Anotações sobre mecânica e dinâmica.

Rodrigo Carlos Silva de Lima [‡]

rodrigo.uff.math@gmail.com

‡

Sumário

Capítulo 1

Mecânica

Esse texto ainda não se encontra na sua versão final, sendo, por enquanto, constituído apenas de anotações informais, não tendo sido ainda revisado, então leia com cuidado e atenção a possíveis erros, Sugestões para melhoria do texto, correções da parte matemática ou gramatical eu agradeceria que fossem enviadas para meu Email **rodrigo.uff.math@gmail.com**.

Definição 1 (Cinemática)**.** Estudo o movimento e propriedades, mas não modela suas possíveis causas.

Definição 2 (Dinâmica)**.** A dinâmica é o estudo da relação entre os movimentos dos corpos e as causas desses movimentos .

1.1 Invariância de movimento

Vamos considerar como primeira aproximação para o estudo da cinemática, as seguintes propriedades.

✍ **Propriedade 1** (Invariância por translação)**.** Se figuras são movidas sem rotação, não ocorrem mudanças em suas propriedades .

✍ **Propriedade 2** (Homogeneidade do espaço)**.** Consideramos o espaço homogêneo, ele não difere ponto a ponto .

Propriedade 3 (Invariância por rotação)**.** Figuras não são alteradas por rotação .

Propriedade 4 (O espaço é isotrópico)**.** O espaço é isotrópico, isso significa que todas as direções são equivalentes. Não existem direções no espaço privilegiadas ou, equivalentemente, identificáveis. Qualquer direção do espaço é equivalente a outras direções. As leis físicas devem ser as mesmas independente das direções.

Esse tipo de propriedade seria quebrada, por exemplo, se a luz tivesse velocidade conforme a direção do raio luminoso.

Um material , espaço ou efeito que não seja isotrópico é chamado de anisotrópico .

1.2 Cinemática

A cinemática é a parte da mecânica que estuda a descrição do movimento, não importando a princípio o que causa o movimento.

Definição 3 (Referencial)**.** Um referencial é um sistema em relação ao qual são definidas posições de outros corpos.

Definição 4 (Referencial unidimensional)**.** Um referencial unidimensional é uma reta no espaço euclidiano em que se toma uma orientação, tomando um ponto 0 que é chamado de origem dos espaços, dados dois outros pontos A e B na reta, tais que O está entre A e B, define-se duas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overleftarrow{BO}$, a orientação da reta é a escolha de uma dessas semi-retas para possuir posições positivas, enquanto os pontos da outra recebem posições negativas, por exemplo tomando a orientação $\overrightarrow{OA}$, um ponto $X \neq O$ nessa semi-reta possui posição positiva, que são dadas por $+d(X, O)$, distância de X até O. Um ponto $X \neq O$ em $\overleftarrow{BO}$ recebe posição negativa que é dada por $-d(X, O)$.

A cada instante de tempo t podemos associar uma posição simbolizada por $x(t)$ ou $s(t)$ na reta orientada.

1.2.1 Espaço, variação de espaço e distância percorrida

Definição 5 (Variação do espaço). A variação de espaço entre dois instantes de tempo t_2 e t_1 com $t_2 > t_1$ é $s_2 - s_1$ que pode ser simbolizado por Δs, onde s_1 é a posição no instante t_1 e s_2 no instante t_2.

Definição 6 (distância percorrida). A distância percorrida entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 é o comprimento do caminho que liga $x(t_1)$ e $x(t_2)$ pela expressão da posição $x(t)$.

1.2.2 Velocidade

Definição 7 (Velocidade média). Definimos a velocidade média de um objeto entre os instantes t_1 e t_2 ($t_2 > t_1$) com respectivas posições $x(t_1)$ e $x(t_2)$ por

$$Vm_{(t_1,t_2)} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x(t_1)}{\Delta t_1}.$$

☞ **Exemplo 1.** Se temos uma trajetória dividida em pontos de parada $(p_k)_1^{n+1}$, sendo conhecidos os deslocamentos entre $d(p_k, p_{k+1}) = \Delta s_k$ e a velocidade média entre esses pontos vm_k, então podemos calcular a velocidade média do deslocamento de p_1 até p_{n+1}, pois vale $vm_k = \frac{\Delta s_k}{\Delta t_k}$ daí $\Delta t_k = \frac{\Delta s_k}{vm_k}$ sendo a velocidade média geral v_m dada pela soma dos deslocamentos dividido pela soma dos intervalos, tem-se

$$v_m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta t_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\Delta s_k}{vm_k}}.$$

A velocidade média é dada pela média harmônica das velocidades médias parciais.

Se cada $\Delta s_k = x$ uma constante, tem-se

$$v_m = \frac{x.n}{x\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{vm_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{vm_k}}.$$

No caso especial de termos apenas dois trechos temos

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{vm_1} + \frac{1}{vm_2}} = \frac{2vm_1vm_2}{vm_1 + vm_2}.$$

✍ **Propriedade 5.** Suponha que uma trajetória é dividida em $n+1$ pontos $(p_k)_1^{n+1}$, em cada intervalo $[p_k, p_{k+1}]$ sendo percorrido com velocidade média vm_k e mesmo intervalo de tempos Δt, nessas condições a velocidade média de p_1 até p_{n+1} é a média aritmética das velocidades médias em cada intervalo.

Demonstração.

Sabemos que

$$v_m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta t_k}$$

com $\Delta t_k = \Delta t$ $vm_k = \dfrac{\Delta s_k}{\Delta t} \Rightarrow vm_k \Delta t = \Delta s_k$ substituindo na expressão da velocidade média temos

$$v_m = \frac{\Delta t \sum\limits_{k=1}^{n} vm_k}{\Delta t n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} vm_k}{n}$$

como queríamos demonstrar.

☞ **Exemplo 2.** Um móvel percorre metade do seu percurso com velocidade média de $10km \setminus h$, se ele deseja percorrer o percurso total com $16km \setminus h$ então qual deve ser sua velocidade média na segunda parte do trajeto?

Sejam t_1 e t_2 os tempos que o móvel demora para percorrer a primeira metade x e a segunda metade do trajeto, respectivamente e y a velocidade média na segunda parte, então temos

$$10 = \frac{x}{t_1}, \ \ y = \frac{x}{t_2}, \ \ 16 = \frac{2x}{t_1 + t_2}$$

as primeiras duas identidades implicam que $t_1 = \dfrac{x}{10}$ e $t_2 = \dfrac{x}{y}$, substituindo na terceira temos

$$16 = \frac{2x}{x(\frac{1}{10} + \frac{1}{y})} = \frac{2.10.y}{10 + y} \Rightarrow$$

$$80 + 8y = 10y \Rightarrow y = 40.$$

Portanto a velocidade média na segunda metade deve ser de $40km \setminus h$.

☞ **Exemplo 3.** Um móvel de c metros de comprimento atravessa Δs metros de comprimento em Δt segundo, qual sua velocidade média?

$$v_m = \frac{c + \Delta s}{\Delta t}.$$

Em especial se $\Delta s = 0$ temos

$$v_m = \frac{c}{\Delta t}.$$

Como por exemplo o caso de ultrapassar um objeto pontual .

☞ **Exemplo 4.** Suponha três corpos X, Y, Z com posições iniciais x, y, z e velocidades constantes v_x, v_y, v_z se movendo sobre a mesma reta com mesmo sentido.

Qual o instante em que X está exatamente a mesma distância de Y e Z ? Devemos ter

$$S_x - S_y = S_z - S_x \Rightarrow 2S_x = S_z + S_y.$$

$$2x + v_x t = z + y + (v_z + v_y)t \Rightarrow t = \frac{z + y - 2x}{2v_x - v_z - v_y}.$$

☞ **Exemplo 5.** Seja um caminhão se movendo com velocidade $v_c m/s$, que carrega uma caixa de l metros de comprimento que é atravessada paralelamente por uma bala com velocidade constante desconhecida $v_B m/s$. Sabendo-se que a distância entre o ponto de saída e entrada da bala é de $\sqrt{l^2 + u^2}$ qual a velocidade da bala?

Sabemos que a velocidade do caminhão é $V_c = \dfrac{u}{\Delta t}$, u obtido pelo teorema de Pitágoras é o quanto o caminhão se move . Com isso deduzimos que

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_c}{u}.$$

A velocidade da bala é dada por

$$V_B = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l v_c}{u}.$$

Definição 8 (Velocidade instantânea)**.** Seja um movimento descrito por $x = x(t)$ então a velocidade instantânea em t é dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t).$$

☾ **Corolário 1** (Área sobre o gráfico da velocidade $\times$ tempo.)**.** Em movimento unidimensional a área sobre o gráfico da velocidade $\times$ tempo, dá o deslocamento do objeto, pois $x'(t) = v(t)$, integrando

$$\int_{t_0}^{t_1} x'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

$$x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt.$$

Definição 9 (Rapidez)**.** Definimos a rapidez como o valor absoluto da velocidade , $|v(t)|$.

☞ **Exemplo 6.** Considere uma fila arbitrariamente grande de pessoas pessoas igualmente espaçadas, cada espaço sendo de r metros, suponha que a fila se mova com velocidade constante de $v\ m \setminus s$ m para dentro de uma loja, com a primeira pessoa x_1 exatamente sobre a porta. Passados t segundos, quantas pessoas entram na loja?.

Associamos posições as pessoas da fila, $x_1 = 0$, $x_2 = r$, $x_3 = 2r$, $\cdots$, $x_k = (k-1)r$. Existe um s natural tal que $sr > vt$, portanto existe um número natural mínimo k tal que $kr > vt$ e daí $(k-1)r \leq vt$, a pessoa de posição $x_k = (k-1)r$ teria entrado na loja e todas outras x_v com $v < k$ e as pessoas de posição x_v com $v > k$ não entram na loja, então entram k pessoas, $x_1, \cdots, x_k$.

Existe x real tal que $xr = vt \Rightarrow x = \frac{vt}{r}$, $\lfloor x \rfloor = k - 1$.

Definição 10 (Movimento acelerado)**.** Um movimento é dito acelerado em um intervalo de tempo se nele vale $|v(t)|$ crescente .

Definição 11 (Movimento retardado)**.** Um movimento é dito retardado em um intervalo de tempo se nele vale $|v(t)|$ decrescente.

☞ **Exemplo 7.** Uma partícula desloca-se em trajetória retilinea com velocidade constante sobre um plano horizontal transparente em uma sala iluminada, sendo sua sombra projetada verticalmente sobre um plano inclinado. Supondo a distância entre a sombra e a bola sendo h no instante inicial e a distância entre o ponto inicial p_1 e o ponto em que o plano inclinado toca a horizontal p_2 (sobre a horizontal) sendo d, calcule a velocidade média da sombra sobre o plano inclinado e compare com a velocidade da partícula.

Seja t o tempo gasto para partícula se mover de p_1 até p_2, sendo a distância entre esse pontos d, temos que a distância percorrida pela sombra é dada pelo teorema de Pitágoras, sendo $\sqrt{h^2+d^2} > d$, percorrida em t segundos, então

$$v_m = \frac{\sqrt{h^2+d^2}}{t} > \frac{d}{t} = v.$$

Percebemos ainda que quanto maior for a altura h, maior deve ser a velocidade média da sombra.

Exemplo 8. Sejam dois móveis se movendo sobre um plano em trajetórias sempre paralelas com posições $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente ao longo do tempo, calcule a distância entre os móveis.

A cada instante temos um triângulo retângulo e a distância entre os móveis é dada pelo teorema de pitagoras

$$x(t)^2 + y(t)^2 = d^2(t) \Rightarrow$$

$$d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

fornece a expressão para a distância entre os móveis.

1.2.3 Movimento uniforme-MU

Definição 12 (Movimento uniforme-MU)**.** Um movimento é dito uniforme se a velocidade instantânea é uma constante não nula.

Em um MU chamaremos a constante de v_0, daí temos

$$\frac{dx}{dt} = v_0.$$

$x'(t) = v_0$. Com condição inicial $x(0)$ dada .

✍ **Propriedade 6** (Função horária do movimento)**.** Nas condições colocada acima temos

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

Demonstração. Aplicando a integral na relação $x'(t) = v_0$, tem-se

$$x(t) = v_0 t + k$$

com a condição inicial $x(0) = v_0.0 + k$, logo $k = x(0)$ e a expressão fica

$$x(t) = x_0 + v_0 t.$$

Podemos denotar $x(t) = s(t)$, nesse caso escrevemos

$$s(t) = s_0 + v_0 t.$$

O mesmo resultado vale se o movimento não for unidimensional, nesse caso o movimento é dito ser movimento uniforme se a posição é dada por $s(t) = (s_k(t))_1^n$ e vale $s'(t) = v_0 = (v_k(0))_1^n$ onde v_0 é um vetor fixo no R^n dado, sendo dado também o vetor posição inicial $s(0) = (s_k(0))_1^n$, isso implica que $(s'_k(t))_1^n = (v_k(0))_1^n$ daí por teoria de equações diferenciais cada coordenada $s_k(t) = v_k(0)t + c_k$, tomando $t = 0$ e usando a condição inicial $s(0) = (s_k(0))_1^n$, tem-se $c_k = s_k(0)$, daí $s_k(t) = v_k(0)t + s_k(0)$, portanto podemos escrever

$$s(t) = (s_k(0))_1^n + t(v_k(0))_1^n = s(0) + v_0 t.$$

Em especial no caso tridimensional

$$s(t) = (s_1(0), s_2(0), s_3(0)) + t(v_1(0), v_2(0), v_3(0))$$

em geral todos os pontos se encontram sobre uma reta quando o movimento é uniforme.

☾ **Corolário 2** (Velocidade média no MU)**.** Temos $x(t_1) = x_0 + v_0 t_1$ e $x(t_2) = x_0 + v_0 t_2$, logo

$$x(t_2) - x(t_1) = x_0 + v_0 t_2 - x_0 - v_0 t_1 = v_0(t_2 - t_1)$$

daí

$$Vm_{(t_1,t_2)} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_0.$$

Assim sejam quaisquer os instantes t_1, t_2 vale que a velocidade média é a mesma.

☞ **Exemplo 9.** Seja dada a função horária $S = 4 + 2t$.

Encontre

1. S_0.
2. $V(t)$.
3. A posição com $t = 2, 4, 6$ segundos.
4. Velocidade para $t = 2$ e 5.

Solução

1. Temos que $S = s_0 + v_0 t = 4 + 2t$, logo por comparação $s_0 = 4$ e $v_0 = 2$.
2. Como a velocidade é constante por se tratar de um MU, movimento uniforme, a velocidade é sempre igual a velocidade inicial, que é $v_0 = 2$.
3. Basta substituir os valores $t = 2, 4, 6$, respectivamente, que resultam em

$$S(2) = 4 + 2.2 = 4 + 4 = 8$$

$$S(4) = 4 + 2.4 = 4 + 8 = 12$$

e finalmente

$$S(6) = 4 + 2.6 = 4 + 12 = 16.$$

4. A velocidade é constante, logo em qualquer instante ela vale 2, em especial também nos instantes $t = 2$ e $t = 5$.

Definição 13 (Movimento progressivo)**.** O movimento unidimensional de um objeto em MU é dito progressivo quando $v_0 > 0$.

Definição 14 (Movimento retrógrado)**.** O movimento unidimensional de um objeto em MU é dito retrógrado quando $v_0 < 0$.

✍ **Propriedade 7.** No gráfico $x \times t$ a velocidade instantânea de um objeto é nula quando $x'(t) = v = 0$, nesses pontos a reta tangente é horizontal .

Definição 15 (Objeto em repouso)**.** Um objeto é dito estar em repouso, quando seu movimento é uniforme e sua velocidade inicial é o vetor nulo $v_0 = 0$, com isso temos

$$s(t) = s_0 + v_t = s_0$$

a posição do objeto não se altera com o tempo.

