ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 505, с. 46–49

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ЛАНДАУ И БЕККЕРА–ПОММЕРЕНКЕ

 О. С. Кудрявцева[1,2,*], А. П. Солодов[1,]**

Представлено академиком Б. С. Кашиным
Поступило 01.04.2022
После доработки 31.04.2022
Принято к публикации 27.05.2022

Получено обобщение неравенств Ландау и Беккера–Поммеренке, лежащих в основе решения задачи о точных областях однолистности на подклассах голоморфных отображений.

Ключевые слова и фразы: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности

DOI: 10.31857/S2686954322040117

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Поиск области[1] однолистности как для одной голоморфной функции, так и на классе голоморфных функций является классической задачей геометрической теории функций. Длительная история исследования этой задачи накопила разнообразные методы и подходы к ее решению. В настоящей работе мы сосредоточимся на идейно близких подходах Ландау и Беккера—Поммеренке. Успешное решение Ландау задачи о точном радиусе круга однолистности на классе ограниченных голоморфных функций с внутренней неподвижной точкой, а также недавние результаты Беккера, Поммеренке и Солодова об областях однолистности для функций, имеющих неподвижную точку на границе, так или иначе связаны с получением точных неравенств на соответствующих классах. В упомянутых неравенствах оценивается общее значение функции в двух различных точках. В данной работе получены оценки общего значения функции в n различных точках, что может найти применение в теории n-листных функций.

Пусть $\mathscr{B}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ в себя. Обозначим через $\mathscr{B}[0]$ подкласс функций с внутренней неподвижной точкой $z = 0$, а через $\mathscr{B}\{1\}$ — подкласс функций с граничной неподвижной точкой $z = 1$ и конечной угловой производной $f'(1)$:

$$\mathscr{B}[0] = \bigl\{f \in \mathscr{B} \colon f(0) = 0\bigr\},$$
$$\mathscr{B}\{1\} = \bigl\{f \in \mathscr{B} \colon \angle\lim_{z\to 1} f(z) = 1,\ \angle\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty\bigr\}.$$

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathscr{B}[0]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$|c| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{1}$$

Неравенство (1) при $n = 1$ — не что иное, как лемма Шварца. При $n = 2$ неравенство (1) было получено Ландау и позволило ему найти единый круг однолистности на классе $\mathscr{B}_M[0] = \bigl\{f \in \mathscr{B}[0] \colon |f'(0)| \geqslant 1/M\bigr\}$, $M > 1$.

Теорема A (Ландау [1])**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}_M[0]$, $M > 1$. Тогда f однолистна в круге $|z| < M - \sqrt{M^2-1}$. При этом для любого $R > M - \sqrt{M^2-1}$ найдется функция $f \in \mathscr{B}_M[0]$, не однолистная в круге $|z| < R$.*

На классе $\mathscr{B}\{1\}$ имеет место неравенство, в некотором смысле аналогичное неравенству (1).

[1] Подстрочное примечание № 1.

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

[2] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*

[*] *E-mail: kudryavceva_os@mail.ru*

[**] *E-mail: apsolodov@mail.ru*

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathscr{B}\{1\}$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}. \tag{2}$$

Неравенство (2) при $n = 1$ — это хорошо известная лемма Жюлиа—Каратеодори (см. [2, гл. 1, § 1.4, теорема 1.5]). При $n = 2$ это неравенство было получено Беккером и Поммеренке и применялось ими для нахождения области однолистности для функции $f \in \mathscr{B}\{1\}$.

