

Matematické a simulační modely

Matematický model a řízení rakety

Bc. Kryštof Bystřický

OBSAH

I	Zadání	2
I-A	Popis modelu	2
I-B	Definice proměnných	2
II	Modelování nelineárního systému	3
II-A	Silové účinky odporu prostředí	3
II-B	Momentové účinky odporu prostředí	3
II-C	Součty sil a momentů	3
II-D	Transformace sil	3
II-E	Newton-Eulerovy rovnice	4
III	Stavový popis	4
III-A	Stavové proměnné	4
III-B	Stavové rovnice	4
IV	Linearizace a ladění regulátoru	4
IV-A	Pracovní bod	4
IV-B	Dynamická rovnováha	4
IV-C	Výpočet matic stavového prostoru	5
IV-D	Ladění PID regulátoru	5
V	Výsledky	5
V-A	Definice požadavků, výpočet pracovního bodu	5
V-B	Linearizace	6
V-C	Simulace	6
VI	Přílohy	7
VII	Závěr	8

SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Souřadné systémy a důležité úhly	2
2	Thrust vectoring	2
3	Sílové a momentové působení	3
4	Stabilní poloha pro $\beta = 45 \text{ deg}$ a $v = 140 \frac{m}{s}$	5
5	Počáteční stav při malé počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)	6
6	Průběhy regulované a akční veličiny při malé počáteční odchylce (33) od pracovního bodu (26)	7
7	Počáteční stav při vysoké počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)	7
8	Průběhy regulované a akční veličiny při vysoké počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)	7
9	Uzavřený regulační obvod s nelineárním systémem	9
10	Uzavřený regulační obvod s lineárním systémem	9
11	Průběhy stavových veličin při malé počáteční odchylce (33)	10
12	Průběhy stavových veličin při vysoké počáteční odchylce (34)	10



**FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

Matematické a simulační modely

Matematický model a řízení rakety

I. ZADÁNÍ

Cílem semestrální práce je vytvořit nelineární model rakety, tento model sestavit a odladit v Simulinku. Model poté zlinealizovat kolem pracovního bodu a linearizovaný model použít pro ladění regulátoru.

A. Popis modelu

Pracuji se dvěma souřadnými systémy, první je pevný, inerciální a druhý je pevně spojen s raketou. Osa y_2 reprezentuje hlavní osu rakety.

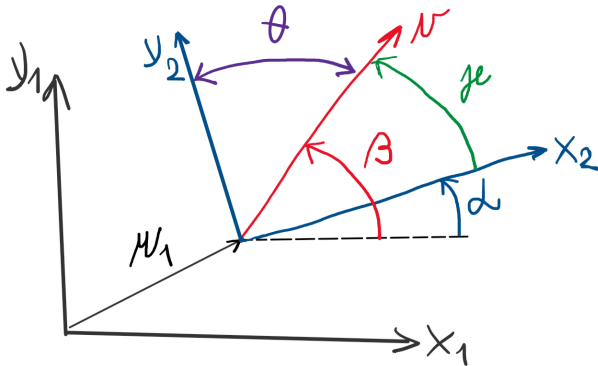


Fig. 1. Souřadné systémy a důležité úhly

Úhel θ je úhel náběhu, tedy úhel mezi hlavní osou rakety a vektorem rychlosti \vec{v} . Úhel náběhu je z hlediska řízení velice důležitý, ovlivňuje totiž velikost odporových sil a momentů. Ideálně by řízení rakety mělo hlídat silové zatížení rakety, a tedy omezovat úhel náběhu podle současné rychlosti nebo hustoty prostředí. Úhel θ je pouze doplňkem úhlu náběhu do $\frac{\pi}{2}$. Cílem řízení je udržování vektoru rychlosti, tedy vektoru β . Akčním členem je úhel nastavení trysky φ , řízení je tedy skrze tzv. thrust vectoring.