Exemplo 10. Se um objeto se movimenta no espaço com posição $s(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o objeto se movimenta em direção a origem (não estando na origem) quando em cada uma de suas coordenadas se aproxima de zero, tomemos sem perda de generalidade a coordenada em x, se $x(t) > 0$ a velocidade em x deve ser negativa daí $x(t)v(t) < 0$, se $x(t) < 0$ então a velocidade em x deve ser positiva então $x(t)v(t) < 0$, portanto somando tais desigualdades em cada coordenada e considerando o caso da coordena nula, temos

$$x(t)v_x(t) + y(t)v_y(t) + z(t)v_z(t) < 0$$

com a notação de produto interno

$$< s(t), v(t) > < 0.$$

Exemplo 11. Ana e Beatriz, descem e sobem respectivamente uma escada com velocidade constante. Ana desce $\frac{3}{4}$ da escada ao cruzar com Beatriz, quando Ana tiver descido toda escada o quanto da escada faltará para Beatriz subir?

Ana anda $\frac{3}{4}$ Beatriz anda $\frac{1}{4}$. Logo como as velocidades são constantes se Ana anda $\frac{3}{3.4} = \frac{1}{4}$ Beatriz anda $\frac{1}{3.4}$, somando com a quantidade que andou antes, Beatriz anda $\frac{1}{4} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3}$ do tamanho da escada, portanto faltam $\frac{2}{3}$ da escada para serem percorridos .

Exemplo 12. Em um movimento unidimensional , suponha que a velocidade $v(t)$ de uma partícula seja estritamente crescente e positiva . Mostre que o deslocamento em $[\frac{t}{2}, t]$ é maior que o deslocamento em $[0, \frac{t}{2}]$.

O deslocamento é dado por

$$\int_0^{\frac{y}{2}} v(t)dt < v(\frac{y}{2})\frac{y}{2}$$

e por outro lado

$$\int_{\frac{y}{2}}^{y} v(t)dt > \frac{y}{2}v(\frac{y}{2})$$

por isso o deslocamento na segunda parte do movimento é maior que na primeira parte . Usamos as desigualdades

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

onde $m = \inf f$ e $M = \sup f$ em $[a, b]$, no caso o supremo é o máximo e o ínfimo é o mínimo, como a função é estritamente crescente se obtém esses valores na borda do intervalo e a desigualdade é estrita também pela função ser crescente.

1.2.4 Fluído percorrendo canos

☞ **Exemplo 13.** Considere um fluído incompressível em dois canos de forma cilíndrica como na figura (colocar depois). O segundo cano tendo raio r_2 e o primeiro raio r_1, se a velocidade do fluído no primeiro cano é de $v_1 m/s$ qual a velocidade no segundo cano?.

O volume por segundo que passa no primeiro cano é de $v_1\pi r_1^2$, o mesmo volume deve passar no segundo cano

$$v_1\pi r_1^2 = v_2\pi r_2^2$$

de onde segue

$$v_2 = v_1(\frac{r_1}{r_2})^2$$

sendo a velocidade em $m \setminus s$ no segundo cano.

Observe que se $r_1 = r_2$ a velocidade é a mesma. Se $r_1 > r_2$ a velocidade no segundo cano aumenta, se $r_2 > r_1$ a velocidade no segundo cano diminui.

A fórmula $v_2 = v_1(\frac{r_1}{r_2})^2$, também pode ser escrita como $v_2 = v_1\frac{S_{t_1}}{S_{t_2}}$, velocidade vezes a razão entre as seções transversais .

Se tivéssemos um terceiro cano de raio r_3 então a velocidade nele seria dada por

$$v_3 = v_2\frac{r_2^2}{r_3^2} = v_1(\frac{r_1}{r_2})^2\frac{r_2^2}{r_3^2} = v_1\frac{r_1^2}{r_3^2}.$$

Então a velocidade no terceiro cano não depende de propriedades velocidade ou raio do segundo cano.

☞ **Exemplo 14.**

☞ **Exemplo 15.** Um móvel possui o gráfico Posição por tempo, dada por uma reta passando pela origem com ângulo formado com o eixo dos tempos de 45°. O que podemos dizer sobre sua velocidade?

Sabemos que nesse caso a posição é dada por $s(t) = v_0 t$, v_0 pode ser um valor qualquer.

1.2.5 Aceleração

Definição 16 (Aceleração média)**.** Definimos a Aceleração média de um objeto entre os instantes t_1 e t_2 ($t_2 > t_1$) com respectivas velocidades $v(t_1)$ e $v(t_2)$ por

$$am_{(t_1,t_2)} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v(t_1)}{\Delta t_1}.$$

Definição 17 (Aceleração instantânea)**.** Seja a velocidade de um objeto descrita por $v = v(t)$ então a Aceleração instantânea em t é dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t).$$

Corolário 3 (Área sobre o gráfico da aceleração × tempo.)**.** Em movimento unidimensional a área sobre o gráfico da aceleração × tempo, dá a velocidade do objeto, pois $v'(t) = a(t)$, integrando

$$\int_{t_0}^{t_1} v'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt$$

$$v(t_1) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt.$$

Corolário 4. Um objeto em MU possui aceleração instantânea nula, pois temos $v(t) = v_0$ uma constante daí

$$a(t) = v'(t) = (v_0)' = 0.$$

☞ **Exemplo 16.** A aceleração pode decrescer com o tempo, porém a velocidade crescer, como é o caso de $a(t) = \frac{1}{t+1}$ e daí $v(t) = \ln(t+1) + v_0$ que cresce com o tempo .

1.2.6 Movimento uniformemente variado-MUV

Definição 18 (Movimento uniformemente variado-MUV)**.** Se existe uma constante $a \neq 0$ tal que

$$a(t) = v'(t) = a$$

então o movimento é dito uniformemente variado.

Seja dada a condição inicial $v(0) = v_0$ para a velocidade.

✍ **Propriedade 8.**

1. Em MUV a velocidade instantânea é dada por

$$v(t) = v_0 + at.$$

2. Se a aceleração é constante apenas para $t \geq t_0$ então a fórmula é

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0),$$

valendo para $t \geq t_0$.

Demonstração.

1. Sabemos que vale $v'(t) = a$, integrando em t temos $v(t) = at + k$, usamos agora a condição inicial $v(0) = v_0$, de onde segue que $v(t) = v_0 + at$. O mesmo vale para o caso em $\mathbb{R}^n$.

2. Vale $v'(t) = a$ para $t \geq t_0$, aplicando a integral $\int_{t_0}^{t}$ tem-se

$$\int_{t_0}^{t} v'(t)dt = v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} adt = a(t - t_0) \Rightarrow v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)$$

como queríamos demonstrar.

☞ **Exemplo 17.** Um automóvel com velocidade constante v_a m/s (maior que a velocidade máxima) passa por uma guarda que começa a perseguir o infrator, mantendo aceleração constante até que atinge v_b m/s em t_0 segundos e continua com essa velocidade até alcançar o infrator num tempo $t > t_0$. Qual a distância percorrida pela guarda?

.

Temos que igualar as distâncias percorridas no mesmo tempo

$$\frac{v_b t_0}{2} + (t - t_0)v_b = v_a t \Rightarrow t = \frac{v_b t_0}{2(v_b - v_a)}.$$

Logo a distância é $v_a . \frac{v_b t_0}{2(v_b - v_a)} = \frac{v_b v_a t_0}{2(v_b - v_a)}$.

✍ **Propriedade 9.** A posição de um objeto em MUV é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Demonstração. Vale $v(t) = s'(t)$, daí segue $v_0 + at = s'(t)$, integrando em relação a t temos

$$v_0 t + \frac{at^2}{2} + k = s(t)$$

usando a condição inicial $s(0) = s_0$ tem-se

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

☞ **Exemplo 18.** Se o gráfico da posição em relação ao tempo é estritamente convexo (como o gráfico de $f(x) = x^2$) então o movimento é acelerado pois $s''(t) = a(t) > 0$.

Se o gráfico é estritamente côncavo (como o gráfico de $f(x) = -x^2$), então o movimento é retardado pois $s''(t) = a(t) < 0$.

☞ **Exemplo 19.** Um automóvel possui aceleração constante, ele percorre s metros em t segundos. Qual o valor da aceleração e velocidade final após estes t segundos?

Temos

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \Rightarrow \frac{2(s - s_0 - v_0 t)}{t^2} = a$$

com isso temos o valor da aceleração, agora da expressão $v = v_0 + at$ deduzimos o valor da velocidade

$$v = v_0 + \frac{2(s - s_0 - v_0 t)}{t}.$$

☞ **Exemplo 20.** Se $s_0 = v_0$ então $s(t)$ não pode ser nulo para todo t, se $a \neq 0$, pois $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}t^2$ que só se anula

✍ **Propriedade 10.** No instante correspondente ao vértice da parábola no gráfico $s \times t$ no MUV, ocorre inversão do sentido do movimento, isto é, a velocidade muda de sinal .

Demonstração. O movimento é dado por $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, logo $s' = v = v_0 + at$, o vértice é o ponto de máximo ou mínimo da parábola, quando a velocidade se anula

$$v = 0 = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{-v_0}{a}.$$

- Caso $a > 0$. Se $t > \frac{-v_0}{a}$ então $at + v_0 > 0$ e se $t < \frac{-v_0}{a}$ então $at + v_0 < 0$. Logo a velocidade muda de sinal .
- Caso $a < 0$. Se $t > \frac{-v_0}{a}$ então $at + v_0 < 0$ e se $t < \frac{-v_0}{a}$ então $at + v_0 > 0$. Logo a velocidade muda de sinal .

Observação 1. No MUV a trajetória da partícula não é um arco de parábola a trajetória pode ser retilínea, por exemplo um carro com aceleração constante se movendo em linha reta. O que forma uma parábola é o gráfico $s \times t$, posição versus tempo.

1.2.7 Equação de Torriceli para o MUV.

✍ **Propriedade 11.** Em MUV vale a relação

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0).$$

Onde v é escalar.

Demonstração.[1] Usamos as equações $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ e $v = v_0 + at$. Da segunda equação temos $\frac{v - v_0}{a} = t$, substituindo na primeira tem-se

$$s - s_0 = v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

multiplicando por $2a$ em ambos lados segue

$$2a(s - s_0) = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 =$$

colocando $v - v_0$ em evidência

$$= (v - v_0)(2v_0 + v - v_0) = (v - v_0)(v + v_0) = v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

e daí segue a fórmula de Torriceli

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0).$$

Com essa fórmula podemos achar a velocidade em função da velocidade inicial, da aceleração e das posições inicial e final, sem utilizar o tempo diretamente.

✵ **Demonstração**.[2-Usando diferencial e integral]

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = adt \Rightarrow vdv = avdt \Rightarrow$$

$$vdv = a\frac{dx}{dt}dt = adx$$

aplicando a integral $\int_0^t$ na expressão acima segue

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0).$$

✵ **Demonstração**.[3-Usando equação diferencial] Tomamos as duas expressões $v^2 = g(t)$ e $h(t) = v_0^2 + 2a(s - s_0)$, elas são iguais em $t = 0$. Tomando a derivada de cada uma delas temos

1. $g'(t) = 2v'v$

2. $h'(t) = 2as'(t)$ porém $a = v'$ e $s' = v$ então $h'(t) = 2v'v$.

Portanto $h'(t) = g'(t)$ e $h(0) = g(0)$ logo $h(t) = g(t)\ \forall t$, isto é,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0).$$

Pois funções reais que possuem mesma derivada em um intervalo diferem por constante, constante que é nula pois $h(0) = g(0)$.

✵ **Demonstração**.[4-Usando integral novamente] Temos que $\frac{dv}{dt} = a$, multiplicando por v, segue que

$$v\frac{dv}{dt} = va \Rightarrow vv' = as'$$

onde usamos $s' = v$, multiplicamos a equação acima por 2 e usamos que $2vv' = (v^2)'$ logo

$$(v^2)' = 2as',$$

aplicamos agora a integral $\int_0^t$ na identidade anterior de onde segue

$$v^2(t) = v^2(0) + 2a(s(t) - s(0)).$$

✍ **Propriedade 12** (Equação de Torriceli, versão vetorial)**.** Em MUV vale a relação

$$< v, v > = < v_0, v_0 > +2 < a, (s - s_0) >$$

Onde v é vetorial e $< , >$ é o produto escalar .

Demonstração. Vamos demonstrar de modo similar ao do caso escalar.

Tomamos as duas expressões $< v, v > = g(t)$ e $h(t) = < v_0, v_0 > +2 < a, (s - s_0) >$, elas são iguais em $t = 0$. Tomando a derivada de cada uma delas temos

1. $g'(t) = 2 < v', v >$
2. $h'(t) = 2 < a, s'(t) >$ porém $a = v'$ e $s' = v$ então $h'(t) = 2 < v', v >$.

Portanto $h'(t) = g'(t)$ e $h(0) = g(0)$ logo $h(t) = g(t)$ $\forall t$, isto é,

$$< v, v > = < v_0, v_0 > +2 < a, (s - s_0) > .$$

☞ **Exemplo 21.** O tempo de reação de uma motorista é de t segundos após perceber um sinal para parar . Se os freios garantem um retardamento de a m/s^2 calcule a distância percorrida até parar supondo a velocidade inicial de v_0 m/s .

Usamos a equação de Torriceli com $v = 0$, temos

$$0 = v_0^2 - 2a\Delta s_1 \Rightarrow \Delta s_1 = \frac{v_0^2}{2a},$$

precisamos calcular a distância que o móvel percorreu antes que a motorista percebesse o sinal para parar

$$v_0 = \frac{\Delta s_2}{t} \Rightarrow t v_0 = \Delta s_2,$$

queremos a soma $\Delta s_2 + \Delta s_1$

$$\Delta s_2 + \Delta s_1 = \frac{v_0^2}{2a} + t v_0 = v_0(\frac{v_0}{2a} + t).$$

✍ **Propriedade 13.** Todos os corpos lançados do alto de uma torre atingem o solo com a mesma velocidade, ou em geral, qualquer corpo lançado de uma altura z_0 com velocidade inicial v_0 passa por uma altura z_1 com a mesma velocidade z_1, independente da massa m do corpo.

Demonstração. Tal propriedade vale pois

$$v_1^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z_1)$$

a velocidade não depende da massa. Corpos com mais massa não caem mais rápido do que corpos do que corpos mais leves na ausência de resistência do ar.

✍ **Propriedade 14** (Fórmula de Torriceli)**.** A velocidade de um corpo em queda livre a partir do repouso após cair de um altura h é de $v = \sqrt{2gh}$.

Demonstração. Pois da equação de Torriceli $v^2 = v_0^2 + 2gh$ tomando $v_0 = 0$ segue

$$v = \sqrt{2gh}.$$

1.2.8 Movimento e teorema de Pitágoras

☞ **Exemplo 22.** Se temos um movimento em linha reta de um corpo A com posição dada por $s(t)$, sendo observado a distância de x metros, então a distância entre o ponto de observação e a posição do corpo A é dada pelo teorema de Pitágoras

$$s_o^2 = x^2 + s^2(t) \Rightarrow s_o = \sqrt{x^2 + s^2}.$$

1.2.9 Movimento vertical no vácuo

Definição 19 (Queda livre)**.** Ao movimento vertical de um corpo largado próximo ao solo chamamos de queda livre.

Nas proximidades da superfície da Terra consideramos a aceleração da gravidade constante e denotamos por g. Seu valor é de aproximadamente $9,8\ m/s^2$, algumas vezes considerado como $10\ m/s^2$ para facilitar os cálculos.

Podemos orientar a trajetória de maneira vertical no sentido da Terra para o espaço, nesse caso o movimento é considerado um MUV com aceleração $a = -g$ ou a trajetória de maneira vertical no sentido do espaço para a Terra e neste caso consideramos um MUV com aceleração $a = g$.

☾ **Corolário 5.** Em queda livre, nas proximidades da Terra , desprezando a resistência do ar temos e tomando a orientação da direção da Terra para o espaço, temos pelas equações do MUV que

$$v = v_0 - gt$$
$$s = s_0 + v_0 t - g\frac{t^2}{2}.$$

1.2.10 Proporções de Galileu

✍ **Propriedade 15.** Para um corpo em movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial nula $v_0 = 0$, temos que para intervalos de tempos iguais e consecutivos tal corpo percorre percorre distâncias na proporção dos ímpares consecutivos .

