

Отчёт по лабораторной работе №2

дисциплина: Математическое моделирование

Быстров Глеб Андреевич

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	11
5	Выводы	20
	Список литературы	21

Список иллюстраций

3.1	Постановка задачи	7
3.2	Постановка задачи	8
3.3	Постановка задачи	8
3.4	Постановка задачи	8
3.5	Постановка задачи	9
3.6	Постановка задачи	9
3.7	Постановка задачи	9
3.8	Задание	10
4.1	Вывод уравнения	11
4.2	Вывод уравнения	12
4.3	Вывод уравнения	12
4.4	Процесс установки	13
4.5	Скачивание библиотеки	13
4.6	Первый случай	14
4.7	Первый случай	14
4.8	Первый случай	15
4.9	Первый случай	15
4.10	График	16
4.11	Второй случай	16
4.12	Второй случай	17
4.13	Второй случай	17
4.14	Второй случай	18
4.15	График	18
4.16	Отправка файлов на сервер	19

Список таблиц

1 Цель работы

В данной лабораторной работе мне будет необходимо изучить один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Рассмотрю задачу преследования браконьеров береговой охраной.

2 Задание

Вариант 68

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 19,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,9 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки [1].

3 Теоретическое введение

Приведем один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Например, рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2 раза больше скорости браконьерской лодки.

Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку [2].

Постановка задачи

Постановка задачи сформулирована на скриншотах [2] (рис. 3.1-3.7).

1. Принимаем за $t_0 = 0$, $x_{л0} = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{к0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{л0}$ ($\theta = x_{л0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 5.1)

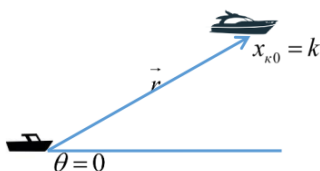


Рис.51.1. Положение катера и лодки в начальный момент времени

Рис. 3.1: Постановка задачи

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки.

Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Рис. 3.2: Постановка задачи

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2v$ (во втором

Рис. 3.3: Постановка задачи

случае $x + k/2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{2v} \text{ в первом случае или}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{x + k}{2v} \text{ во втором.}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3}$ и $x_2 = k$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v .

Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная

скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам

нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем

Рис. 3.4: Постановка задачи

$$\frac{dr}{dt} = v.$$

Тангенциальная скорость — это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на

радиус r , $v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$

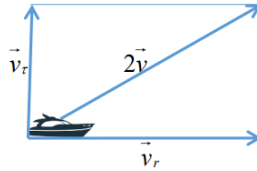


Рис. 5.2. Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Из рисунка видно: $v_\tau = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$ (учитывая, что радиальная

Рис. 3.5: Постановка задачи

скорость равна v). Тогда получаем $r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v$

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

Рис. 3.6: Постановка задачи

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v \end{cases} \text{ с начальными условиями } \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, вы получите траекторию движения катера в полярных координатах.

Рис. 3.7: Постановка задачи

Задание

Задание сформулировано на скриншоте [2] (рис. 3.8).

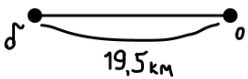
1. Провести аналогичные рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в n раз (значение n задайте самостоятельно)
 2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев. (Задайте самостоятельно начальные значения)
- Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

Рис. 3.8: Задание

4 Выполнение лабораторной работы

1. Вывел уравнение логарифмической спирали используя заданные условия моего варианта (рис. 4.1-4.3).

v_o – скорость охраны
 v_d – скорость браконьеров

$$v_o = 3,9 v_d$$


19,5 км



19,5

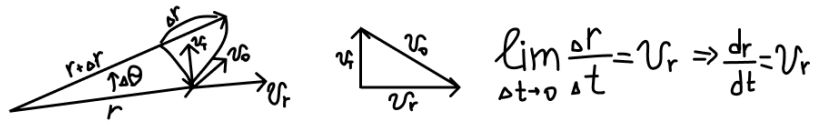
19,5 - r

$$t = \frac{r}{v_d} = \frac{19,5 - r}{v_o} = \frac{19,5 - r}{3,9 v_d}$$

r – точка старта охраны (начало спирали)

$$r = \frac{19,5 - r}{3,9} \Rightarrow 3,9 r = 19,5 - r \Rightarrow 4,9 r = 19,5 \Rightarrow r = \frac{19,5}{4,9}$$

