都是无解的。

再假设A是两行三列的矩阵，假设其中两列线性无关，因为b是属于R^2的，因此对于A来说每个b都是attainable的，但是因为有3个列向量，因此可以给出更多组合的可能行，这也符合我们平时的直觉：2个方程3个未知数大多数情况下有多个解。