Em termos simbólicos, temos que, sendo $s(t)$ a posição em relação ao tempo, e $s(1) - s(0) = d$ o deslocamento inicial, então

$$s(t+1) - s(t) = (2t+1).d\ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Pela expressão do movimento uniformemente acelerado temos que

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

como temos $v_0 = 0$ então

$$s(t) = s_0 + \frac{at^2}{2},$$

disso segue que

$$s(t+1) - s(t) = s_0 + \frac{a(t+1)^2}{s} - s_0 - \frac{at^2}{s} = \frac{a}{2}(t^2 + 2t + 1 - t^2) = \frac{a}{2}(2t+1),$$

da mesma expressão temos com $t = 0$ que

$$s(1) - s(0) = \frac{a}{2} = d,$$

substituindo $\frac{a}{2} = d$ na expressão $s(t+1) - s(t) = \frac{a}{2}(2t+1)$ segue que

$$s(t+1) - s(t) = d(2t+1),$$

como queríamos demonstrar .

1.3 Lançamento oblíquo

Definição 20 (Movimento oblíquo)**.** Um movimento oblíquo é um movimento no plano $\mathbb{R}^2$ onde

$$s(0) = (x_0, y_0),$$

$$v(0) = (v_{0x}, v_{0y}),$$

$$a = (0, a_{0y}) \quad \text{é constante ,}$$

consideraremos ainda $v_{0y} > 0$, $a_{0y} < 0$. Simbolizaremos $v(0) = v_0$, $s(0) = s_0$.

Propriedade 16. No movimento oblíquo temos que

$$|v_{0y}| = |v_0| sen(\theta)$$

$$|v_{0x}| = |v_0| cos(\theta).$$

Onde θ é o ângulo entre v_0 e $\vec{v_{0x}} = (v_{0x}, 0)$.

Demonstração. Temos que $\vec{v_{0x}} = (v_{0x}, 0)$ e $\vec{v_{0y}} = (0, v_{0y})$ são vetores ortogonais, pois o produto interno deles é nulo

$$< \vec{v_{0y}}, \vec{v_{0x}} >= v_{0x}.0 + 0.v_{0y}$$

então o ângulo entre esses vetores é de $\frac{\pi}{2}$.

Tem-se ainda que

$$< v_0, \vec{v_{0x}} >= |v_0||v_{0x}| cos(\theta) = |v_{0x}|^2$$

logo $cos(\theta) > 0$ e daí $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, onde usamos também que

$$< v_0, \vec{v_{0x}} >=< (v_{0x}, 0), (v_{0x}, v_{0y}) >= |v_{0x}|^2$$

como $|v_{0x}| \neq 0$ por hipótese, podemos cancelar um fator de ambos lados em $|v_0||v_{0x}|cos(\theta) = |v_{0x}|^2$ de onde segue que

$$|v_0|cos(\theta) = |v_{0x}|.$$

Como temos que o ângulo entre $\vec{v_{0x}}$ e $\vec{v_{0y}}$ é $\frac{\pi}{2}$ o ângulo θ entre $\vec{v_{0x}}$ e v_0 sendo $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, temos que o ângulo entre $\vec{v_{0y}}$ e v_0 é $\frac{\pi}{2} - \theta$, daí tem-se

$$< v_0, \vec{v_{0y}} >= |v_0||v_{0y}|cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = |v_{0y}|^2$$

pois

$$< v_0, \vec{v_{0y}} >=< (0, v_{0y}), (v_{0x}, v_{0y}) >= |v_{0y}|^2,$$

além disso usando que

$$cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = cos(\frac{\pi}{2})cos(\theta) - sen(\frac{\pi}{2})sen(-\theta) = sen(\theta)$$

e ainda que $|v_{0y}| \neq 0$, anulando tal fator de ambos lados da identidade segue que

$$|v_0|sen(\theta) = |v_{0y}|.$$

Como queríamos demonstrar.

✍ **Propriedade 17** (Tempo para atingir o máximo ou mínimo)**.** O tempo para atingir o máximo ou mínimo em um movimento oblíquo é dado por

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{-a_y}, \text{ se } v_{0y} > 0$$

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{a_y}, \text{ se } v_{0y} < 0.$$

Demonstração. Temos que $y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$. O mínimo ou máximo é dado quando a derivada se anula, logo

$$y'(t) = v_{0y} + a_y t = 0 \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{-a_y}.$$

Quando $v_{0y} > 0$ segue que $|v_{0y}| = v_{0y}$, logo podemos usar a expressão

$$|v_0|sen(\theta) = |v_{0y}|,$$

que substituindo implica

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{-a_y},$$

caso $v_{0y} < 0$, tem-se $|v_{0y}| = -v_{0y}$ e a identidade fica como

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{a_y}.$$

✍ **Propriedade 18** (Tempo para voltar a altura inicial y_0)**.** O tempo para voltar a altura inicial y_0 é de

$$t = \frac{2|v_0|sen(\theta)}{-a_y}, \text{ se } v_{0y} > 0$$

$$t = \frac{2|v_0|sen(\theta)}{a_y}, \text{ se } v_{0y} < 0.$$

Demonstração. Temos que $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$, $y - y_0 = 0$ implica, tirando a solução que já conhecemos de $t = 0$ que

$$v_{0y} + \frac{a_y t}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_{0y}}{-a_y},$$

daí usamos novamente que $|v_{0y}| = |v_0|sen(\theta)$, de onde segue o resultado .

☾ **Corolário 6.** Comparando as duas propriedades anteriores percebemos que o tempo para voltar a altura inicial é o dobro do tempo para atingir a altura máxima ou mínima.

✍ **Propriedade 19** (Valor da altura máxima ou mínima atingida)**.**

Demonstração. A altura máxima ou mínima atingida é quando

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{-a_y}, \text{ se } v_{0y} > 0$$

$$t = \frac{|v_0|sen(\theta)}{a_y}, \text{ se } v_{0y} < 0.$$

Substituímos na expressão da altura $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$, no primeiro caso

$$y = y_0 + \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{-a_y} + \frac{a_y |v_0|^2 sen^2(\theta)}{2a_y^2} = y_0 + \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{-a_y} + \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{2a_y} =$$

$$= y_0 + \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{-2.a_y},$$

no segundo caso

$$y = y_0 - \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{a_y} + \frac{a_y|v_0|^2 sen^2(\theta)}{2a_y^2} = y_0 - \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{a_y} + \frac{|v_0|^2 sen^2(\theta)}{2a_y} =$$

$$= y_0 + \frac{-|v_0|^2 sen^2(\theta)}{2a_y}.$$

Definição 21 (Alcance horizontal)**.** Definimos o alcance horizontal, ou alcance em um movimento oblíquo, como o deslocamento horizontal $x(t)$ do instante de partida $t = 0$ até o instante em que altura volta a ser y_0.

Propriedade 20 (Valor do alcance horizontal)**.**

Demonstração. Se $v_{0x} > 0$ e $v_{0y} > 0$ temos

$$x = x_0 + v_{0x}t,$$

daí

$$x = x_0 + |v_0|cos(\theta)\frac{2|v_0|sen(\theta)}{-a_y} = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(2\theta)}{-a_y}.$$

Se $v_{0x} > 0$ e $v_{0y} < 0$, o ângulo θ' , então

$$x = x_0 + |v_0|cos(\theta')\frac{2|v_0|sen(\theta')}{a_y} = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(2\theta)}{a_y}.$$

O ângulo $\theta' = -\theta$ para algum θ no primeiro quadrante, daí a expressão não se altera em relação ao caso anterior

$$x = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(2\theta)}{-a_y}.$$

1.3.1 Alcance máximo de um projétil

Corolário 7. Num movimento de projétil na proximidade da Terra, com v_{0x} , v_{0y} e $-a_y$ positivos , θ o ângulo com a horizontal. O lançamento irá atingir alcance máximo quando $sen(2\theta)$ for máximo e por isso $\theta = 45°$, a expressão ficando como

$$A_m = x_0 + \frac{|v_0|^2}{-a_y}.$$

✍ **Propriedade 21.** Num movimento de projétil na proximidade da Terra , os acalcances com ângulos $\theta = \delta + 45°$ e $\theta = -\delta + 45°$ são os mesmos.

Demonstração. Temos a expressão

$$x = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(2\theta)}{ca_y},$$

onde $c \in \{1, -1\}$, temos que

$$x_{(\delta+45°)} = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(90° + 2\delta)}{ca_y},$$

$$x_{(-\delta+45°)} = x_0 + \frac{|v_0|^2 sen(90° - 2\delta)}{ca_y},$$

porém temos que $sen(90° + y) = sen(90° - y)\ \forall\ y$, o que se mostra por identidade de seno da soma, por isso as duas quantidades acima são iguais.

1.4 Movimentos circulares

Usaremos nesta seção a notação de produto interno também chamado de produto escalar, $< v, u >$. Se $v = (v_1, \cdots, v_n)$ e $u = (u_1, \cdots, u_n)$, então

$$< v, u >= \sum_{k=1}^{n} v_k u_k.$$

Iremos supor que as propriedades básicas são bem conhecidas, como

- $$< v, u >= |v||u|cos(\theta).$$

- $u \neq 0$ e $v \neq 0$ são perpendiculares (ortogonais) $\Leftrightarrow\ < v, u >= 0$. Isso podendo ser entendido com colocar $\theta = 90°$ em $< v, u >= |v||u|cos(\theta)$. .

- Se u e v são deriváveis então a derivada de $< v, u >$ satisfaz a regra do produto

  $$< v, u >' =< v', u > + < v, u' > .$$

  Que pode ser dedudizada diretamente de $< v, u >= \sum_{k=1}^{n} v_k u_k$, aplicando a regra do produto da derivada nas coordenadas.

- Usaremos sempre que se $f(t) =< u(t), u(t) >= k$ uma constante, $u(t) \neq 0 \forall \tau$, então derivando, tem-se

  $$f'(t) =< u'(t), u(t) > + < u(t), u'(t) >= 0 = 2 < u'(t), u(t) > \Rightarrow < u'(t), u(t) >= 0,$$

  isto é, $u(t)$ é ortogonal a $u'(t)$.

- Vamos usar também que a norma do vetor u é dada por

$$|u| = \sqrt{< u, u >}.$$

Definição 22 (Movimento circular)**.** Um movimento é dito circular se a função horária da posição $s(t)$ satisfaz

$$< s(t), s(t) >= r^2 \; \forall t,$$

onde $r > 0$ é uma constante real .

Corolário 8. Como $< s(t), s(t) >= r^2$, então tomando a raiz tem-se que

$$|s(t)| = \sqrt{< s(t), s(t) >} = r.$$

Então em um movimento circular temos que $|s(t)| = r \; \forall t$.

Definição 23 (Espaço angular ou fase)**.** Consideramos uma partícula em movimento sobre uma circunferência de raio r, podemos pensar a circunferência com centro no ponto $(0, 0)$ do plano cartesiano, seu espaço angular ou fase, denotado por φ é definido como

$$\varphi(t) = \frac{s(t)}{r},$$

onde R é o raio da circunferência, s é o deslocamento sobre a circunferência a partir da reta $y = 0$. φ é dito então medir $\frac{s}{r}$ radianos.

Como o movimento s está sobre uma circunferência de raio r, a posição pode ser parametrizada como

$$s(t) = r(cos(b(t), sen(b(t))$$

onde $b(t)$ é uma função suave. Então pela definição

$$\varphi(t) = \frac{s(t)}{r},$$

segue que

$$\varphi(t) = (cos(b(t), sen(b(t)).$$

Definição 24 (Velocidade média angular)**.** Sendo $t_2 > t_1$ instantes de tempo (medidos em segundo) que correspondem fases φ_1, φ_2 respectivamente, então, definimos a velocidade média angular por

$$w_m = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$$

cuja medida é em rad/s.

Definição 25 (Velocidade angular instântanea)**.** Da identidade $\varphi(t) = \dfrac{s(t)}{r}$, derivando tem-se

$$\varphi'(t) = \frac{s'(t)}{r} = \frac{v(t)}{r}.$$

$\varphi'(t)$ é chamada de velocidade angular instântanea e denotada por $w(t)$.

Corolário 9. Segue que

$$v(t) = w(t)r.$$

Definição 26 (Aceleração angular instântanea)**.** Da identidade $w(t) = \dfrac{v(t)}{r}$, derivando tem-se

$$w'(t) = \frac{v'(t)}{r} = \frac{a(t)}{r}.$$

$w'(t)$ é chamada de aceleração angular instântanea que denotaremos por α_a.

Corolário 10. Segue que

$$a(t) = \alpha_a(t)r.$$

1.4.1 MCU-Movimento circular uniforme

Definição 27 (MCU-Movimento circular uniforme)**.** É um movimento onde a velocidade vetorial $\overrightarrow{v}$ tem módulo constante mas varia de direção e a posição $s(t) = (s_1(t), s_2(t))$, satisfaz para todo t

$$s_1(t)^2 + s_2(t)^2 = r^2, \forall t \in R.$$

para alguma constante $r > 0$ real .

Na notação de produto escalar, temos que, um movimento é circular uniforme, se satisfaz as propriedades

1. $< s(t), s(t) >= r^2$, $\forall t \in R$, onde $r \geq 0$ é uma constante real. s sendo suave .
2. $< v(t), v(t) >= k$ para alguma constante $k \geq 0 \in R$. Isso significa que $|v(t)|$ é constante.

Propriedade 22. No MCU a função horária pode ser escrita como

$$s(t) = r(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t) = r\varphi(t).$$

Onde ω, ϕ_0 são constantes reais.

Demonstração. No MCU, pela condição de $s(t)$ estar sobre uma circunferência temos que

$$s(t) = r(cos(b(t)), sen(b(t)) = r\varphi(t)$$

derivando por regra da derivada da composição[1] e simplificando segue

$$v(t) = rb'(t)(-sen(b(t), cos(b(t))$$

porém o módulo da velocidade deve ser constante, daí tomando o módulo da velocidade acima, segue que

[1]Lembre que $\frac{d}{dt}f(g(t))$= g'(t) f' (g(t)).

$$|v(t)| = r|b'(t)| = m \text{ onde m é uma constante}$$

daí $[b'(t)]^2 = \frac{m^2}{r^2}$, $b'(t) = \pm\frac{m}{r}$, por continuidade de $b'(t)$, segue que seu valor é constante.

Diremos $b'(t) = \omega$, dai por integração segue que $b(t) = \phi_0 + \omega t$ e por isso a posição no movimento é dada por

$$s(t) = r(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t) = r\varphi(t).$$

☾ **Corolário 11.** Como $\varphi(t) = (cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t)$ segue que

$$\varphi(0) = (cos(\phi_0), sen(\phi_0)$$

fornece o espaço angular inicial .

☾ **Corolário 12.** Como

$$w(t) = \varphi'(t) = \omega(-sen(\phi_0 + \omega t), cos(\phi_0 + \omega t)$$

tem-se

$$w(0) = \omega(-sen(\phi_0), cos(\phi_0) \Rightarrow |w(0)| = |\omega|.$$

✍ **Propriedade 23.** Em um movimento circular a velocidade $v(t)$ é sempre ortogonal a trajetória $s(t)$.

Observe que essa propriedade vale em qualquer movimento circular, não necessariamente uniforme, isto é, vale em movimentoc circulares onde o módulo da velocidade pode não ser constante.

♒ **Demonstração**. Da identidade $< s(t), s(t) >= r^2$, derivando e simplificando temos

$$< \underbrace{s'(t)}_{v(t)}, s(t) >= 0$$

$$< v(t), s(t) >= 0$$

logo $v(t)$ e $s(t)$ são ortogonais .

✍ **Propriedade 24.** Em um movimento circular uniforme a velocidade $v(t)$ é sempre ortogonal a aceleração $\alpha(t)$.

⅋ **Demonstração**. Da identidade $< v(t), v(t) >= k$, derivando e simplificando temos

$$< \underbrace{v'(t)}_{\alpha(t)}, v(t) >= 0$$

$$< \alpha(t), v(t) >= 0$$

logo $v(t)$ e $\alpha(t)$ são ortogonais .

✍ **Propriedade 25.** A aceleração no movimento circular uniforme, aponta sempre para o centro da circunferência e possui módulo

$$|\alpha(t)| = \frac{|v|^2}{r},$$

onde r é o raio da circunferência .

⅋ **Demonstração**.[1-Usando coordenadas]

Demonstração por João Dos Reis.