Рис. 4.1: Вывод уравнения



Δr – расстояние по прямой от 0

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = v_\tau \Rightarrow r \frac{d\theta}{dt} = v_\tau$$

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v_r^2 + v_\tau^2 \\ (3.9 v_\tau)^2 &= v_\tau^2 + v_\tau^2 \\ \frac{15.21}{100} v_\tau^2 &= v_\tau^2 + v_\tau^2 \\ \frac{15.21}{100} v_\tau^2 - v_\tau^2 &= v_\tau^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{14.21}{100} v_\tau^2 &= v_\tau^2 \\ 14.21 v_\tau^2 &= v_\tau^2 \\ v_\tau &= \sqrt{14.21} v_\tau \end{aligned}$$

Рис. 4.2: Вывод уравнения

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_\tau \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{14.21} v_\tau \end{cases} \quad \begin{cases} dt = \frac{dr}{v_\tau} \\ dt = \frac{r d\theta}{\sqrt{14.21} v_\tau} \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{dr}{v_\tau} &= \frac{r d\theta}{\sqrt{14.21} v_\tau} \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r}{\sqrt{14.21}} \end{aligned}$$

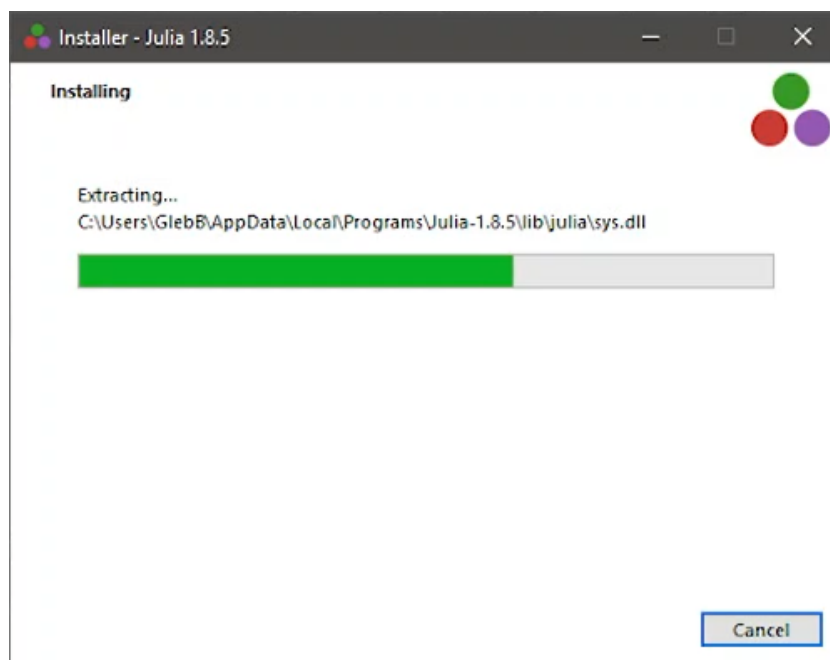
$$dr = \frac{r d\theta}{\sqrt{14.21}} \quad \frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{14.21}}$$

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{1}{\sqrt{14.21}} d\theta \Rightarrow e^{\ln r} = e^{\frac{\theta}{\sqrt{14.21}} + C} \quad r = C e^{\frac{\theta}{\sqrt{14.21}}}$$

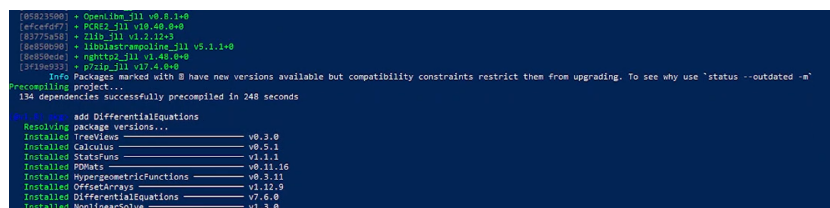
Из условия $r(0) = r \quad C = r = \frac{19.5}{4.9} \quad r(0) = \frac{19.5}{4.9} e^{\frac{\theta}{\sqrt{14.21}}}$

Рис. 4.3: Вывод уравнения

2. Установил Julia на ноутбук (рис. 4.4).



3. Скачал необходимые библиотеки для работы (рис. 4.5).