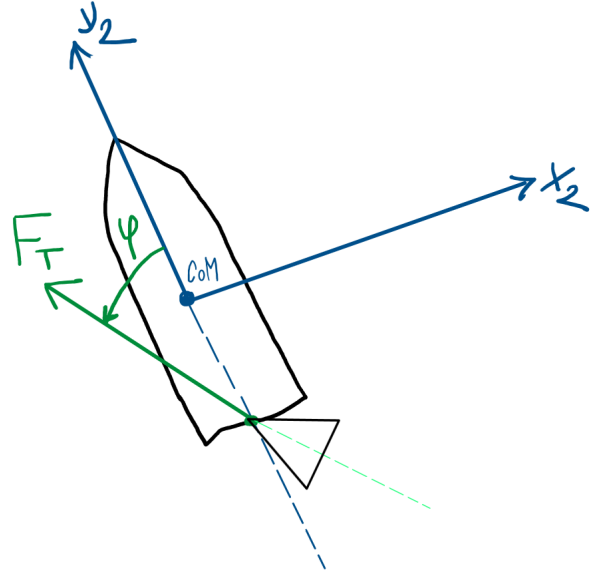


Fig. 2. Thrust vectoring

B. Definice proměnných

Velikost vektoru rychlosti v :

$$v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \quad (1)$$

Úhel vektoru rychlosti β :

$$\beta = \text{atan2}(\dot{y}_1, \dot{x}_1) \approx \arctan \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \quad (2)$$

Úhel náběhu θ :

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta \quad (3)$$

Doplňkový úhel γ :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (4)$$

II. MODELOVÁNÍ NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

A. Silové účinky odporu prostředí

Při relativním pohybu mezi tělesem a tekutinou vznikají odporové síly a momenty. V tomto modelu, nedstandardně, odporové síly F_D nesměřují nutně proti vektoru relativní rychlosti. Velikost odporových sil závisí na aerodynamických vlastnostech rakety a na velikosti relativní rychlosti mezi raketou a prostředím. V tomto modelu se počítá s prostředím statickým, relativní rychlost je teda rovna rychlosti v inerciálním souřadnicovém systému (v tomto modelu definovaném vektory x_1 a y_1 .) Odporové síly jsou v tomto modelu definovány v souřadnicovém systému rakety. Konstanta C_{DX_2} definuje odpor rakety při natočení rakety kolmo na vektor relativní rychlosti (tedy když hlavní osa rakety y_2 je kolmá na vektor rychlosti v). Konstanta C_{DY_2} definuje odpor rakety natočení rakety ve směru relativní rychlosti.

$$F_{DX_2} = C_{DX} v^2 \cos(\gamma) \quad (5)$$

$$F_{DY_2} = C_{DY} v^2 \sin(\gamma) \quad (6)$$

Konstanta C_{DY} by měla být výrazně větší než C_{DX} , tím se zajistí nárůst odporových sil při rostoucím úhlu náběhu θ .

B. Momentové účinky odporu prostředí

Velikost odporového momentu závisí na úhlu náběhu θ , tedy na úhlu mezi vektorem relativní rychlosti v a osou rakety y_2 . Dále ho ovlivňuje velikost relativní rychlosti v a konstanta C_M .

$$M_D = C_M v^2 \sin(\theta) \quad (7)$$

Menší mírou má na moment vliv i úhlová rychlost rakety $\dot{\alpha}$.

$$M_\alpha = C_\alpha \dot{\alpha} \quad (8)$$

C. Součty sil a momentů

Dynamika rakety je popsána pomocí Newton-Eulerových rovnic. Součty sil a momentů v souřadném systému spojeném s raketou jsou:

$$F_{X_2} = -F_T \sin(\varphi) - G \sin(\alpha) - F_{DX} \quad (9)$$

$$F_{Y_2} = F_T \cos(\varphi) - G \cos(\alpha) - F_{DY} \quad (10)$$

$$M_{CoM} = -M_D - M_\alpha - l \cdot F_T \cdot \sin(\varphi) \quad (11)$$

F_T je síla vygenerovaná pohonem, φ je úhel natočení trysky a l je vzdálenost středu hmotnosti od působíště hnací síly.

