

Отчёт по лабораторной работе №3

дисциплина: Математическое моделирование

Быстров Глеб Андреевич

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	8
4	Выполнение лабораторной работы	16
5	Выводы	19
	Список литературы	20

Список иллюстраций

2.1	Условие 68 варианта	6
2.2	Условие 68 варианта	7
3.1	Система уравнений	9
3.2	Система уравнений	9
3.3	Система уравнений	10
3.4	Система уравнений	10
3.5	Жесткая модель	11
3.6	Система уравнений	12
3.7	Фазовые траектории системы	12
3.8	Модели боя	13
3.9	Система уравнений	14
3.10	Изменение численности армии X и Y в процессе боевых действий при условии участия только регулярных войск (с подкреплением)	15
4.1	Код программы для первой модели	16
4.2	График для первой модели	16
4.3	Код программы для второй модели	17
4.4	График для второй модели	17
4.5	Отправка файлов на сервер	18

Список таблиц

1 Цель работы

В данной лабораторной работе мне будет необходимо изучить построение математических моделей и рассмотреть модель боевых действий.

2 Задание

Вариант 68

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 331 000 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в 225 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a , b , c , h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции. Постройте графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками (рис. 2.1).

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -0,49x(t) - 0,688y(t) + |\cos(2t)| \\ \frac{dy}{dt} &= -0,388x(t) - 0,39y(t) + |\sin(2t)|\end{aligned}$$

Рис. 2.1: Условие 68 варианта

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (рис. 2.2) [1].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -0,225x(t) - 0,774y(t) + |\sin(2t) + 1| \\ \frac{dy}{dt} &= -0,331x(t)y(t) - 0,665y(t) + \cos(t) + 2\end{aligned}$$

Рис. 2.2: Условие 68 варианта

3 Теоретическое введение

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотри три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов
3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом (рис. 3.1) [2].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Рис. 3.1: Система уравнений

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (рис. 3.2):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}\tag{2}$$

Рис. 3.2: Система уравнений

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в системе (1).

Модель ведения боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случае, имеет вид (рис. 3.3):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}\tag{3}$$

Рис. 3.3: Система уравнений

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (рис. 3.4):

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}\tag{4}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{by}{cx} \\ cxdx &= bydy, \quad cx^2 - by^2 = C\end{aligned}\tag{5}$$

Рис. 3.4: Система уравнений

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 3.5). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

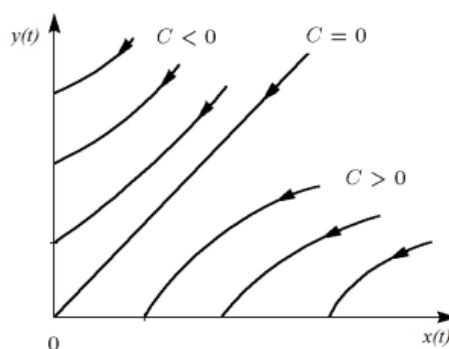


Рис. 3.5: Жесткая модель

Эти гиперболы разделены прямой

$$\sqrt{cx} = \sqrt{by}$$

Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y . Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x . В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа.

Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то модель (2) принимает вид (рис. 3.6):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -by(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cx(t)y(t)\end{aligned}\tag{6}$$

Рис. 3.6: Система уравнений

Эта система приводится к уравнению (рис. 3.7).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0 ,\tag{7}$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1\tag{8}$$

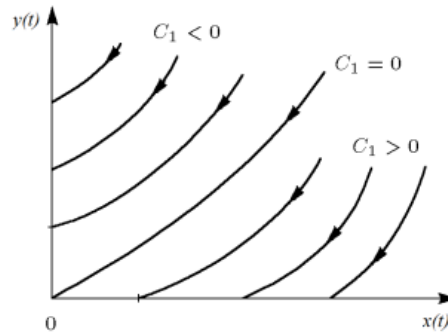


Рис. 3.7: Фазовые траектории системы

Из рис. 3.9 видно, что при $C > 0$ побеждает регулярная армия, при $C < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противостоянию регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C > 0$ получаем соотношение

$$\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$$

Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$), должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом,

можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

Рассмотренные простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, широко распространенным при описании многих естественно научных объектов.