A posição no MCU pode ser escrita como

$$s(t) = r(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t))$$

logo derivando temos

$$s' = v = r\omega(-sen(\phi_0 + \omega t), cos(\phi_0 + \omega t))$$

derivando mais uma vez, segue

$$s'' = \alpha = -r\omega^2(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t))$$

comparando com $s = r(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t))$, percebemos que s e α possuem direções opostas, como s aponta para fora da circunferência então α aponta para o centro e além disso

$$|\alpha| = r\omega^2 \overbrace{|(cos(\phi_0 + \omega t), sen(\phi_0 + \omega t))|}^{1} = r\omega^2$$

usando a expressão da velocidade, tomando o módulo

$$|v| = r|\omega|\overbrace{|(-sen(\phi_0+\phi t), cos(\phi_0+\phi t))|}^{1} = r\omega \Rightarrow \frac{|v|}{r} = |\omega|,$$

substituindo na expressão anterior segue que

$$|\alpha| = \frac{|v|^2}{r}.$$

Demonstração.[2-Sem usar coordenadas] Sabemos que $< s(t), v(t) >= 0$ pois são ortogonais, derivando mais uma vez temos

$$< s'(t), v(t) > + < s(t), v'(t) >= 0, \text{ i.e } < v(t), v(t) > + < s(t), \alpha(t) >= 0$$

então

$$< s(t), \alpha(t) >= - < v(t), v(t) >= -|v(t)|^2$$

mas sabemos também que $< s(t), \alpha(t) >= |s(t)|\ |\alpha(t)|cos(\theta)$ onde θ é o ângulo entre $s(t)$ e $\alpha(t)$. Como a $v(t)$ e $\alpha(t)$ são ortogonais e $v(t)$ e $s(t)$ também, além de estarmos no plano R^2 então o ângulo entre $s(t)$ e $\alpha(t)$ seria 180° ou 0°, como $cos(0) = 1$ não podemos ter ângulo nulo, então $\theta = 180°$. Como $s(t)$ é um vetor que aponta para fora da circunferência, o vetor α possui direção rotacionada de 180° logo aponta para o centro da circunferência.

Das identidades $< s(t), \alpha(t) >= -|v(t)|^2$, $< s(t), \alpha(t) >= \underbrace{|s(t)|}_{r}\ |\alpha(t)|\ \overbrace{cos(\theta)}^{cos(180°)=-1}$ e $|s(t)| = r$ segue substituindo os valores que

$$r|\alpha(t)|(-1) = -|v(t)|^2 \Rightarrow |\alpha(t)| = \frac{|v(t)|^2}{r}.$$

Corolário 13. Concluímos que no movimento circular uniforme a aceleração aponta sempre para o centro e possui módulo dado por

$$|\alpha(t)| = \frac{|v(t)|^2}{r}.$$

Por ela apontar sempre para o centro da circunferência dizemos que a aceleração é centrípeta.

Vamos agora analisar o caso de um movimento circular, que não seja necessariamente uniforme .

✍ **Propriedade 26.** Em um movimento circular podemos decompor a aceleração α em componentes tangencial a circunferência α_t e outra componente em direção ao centro (centrípeta) α_{cp}, com $|a_{cp}| = \frac{|v|^2}{r}$.

Demonstração. Da relação $< s(t), s(t) >= r^2$ derivando tem-se $< v(t), s(t) >= 0$, derivando novamente segue

$$< \alpha(t), s(t) > + < v(t), v(t) >= 0 \Rightarrow < \alpha(t), s(t) >= - < v(t), v(t) >= -|v(t)|^2$$

usando $< \alpha(t), s(t) >= |\alpha(t)|\ |s(t)| cos(\theta)$ segue que

$$|\alpha(t)|\ |s(t)| cos(\theta) = -|v(t)|^2$$

disso temos que $90° \leq \theta \leq 180°$, então α pode ser decomposta em uma componente tangencial a_t que tangencia a trajetória (faz $90°$) graus com $s(t)$) e uma componente em direção ao centro que faz $180°$ graus com $s(t)$, $\alpha(t) = \alpha_t(t) + \alpha_{cp}(t)$.

Usando novamente as identidades $< \alpha(t), s(t) >= -|v(t)|^2$ e $\alpha(t) = \alpha_t(t) + \alpha_{cp}(t)$, segue

$$\overbrace{< \alpha_t(t), s(t) >}^{0} + < \alpha_{cp}(t), s(t) >= -|v(t)|^2 = \overbrace{|s(t)|}^{r} |\alpha_{cp}(t)| \quad \overbrace{cos(\theta)}^{cos(180°)=-1}$$

daí segue que

$$|\alpha_{cp}(t)| = \frac{|v|^2}{r}.$$

1.4.2 Aceleração centrípeta

A aceleração centrípeta acontece em movimentos que não sejam retilíneos, é denotada por $\overrightarrow{a}_{cp}$ e possui as propriedades

- Módulo $|\overrightarrow{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$. Onde v é a velocidade escalar e R o raio da curvatura da trajetória.
- Possui direção perpendicular a velocidade vetorial em cada ponto .
- Possui sentido orientado para o centro de curvatura da trajetória.

1.4.3 Radiano

Ao comprimento de uma circunferência associamos o valor de $2\pi\ rad$.

Denotamos o espaço angular, velocidade angular e a aceleração angular respectivamente por φ, w e α.

Vale a relação entre a posição (arco) $s = \varphi.r$. Derivando a relação ao tempo tem-se $s'(t) = \varphi'(t).r$ onde $\varphi'(t) = w(t)$, então

$$v = w.r$$

derivando novamente tem-se

$$a = \alpha.r.$$

Definição 28 (Frequência)**.** A frequência é dada em hertz (Hz) . A frequência também pode ser dada por em RPM (rotações por minuto), nesse caso a conversão para hertz é feita da seguinte maneira

$$60RPM = 1Hz$$

A frequência e o período se relacionam pela identidade

$$f = \frac{1}{T}$$

onde T é o período.

Propriedade 27. No movimento circular uniforme vale a função horária

$$\varphi = \varphi_0 + w.t$$

Demonstração.

Propriedade 28. Vale

$$w = \frac{2\pi}{T}.$$

Demonstração.

1.5 Movimento relativo

1.5.1 Movimento relativo com baixas velocidades

☞ **Exemplo 23.** Dois automóveis A e B distam 225 km sobre uma mesma estrada retilínea , o primeiro com 60 km/h e o segundo com 90 km /h , A indo em direção ao automóvel B . Em quanto tempo eles se encontram?

Como os automóveis vão um em direção ao outro, podemos considerar o referencial em um deles, digamos em A e B se aproximando de A com velocidade que é a soma das velocidades $90 + 60 = 150$ km/h . Temos que calcular então em quanto tempo se percorre 225 km com velocidade de 150 km/h .

Temos que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ logo $\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$, substituindo os números temos que

$$\Delta t = \frac{225}{150} = 1,5 \text{ h}.$$

Então o tempo para encontro é de $1,5$ horas .

1.5.2 Transformação de Lorentz

✍ **Propriedade 29** (Princípio da relatividade)**.** Todas as Leis da natureza devem ser invariantes para todos os observadores em movimento relativo de translação uniforme.

✍ **Propriedade 30.** A velocidade da luz é um invariante físico tendo o mesmo valor para todos os observadores em movimento relativo de translação uniforme.

Definição 29 (Configuração padrão)**.** Dados dois observadores O e O', cada um usando seu próprio sistema de coordenadas cartesiano para medir intervalos de tempo e espaço. O usa (t, x, y, z) e O' usa (t', x', y', z') e os sistemas são orientados de tal maneira que os eixos x e x' são colineares, y e z paralelos à y' e z' respectivamente, sendo v a velocidade relativa entre os dois observadores ao longo do eixo x, supondo ainda que $t = t' = 0$ quando os observadores estão em mesma posição. Se essas condições são satisfeitas dizemos que os sistemas de coordenadas estão sob a configuração padrão.

✍ **Propriedade 31** (Transformação de Lorentz)**.** A transformação de Lorentz entre O e O' se expressa como as relações

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z.$$

✵ **Demonstração**. Suponha que no instante $t = 0$ um raio luminoso é emitido a partir da origem dos eixos, decorridos t segundos o observador O nota que a luz alcançou um ponto A com distância até a origem $r = ct$, c a velocidade da luz

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

O observador O' nota que a luz atingiu o mesmo ponto A em t' segundos, também com velocidade c que não se altera pelo princípio da relatividade, daí r' a distância até a origem do eixo O' é $r' = ct'$

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

As coordenadas y' e z' não mudam com o movimento, daí $y' = y$ e $z' = z$. Supomos as relações $x' = k(x - vt)$ e $t' = a(t - bx)$ onde k, a, b são constantes a serem determinadas, substituindo em $c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ tem-se

$$k^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2bxt + b^2x^2) =$$

$$= (k^2 - 2b^2a^2c^2)x^2 + tx(-2vk^2 + 2bc^2a^2) + y^2 + z^2$$

equiparando à $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$ tem-se

1. $k^2 - b^2a^2c^2 = 1$

2. $k^2v - ba^2c^2 = 0$

3. $a^2 - \dfrac{k^2v^2}{c^2} = 1$

da equação 2. segue que $k^2 = \dfrac{ba^2c^2}{v}$, substituindo k^2 e igualando 1. e 3.

$$\frac{ba^2c^2}{v} - b^2a^2c^2 = a^2 - ba^2v \Rightarrow \frac{bc^2}{v} - b^2c^2 = 1 - bv \Rightarrow b^2c^2 - b(v + \frac{c^2}{v}) + 1$$

onde na primeira passagem cortamos a em ambos lados, chegamos então em uma equação de grau 2 em b, que pode ser resolvida

$$\Delta = (v + \frac{c^2}{v})^2 - 4c^2 = v^2 + 2c^2 + \frac{c^4}{v^2} - 4c^2 = v^2 - 2c^2 + \frac{c^4}{v^2} = (v - \frac{c^2}{v})^2$$

$$b = \frac{(v + \frac{c^2}{v}) \pm (v - \frac{c^2}{v})}{2c^2}$$

de onde temos $b = \dfrac{v}{c^2}$ ou $b = \dfrac{1}{v}$ (tomamos a primeira opção, explicar), daí pela expressão de k^2, substituindo o valor de b encontrando tem-se $k^2 = a^2$. Da equação 3. segue

$$k^2 - \frac{k^2v^2}{c^2} = 1 \Rightarrow k^2 - \frac{k^2v^2}{c^2} = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}$$

, substituindo os valores encontrados temos finalmente

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z.$$

1.6 Leis de Newton

Definição 30 (Partícula livre)**.** Uma partícula é dita ser livre, se ela está sujeita a interação resultante nula . Na prática pode não existir particula livre, porém podem existir partículas que se aproximam de tal conceito, caso suas interações sejam consideradas desprezíveis , como por exemplo partículas muito afastadas uma das outras, ou também caso as interações com outras partículas se cancelem , dando uma interação resultante nula.

1.6.1 Primeira Lei de Newton

✍ **Propriedade 32** (Primeira Lei de Newton - Lei da inércia)**.**

- Todo corpo em repouso ou em MRU continua nesses estados a menos que seja obrigado a alterá-los por forças aplicadas sobre ele.

- Toda partícula livre possui velocidade constante, isto é, sua aceleração é nula.

Tal afirmação é chamada Lei de Newton, pois teria sido primeiramente enunciada por Isaac Newton $(1642 - 1727)$.

☾ **Corolário 14.**

- Se uma partícula livre possui velocidade constante não nula, então ela se move em linha reta .

- Se uma partícula livre possui velocidade constante nula, então ela está em repouso .

- Portanto uma partícula livre se move em linha reta ou está em repouso .

Definição 31 (Referencial inercial)**.** Movimento é um conceito relativo, portanto ao enunciar a lei da inércia, devemos indicar a qual sistema de referência o movimento da párticula livre é referido. Iremos admitir que o movimento de uma partícula livre é relativo a um observador, sistema ou partícula que sejam também livres, isto é, não estejam sujeitos a interações com outras partículas do universo. Tal tipo de referencial é chamado de referencial inercial .

Os referenciais em que a lei da inércia vale são chamados referenciais inerciais.

☾ **Corolário 15.** Sistemas inerciais de referência não giram, pois existência de rotação implicaria em aceleração, devida a variação de direção do vetor velocidade.

☞ **Exemplo 24** (Terra e referencial inercial)**.** Devido a sua rotação em torno do seu eixo e interação gravitacional com o Sol e outros planetas do sistema solar, a Terra não é um sistema inercial de referência. Porém em alguns casos, pode-se considerar o efeito de rotação da Terra e sua interação gravitacional com outros planetas desprezíveis e por isso pontos na Terra serem considerados aproximadamente referenciais inerciais.

☞ **Exemplo 25** (Sol e referencial inercial)**.** O sol também não é um referencial inercial por sua interação gravitacional com , por exemplo, os planetas do sistema solar e seu movimento orbital em torno do centro da nossa galáxia , Via láctea . O movimento do Sol possui menor curvatura que o movimento da Terra (pois o raio médio do movimento do Sol é muito maior que o da Terra, portanto a semelhança do Sol a um referencial inercial é muito maior . A aceleração orbital da Terra seria cerca de 150 milhões de vezes maior que a do Sol .

Definição 32 (Massa de repouso- definição operacional)**.** A definição operacional de massa de repouso, é de um número que atribuímos a um corpo A, sendo esse número obtido pela comparação do corpo A com um corpo tomado como padrão B, usando o príncípio de uma balança de braços iguais, isto para os corpos A e B supostamente em repouso .

Observação 2. Pela definição anterior, não sabemos se a massa será a mesma se a partícula estiver em movimento (acelerado ou não), ou se depende da velocidade de um corpo dado certo referencial . Por isso damos o nome anterior de massa de repouso , em outras ocasiões seria possível o valor da massa variar.

Em nossa análise iremos considerar que a massa seja independente do movimento, para valores de velocidade muito pequenas comparado com a velocidade da luz , faremos uma discussão sobre isso em outra seção do texto.

Definição 33 (Momento linear ou quantidade de movimento)**.**

$$\overrightarrow{p} = m.\overrightarrow{v}$$

O momento linear de uma partícula é o produto da sua massa pela sua velocidade.

A lei da inércia pode ser descrita se usando o conceito de quantidade de movimento .

✍ **Propriedade 33** (Lei da inércia)**.** Uma partícula livre possui quantidade de movimento constante em função do tempo .

1.6.2 Segunda Lei de Newton

Definição 34 (Força)**.** Seja $p = mv$ a quantidade de movimento de uma partícula A, definimos que a força resultante F na particula A como

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

✍ **Propriedade 34** (Segunda Lei de Newton)**.** Seja $\overrightarrow{F}$ a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material de massa m, então

$$\overrightarrow{F} = m.\overrightarrow{a}$$

onde $\overrightarrow{a}$ é a aceleração do ponto material. A força e a aceleração são grandezas vetoriais, a unidade da força é dada em (N) newtons e da aceleração em m/s^2. Temos que a força e a aceleração tem o mesmo sentido. A massa m é também chamada de massa inercial ou coeficiente de inércia, considerada constante em relação ao tempo neste caso .

Definição 35 (Massa inercial)**.** O valor de massa m, que aparece na expressão da quantidade de movimento

$$p = mv$$

é chamada de massa inercial .

Demonstração. Se considerarmos que a massa não varia com o tempo, temos

$$F = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m.\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m.\overrightarrow{a}$$

logo

$$m.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}.$$

Equivalentemente, se definimos $F = m.a$ com m constante, então $F = \frac{dp}{dt}$ pois $\frac{dp}{dt} = \frac{dmv}{dt} = m.a$.

Caso a massa não seja constante em relação ao tempo tal identidade pode não valer

$$p = m(t).v(t) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m'(t)v(t) + m(t)v'(t) = m'(t)v(t) + m(t)a(t)$$

que será igual a $m(t)a(t) \Leftrightarrow m'(t)v(t) = 0$.