4. Решение для первого случая на языке Julia (рис. 4.6).

```

1 using DifferentialEquations
2 using Plots
3
4 function f(u, p, t) # правая часть ОДУ u - переменная (скаляр или массив) p - параметры (кортеж, tuple) t - аргумент (время)
5     return u / sqrt(14.21) # p и t не используются но необходимы для библиотеки
6 end
7
8 #отношение скорости охраны к браконьерам равно 3:9
9 #начальное расстояние катера от лодки равно 19.5
10
11 const T = (0, 2pi) #интервал для первого случая
12
13 const r1 = 19.5 / (4.9) #первый случай
14 const r2 = -(19.5 / (2.9)) #второй случай
15 const r = r1
16
17 prob = ODEProblem(f, abs(r), T)
18
19 sol = solve(
20     prob,
21     abstol=1e-8,
22     reltol=1e-8
23 )
24
25 @show sol.t #оставшая тип данных (расчитываем угол)
26 @show sol.u #оставшая тип данных (расчитываем радиус)
27
28 plt = plot(
29     proj = :polar,
30     aspect_ratio = :equal,
31     dpi=100,
32     legend=true,
33 )

```

Рис. 4.6: Первый случай

5. Решение для первого случая на языке Julia (рис. 4.7).

```

33 )
34
35 angle = sol.t[rand(1:size(sol.t)[1])] #рандомно задаю угол
36
37 plot(
38     plt,
39     [0.0, 0.0],
40     [19.5, r],
41     label="Начало движения",
42     color=:green,
43     lw=0.8)
44
45 scatter(
46     plt,
47     [0.0],
48     [19.5],
49     label="",
50     ms=:green,
51     ms=0.7)
52
53 plot(
54     [angle, angle],
55     [0.0, sol.u[1]],
56     label="Траектория лодки",
57     color=:pink,
58     lw=0.8)
59
60 scatter(
61     plt,
62     [angle],
63     [sol.u[1]],
64     label="",
65     ms=:pink,
66     ms=0.7)

```

Рис. 4.7: Первый случай

6. Решение для первого случая на языке Julia (рис. 4.8).

```

64 mc=:pink,
65 ms=:0.7)
66
67 plot(
68     plt,
69     [sol.t[i], sol.t[i]],
70     [sol.u[i], sol.u[i]],
71     label="Траектория катера",
72     color=:purple,
73     title="Таблица о погоне Быстров Г.А.",
74     lw=:8)
75 scatter(
76     plt,
77     sol.t,
78     sol.u,
79     label="",
80     mc=:purple,
81     ms=:0.7)
82
83 for i in 3:size(sol.t)[1]
84     plot(
85         plt,
86         [angle, angle],
87         [sol.u[i-1], sol.u[i]],
88         label="",
89         color=:pink,
90         lw=:8)
91     scatter(
92         plt,
93         [angle],
94         [sol.u[i]],
95         label="",
96         mc=:pink,
97         ms=:0.7)
98 end
99
100 savefig(plt, "Lab2_Case1_ByistrovGleb.jl")

```

Рис. 4.8: Первый случай

7. Решение для первого случая на языке Julia (рис. 4.9).

```

96 mc=:pink,
97 ms=:0.7)
98
99 plot(
100     plt,
101     [sol.t[i-1], sol.t[i]],
102     [sol.u[i-1], sol.u[i]],
103     label="",
104     color=:purple,
105     lw=:8)
106 scatter(
107     plt,
108     [sol.t[i]],
109     [sol.u[i]],
110     label="",
111     mc=:purple,
112     ms=:0.7)
113
114 savefig(plt, "Lab2_Case1_ByistrovGleb.jl")
115 end

```

Рис. 4.9: Первый случай

8. График для первого случая (рис. 4.10).

Задача о погоне Быстров Г.А.