Теорема B (Беккер, Поммеренке [3])**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}\{1\}$. Тогда f однолистна в области*

$$\left\{z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\,\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > \frac{f'(1)}{2}\right\}.$$

В [4] показано, что на классе $\mathscr{B}\{1\}$ нет аналога теоремы A, т. е. нет единой области однолистности. Однако ситуация меняется, если рассмотреть сужение класса $\mathscr{B}\{1\}$, добавив, например, условие неподвижности внутренней точки. Горяйнов [5], изучая влияние угловой производной на поведение функции внутри круга, рассмотрел класс $\mathscr{B}[0,1] = \mathscr{B}[0] \cap \mathscr{B}\{1\}$ и показал, что все функции из $\mathscr{B}_\alpha[0,1] = \bigl\{f \in \mathscr{B}[0,1]\colon f'(1) \leqslant \alpha\bigr\}$, $\alpha \in (1,2)$, однолистны в некоторой области. Окончательное решение задачи о точной области однолистности на классе функций с двумя неподвижными точками опирается на следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathscr{B}[0,1]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2} + \frac{|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2}, \tag{3}$$

где $\lambda(z) = -z\,(1-\overline{z})/(1-z)$.

Замечание 1. *В случае $z = 1$ считаем, что $|1-z|^2/(1-|z|^2) = 0$.*

Замечание 2. *Поскольку $|\lambda(z)| = |z|$ для любого $z \in \mathbb{D}$, то в силу теоремы 1 верна оценка*

$$|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)| \leqslant 1.$$

Это влечет неотрицательность второго слагаемого в неравенстве (3)*. Тем самым, теорема 3 является усилением теоремы 2 на классе $\mathscr{B}[0,1]$.*

Заметим, что отображение λ обладает рядом других интересных свойств, которые подробно изучены в [6]. В частности, в силу равенства

$$\frac{|1-\lambda(c)|^2}{1-|\lambda(c)|^2} = \frac{1-|c|^2}{|1-c|^2}$$

теорема 3 допускает переформулировку в симметричном виде.

Теорема 3′. *Пусть $f \in \mathscr{B}[0,1]$ и различные точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ таковы, что $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = c$. Тогда*

$$f'(1)\,\frac{|1-\lambda(c)|^2}{1-|\lambda(c)|^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|1-\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(a_k)|^2} + \frac{|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2}.$$

Неравенство (3) при $n = 1$ является уточнением леммы Жюлиа—Каратеодори в случае, если имеется дополнительная внутренняя неподвижная точка. При $n = 2$ неравенство (3) фактически было получено Солодовым и использовалось для нахождения точной области однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[0,1]$.

Теорема C (Солодов [6])**.** *Пусть $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, $\alpha \in (1,4]$. Тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{Y} = \Bigl\{z \in \mathbb{D}\colon \frac{\bigl|1-2z+|z|^2\bigr|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\Bigr\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{U}$, $\mathscr{Y} \subsetneq \mathscr{U} \subset \mathbb{D}$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[0,1]$, не однолистная в области $\mathscr{U}$.

Замечание 3. *Неравенства* (1), (2) *и* (3) *точные и достигаются на произведениях Бляшке порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы докажем теоремы 1–3.

Доказательство теоремы 1. По функции $f \in \mathscr{B}[0]$ составим дробно-линейное преобразование

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{1 - \overline{c} f(z)}.$$

Очевидно, что $g \in \mathscr{B}$, причем $g(a_1) = \ldots = g(a_n) = 0$. Тогда в силу леммы Шварца—Пика (см. [7, гл. VIII, § 1]) функция g представима в виде

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}\, h(z),$$

где $h \in \mathscr{B}$, либо h — тождественная константа, по модулю не превосходящая единицы. Полагая в этом представлении $z = 0$, получаем $-c = \prod_{k=1}^{n} a_k\, h(0)$, откуда следует доказываемое неравенство. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in \mathscr{B}\{1\}$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1 - \overline{c}}{1 - c}\, \frac{f(z) - c}{1 - \overline{c} f(z)}$$

также принадлежит классу $\mathscr{B}\{1\}$, причем $g(a_1) = \ldots = g(a_n) = 0$. Согласно лемме Шварца—Пика функция g допускает следующее представление:

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \overline{a}_k}{1 - a_k}\, \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}\, h(z),$$