✍ **Propriedade 35** (Plano inclinado)**.** Uma massa m lançada com velocidade v_0 de um plano inclinado de inclinação θ e comprimento l, sem atrito, atinge a base do plano com velocidade v tal que

$$v^2 = v_0^2 + 2g(lsen(\theta)).$$

Demonstração. Decompomos a força peso na sua componente normal ao plano inclinado e F na direção ao longo do plano, não há resultante na direção da normal pois é cancelada pela força normal a resultante é apenas a força F que tem valor $F = mgsen(\theta) = m.a$ logo $a = gsen(\theta)$ aplicando na fórmula de Torriceli segue que $v^2 = v_0^2 + 2g(lsen(\theta))$.

Corolário 16. Como $sen(\theta) = \frac{h}{l}, lsen(\theta) = h$, então a velocidade final só depende da altura não dependendo da inclinação ou comprimento. As velocidades adquiridas por corpos descendo ao longo de planos de inclinações diferentes são iguais quando a altura desses planos são iguais.

1.6.3 Massa inercial(ou de repouso) e massa relativística

Definição 36 (Massa relativística)**.** Definimos a massa relativística m_r de um corpo como

$$m_r = \frac{E}{c^2},$$

onde E é sua energia e c é o valor da velocidade da luz .

Energia e momento dependem dos sistema de referência, então isto também se aplica a massa relativística, que pela definição acima é um tipo de energia, pois é energia dividido pela constante c^2, ela aumenta conforme a velocidade do corpo aumenta. Com isso diferentes observadores podem discordar do valor da massa relativística m_r do corpo .Por isso não usaremos aqui massa relativística como sinônimo de massa, a definição que usaremos de massa garante a propriedade de que ela não muda com a velocidade.

A massa relativística e a massa possuem valores similares a baixas velocidades, então são usualmente iguais em eventos do nosso dia-a-dia .

✍ **Propriedade 36.** Vale que

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

onde E é a energia , p é o momento, m a massa inercial do objeto e c é o valor da velocidade da luz, a massa m aqui também pode ser denotada por m_0 . Vale também que

$$v = \frac{pc^2}{E}.$$

Demonstração.

Propriedade 37 (Propriedade da massa inercial , energia e momento)**.** A massa inercial não depende do observador , por isso também pode ser chamada de massa invariante. Todos observadores concordam com a massa de um objeto, com essa definição .

1. Se um objeto possui velocidade $v = 0$ em relação a um observador , então vale que $E = mc^2$ e $p = 0$.

2. Se um objeto está se movendo, relativo a um observador , então o observador pode medir para o objeto que $E > mc^2$ e momento $p > 0$. O excesso de energia é resultante da presença de movimento-energia.

Demonstração.

1. De $p = mv$ temos $p = 0$ pois $v = 0$ logo $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ se resume em

   $$E^2 = (mc^2)^2 \Rightarrow E = mc^2$$

   pois ambas quantidades E e mc^2 são não-negativas .

2. Neste caso $v \neq 0$ então $p \neq 0$ e daí

   $$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 > (mc^2)^2 \Rightarrow E^2 > (mc^2)^2 \Rightarrow E > mc^2.$$

Corolário 17. Com nossa definição de massa (chamada de massa de repouso ou massa inercial) $E = mc^2$ vale apenas para um observador que não está se movendo com respeito ao objeto . A definição que adotamos de massa é independente do observador.

A adoção dessa definição pode garantir uma maior facilidade ao se tratar do conceito de massa, vejamos alguns outros corolários dessa definição .

☾ **Corolário 18.** 1. Fóton não possui massa e disso segue que sua velocidade é sempre igual a velocidade da luz, em geral isso valendo para qualquer partícula sem massa .

   De $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, para o fóton, segue que $E^2 = (pc)^2 \Rightarrow E = pc$ usando agora que $v = \frac{pc^2}{E}$ segue que $v = c$, isto é, o fóton, possui mesma velocidade que a da luz . Se fosse tomada a definição de massa relativística, então o Fóton possuiria tal, pois ele possui energia .

2.

3.

Não usaremos massa neste texto como massa relativística , caso formos tratar dessa última tentaremos deixar claro .

✍ **Propriedade 38.** Se uma partícula possui massa então sua velocidade é menor que a velocidade da Luz .

Demonstração. Temos que $v = \frac{pc^2}{E}$ e $E = \sqrt{(pc)^2 + \underbrace{(mc^2)^2}_{>0}} > \sqrt{(pc)^2} = pc$ logo $E > pc \Rightarrow \frac{1}{pc} > \frac{1}{E}$ multiplicando essa última desigualdade por pc^2 de ambos lados (supondo aqui $p \geq 0$), segue que

$$c = \frac{pc^2}{pc} > \frac{pc^2}{E} = v$$

portanto $c > v$ e a velocidade é menor que a velocidade da luz .

☞ **Exemplo 26.** Uma partícula chamada Neutrino possui massa, portanto sua velocidade é menor do que a velocidade da Luz.

✍ **Propriedade 39.** A massa de um corpo não se altera se sua energia ou velocidade se alteram .

Tentaremos evitar o termo massa relativística e usar massa sempre como significado de massa de repouso . Massa relativística seria apenas um tipo de energia da partícula renomeada.

1.6.4 Terceira Lei de Newton-Lei da ação e reação

✍ **Propriedade 40** (Lei da ação e reação)**.** Se um corpo A exerce uma força em um corpo B então o corpo B simultaneamente exerce uma força de mesma magnitude no corpo A, ambas as forças possuindo mesma direção porém sentidos opostos.

☞ **Exemplo 27.** Dois blocos A e B em forma de cubo se encontram apoiados num plano horizontal sem atrito , sendo A encostado em B . Com os blocos em repouso, aplica-se em A uma força constante $\vec{F}$ paralela ao plano de apoio, sabendo que as massas de A e B são , respectivamente m_A e m_B. Desconsiderando a resistência do ar, calcule:

1. O módulo da aceleração do sistema .

2. A intensidade da força de contato entre os blocos .

1. Temos que $F = (m_A + m_B)a$ logo $a = \dfrac{F}{m_A + m_B}$.

2. Sendo $\vec{F_{AB}}$ a força de A aplicada em B, temos que

$$F_{AB} = a.m_B \Rightarrow F_{AB} = \frac{F}{m_A + m_B}.m_b.$$

   F_{BA} possui a mesma intensidade pela lei de ação e reação .

☞ **Exemplo 28.** Dois blocos A e B em forma de cubo se encontram apoiados num plano horizontal sem atrito , sendo A e B interligados por um fio ideal . Com os blocos em repouso, aplica-se em A uma força constante $\vec{F}$ paralela ao plano de apoio, sabendo que as massas de A e B são , respectivamente m_A e m_B. Desconsiderando a resistência do ar, calcule:

1. O módulo da aceleração do sistema .

2. A intensidade da força de tração no fio .

1. Temos que $F = (m_A + m_B)a$ logo $a = \dfrac{F}{m_A + m_B}$. Como no exemplo anterior.

2. A tração no fio possui intensidade igual a força que acelera o bloco A,

$$T = m_A.a = m_A.\frac{F}{m_A + m_B}.$$

1.7 Aplicações das leis de Newton

1.7.1 Pêndulo cônico

Definição 37 (Pêndulo cônico)**.** O pêndulo cônico é um sistema que consiste em uma partícula de massa m que gira em movimento circular uniforme descrevendo um círculo de raio r suspensa por um fio de comprimento l preso a um ponto fixo O' de tal maneira que o fio descreve a superfície de um cone de ângulo de abertura θ com $sen(\theta) = \frac{r}{l}$.

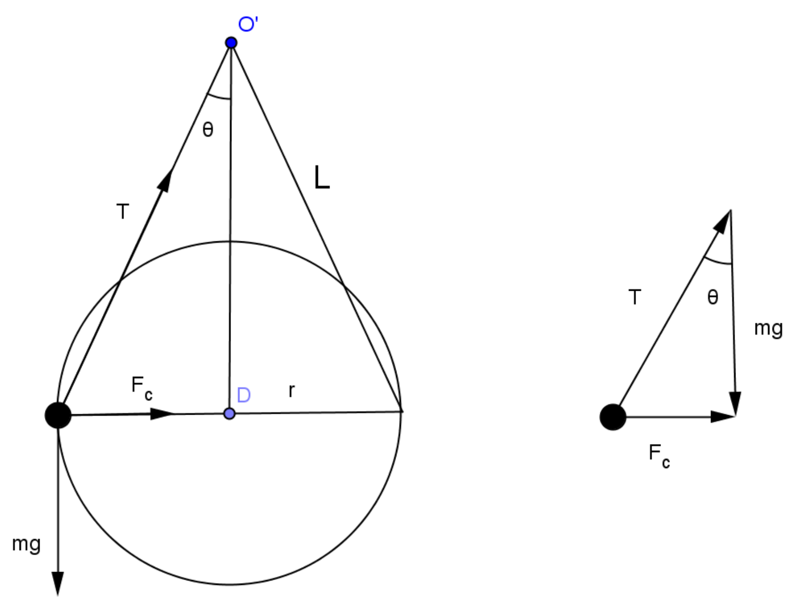

Figura 1.1: Pêndulo cônico

Propriedade 41. Em um pêndulo cônico temos

1. A velocidade linear é dada por

$$v = \sqrt{tg(\theta) r g}.$$

2. A tração no fio é dada por

$$T = \frac{mg}{cos(\theta)}.$$

Demonstração.

Sejam w a velocidade angular do movimento circular uniforme, g a aceleração da gravidade no local. Temos uma força sobre o fio T (tensão) e a força gravitacional $F = mg$, a força resultante , soma das duas forças, deve ser a força centrípeta

$$F = mg + T.$$

1. Formando um triângulo com o peso, tensão e centrípeta, temos $tg(\theta) = \frac{F}{mg} =$ (lembre que tangente é igual à $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$) mas a força centrípeta é dada por ma_{cp} onde $a_{cp} = w^2 r$ é a aceleração centrípeta , substituindo na equação anterior temos
$$= \frac{mw^2 r}{mg} = \frac{w^2 r}{g} =$$
usando agora que $v = wr$, tem-se
$$= \frac{w^2 r}{g} = \frac{w^2 r^2}{rg} = \frac{v^2}{rg} = tg(\theta) \Rightarrow v = \sqrt{tg(\theta) rg}.$$

2. Ainda no triângulo com o peso, tensão e centrípeta, temos que
$$cos(\theta) = \frac{mg}{T}$$
pois o cosseno é o cateto adjacente sobre hipotenusa do triângulo, logo $T = \frac{mg}{cos(\theta)}$.

1.7.2 Plano inclinado

Propriedade 42. Na figura abaixo representamos um bloco em repouso sobre um plano inclinado. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é μ . Supondo que o bloco esteja na iminência de movimento, vale que $tg(\alpha) = \mu$.

Demonstração. Tomamos o eixo x ao longo do plano inclinado. Decompomos a força peso em suas componentes F_x e F_y. Como não temos movimento sobre o eixo y, tem-se $|N| = |F_y|$ e a força resultante está ao longo do eixo x. O vetor p é parelalo ao segmento $\overline{CA}$ o vetor F_x é paralelo ao segmento CB (veja a figura). Portanto o ângulo entre p e F_x é β, o ângulo entre F_x e F_y é de $90°$ pois são perpendiculares, sendo o ângulo entre os vetores P e F_y v, temos no triângulo ABC a soma dos ângulos $\alpha + \beta + 90° = 180°$ e no triângulo com as forças $\beta + 90° + x = 180°$ portanto

$$\alpha + \beta + 90° = 180° = \beta + 90° + x$$

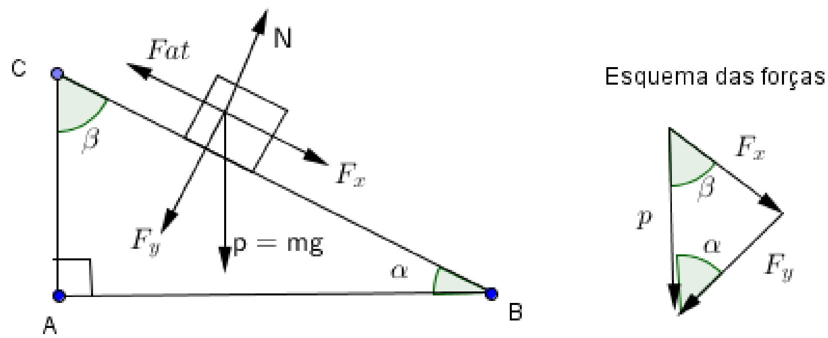

Figura 1.2: Plano inclinado

o que implica $x = \alpha$ como mostramos no esquema de forças da figura.

Usando no triângulo a relação $tg(\alpha) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{|F_x|}{|F_y|}$ tem-se

$$tg(\alpha) = \frac{|F_x|}{N}$$

temos ainda que a força resultante é dada por $F_r = F_x - Fat$ em repouso temos $F_r = 0$ portanto $|Fat| = \mu|N| = |F_x|$ e daí

$$tg(\alpha) = \frac{|F_x|}{N} = \frac{\mu|N|}{N} = \mu.$$

1.7.3 Força sobre blocos

☞ **Exemplo 29.** Suponha três blocos com massas m_1, m_2, m_3, colocados juntos ordenadamente conforme seus índices , uma força F_1 aplicada em m_1 no sentido de m_1 para m_3 e outra força F_2 aplicada em m_3 no sentido de m_3 para m_1. Sendo o local onde estão apoiados os blocos com coeficiente de atrito η, e $|F_1| > |F_2|$ calcule a aceleração do sistema

.

A força de atrito é dada por $FAT = \eta.N$ a normal no sistema considerando todos três blocos é de aproximadamente $(m_1 + m_2 + m_3).10 = N$, onde aproximamos $g = 10$, então a $FAT = (m_1 + m_2 + m_3).10.\eta$

A força resultante é

$$F_r = F_1 - F_2 - FAT = F_1 - F_2 - (m_1 + m_2 + m_3).10.\eta,$$

usando a lei de Newton, temos que $F_r = m_s.a$ onde $m_s = m_1 + m_2 + m_3$ é a massa do sistema

então temos

$$F_1 - F_2 - (m_1 + m_2 + m_3).10.\eta = (m_1 + m_2 + m_3).a \Rightarrow$$

$$a = \frac{F_1 - F_2}{(m_1 + m_2 + m_3)} - 10\eta.$$

Suponha por exemplo $F_1 = 100$ N , $F_2 = 50$ N , $m_1 + m_2 + m_3 = 20$, $\eta = \frac{1}{10}$, logo

$$a = \frac{50}{20} - 10\frac{1}{10} = 2,5 - 1 = 1,5 \; m/s^2.$$

1.8 Energia mecânica e conservação

✍ **Propriedade 43.** Não iremos definir o conceito de energia, mas iremos considerar algumas de suas propriedades.

- A energia pode se manifestar de diferentes formas como: energia térmica, elétrica, mecânica entre outras.
- A energia total do universo é constante.
- A energia é de natureza escalar e pode ser representada por um número, não sendo necessárias outras informações, como direção e sentido que caracterizam vetores em $R^n, n \leq 3$.

☞ **Exemplo 30.** Alguns tipos de energia

- Térmica
- Elétrica
- Luminosa
- Química

- Mecânica
- Atômica
- Potencial
- Potencial elástica
- Cinética

1.8.1 Unidades de energia

Definição 38 (Unidade de energia)**.** As unidades de energia são as mesmas que de trabalho e potência. A unidade de energia no SI é o joule simbolizado por J. Algumas outras unidades de energia são as seguintes

- Caloria simbolizada por cal, utilizada em fenômenos térmicos. Vale $1\ cal \cong 4,19\ J$.
- Quilowatt-hora, simbolizada por kWh, utilizada em eletrotécnica. Vale que $1\ kWh = 3,6.10^6\ J$.
- Elétron-volt , simbolizada por eV, utilizada nos estudos do átomo. Vale que $1\ eV = 1,602.10^{-19}\ J$.

1.8.2 Energia cinética

Definição 39 (Energia cinética)**.** Suponha fixado um referencial. Uma partícula de massa m e velocidade v (em módulo) possui energia cinética

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Lembrando que a massa deve ser dada em kg e a velocidade em m/s para que o resultado seja em Joules.

Corolário 19. A energia cinética é sempre positiva, pois $m \geq 0$ e $v^2 \geq 0$.