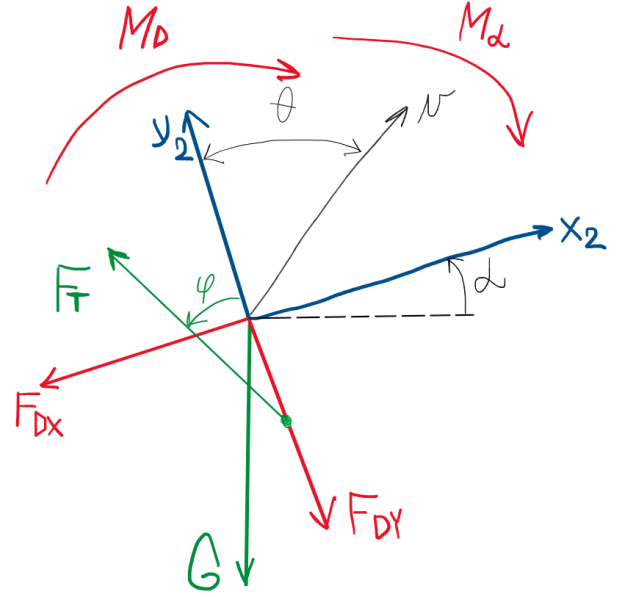


Fig. 3. Silové a momentové působení

D. Transformace sil

Pro sestavení N-E rovnic je třeba síly transformovat do inerciálního souřadného systému. Vzájemný posuv souřadných systémů neuvažují, transformační matice je tedy pouze rotace:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Výsledný vektor sil v pevném souřadném systému je tedy:

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \end{bmatrix} = T_{12} \cdot \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{X_2} \\ F_{Y_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

E. Newton-Eulerovy rovnice

Zrychlení rakety je z Newtonova druhého zákona:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Kde m je hmotnost rakety, vektor sil je definován v rovnici (13).

Úhlové zrychlení je podle Eulerova zákona:

$$I_{CoM} \cdot \ddot{\alpha} = M_{CoM} \quad (15)$$

kde I_{CoM} je moment setrvačnosti vzhledem ke středu hmotnosti a M_{CoM} je celkový moment podle rovnice (11).

III. STAVOVÝ POPIS

A. Stavové proměnné

Newton-Eulerovský popis dynamiky systému tvoří 3 diferenciální rovnice druhého řádu, celkem z nich tedy vyplývá 6 stavových proměnných.

$$\mathbf{x}_1 = x_1$$

$$\mathbf{x}_2 = \dot{x}_1$$

$$\mathbf{x}_3 = y_1$$

$$\mathbf{x}_4 = \dot{y}_1$$

$$\mathbf{x}_5 = \alpha$$

$$\mathbf{x}_6 = \dot{\alpha}$$

Stavové proměnné jsou zvýrazněny tučným fontem.

B. Stavové rovnice

Pro každou stavovou proměnnou je jedna stavová rovnice. Síly F_{X_2} , F_{Y_2} a moment M_{CoM} jsou definovány v (13) a (11).

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{m}(F_{x_2} \cos \mathbf{x}_5 - F_{y_2} \sin \mathbf{x}_5) \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4 \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \frac{1}{m}(F_{x_2} \sin \mathbf{x}_5 + F_{y_2} \cos \mathbf{x}_5) \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = \mathbf{x}_6 \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6 = \frac{1}{I_{CoM}} M_{CoM} \quad (21)$$

IV. LINEARIZACE A LADĚNÍ REGULÁTORU

A. Pracovní bod

Pracovní bod vyplývá z požadovaného směru β a velikosti rychlosti v . Stavové proměnné \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_3 , tedy poloha rakety, na dynamiku systému nemají žádný vliv, považují je tedy za nulové. Stavová proměnná \mathbf{x}_6 je rychlost otáčení rakety $\dot{\alpha}$, která je v pracovním bodě také zřejmě nulová. Pracovní hodnoty proměnných \mathbf{x}_2 a \mathbf{x}_4 , tedy rychlosti ve směru x a y vycházejí jednoduše z požadavků:

$$\mathbf{x}_2 = v \cos \beta \quad (22)$$

$$\mathbf{x}_4 = v \sin \beta \quad (23)$$

Zbývá stavová proměnná \mathbf{x}_5 , tedy natočení rakety α , které se vypočte z dynamické rovnováhy.

B. Dynamická rovnováha

Dynamická rovnováha je stav, kdy se celkové síly a momenty na těleso působící vyrovnají, tedy:

$$M_{CoM} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{Y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Z tohoto systému rovnic pomocí Matlab funkce solve vypočítávám úhel natočení trysky ve stabilní poloze φ_P ,

požadovaný tah pohonu F_T a natočení rakety vůči zemi α_P , tedy stavovou proměnnou x_5 . Ve stabilní poloze se vyrovnávají momenty od pohonu a od odporu prostředí, ve stabilní poloze je malý úhel náběhu.

