Конспекти з геометрії 7 клас

Створено учнями 10-Г класу
КЗ"Науковий ліцей імені Анатолія Лигуна" КМР
Для повторення вивченого абітурієнтами в 7-ому класі матеріалу з геометрії.

Зміст

Точки та прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 11, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 12, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки *A* й точки *B*.

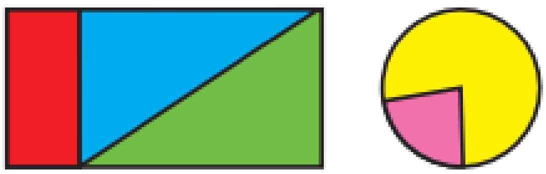


Рис. 11

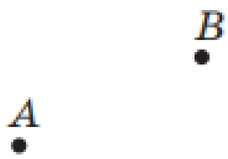


Рис. 12

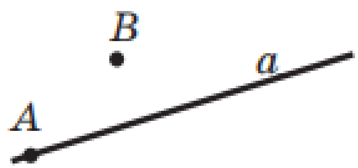


Рис. 13

На рисунку 13 зображено пряму *a* та дві точки *A* і *B*. Говорять, що *точка A належить прямій a*, або *точка A лежить на прямій a*, або *пряма a проходить через точку A*, і, відповідно, *точка B не належить прямій a*, або *точка B не лежить на прямій a*, або *пряма a не проходить через точку B*.

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Означення. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

На рисунку 15 зображено прямі *a* і *b*, які перетинаються в точці *O*.

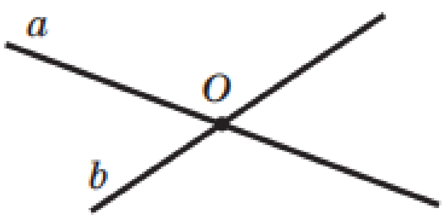


Рис. 15

Теорема. **Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.**

П Р И К Л А Д : Нехай прямі *a* і *b*, що перетинаються, крім спільної точки *A*, мають ще одну спільну точку *B* (рис. 16). Тоді через дві точки *A* і *B* проходять дві прямі. А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих *a* і *b* неправильне.

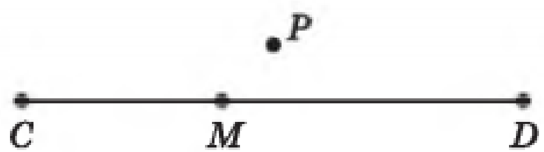
Рис. 16

Відрізок і його довжина

Означення. ***Відрізком*** **називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями від різка.***

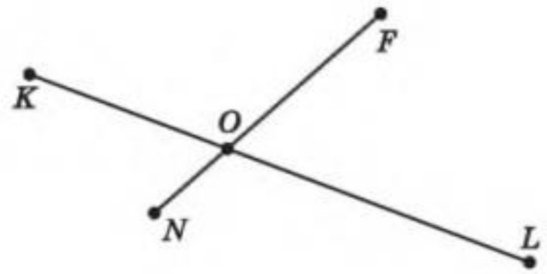
На малюнку 16 зображено відрізок *AB* (його також можна назвати відрізком БА); точки А і Б — його кінці. На малюнку 17 точка *M* належить відрізку СІ) (її ще називають *внутрішньою точкою* відрізка) , а точка *P* йому не належить.

Мал. 16



Мал. 17

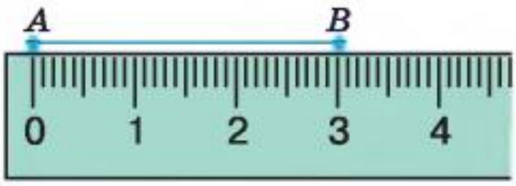
На малюнку 18 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.



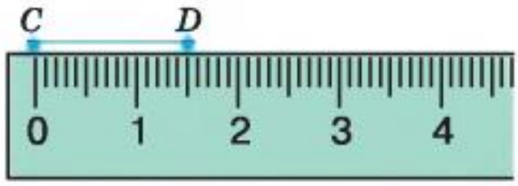
Мал. 18

На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього необхідно мати *одиничний відрізок* (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками.



Мал. 19



Мал. 20

Мал. 21

Мал. 22

Означення. **Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.**

Означення. **Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.**

Основна властивість довжини відрізка. **Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB** (рис. 27), тобто

$$AB = AC + CB.$$

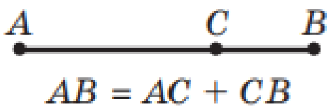


Рис. 27

Рис. 28

Рис. 29

Означення. Відстанню між точками *A* і *B* називають довжину відрізка *AB*. Якщо точки *A* і *B* збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Означення. Серединою відрізка *AB* називають таку його точку *C*, що *AC* = *CB*.