☞ **Exemplo 31.** Um carro ocupado pode pesar cerca de 1500 kg se ele se move com velocidade $100km/h \cong 28m/s$ então ele possui uma energia cinética de aproximadamente 588 000 joules. Se ele estiver à 60 $km/h \cong 17m/s$ então ele possui uma energia cinética de aproximadamente 216 750 joules.

Um ônibus grande lotado, pode pesar cerca de 18 toneladas, se ele se move à 60 $km/h \cong 17m/s$ então possui energia cinética aproxima de 2 601 000 joules.

1.8.3 Energia potencial

1.8.4 Energia potencial gravitacional

Definição 40 (Energia potencial gravitacional)**.** Na proximidade da Terra, fixado um plano horizontal de referência a partir do qual se mede a altura h de uma partícula de massa m e considerando a aceleração da gravidade como g, define-se a energia potência gravitacional de tal partícula como

$$E_p = mgh$$

1.8.5 Energia potencial elástica

Definição 41 (Energia potencial elástica)**.** Considere uma mola de constante elástica K, fixa numa parede e inicialmente livre de deformações, se ela sofre uma deformação de δx e possui energia potencial elástica

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2}.$$

1.8.6 Energia mecânica

Definição 42 (Energia mecânica)**.** Definimos a energia mecânica de um sistema como

$$E_m = E_c + E_p.$$

Para um sistema de n partículas sob a ação do campo gravitacional g a grandeza que se conserva é

$$E_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} + g m_k h_k$$

onde m_k, v_k e h_k são dados da k-ésima partícula.

1.8.7 Sistema mecânico conservativo

Definição 43 (Sistema mecânico conservativo)**.** Um sistema mecânico é dito ser conservativo se transforma exclusivamente energia potencial em cinética ou energia cinética em potencial.

Definição 44 (Forças conservativas)**.** São forças que realizam trabalho em sistemas mecânico conservativos.

☞ **Exemplo 32** (Exemplos de forças conservativas)**.** Forças como gravitacional, elástica e eletrostática são forças conservativas.

Definição 45 (Forças dissipativas)**.** São forças que transformam energia mecânica em outras formas de energia, não sendo cinética ou potencial.

☞ **Exemplo 33** (Exemplos de forças dissipativas)**.** Forças como de atrito, resistência viscosa em líquidos, resistência do ar são forças dissipativas.

1.8.8 Princípio de conservação de energia mecânica

✍ **Propriedade 44** (Princípio de conservação de energia mecânica)**.** A energia mecânica em sistemas conservativos é constante, valendo

$$E_t = E_m = E_c + E_p.$$

☞ **Exemplo 34.** Um automóvel de m kg está no alto de uma ladeira molhada pela chuva, a ladeira possui h metros de altura e l metros de comprimento, o automóvel perde o freio e desliza pela ladeira sem atrito.

- Como não temos atrito consideramos apenas apenas a força gravitacional e normal (normal não realiza trabalho) que são conservativas

- No topo da ladeira temos a energia mecânica $E_t = mgh$ o automóvel freiado não possui energia cinética apenas a energia potencial gravitacional .

- No pé da ladeira toda energia mecânica se transforma em energia cinética, pois no pé da ladeira a altura $h = 0$, temos então a energia mecânica igual a energia cinética, igualamos com o resultado anterior

$$E_t = \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow$$

cancelando a massa m, tem-se $\frac{v^2}{2} = gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, então encontramos a velocidade no pé da ladeira que é dada por

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Perceba que a velocidade não depende da massa, depende apenas da altura e da aceleração da gravidade local .

☞ **Exemplo 35.** Um garotinho esquimó desastrado escorrega do alto do seu iglu, um domo esférico de gelo de r metros de altura (vamos tomar como exemplo $r = 3$).

1. De que altura acima do solo ele cai?

2. A que distância da parede do iglu ele cai?

Representaremos o garotinho por um ponto material G, uma partícula .

1. Enquanto o ponto toca no iglu temos um movimento circular. A força de reação normal é sempre perpendicular a superfície de contato, no ponto, a gravidade aponta para o centro da Terra. Vamos calcular a força centripeta , que aponta para o centro do domo, para isso devemos decompor o peso na direção radial P_r , para deduzir

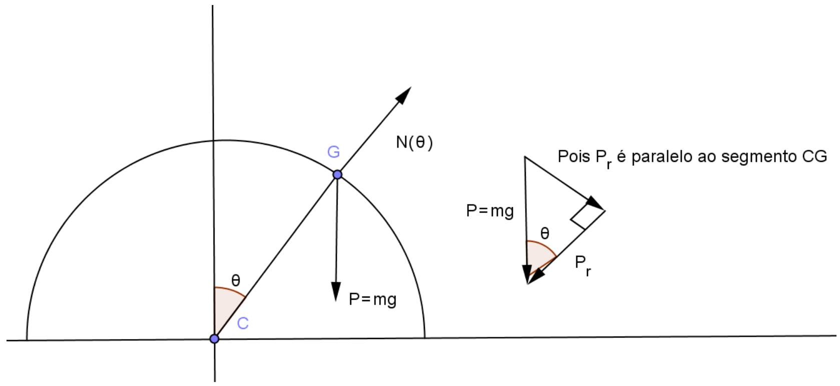

Figura 1.3:

a resultante centripeta . Sendo θ o ângulo que dá a posição da partícula, como na figura, temos

$$cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$cos(\theta) = \frac{P_r}{P} \Rightarrow P_r = mgcos(\theta)$$

onde P_r é a componente radial do peso . A diferença entre a componente radial do peso a da normal resulta na força centripeta, logo em módulo temos

$$mgcos(\theta) - N(\theta) = F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv(\theta)^2}{r} \Rightarrow N(\theta) = mgcos(\theta) - \frac{mv(\theta)^2}{r}.$$

Tomando o nível zero no solo, por conservação de energia mecânica tem-se que a energia potencial no topo do iglu é mgr, ela se conserva então em um ponto qualquer do iglu temos

$$mgr = mgrcos(\theta) + \frac{mv(\theta)^2}{2}$$

a expressão $rcos(\theta)$ aparece acima, pois é altura depois de percorrido um ângulo θ, basta fazer a projeção sobre o eixo y. Da identidade acima simplificando os termos, temos uma expressão para a velocidade

$$\frac{v(\theta)^2}{2} = gr(1 - cos(\theta)) \Rightarrow v(\theta) = \sqrt{2gr(1 - cos(\theta))}$$

agora usamos tal expressão para velocidade e substituímos na expressão encontrada para a normal

$$N(\theta) = mgcos(\theta) - \frac{mv(\theta)^2}{r} = mgcos(\theta) - \frac{2mgr(1 - cos(\theta))}{r} =$$

$$= mgcos(\theta) - 2mg + 2mgcos(\theta) = 3mgcos(\theta) - 2mg = N(\theta).$$

O partícula perde contato com o domo quando a força normal se anula $N(\theta) = 0$, usando a expressão anterior temos

$$3mgcos(\theta) - 2mg \Rightarrow cos(\theta) = \frac{2}{3}$$

com isso deduzimos também

$$sen(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

A altura é dada por $y_0 = rcos(\theta)$, substituíndo o valor $cos(\theta) = \frac{2}{3}$ tem-se

$$y = \frac{2r}{3}$$

em especial se $r = 3$ temos $y = 2$, estamos medindo a altura em metros. A distância da origem x_0 em que ele abandona o iglu é dada por $x_0 = rsen(\theta)$

$$x_0 = r\frac{\sqrt{5}}{3}$$

em especial se $r = 3$ temos $x_0 = \sqrt{5}$. Então encontramos a altura de que ele cai o iglu, 2 metros .

2. Ao abandonar o domo o garoto faz com velocidade

$$v_0 = \sqrt{2gr(1 - cos(\theta))} = \sqrt{\frac{2gr}{3}}$$

onde substituímos $cos(\theta) = \frac{2}{3}$ e simplificamos, tomando agora $r = 3$, ficamos com $v_0 = \sqrt{2g} \backsimeq 4,43m/s$.

A partir do momento em que o garoto cai, ele descreve uma trajetória parabólica. Temos movimento com componentes no eixo x e y, em x o movimento é uniforme

$$x = x_0 + v_0 cos(\theta) t$$

o fator $v_0 cos(\theta)$ aparece pois é a velocidade v_0 projetada sobre o eixo x, para a componente do movimento sobre o eixo y

$$y = y_0 - v_0 sen(\theta) t - \frac{gt^2}{2}$$

queremos $y = 0$, substituindo em y os valores encontrados para $y_0, v_0, sen(\theta)$ tem-se

$$0 = \frac{2r}{3} - \sqrt{\frac{2gr}{3}} \frac{\sqrt{5}}{3} t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} + \sqrt{\frac{10gr}{27}} t - \frac{2r}{3} = 0$$

que é uma equação de segundo grau em t, que possui raíz positiva

$$t = \frac{\sqrt{\frac{46gr}{27}} - \sqrt{\frac{10gr}{27}}}{g}$$

se tomamos $r = 3, g = 9,8$, temos $t \approxeq 0,38\ s$. Agora calculamos a distância da qual se cai do iglu

$$x = x_0 + v_0 cos(\theta) t \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} r}{3} + \sqrt{\frac{2gr}{3}} \frac{2}{3} t$$

no caso substituindo $g = 9,8$, $r = 3$ e $t = 0,38$ temos

$$x \approxeq 3,36\ m$$

em relação a parede do iglu a distância que o garoto atinge do solo é

$$d = x - r = 3,36 - 3 = 0,36\ m.$$

Então a distância que ele cai do iglu é de $0,36$ metros.

1.9 Quantidade de movimento e impulso

Definição 46 (Quantidade de movimento)**.** Dado um ponto p com massa m e velocidade $\vec{v}$, definimos a quantidade de movimento do ponto como

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

A quantidade de movimento também é chamada de momento linear , momentum ou momento . A unidade do momento no SI é $kg.m/s$.

Corolário 20.

- A quantidade de movimento e a velocidade tem a mesma direção e mesmo sentido, pois $m \geq 0$.

Propriedade 45. Em um sistema fechado (que não troca matéria com o meio externo nem possui forças agindo sobre ele) o momento total é constante.

Exemplo 36. Um monstro de 4 kg, nadando com velocidade de $1,0$ m/s, engole um outro de 1 kg, que estava em repouso, e continua nadando no mesmo sentido. Determine a velocidade, em m/s, do monstro maior, imediatamente após a ingestão.

Aplicamos conservação de momento, inicialmente temos em kg.m/s

$$p_0 = 4.1 = 4,$$

e depois

$$p_1 = 5.v,$$

nessa última equação somamos as massas. Temos então

$$4 = 5v \Rightarrow v = \frac{4}{5}\text{m/s}.$$

1.9.1 Impulso

Definição 47 (Impulso)**.** Definimos o impulso $\vec{I}$ em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ como o vetor

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt.$$

✍ **Propriedade 46.** O impulso é a igual a variação de quantidade de movimento, isto é, o impulso em $[t_1, t_2]$ é dado por $\vec{I} = P(\vec{t_2}) - P(\vec{t_1}) = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}$.

Demonstração. Vale $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$, substituindo na integral segue que

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt}dt = P(\vec{t_2}) - P(\vec{t_1}) = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}.$$

☾ **Corolário 21.** (Sem rigor analisar) Fixados t_1 e t_2, podemos considerar uma força média $\vec{F_m}$ tal que

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{F_m}(t_2 - t_1) = \vec{F_m}\Delta t.$$

Neste caso temos que

$$m\vec{v_2} - m\vec{v_1} = \vec{F_m}\Delta t.$$

☞ **Exemplo 37.** Um automóvel de m kg está no alto de uma ladeira molhada pela chuva, a ladeira possui h metros de altura e l metros de comprimento, o automóvel perde o freio e desliza pela ladeira sem atrito. Já sabemos que sua velocidade ao pé da ladeira é dada por $v = \sqrt{2gh}$.

No pé da ladeira o automóvel atinge uma parede que o faz parar em Δt segundos, qual a força média que o automóvel sofrerá?

- Vamos usar a identidade
$$mv_2 - mv_1 = F_m\Delta t$$
com $v_2 = 0$ pois o automóvel para por hipótese ao se chocar, $v_1 = v = \sqrt{2gh}$ então temos
$$-mv = F_m\Delta t \Rightarrow F_m = \frac{-mv}{\Delta t}.$$
$$F_m = \frac{-m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

- Se o tempo para o automóvel parar é multiplicado por um fator l então a nova força média será dada por
$$\frac{-mv}{l\Delta t} = \overbrace{\frac{-mv}{\Delta t}}^{F_m}\frac{1}{l} = \frac{F_m}{l}$$

a força média resultante é dividida por l.

Perceba que a velocidade não depende da massa, depende apenas da altura e da aceleração da gravidade local .

1.10 Colisões

✍ **Propriedade 47.** Sejam duas partículas (1) e (2) que se movem ao longo de uma reta e colidem elasticamente, como por exemplo uma colisão entre duas bolas de bilhar. Sejam m_1 e m_2 as massas e v_{1i}, v_{2i} as velocidades antes da colisão, com a velocidade relativa satisfazendo

$$v_{1i} - v_{2i} > 0,$$

estamos usando o índice i para denotar a velocidade na posição inicial . Supomos que as partículas estão sujeitas apenas às forças internas de interação que atuam durante a colisão, de forma que o momento total do sistema se conserva e a colisão seja elástica (energia cinética se conserva).

Nessas condições temos as velocidades finais v_{1f}, v_{2f} das partículas (1) e (2)

$$v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i} + (m_1 - m_2)v_{1i}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Demonstração. Temos por conservação de energia cinética que

$$m_1\frac{v_{1i}^2}{2} + m_2\frac{v_{2i}^2}{2} = m_1\frac{v_{1f}^2}{2} + m_2\frac{v_{2f}^2}{2}$$

para as energias cinéticas antes e depois da colisão , multiplicando as expressões acima por 2 temos

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

agora iremos usar o produto notável $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, a expressão acima implica após isolar os termos com coeficientes m_1 e m_2 no mesmo lado da equação que

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) =$$

agora usando o produto notável ficamos com

$$\underbrace{m_1(v_{1i} - v_{1f})}(v_{1i} + v_{1f}) = \underbrace{m_2(v_{2f} - v_{2i})}(v_{2f} + v_{2i}).$$

Usando a conservação de quantidade de movimento

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

novamente isolando os termos com coeficientes m_1 e m_2 no mesmo lado da equação segue que

$$\underbrace{m_1(v_{1i} - v_{1f})} = \underbrace{m_2(v_{2f} - m_2v_{2i})}$$

que são exatamente os termos marcados na outra equação, sendo ambos não nulo podemos os cancelar da equação anterior ficando com

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}.$$

Com isso temos $v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$, substituindo em $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$, tem-se

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1(v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}) + m_2v_{2f} = m_1v_{2f} + m_1v_{2i} - m_1v_{1i} + m_2v_{2f}$$

colocando em evidência os coeficientes v_{1i} e v_{2i} segue que

$$2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i} = (m_1 + m_2)v_{2f}$$

portanto

$$v_{2f} = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}.$$

Agora finalmente, usando que $v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$ tem-se $v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$, usando a expressão obtida para v_{2f} e substituindo temos

$$v_{1f} = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} + (v_{2i} - v_{1i}) = \frac{2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2} + (v_{2i} - v_{1i})\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} =$$

simplificando chegamos em

$$= \frac{2m_2v_{2i} + (m_1 - m_2)v_{1i}}{m_1 + m_2}.$$

Com isso provamos as duas identidades como queríamos demonstrar.

☞ **Exemplo 38.** Uma partícula de massa m desloca-se com velocidade v em direção a duas outras idênticas de massa m' , alinhadas com ela, inicialmente separadas e em repouso. As colisões entre as partículas sao todas elásticas.

1. Mostre que se $m \leq m'$ temos duas colisões e calcule a velocidade final das três partículas.

2. Mostre que, para $m > m'$, haverá três colisões, e calcule as velocidades finais das três partículas

3. Verifique que, no caso (1), o resultado para a primeira e a terceira partícula e o mesmo que se a partícula intermediaria não existisse.