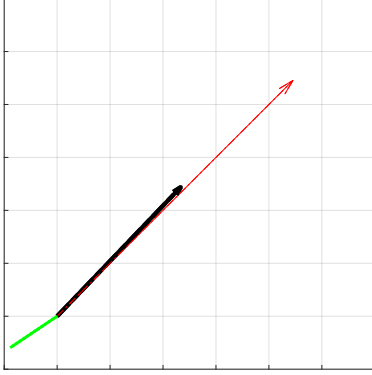


Fig. 4. Stabilní poloha pro $\beta = 45 \text{ deg}$ a $v = 140 \frac{m}{s}$

Černá šipka je hlavní osa rakety, červená vektor rychlosti a zelená raketový pohon.

C. Výpočet matic stavového prostoru

Tento výpočet provádím přes Matlab funkci Jacobian, které na vstup pošlu systém stavových rovnic a symbolické stavové proměnné. Výstupem z této funkce je obecný (symbolický) Jakobián systému, tedy obecná matice dynamiky A . Do obecného Jakobiánu systému dosazuji za stavové proměnné hodnoty pracovního bodu. Výpočet matice vstupů B probíhá podobně. Na vstup do funkce Jacobian posílám opět stavové rovnice, derivují se však pouze podle vstupní proměnné φ (natočení trysky). Do obecného vyjádření matice B dosazuji za φ předem vypočtený úhel natočení trysky v dynamické rovnováze. Matici C zadávám jako 6×6 matici identity.

D. Ladění PID regulátoru

Pomocí matic A, B, C v Simulinku navrhnu uzavřený regulační obvod s PID regulátorem. Ladění PID regulátoru provádím přes toolbox PID Tuner (ladič 'Transfer Function Based'). Při ladění pouze hýbu se dvěma slidery (slower-faster a aggressive-robust) tak, aby výsledná reakce na skok

rozumná (kompromis mezi kmitavostí, rychlostí a překmitem.) PID regulátor naladěný pro lineární systém překopíruju i do uzavřeného regulačního obvodu s nelineárním modelem.

V. VÝSLEDKY

A. Definice požadavků, výpočet pracovního bodu

Požaduji regulaci na úhel rychlosti:

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

a velikost rychlosti:

$$v = 140 \frac{m}{s}$$

Vypočtený pracovní bod je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 98.9949 \\ 0 \\ 98.9949 \\ -0.7638 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Požadovaný tah pohonu:

$$F_T = 4738.2N \quad (27)$$

Natočení trysky ve stabilní poloze:

$$\varphi_s = -12.4036^\circ \quad (28)$$

B. Linearizace

Matice dynamiky:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2539 & 0 & 2.4587 & -575.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5738 & 0 & -2.9086 & 542.73 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -0.82604 & 0 & 0.7575 & -156.76 & -0.66667 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Matice vstupů:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -26.383 \\ 0 \\ 39.357 \\ 0 \\ -15.425 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Matice výstupů je matice 2×6 :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Výstupem jsou tedy \dot{x} a \dot{y} , které jsou nutné pro výpočet regulované veličiny β .

Vektor vlastních čísel matice dynamiky A:

$$\text{eig}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1598 + 12.281i \\ -3.1598 - 12.281i \\ 0.049432 \\ -0.55902 \end{bmatrix} \quad (32)$$

C. Simulace

Pro výpočty je použit solver ode45 s omezením maximálního kroku $\text{maxstep} = 0.1$ a relativní tolerancí $\text{tol}_r = 1e-4$. Před startem simulace se musí nastavit počáteční stav. Ten se zadává jako odchylka od pracovního bodu. Ukázány budou výsledky pro dvě různé počáteční odchylky.

První počáteční odchylka od pracovního bodu je poměrně

malá, je dána jako:

$$\Delta \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \Delta x_{1s} \\ \Delta x_{2s} \\ \Delta x_{3s} \\ \Delta x_{4s} \\ \Delta x_{5s} \\ \Delta x_{6s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{1s} \\ \Delta \dot{x}_{1s} \\ \Delta y_{1s} \\ \Delta \dot{y}_{1s} \\ \Delta \alpha_s \\ \Delta \dot{\alpha}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.0 \\ 0 \\ -10.0 \\ -0.087266 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

V počátečním stavu je rychlost velikostně téměř stejná, ale její úhel je 39.23° . Požadovaný úhel rychlosti je však 45° , počáteční úhel rychlosti je tedy o asi 6° menší. Úhel natočení rakety α je v počáteční poloze posunut o 5° .