где $h \in \mathscr{B}\{1\}$, либо $h(z) \equiv 1$. Если $h(z) \equiv 1$, имеем равенство в (2). Если $h \in \mathscr{B}\{1\}$, функция

$$h(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{1 - \overline{a}_k}\, \frac{1 - \overline{a}_k z}{z - a_k}\, \frac{1 - \overline{c}}{1 - c}\, \frac{f(z) - c}{1 - \overline{c} f(z)}$$

имеет в точке $z = 1$ положительную угловую производную. С другой стороны,

$$h'(1) = f'(1)\, \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - a_k|^2}.$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in \mathscr{B}[0, 1]$. Как и при доказательстве теоремы 2 рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1 - \overline{c}}{1 - c}\, \frac{f(z) - c}{1 - \overline{c} f(z)}$$

из класса $\mathscr{B}\{1\}$ со свойством $g(a_1) = \ldots = g(a_n) = 0$. Более того, $g(0) = \lambda(c)$ и угловая производная в точке $z = 1$ имеет вид

$$g'(1) = f'(1)\, \frac{1 - |c|^2}{|1 - c|^2}. \tag{4}$$

В силу леммы Шварца—Пика функция g допускает представление

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \overline{a}_k}{1 - a_k}\, \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}\, h(z), \tag{5}$$

где $h \in \mathscr{B}\{1\}$, либо $h(z) \equiv 1$. Если $h(z) \equiv 1$, имеем равенство в (3). Пусть $h \in \mathscr{B}\{1\}$. Из (5) видно, что $g(0) = \prod_{k=1}^{n} \lambda(a_k) h(0)$. Следовательно,

$$h(0) = \frac{\lambda(c)}{\prod_{k=1}^{n} \lambda(a_k)}. \tag{6}$$

Из (4) и (5) находим значение угловой производной функции h в точке $z=1$

$$h'(1) = f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}. \tag{7}$$

Поскольку $h \in \mathscr{B}\{1\}$, то согласно лемме Жюлиа—Каратеодори имеет место неравенство

$$\frac{|1-h(0)|^2}{1-|h(0)|^2} \leqslant h'(1). \tag{8}$$

Учитывая (6)—(8), получаем оценку

$$\frac{|1-\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2}{1-|\lambda(c)/\prod_{k=1}^{n}\lambda(a_k)|^2} \leqslant f'(1)\,\frac{1-|c|^2}{|1-c|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-a_k|^2}.$$

Теорема доказана. □

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность П. А. Бородину за полезные обсуждения данной темы на семинаре по геометрической теории приближений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00131) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Landau E.* Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467–474.

[2] *Ahlfors L.V.* Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[3] *Becker J., Pommerenke Ch.* Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk // Comput. Methods Funct. Theory. 2017. V. 17. 487–497.

[4] *Кудрявцева О.С., Солодов А.П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120–144.

[5] *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54–71.

[6] *Солодов А.П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190–218.

[7] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

GENERALIZATION OF LANDAU AND BECKER–POMMERENKE INEQUALITIES

O. S. Kudryavtseva[a,b,*], **A. P. Solodov**[a,**]

[a]Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

[b]Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B. S. Kashin

A generalization of Landau and Becker–Pommerenke inequalities which are used in solving of the problem of sharp domains of univalence on subclasses of holomorphic maps is obtained.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, domain of univalence

REFERENCES

[1] *Landau E.* Der Picard–Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 1926. V. 32. P. 467–474.

[2] *Ahlfors L.V.* Conformal invariants: Topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[3] *Becker J., Pommerenke Ch.* Angular derivatives for holomorphic self-maps of the disk // Comput. Methods Funct. Theory. 2017. V. 17. 487–497.

[4] *Кудрявцева О.С., Солодов А.П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 7. 120–144.

[5] *Горяйнов В.В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 3. 54–71.

[6] *Солодов А.П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 5. 190–218.

[7] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

GENERALIZATION OF LANDAU AND BECKER–POMMERENKE INEQUALITIES

O. S. Kudryavtseva[a,b,*], **A. P. Solodov**[a,**]

[a]Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

[b]Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B. S. Kashin