1. Usamos os resultados que demonstramos na propriedade anterior com $v_{2i} = 0$, $m_1 = m$ e $m_2 = m'$, com isso temos as velocidades

$$v_{1f} = \frac{(m - m')v_{1i}}{m' + m}$$

$$v_{2f} = \frac{2mv_{1i}}{m' + m}$$

como $m \leq m' \Rightarrow m - m' \leq 0$, por isso a velocidade v_{1f} é nula ou possui sentido contrário ao da velocidade de v_{2f}, logo a primeira partícula não entre em choque novamente com as outras. A segunda partícula se choca com a terceira. Usamos novamente as equações que deduzimos anteriormente. Agora com $m_1 = m_2 = m'$, $v'_{2i} = 0$ e $v'_{1i} = \dfrac{2mv_{1i}}{m + m'}$ o valor que obtemos para a velocidade da segunda partícula. Com isso temos

$$v'_{1f} = \frac{2m_2 \overbrace{v'_{2i}}^{0} + \overbrace{(m_1 - m_2)}^{0} v'_{1i}}{m_1 + m_2} = 0$$

$$v'_{2f} = \frac{2m_1 v'_{1i} + \overbrace{(m_2 - m_1)v'_{2i}}^{0}}{m_1 + m_2} = \frac{2mv'_{1i}}{2m} = v'_{1i} = \frac{2mv_{1i}}{m + m'}$$

é igual a velocidade da partícula 2 ao término da colisão anterior, então com isso resolvemos também o caso (3) .

2. Se $m > m'$, usando resultado do item anterior para o primeiro choque $v_{1f} = \frac{(m-m')v_{1i}}{m+m'}$, $v_{2f} = \frac{2mv_{1i}}{m'+m}$, como $m - m' > 0$ as velocidades possuem mesmo sentido e direção, porém $v_{2f} > v_{1f}$ pois $2m > m - m'$. A partícula (2) se choca com a (3), pelo item anterior (3) fica com velocidade $\frac{2mv_{1i}}{m+m'} = v_3$ e (2) com velocidade nula, portanto (2) é alcançada pela partícula (1) e calculamos novamente as velocidades resultantes usando as expressões conhecidas, como um novo sistema com dados

$$v'_{1i} = \frac{(m-m')v_{1i}}{m+m'},\ v'_{2i} = 0$$

logo pelas expressões temos as resultantes v'_{1f} e v'_{2f} como velocidades finais de (1) e (2) respectivamente dadas por

$$v'_{1f} = \frac{m-m'}{m+m'}\overbrace{v'_{1i}} = \frac{m-m'}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}$$
$$v'_{2f} = \frac{2m}{m+m'}\overbrace{v'_{1i}} = \frac{2m}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}$$

agora as três partículas não voltam a se chocar pois

$$v_{3f} = \frac{2mv_{1i}}{m+m'} > v'_{2f} = \frac{2m}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}$$

pois cancelando os termos idênticos (positivos) de ambos lados da desigualdade ela equivale a $1 > \frac{m-m'}{m+m'} \Leftrightarrow m+m' > m-m'$ que realmente vale. Além disso também temos $v'_{2f} > v'_{1f}$ pois $2m > m - m'$ e daí

$$\overbrace{\frac{2m}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}}^{v'_{2f}} > \overbrace{\frac{m-m'}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}}^{v'_{1f}},$$

resumindo, a velocidade final da partícula (3) é maior que a velocidade final da partícula (2) que por sua vez é maior que a velocidade da partícula (1), em símbolos

$$v_{3f} > v'_{2f} > v'_{1f},$$

logo as partículas não voltam a se chocar e temos apenas 3 colisões.

As velocidades finais são

$$v_{3f} = \frac{2mv_{1i}}{m+m'}$$
$$v'_{2f} = \frac{2m}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}$$
$$v'_{1f} = \frac{m-m'}{m+m'}\frac{m-m'}{m+m'}v_{1i}$$

onde v_{1i} é a velocidade inicial da partícula (1).

1.11 Centro de massa

Definição 48 (Centro de massa)**.** Sejam n corpos pontuais , cada corpo k com posição (x_k, y_k, z_k) em R^3 e massa m_k, então o centro de massa dessa configuração de n partículas é (x, y, z) , onde

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k x_k}{M}$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k y_k}{M}$$

$$z = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k z_k}{M}$$

e $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

Para um corpo de estrutura contínua de densidade $\rho = \frac{dm}{dV}$ que depende do ponto as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$y_s = \frac{\int \rho.x_s dV}{\int \rho dV}$$

onde as coordenadas do corpo são $(x_s)_1^n$.

Corolário 22. Como $\rho = \frac{dm}{dV}$ então $\int \rho dV = M$ e $\int \rho.x_s dV = \int x_s dm$, portanto

$$y_s = \frac{\int x_s dm}{M}.$$

☞ **Exemplo 39.** 1. Calcule as coordenadas do centro de massa de uma placa de metal (disco) indicada na figura, um círculo de raio r de qual foi removido um círculo de raio s onde o centro dos círculos distam de l unidades . Considerando o disco de densidade uniforme d.

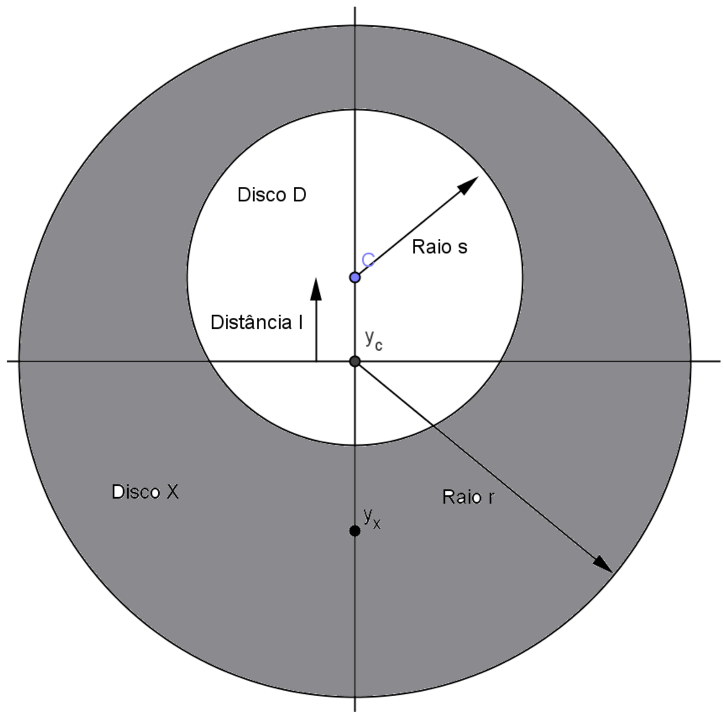

Figura 1.4: Discos

Por simetria temos que o centro de massa do disco com a parte retirada (que chamaremos de X) deve estar sobre o eixo y, tendo coordenada em y denotada por y_x e massa m_x . O disco completo sem parte removida possui centro no ponto $(0,0) = (x_c, y_c)$. Consideramos o disco D na parte retirada com a densidade d e massa m_D, ele possui centro de massa no centro geométrico que denotaremos por y_D, por equação do centro de massa temos que

$$\underbrace{y_c}_{=0} = \frac{m_D y_D + m_x y_x}{m_D + m_x} \Rightarrow 0 = m_D y_D + m_x y_x \Rightarrow y_x = -\frac{-m_D y_D}{m_x}.$$

Temos que a densidade é dada por $d = \dfrac{m}{V}$, onde m é massa e V é o volume, logo

$V.d = m$ o volume é dado por $V = A.c$ onde c é a espessura do disco , portanto $m_D = A_D.c.d$ e $m_x = A_x.c.d$ pois possuem a mesma densidade d logo

$$\frac{m_D}{m_x} = \frac{A_D.c.d}{A_x.c.d} = \frac{A_D}{A_x}$$

calculamos agora A_x, temos que sua área é igual a área do disco completo πr^2 subtraído da área do disco D, que é πs^2 logo

$$A_x = \pi r^2 - \pi s^2 = \pi(r^2 - s^2)$$

e $A_D = \pi s^2$

portanto

$$\frac{m_D}{m_x} = \frac{\pi s^2}{\pi(r^2 - s^2)} = \frac{s^2}{(r^2 - s^2)}$$

substituindo todas expressões temos

$$y_x = -\frac{s^2}{(r^2 - s^2)} = \frac{s^2}{(s^2 - r^2)} y_D$$

como a separação entre os centro do disco completo $(0, 0)$ e do disco D é de l, temos $y_D = l$

por isso tem-se

$$y_x = \frac{s^2 l}{(s^2 - r^2)}.$$

2. Suponha que seja colocado no lugar do espaço subtraído D um disco de material com densidade constante ρ, qual é o centro de massa do sistema resultante?

   O disco D agora pode ser considerado como se sua massa estivesse concentrada em seu centro, sua densidade é

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi s^2 c} \Rightarrow \rho \pi s^2 c = m.$$

o novo centro de massa terá coordenada em y dada por

$$y = \frac{my_D + m_x y_x}{m + m_x}$$

onde

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi s^2 c} \Rightarrow m = \rho \pi s^2 c,$$

$$\frac{m_x}{d} = V \Rightarrow m_x = Vd = (\pi)(r^2 - s^2)cd$$

logo temos os dados

$$m = \rho \pi s^2 c$$

$$y_D = l$$

$$m_x = (\pi)(r^2 - s^2)cd$$

$$y_x = \frac{s^2 l}{(s^2 - r^2)}$$

substituindo os valores na expressão $y = \dfrac{my_D + m_x y_x}{m + m_x}$, temos

$$y = \frac{\rho \pi s^2 cl + (\pi)(r^2 - s^2)cd \frac{s^2 l}{(s^2 - r^2)}}{\rho \pi s^2 c + (\pi)(r^2 - s^2)cd} =$$

simplificando os termos em comum tem-se

$$y = \frac{\rho s^2 l - s^2 ld}{\rho s^2 + (r^2 - s^2)d} = \frac{(\rho - d)(s^2 l)}{\rho s^2 + (r^2 - s^2)d}.$$

$$y = \frac{(\rho - d)(s^2 l)}{\rho s^2 + (r^2 - s^2)d}.$$

Lembre que as coordenadas em x (abscissa) do centro de massa no problema 1) e 2) são ambas $x = 0$ por simetria.

1.12 Gravitação

Definição 49 (Gravitação)**.** Gravitação é o estudo das forças de atração entre massas e dos movimentos de corpos submetidos a essas forças.

A gravitação é a mais fraca de todas as interações conhecidas, porém é considerada a primeira a ser cuidadosamente estudada . Das interações fraca, forte, gravitacional e eletromagnética (que não serão tratadas aqui). Tomada a interação forte como valendo uma unidade, a eletromagnética é da ordem de 10^{-2}, fraca da ordem de 10^{-5} e gravitacional da ordem de 10^{-38}.

- A gravidade é uma força de longo alcance, não havendo a princípio limitação entre a distância entre os corpos .
- É uma força somente atrativa. Não existe repulsão gravitacional.
- É por causa dessas características que a gravidade domina várias áreas de estudo na astronomia. É a ação da força gravitacional que determina as órbitas dos planetas, estrelas e galáxias, assim como os ciclos de vida das estrelas e a evolução do próprio Universo,

1.13 Leis de Kepler

Nesta seção apresentamos as Leis de Kepler[2] para o movimento planetário, Kepler teria descoberto tais leis a partir das medidas astronômicas de Tycho Brahe $(1546 - 1601)$.

1.13.1 1° lei de Kepler-Lei das órbitas

Propriedade 48 (1° lei de Kepler-Lei das órbitas)**.** As órbitas descritas pelos planetas em redor do Sol são elipses , com o sol num dos focos.

Definição 50 (Periélio e Afélio)**.** O ponto em que a Terra está mais próxima do Sol é chamada de Periélio e o ponto mais distante é chamado de Afélio.

Denotaremos a distância no Afélio como d_{max} e no Periélio como d_{min}.

[2]Johannes Kepler $(1571 - 1630)$

Definição 51 (Raio médio da órbita)**.** Definimos o raio médio da órbita R como

$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}.$$

Corolário 23. O raio médio da órbita é o semi-eixo maior da elipse.

Exemplo 40. Se a é o semi-eixo maior de uma elipse e c a semi-distância focal a razão $e = \frac{c}{a}$ é chamada de excentricidade da elipse. Para $e = 0$ a elipse degenera em um círculo, quanto maior o valor de e, mais achatada e distante de um círculo uma elipse está, com valores pequenos de e a elipse se aproxima mais da forma de um círculo.

Planeta	e
Terra	0,017
Vênus	0,007

As órbitas de Vênus e da Terra podem ser bem aproximadas por órbitas circulares, pois a excentricidade delas é muito pequena e daí tais órbitas não se afastam muito da forma de um círculo , tal aproximação não se distancia muito do que posto na primeira lei de Kepler.

2° lei de Kepler-Lei das áreas

Propriedade 49 (2° lei de Kepler)**.** As áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são diretamente proporcionais aos respectivos intervalos de tempo gastos .

Sendo A a área e Δt o intervalo de tempo, podemos escrever

$$A = v_a \Delta t.$$

Onde $v_a > 0$ é uma constante para cada planeta.

Definição 52 (Velocidade areolar)**.** O fator v_a na lei das áreas

$$A = v_a \Delta t$$

é chamado de velocidade areolar.

Observação 3. A velocidade areolar para um planeta é constante , porém o movimento de um planeta ao longo de sua órbita pode não ser uniforme .

Propriedade 50. O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.

Demonstração. Simbolicamente, temos que o enunciado significa que se $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$ então $A_1 = A_2$. Porém substituindo tais valores na expressão $A = v_a \Delta t$.

Temos

$$A_1 = v_a \Delta t$$

$$A_2 = v_a \Delta t$$

logo $A_1 = A_2$ as áreas percorridas são iguais .

Definição 53 (Periélio e Afélio)**.** Seja um sistema compostos de planetas e uma estrela. O ponto em que um planeta está mais próxima da estrela é chamada de Periélio e o ponto mais distante é chamado de Afélio.

Propriedade 51. No periélio, o planeta possui velocidade de translação com intensidade máxima, enquanto no afélio ele tem velocidade de translação com intensidade mínima.

Demonstração.

3° lei de Kepler- Lei dos períodos

Propriedade 52 (3° lei de Kepler- Lei dos períodos)**.** Sejam T_1 e T_2 períodos de revolução de dois planetas cujas órbitas possuem raios médios R_1 e R_2 respectivamente, então vale que

$$(\frac{T_1}{T_2})^2 = (\frac{R_1}{R_2})^3$$

Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias ao sol .

Tal relação vale na verdade para movimentos em órbitas circulares, porém se a excentricidade da elipse for pequena tal relação vale aproximadamente .

✍ **Propriedade 53.** Para qualquer planeta do Sistema Solar vale que

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

onde K_p é uma constante.

Demonstração. Vale que

$$(\frac{T_1}{T_2})^2 = (\frac{R_1}{R_2})^3$$

logo

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

que e constante para cada planeta .

Definição 54 (Constante de Kepler)**.** A constante K_p da relação

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

é chamada de constante de Kepler.

☞ **Exemplo 41.** Suponha que a Terra e Vênus possuem raios médios de distância ao Sol de $R_2 = 1,510^8 km$ e $R_1 = 1,110^8 km$ respectivamente, o período de revolução da Terra é de 1 ano (aproximaremos para 365 dias.) Então aplicando a Lei de Kepler podemos deduzir uma aproximação do período de revolução de Vênus

$$T_1^2 = (\frac{1,1}{1,5})^3$$

que implica um valor aproximado de 219 dias (dependendo do número de casas decimais usadas pode-se chegar em outro valor, no caso usamos duas casas decimais em cada operação), sendo que um valor mais próximo do período da órbita é $224,65$ dias, o que não difere muito.

Observação 4 (Universalidade das leis de Kepler)**.** As propriedades apresentadas aqui, chamadas de Leis de Kepler são tidas como universais, valendo para o Sistema Solar

, qualquer outro sistema planetário no Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores, por exemplo ela também vale para planetas e seus satélites naturais ou artificiais.

☞ **Exemplo 42.** Dois corpos A e B em órbitas circulares ao redor de C, possuem raio de órbita $R_a > R_b$. Em que intervalo de valores se situa a distância entre os corpos? .