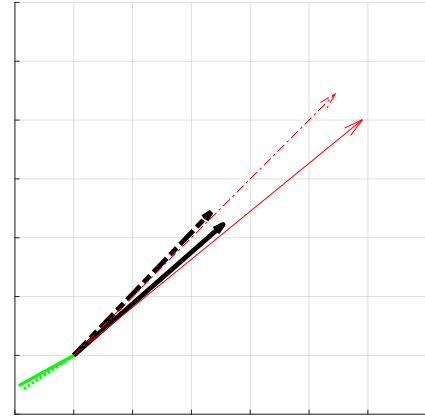


Fig. 5. Počáteční stav při malé počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)

Počáteční stav je vyznačen plnou čarou, čerchovanými je vyznačen pracovní stav.

Výsledné průběhy regulované veličiny β a akční veličiny ϕ při menší počáteční odchylce:

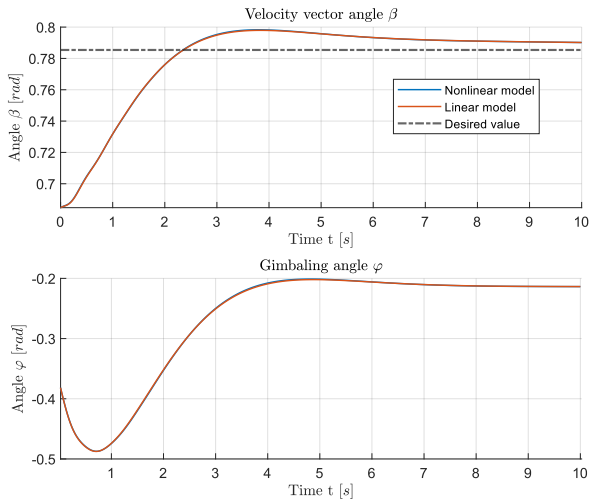


Fig. 6. Průběhy regulované a akční veličiny při malé počáteční odchylce (33) od pracovního bodu (26)

Pro větší počáteční odchylky od pracovního bodu by se měl nelineární model od lineárního oddalovat. Při zadání počáteční odchylky jako:

$$\Delta \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \Delta x_{1s} \\ \Delta x_{2s} \\ \Delta x_{3s} \\ \Delta x_{4s} \\ \Delta x_{5s} \\ \Delta x_{6s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{1s} \\ \Delta y_{1s} \\ \Delta y_{1s} \\ \Delta \alpha_s \\ \Delta \dot{\alpha}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30.0 \\ 0 \\ -30.0 \\ -0.2618 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Při této vysoké odchylce se uplatní omezení akční veličiny, nastaveno je na 45° .

Rozdíl mezi oběma modely na těchto veličinách je i při této poměrně vysoké odchylce překvapivě malý, výrazněji je však vidět v průbězích stavových veličin.

VI. PŘÍLOHY

Součástí semestrální práce jsou Simulink modely "linearModel.slx", "nonlinearModel.slx" a porovnávací model "compareModels.slx", který pouze vykresluje průběhy a vrací do workspace průběhy akční a regulační veličiny. Hlavním souborem je livescript "mainScript.mlx",

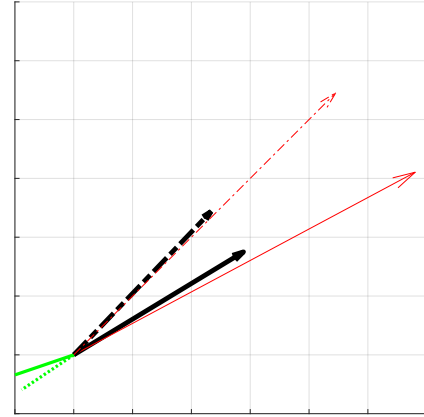


Fig. 7. Počáteční stav při vysoké počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)