Постановка задачи

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции (рис. 3.8) [2].

Рассмотрите 3 модели боя.

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t) - hy(t) + Q(t)$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

3. Модель боевых действий между партизанскими отрядами

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)$$

Рис. 3.8: Модели боя

Проверьте, как работает модель в различных ситуациях, постройте графики $y(t)$ и $x(t)$ в рассматриваемых случаях. Определите победителя, найдите условие, при котором та или другая сторона выигрывают бой (для каждого случая).

Примечание: коэффициенты a, b, c, h , начальные условия и функции $P(t), Q(t)$ задайте самостоятельно.

Пример 3.2.

Модель боевых действий между регулярными войсками.

Зададим коэффициент смертности, не связанный с боевыми действиями у первой армии 0,4, у второй 0,7. Коэффициенты эффективности первой и второй армии 0,5 и 0,8 соответственно. Функция, описывающая подход подкрепление первой армии, $P(t) = \sin(t) + 1$, подкрепление второй армии описывается функцией $Q(t) = \cos(t) + 1$.

Тогда получим следующую систему, описывающую противостояние между регулярными войсками X и Y (рис. 3.9):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -0,4x(t) - 0,8y(t) + \sin t + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= -0,5x(t) - 0,7y(t) + \cos t + 1\end{aligned}$$

Зададим начальные условия:

$$\begin{aligned}x_0 &= 20000 \\ y_0 &= 9000\end{aligned}$$

Рис. 3.9: Система уравнений

Построим численное решение задачи в среде Scilab (рис. 3.10).

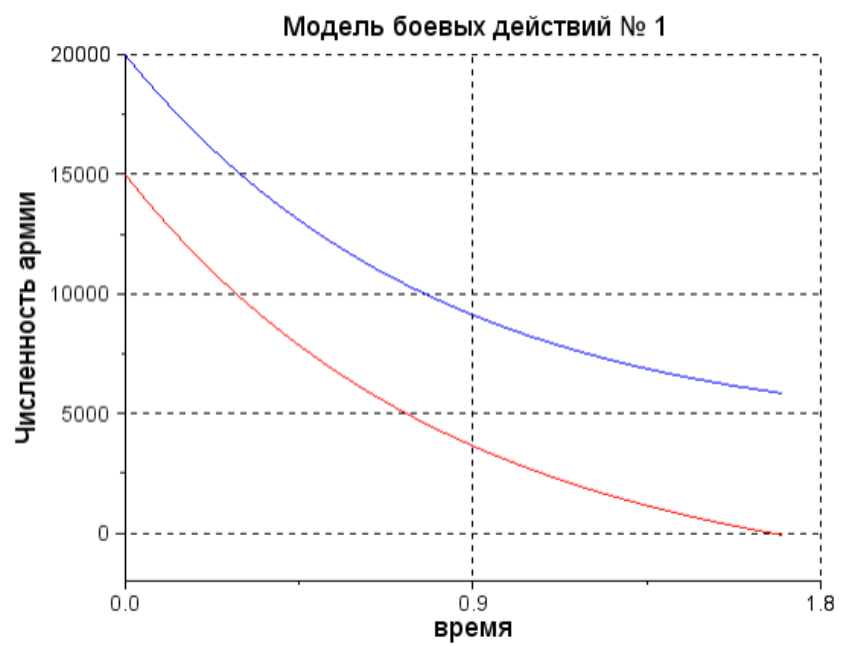


Рис. 3.10: Изменение численности армии X и Y в процессе боевых действий при условии участия только регулярных войск (с подкреплением)

4 Выполнение лабораторной работы

1. Воссоздал модель боевых действий между регулярными войсками в OpenModelica (рис. 4.1).

```
1 model Lab3
2   constant Integer x_0 = 331000;
3   constant Integer y_0 = 225000;
4   constant Real a = 0.49;
5   constant Real b = 0.688;
6   constant Real c = 0.388;
7   constant Real h = 0.39;
8   Real x(start=x_0);
9   Real y(start=y_0);
10  Real t = time;
11  equation
12    der(x) = -a*x - b*y + abs(cos(2*t));
13    der(y) = -c*x - h*y + abs(sin(2*t));
14    annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0));
15 end Lab3;
```

Рис. 4.1: Код программы для первой модели

2. График для первого случая (рис. 4.2).