- A distância é mínima quando ambos A, B e C estão alinhados e B está entre C e A, neste caso a distância entre B e A mede $R_a - R_b$.

  Suponha que não seja nas condições acima, formamos um triângulo CAA' ,onde A' é outro ponto na órbita de A. CAA' é isósceles, ângulos iguais $\widehat{A}' = \widehat{A} = \alpha$. Traçamos BA' No triângulo $BA'A$ o ângulo $B\widehat{A'}A$ é menor que α logo seu lado oposto BA possui comprimento menor que BA' pois a ângulos maiores se opoem lados maiores.

- A distância é máxima quando, C está entre B e A, pontos alinhados neste caso a distância é $R_a + R_b$. Consideramos neste caso um triângulo $AA'C$ ele é isósceles , traçamos $A'B$ e temos o triângulo $AA'B$ com ângulo $A\widehat{A'}B = \beta$ maior que $\alpha = A\widehat{A'}B$, logo AB o lado oposto a β possui medida maior que $A'B$ lado oposto a α no triângulo $AA'B$.

- Podemos deduzir que esses são realmentes pontos de máximo e mínimo usando coordenadas . Tomamos $A = (r_b cos(\theta), r_b sen(\theta))$, $B = (r_a, 0)$.

  $$d(A,B)^2 = (r_b cos(\theta) - r_a)^2 + r_b^2 sen^2(\theta) = r_b^2 cos^2(\theta) - 2r_b r_a cos(\theta) + r_a^2 + r_b^2 sen^2(\theta) = r_b^2 + r_a^2 - 2r_b r_a cos(\theta$$

  derivando temos $f'(\theta) = 2r_b r_a sen(\theta)$ que se anula em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

1.14 Lei de Newton da atração das massas

✍ **Propriedade 54** (Lei de gravitação de Newton)**.** Sejam corpos A e B cujos centros de massa estão separados por uma distância r_{AB}, então :

- A e B possuem quantidades positivas m_A, m_B associadas, chamadas massas gravitacionais

- Existem forças F_{AB} e F_{BA}, que satisfazem

$$F_{AB} = -F_{BA},$$

  F_{AB} sendo a força gravitacional aplicada pelo corpo A no corpo B .

- tais forças possuindo intensidade

$$F = \frac{Gm_Am_B}{r^2},$$

  onde G é denominada constante da gravitação universal, sendo de valor aproximado de

$$G = 6,6710^{-11}Nm^2/kg^2.$$

Isaac Newton teria deduzido a equação $F = \dfrac{Gm_Am_B}{r^2}$, usando as leis de Kepler, para força que deveria existir entre dois planetas e depois generalizado para duas massas quaisquer .

Vamos tentar mostrar uma dedução informal da lei da gravitação para um planeta de massa m em um movimento circular uniforme ao redor de uma estrela de massa M usando as Leis de Kepler .

Supondo o módulo da força F_1 resultante no planeta , temos

$$F_1 = m.a_{cp} = m\frac{v^2}{r}$$

onde r é a distância entre o centro do planeta e da estrela . A velocidade possui módulo constante , em uma volta completa, sendo T o período , temos o comprimento da circunferência dado por $2\pi r$, logo

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

agora usamos a lei de Kepler $T^2 = kr^3$ onde k é constante, logo substituindo na equação da força, tem-se

$$F_1 = m\frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\frac{4\pi^2 r}{kr^3} = m\frac{4\pi^2}{kr^2} = m\frac{k_1}{r^2}$$

logo a interação gravitacional deve ser proporcional ao inverso do quadrado da distância. Supondo simetria o módulo da força sobre a estrela poderia ser

$$F_2 = M\frac{k_2}{r^2},$$

para constantes k_1 e k_2 , logo

$$F = \frac{M.mG}{r^2}$$

para alguma constante G . Newton então teria generalizado tal resultado, o estendendo para duas massas quaisquer .

1.14.1 Massa gravitacional e massa inercial

Definição 55 (Massa gravitacional)**.** O valor de massa que aparece na Lei da gravitação de Newton, que enunciamos acima é chamada de massa gravitacional , a princípio não saberíamos se o valor da massa gravitacional de um corpo é igual ao valor de massa inercial que aparece na definição de quantidade de movimento $p = mv$.

Observação 5. Supondo um corpo possuindo massa inercial m_i e massa gravitacional m_g então nas proximidades de um corpo maior de massa gravitacional M, temos g uma aceleração da gravidade aproximadamente constante

$$F = m_i g = \frac{Mm_g G}{r^2} \Rightarrow \frac{m_i}{m_g} = \frac{GM}{gr^2} = K \text{ uma constante}$$

Propriedade 55. Em sistemas ligados gravitacionalmente a força resultante gravitacional aponta para o centro de massa do sistema , em sistemas planetários, tal centro de massa pode ser muito próximo do centro da estrela ou remanescente estelar, mesmo que a órbita seja elíptica , o centro de massa poderia não estar no centro da elipse e sim mais próximo do centro da estrela . O sol, maior corpo do sistema solar, coincide praticamente, com o centro de massa do sistema solar e move-se muito mais lentamente do que qualquer planeta. Por isso o Sol pode ser tomado como centro de referência, pois é praticamente um referencial inercial.

☞ **Exemplo 43** (Relação entre aceleração da gravidade e massa da Terra). Considere uma partícula de massa m sobre a superfície da Terra , sendo portanto a distância entre a partícula ao centro da Terra medindo r, o raio da Terra , M a massa da Terra, tem-se que

$$F = \frac{GmM}{r^2} = mg \Rightarrow g = \frac{MG}{r^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G}.$$

Substituindo valores $g = 9,8m/s^2$, $r = 6,37.10^6$ e $G = 6,67.10^{-11}m^3/(kg.s^2)$ podemos deduzir que a massa da Terra é aproximadamente $5,98.10^{24}kg$.

☞ **Exemplo 44** (Comparar duas massas por meio de interação com uma outra). Sejam dois corpo com massas m e m' que desejamos comparar , colocados a uma mesma distância r de um outro corpo de massa conhecida M, como por exemplo, massa da Terra , as forças gravitacionais em questão são

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad F' = \frac{GMm'}{r^2} \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}.$$

Se tivermos modo de comprar forças tal relação acima possibilita um modo de comparar massas.

1.14.2 Estudo de movimento de satélites

✍ **Propriedade 56** (Velocidade orbital de um satélite em movimento circular). Considere um satélite de massa m gravitando em órbita circular em torno de um planeta de massa M. Sendo r o raio da órbita e G a constante da gravidade, então

- A velocidade orbital é constante o movimento é circular uniforme e vale

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

$$v = \sqrt{gr}.$$

Demonstração.

- A força resultante que o satélite recebe do planeta é a força resultante centrípeta no satélite $F = F_{cp}$
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$
porém $F_{cp} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}$, portanto de $F = F_{cp}$, segue
$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow \frac{GM}{r} = v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$
Substituindo $g = \frac{GM}{r^2}$, isto é, $gr = \frac{GM}{r}$ temos a outra expressão .

Corolário 24 (Velocidade angular orbital de um satélite em movimento circular)**.** A velocidade angular w de um corpo em órbita circular de raio r em torno de um outro corpo de massa M vale

$$w = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

pois $v = wr \Rightarrow \frac{v}{r} = w$ daí , usando a expressão

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = w.$$

Concluímos que o valor de w independe de m e satélites diferentes percorrendo uma mesma órbita circular não colidem entre si, já que suas velocidades angulares são iguais .

Propriedade 57 (Razão de velocidade angular de satélites em movimento circular)**.** Seja um corpo de massa M possuindo dois satélites em movimento circular uniforme ao redor dele com raios r_i e r_e então temos a seguinte relação para suas velocidades angulares

$$\frac{w_i^2}{w_e^2} = \frac{r_e^3}{r_i^3}.$$

Demonstração.

$$w_i = \sqrt{\frac{GM}{r_i^3}}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{GM}{r_e^3}}$$

implicam

$$w_i^2 r_i^3 = GM = w_e^2 r_e^3$$

de onde a igualdade segue .

✍ **Propriedade 58** (Período de revolução de um satélite em movimento circular)**.** O período de revolução T de um satélite ao redor de um corpo de massa M e distância do centro de gravidade do corpo até o centro do satélite r é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

ʬ **Demonstração**. Como o satélite realiza movimento circular uniforme, temos que a velocidade é igual a razão do distância percorrida em uma volta, que é $2\pi r$ dividido pelo período T

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

usamos agora que $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

O que implica

$$T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

como queríamos demonstrar.

☾ **Corolário 25** (Período independe da massa do satelite)**.** O período de orbitagem independe da massa do satélite , pois a expressão $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$, não depende dela .

☾ **Corolário 26** (Massa de um planeta em função do período e distância)**.** De $T = \frac{2\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ elevando ao quadrado, temos

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM} \Rightarrow M = 4\pi^2\frac{r^3}{GT^2}.$$

Podemos usar esse resultado para calcular novamente a massa da Terra, usando dados relativos a Lua, $r = 3,84.10^8\ m$ e $P = 2,36.10^6\ s$. Que garante a massa da Terra ser aproximadamente $5,98.10^{24}$. Isso implica certa consistência na Teoria .

✍ **Propriedade 59** (Força em função da massa, distância e período)**.** Dados T, m e r para um corpo de massa m com movimento circular ao redor de outro de massa M, é possível encontrar a força $F = \frac{GmM}{r^2}$ em função de T, m e r . A força é dada por

$$F = \frac{r4\pi^2 M}{T^2}.$$

Demonstração.

Temos que

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow GM = \frac{r^3}{T^2}4\pi^2 \Rightarrow \frac{r4\pi^2 m}{T^2} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Portanto

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{r4\pi^2 m}{T^2}.$$

✍ **Propriedade 60** (Altura do satélite em função do período)**.** A altura h de um satélite em movimento circular ao redor de um corpo de massa M é dada por

$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

Demonstração.

A força de atração resultante exercida pela Terra sobre o satélite desempenha a função de resultante centrípeta no movimento circular e uniforme descrito por ele. $F = F_{cp}$

$$\frac{GMm}{h^2} = mw^2 h$$

onde usamos a expressão da aceleração centrípeta $\alpha = \frac{v^2}{r}$ e $v = wr$. Temos também que $w = \frac{2\pi}{T}$, substituindo tais expressões temos

$$\frac{GM}{h^2} = h\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2}h^3$$

de onde segue que

$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

como queríamos demonstrar.

☞ **Exemplo 45.** Supondo que a atração gravitacional da nossa galáxia, de massa total M_g e raio R_g , atua como se toda a massa estivesse concentrada no seu centro, e comparando a órbita circular de uma estrela situada na borda da galáxia, de velocidade v_g , com a órbita da Terra em torno do Sol, de raio médio R , mostre que

$$\frac{M_g}{M_s} = \frac{R_g v_g 2}{R v^2}$$

onde M_s é a massa do Sol e v é a velocidade orbital da Terra em torno do Sol.

A velocidade orbital da Terra satisfaz pela propriedade anterior

$$Rv^2 = GM_s$$

onde ignoramos a massa de outros corpos, que não sejam o Sol ou a Terra , a velocidade de uma estrela na borda da Galáxia é dada por relação similar

$$R_g v^2 = GM_g$$

dividindo ambas expressões tem-se

$$\frac{M_g}{M_s} = \frac{R_g v_g 2}{R v^2}.$$

✍ **Propriedade 61** (Terceira lei de Kepler)**.** Vale a terceira lei de Kepler

$$\frac{r^3}{T^2} = K_p$$

e a constante K_p vale $\dfrac{GM}{4\pi^2}$.

Demonstração. Partindo da identidade $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$, segue

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

✍ **Propriedade 62** (Velocidade areolar)**.** A velocidade areolar vale

$$v_a = \frac{1}{2}\sqrt{GMr}.$$

Demonstração. Temos que

$$A = v_a \Delta t \Rightarrow v_a = \frac{A}{\Delta t}$$

em uma volta completa, que vamos aproximar par um círculo, temos que a área é de πr^2 e a variação de tempo é o período $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ portanto

$$v_a = \frac{\pi r^2}{2\pi}\sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{GMr}.$$

Definição 56 (Satélites estacionários)**.** Um satélite estacionário de um corpo A em rotação em torno do seu eixo, são corpos que possuem órbitas circulares em torno de A que se apresentam parados em relação a um referencial na superfície do corpo A que acompanha seu movimento, na mesma taxa de rotação .

Exemplo 46 (Satélites estacionários da Terra)**.** Satélites estacionários da Terra possuem órbitas aproximadamente circulares contidas no plano equatorial, seu período de revolução sendo proximo de 24 horas, igual ao período de rotação do planeta, e de suas órbitas são de aproximadamente $6,7$ raios terrestres .

1.14.3 Velocidade de escape

Definição 57 (Velocidade de escape)**.** Velocidade de escape é a velocidade mínima necessária para que um corpo se livre do campo gravitacional de um outro corpo B a partir de uma certa distância r do centro de gravidade de B.

Propriedade 63. A velocidade de escape vale

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

onde r é a distância até o centro do corpo B , M a massa de B e G a constante da gravidade .

Demonstração. Como queremos a velocidade mínima, ela será nula no infinito, logo temos energia cinética nula no infinito, a energia potencial gravitacional também será nula no infinito pois $E_p = -\frac{GMm}{r}$ tende a zero quando $r \to \infty$, usamos então conservação de energia mecânica, sendo ela nula no infinito por ser soma de energia cinética e potencial $E_m = E_p + E_c$, igualamos tal valor a energia a distância r do centro do planeta, de onde concluímos que

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

☾ **Corolário 27.**

- O valor da velocidade de escape não depende da massa do corpo que está sendo lançado mas apenas da massa do corpo central e também não depende do ângulo de lançamento.
- Quanto mais afastado o corpo estiver da superfície do corpo (maior r), menor será o valor da velocidade de escape.
- A expressão $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ sugere que se existirem corpos celestes com massas tão grandes e raios tão pequenos de maneira que a velocidade de escape neles seja maior que a velocidade da luz c, a luz não escaparia à atração gravitacional deles. Tais corpos são chamados de Buracos negros.

Vale que a velocidade de escape é

$$v = \sqrt{2gr}$$

pois basta usar $g = \frac{GM}{r^2}$ logo $gr = \frac{GM}{r}$, substituído em $\sqrt{\frac{2GM}{r}}$ segue o resultado .

1.15 Campo gravitacional

Definição 58 (Campo)**.** Campo é uma propriedade física que se estende por uma região do espaço , sendo a propriedade descrita nessa região do espaço por uma função da posição e do tempo .

Em termos matemáticos, um campo escalar é uma função $f : R^n \to R$ e um campo vetorial uma função $f : R^n \to R^m$ onde $m > 1$.

✍ **Propriedade 64.** Para cada interação uma partícula produz em torno de si um campo correpondente . Toda interação pode ser descrita por meio de campos .

☞ **Exemplo 47.** Porém nem todo campo é gerado por uma interação, por exemplo podemos tomar um campo de velocidades da água em um rio , ou um campo de temperatura em uma sala.

✍ **Propriedade 65.** Toda massa cria em torno de si um campo de forças de natureza gravitacional .

Definição 59 (Campo gravitacional)**.** O campo de forças de natureza gravitacional criado por uma certa quantidade de massa é chamado de campo gravitacional .

Definição 60 (Campo atrativo)**.** Um campo é atrativo se as partículas submetidas exclusivamente aos seus efeitos são puxadas para junto do ponto onde o campo é gerado.

✍ **Propriedade 66.** O campo gravitacional é atrativo .

Definição 61 (Linhas de força)**.** Linhas de força de um campo são linhas que representam, em cada ponto, a orientação da força que atua numa partícula, chamada corpo de prova, que é submetida apenas aos efeitos desse campo .

Trataremos aqui apenas de linhas de força geradas pelo campo gravitacional .

✍ **Propriedade 67.** Se um corpo massivo for esférico e homogêneo, suas linhas de força terão a direção do raio da esfera em cada ponto , sendo orientadas para o centro do corpo .

1.16 Energia potencial gravitacional

✍ **Propriedade 68.**

Demonstração.

1.17 Agradecimentos

- Agradecemos a Gabriel Lefundes por ajuda apontando erros no texto, obrigado!
-
-