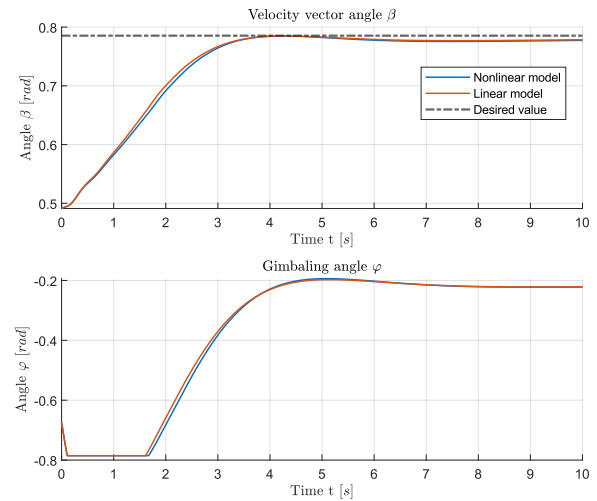


Fig. 8. Průběhy regulované a akční veličiny při vysoké počáteční odchylce (34) od pracovního bodu (26)

kterým se nastavují parametry modelu, spouští skript "calculations.mlx" (výpočet pracovního bodu, linearizace), nastavuje počáteční stav a nastavuje a spouští simulace. Dále jsou ještě v přílohách scripty "animateLinear.m" a "animateNonlinear.m", které animují výsledky příslušných modelů.

VII. ZÁVĚR

Vytvořil jsem vlastní nelineární model rakety s proměnlivým úhlem natočení trysky a odporem prostředí. Nelineární model jsem nejprve vytvořil v Simulinku a s pomocí vizualizace jej odladil. Následně jsem model linearizoval v požadovaném pracovním bodě, definován velikostí rychlosti a jejím směrem (úhlem od horizontu). Vytvořil jsem uzavřený regulační obvod s lineárním modelem systému a PID regulátorem. Akční veličinou regulačního obvodu je úhel natočení trysky a regulovanou veličinou je úhel rychlosti. Lineární i nelineární model jsem odsimuloval pro několik různých počátečních podmínek a oba modely porovnal.