П Р И К Л А Д : Точка *K* належить відрізку *AB,* довжина якого 15 см. Знайдіть довжини відрізків *A K* і *K B,* якщо *A K* більший за *K B* на 3 см.

Розв'язанн. Розглянемо малюнок 27, на якому точка *K* належить відрізку *A B*; *AB* = 15 см.

Мал. 27

Нехай *K B* = *x* см, тоді *A K* = (x + 3) см. Оскільки *A K* + *K B* = *AB* (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв’яжемо отримане рівняння: $2x + 3 = 15$; $x = 6$ (см).

Отже, *K B* = 6 см, *A K* = 6 + 3 = 9 (см).

Відповідь. *K B* = 6 см, *A K* = 9 см.

Промінь. Кут. Вимірювання кутів

Проведемо пряму *AB* і позначимо на ній довільну точку *O*. Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 43 різними кольорами.

Кожну із цих частин разом з точкою *O* називають **променем** або **півпрямою**.

Точку *O* називають **початком** променя. Кожний із променів, які зображено на рисунку 43, складається з точки *O* та всіх точок прямої *AB*, що *лежать по один бік від точки O*.

Промені *OA* та *OB* (рис. 43) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

Рис. 43

Означення. Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Наприклад, промені *BC* і *BA* — доповняльні (рис. 45). Їхнім об'єднанням є пряма *AC*. Зауважимо, що, об'єднавши промені *CA* та *AC*, ми також отримаємо пряму *AC*. Проте ці промені не є доповняльними: у них немає спільного початку.

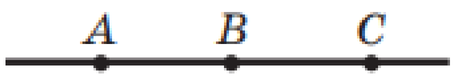


Рис. 45

На рисунку 46, *а* зображено фігуру, яка складається з двох променів *OA* та *OB*, що мають спільний початок.

Промені *OA* та *OB* називають **сторонами кута**, а точку *O* — **вершиною кута**.

Рис. 46

На рисунку 48 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину.

Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини.

У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

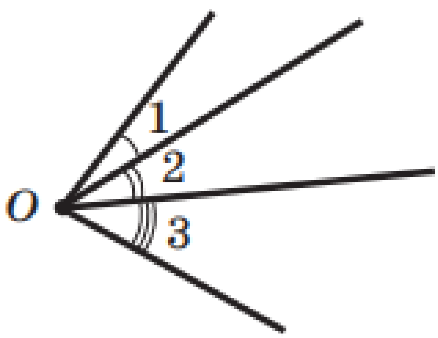


Рис. 48

Означення. Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Означення. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

На рисунку 49 промені *OA* та *OB* є доповняльними, тому кути, виділені зеленим і жовтим кольорами, є розгорнутими.

Будь-яка пряма ділить площину на дві **півплощини**, для яких ця пряма є **межею** (рис. 50). Вважають, що пряма належить кожній із двох півплощин, для яких вона є межею.

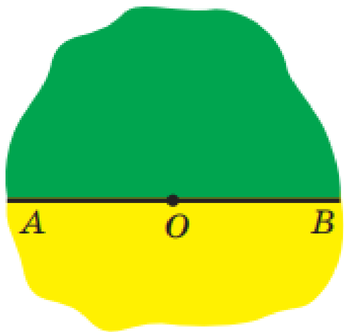


Рис. 49

Рис. 50

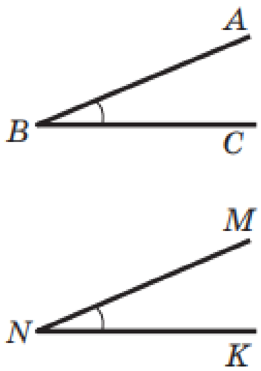


Рис. 51, *а*

Означення. Два кути називають рівними, якщо в них однакові градус ні міри та їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 51, *а* зображено рівні кути *ABC* і *MNK*. Записують: $\angle ABC$ - $\angle MNK$. Зрозуміло, що всі розгорнуті кути рівні.

Означення. Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

На рисунку 53 промінь *OK* — бісектриса кута *AOB*.
Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

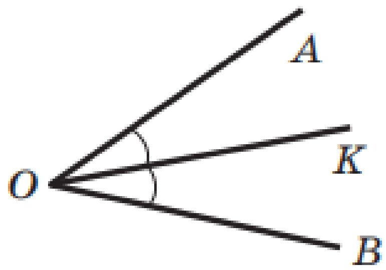
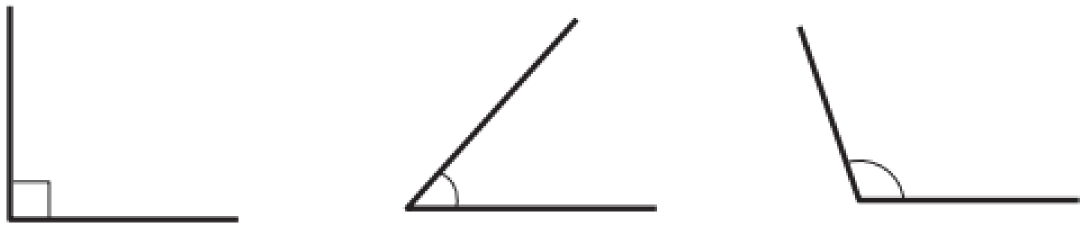


Рис. 53

Означення. **Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.**

На рисунку 60 зображено кути кожного з трьох указаних видів.