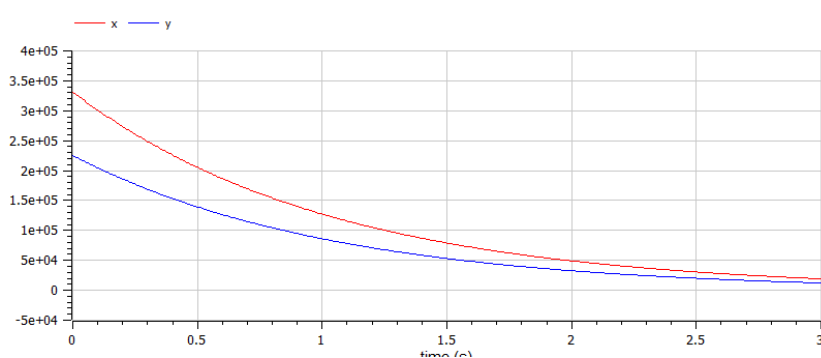


Рис. 4.2: График для первой модели

3. Воссоздал модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов в OpenModelica (рис. 4.3).

```
1 model Lab333
2   constant Integer x_0 = 331000;
3   constant Integer y_0 = 225000;
4   constant Real a = 0.225;
5   constant Real b = 0.774;
6   constant Real c = 0.331;
7   constant Real h = 0.665;
8   Real x(start=x_0);
9   Real y(start=y_0);
10  Real t = time;
11  equation
12    der(x) = -a*x - b*y + abs(sin(2*t)+1);
13    der(y) = -c*x*y - h*y + cos(t) + 2;
14    annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 3.0));
15  end Lab333;
```

Рис. 4.3: Код программы для второй модели

4. График для второго случая (рис. 4.4).

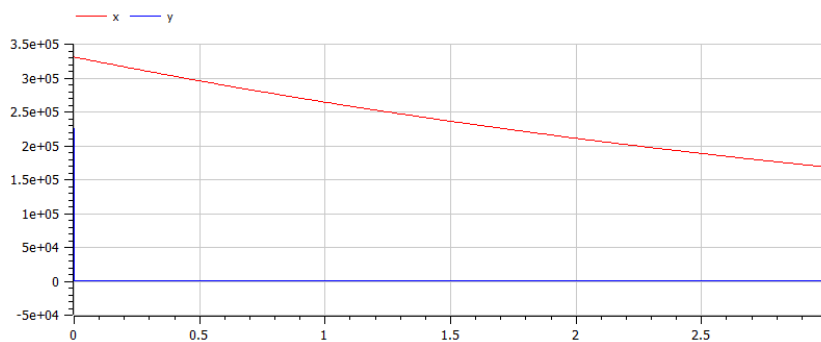


Рис. 4.4: График для второй модели

5. Отправил файлы на сервер, используя команды в Windows PowerShell (рис. 4.5) [3].

config	Initial commit
labs	feat(main): make course structure
template	Initial commit
.gitattributes	Initial commit
.gitignore	Initial commit
.gitmodules	Initial commit
CHANGELOG.md	Initial commit
COURSE	Initial commit
LICENSE	Initial commit
Makefile	Initial commit
README.en.md	Initial commit
README.git-flow.md	Initial commit
README.md	Initial commit

Рис. 4.5: Отправка файлов на сервер

5 Выводы

В данной лабораторной работе мне успешно удалось изучить построение математических моделей и рассмотреть модель боевых действий.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №3 (по вариантам) [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971726/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%204.pdf.
2. Лабораторная работа №3 [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971725/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%202.pdf.
3. Git [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Git>.