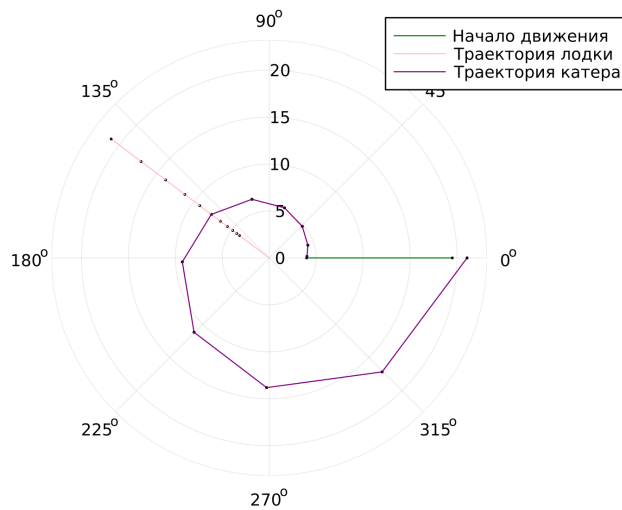


Рис. 4.10: График

9. Решение для второго случая на языке Julia (рис. 4.11).

```

1 using DifferentialEquations
2 using Plots
3
4 function F(u, p, t) # правая часть ОДУ u - переменная (скаляр или массив) p - параметры (кортеж, tuple) t - аргумент (время)
5     return u / sqrt(14.21) # p и t не используются но необходимы для библиотеки
6 end
7
8 #отношение скорости охраны к браконьерам равно 3:9
9 #начальное расстояние катера от лодки равно 19.5
10
11 const T = (-pi, pi) #интервал для второго случая
12
13 const r1 = 19.5 / (4.9) #второй случай
14 const r2 = -(19.5 / (2.0)) #второй случай
15 const r = r2
16
17 prob = ODEProblem(F, abs(r), T)
18
19 sol = solve(
20     prob,
21     abstol=1e-8,
22     reltol=1e-8
23 )
24
25 @show sol.t #составной тип данных (распечатываем углы)
26 @show sol.u #составной тип данных (распечатываем радиус)
27
28 plt = plot(
29     proj = :polar,
30     aspect_ratio = :equal,
31     dpi=300,
32     legend=true,
33 )

```

Рис. 4.11: Второй случай

10. Решение для второго случая на языке Julia (рис. 4.12).

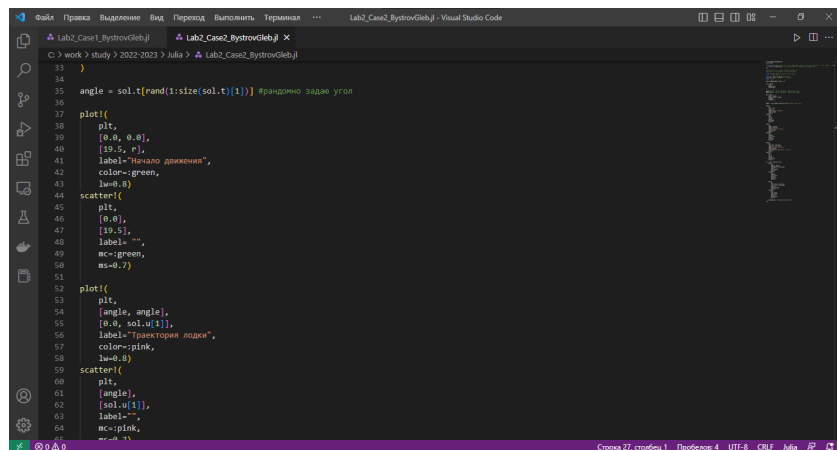


Рис. 4.12: Второй случай

11. Решение для второго случая на языке Julia (рис. 4.13).

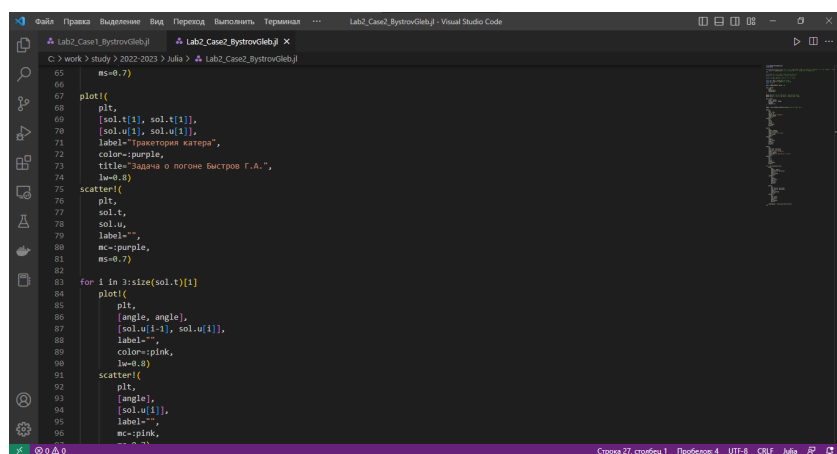


Рис. 4.13: Второй случай

12. Решение для второго случая на языке Julia (рис. 4.14).