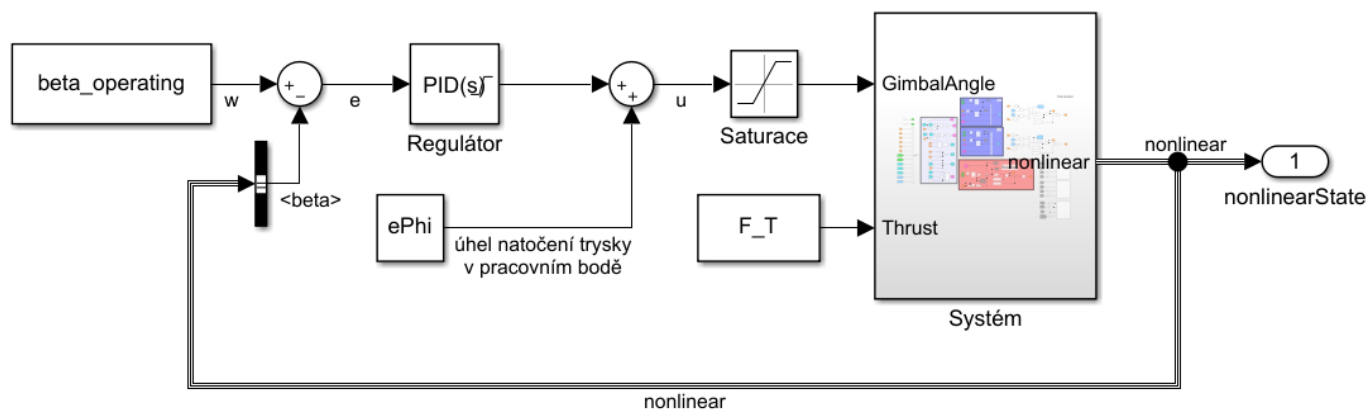


Fig. 9. Uzavřený regulační obvod s nelineárním systémem

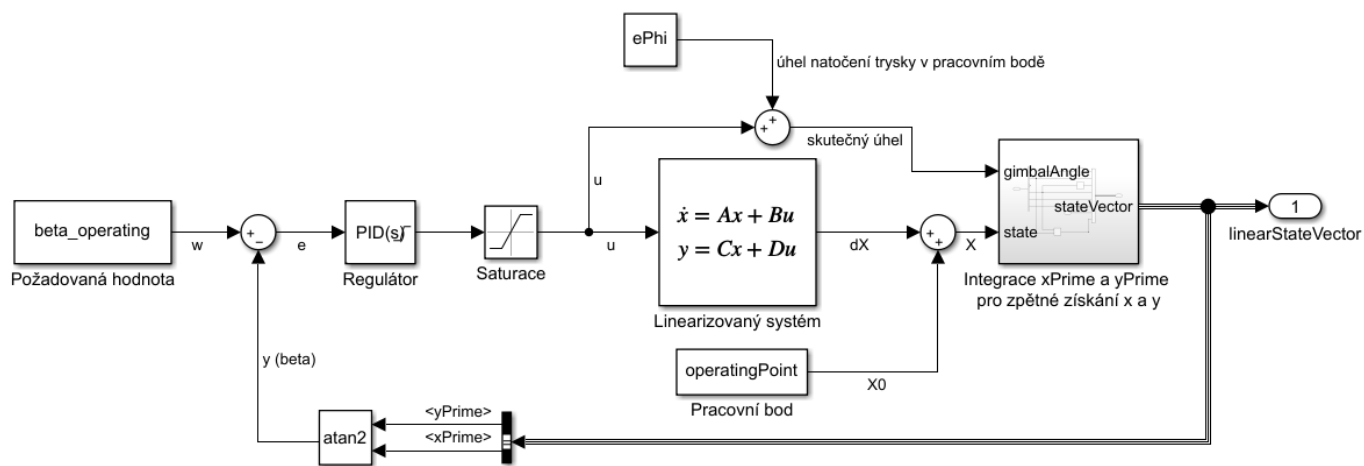


Fig. 10. Uzavřený regulační obvod s lineárním systémem