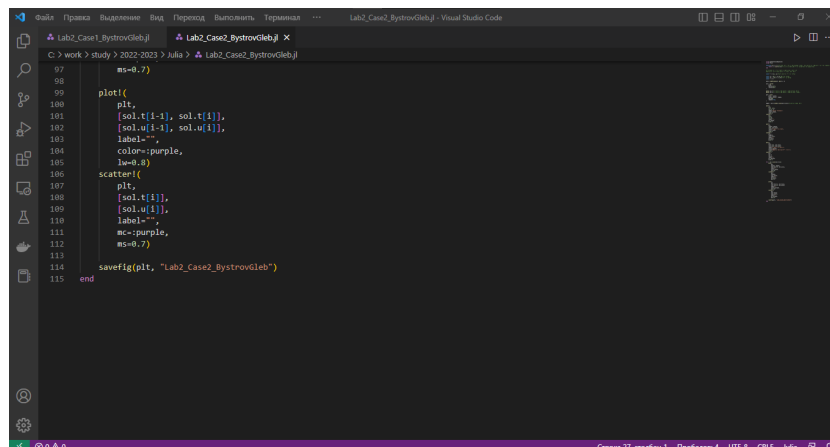


Рис. 4.14: Второй случай

13. График для второго случая (рис. 4.15).

Задача о погоне Быстров Г.А.

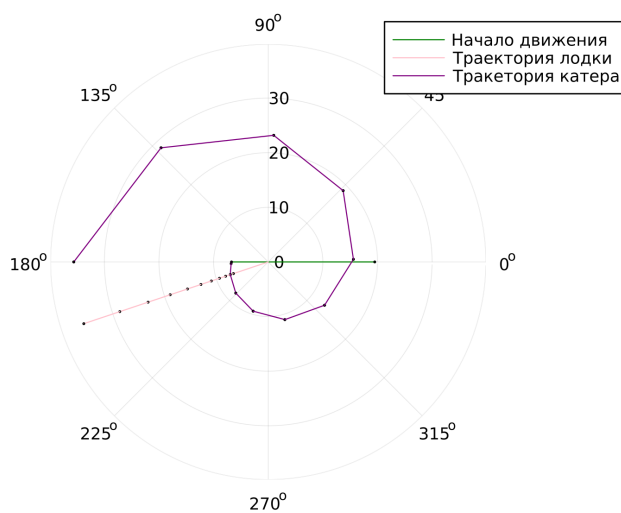


Рис. 4.15: График

14. Отправил файлы на сервер, используя команды в Windows PowerShell [3] (рис. 4.16).

```
PS C:\work\study\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod> git config --global user.email '103270396@sprin.ru'
PS C:\work\study\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod> git config --global user.name 'BystrovGleb'
PS C:\work\study\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod> git commit -am 'Feat(main): make course structure'
On branch master
Your branch is ahead of 'origin/master' by 1 commit.
(use "git push" to publish your local commits)

nothing to commit, working tree clean
PS C:\work\study\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod> git push
Enumerating objects: 34, done.
Counting objects: 100% (34/34), done.
Delta compression using up to 4 threads
Compressing objects: 100% (31/31), done.
Writing objects: 100% (33/33), 1.13 MiB | 3.83 MiB/s, done.
Total 33 (delta 5), reused 0 (delta 0), pack-reused 0
remote: Resolving deltas: 100% (5/5), completed with 1 local object.
To github.com:BystrovGleb/mathmod.git
 1d6f00e..f2d0131 master -> master
PS C:\work\study\2022-2023\Математическое моделирование\mathmod>
```

Рис. 4.16: Отправка файлов на сервер

5 Выводы

В данной лабораторной работе мне успешно удалось изучить один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска, а также рассмотреть задачу преследования браконьеров береговой охраной.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №2 (по вариантам) [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971722/mod_resource/content/2/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BA%20%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5%20%E2%84%96%20%281%29.pdf.
2. Лабораторная работа №2 [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971721/mod_resource/content/2/%D0%9B%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B0%20%E2%84%96%201.pdf.
3. Git [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Git>.