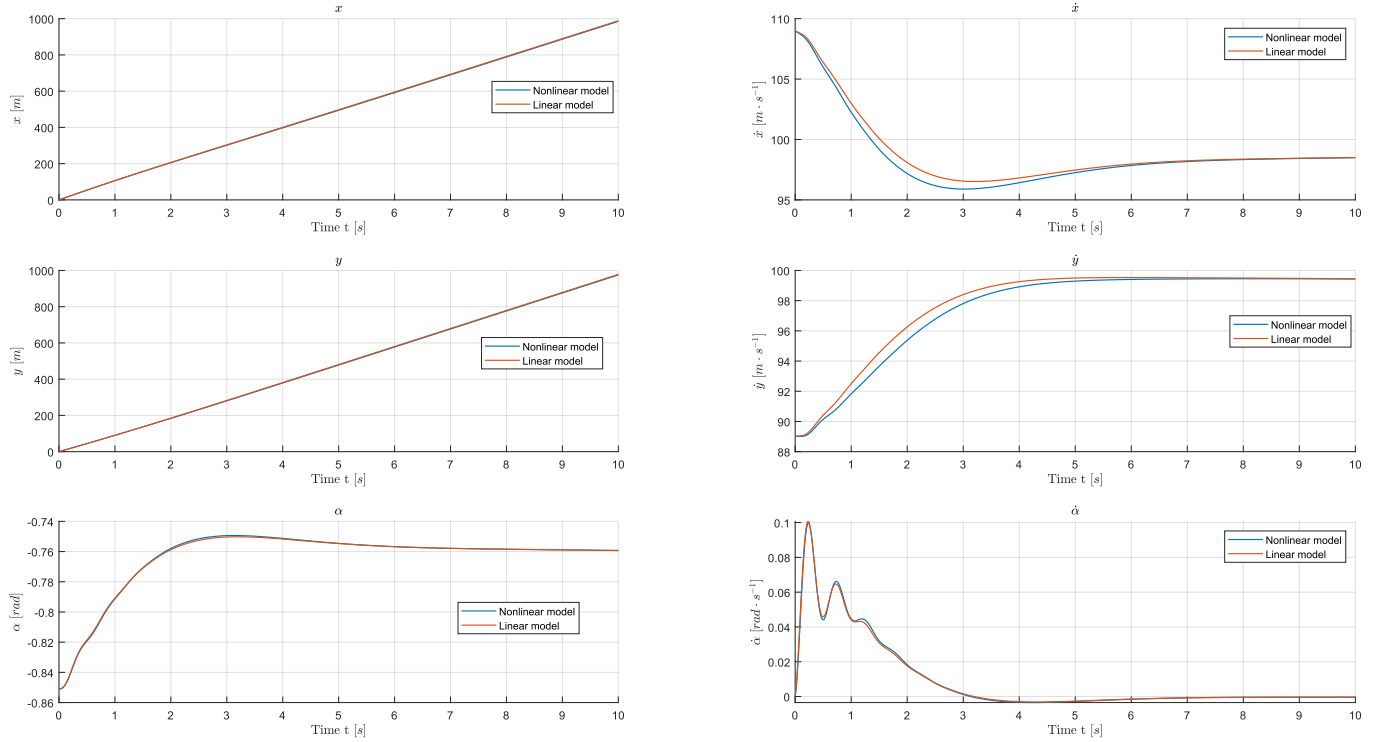


Fig. 11. Průběhy stavových veličin při malé počáteční odchylce (33)

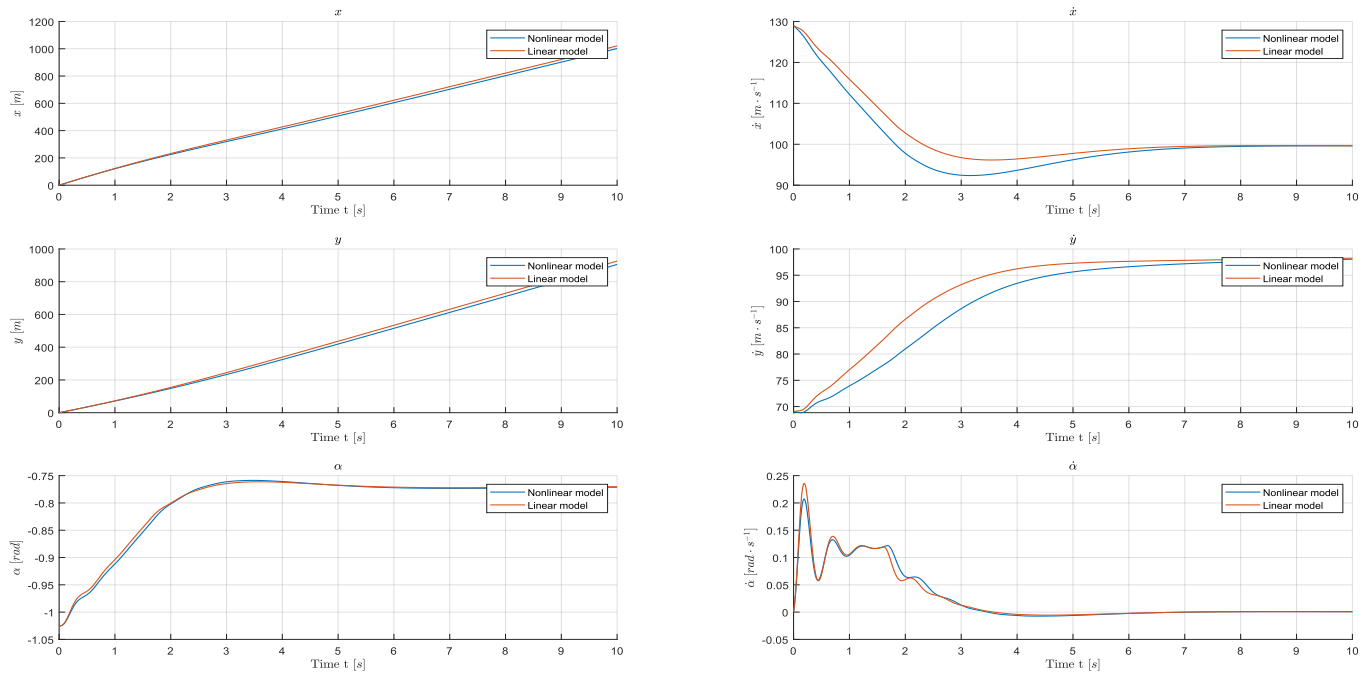


Fig. 12. Průběhy stavových veličin při vysoké počáteční odchylce (34)