Прямий кут — Гострий кут — Тупий кут

Рис. 60

Основна властивість величини кута. **Якщо промінь *OC* ділить кут *AOB* на два кути $\angle AOC$ і $\angle COB$, то $\angle$ $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$** (рис. 61)**.**

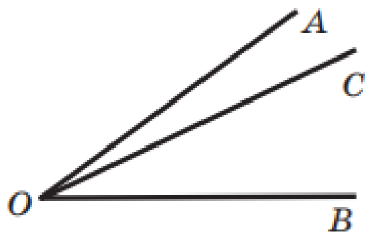


Рис. 61

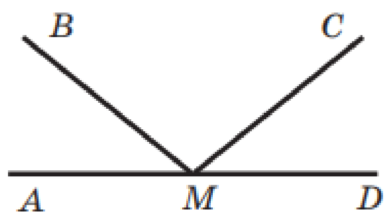


Рис. 62

П Р И К Л А Д : На рисунку 62 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$.

Знайдіть кут *AMB*.

Розв'язання. Маємо: $\angle AMC = \angle AMB + BMC$, $\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишемо: $\angle AMB + BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180°$.

Тоді $2 \angle AMB + 118° = 180°$. Звідси $\angle AMB = 31°$.

Відповідь: 31°.

Суміжні та вертикальні кути

Означення. Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

На рисунку 78 кути *MOE* і *EON* суміжні.

П Р И К Л А Д : Нехай кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні (рис. 79).
Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180°$

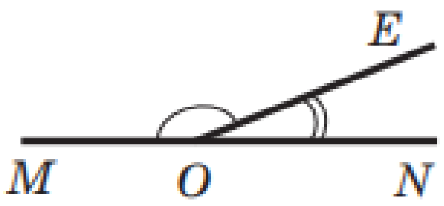


Рис. 78

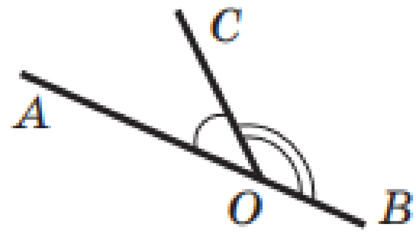


Рис. 79

Оскільки кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні, то промені *OA* та *OB* є доповняльними. Тоді кут *AOB* розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180°$.

Промінь *OC* належить куту *AOB*. За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$.

Означення. Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. Вертикальні кути рівні.

П Р И К Л А Д : На рисунку 82 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, оскільки кути *DCP* і *BCP* суміжні.

Кути *DCP* і *ABE* рівні за умовою. Кути *ABE* і *FBC* рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$. Тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Перпендикулярні прямі

Означення. Дві прямі називають перпенди кулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

На рисунку 92 прямі *a* і *b* перпендикулярні. Записують: $a \perp b$ або $b \perp a$.

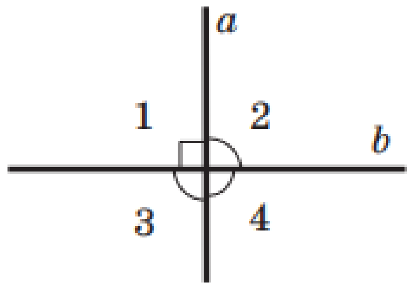


Рис. 92

Означення. Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 94 відрізки *AB* і *CD* перпендикулярні. Записують: $AB \perp CD$. Довжину перпендикуляра *AB* називають **відстанню від точки** *A* **до прямої** *a*.

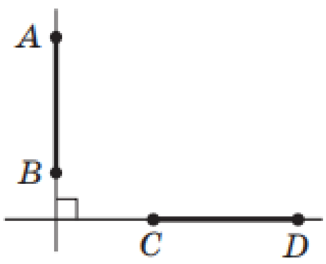


Рис. 94

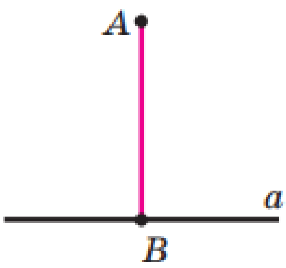


Рис. 96

Теорема. ***Через кожну точку прямої можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну***

Аксіоми

Означення. **Аксіоми геометрії** — це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення.

У перекладі з грецької слово ***аксіома*** означає ***прийняте положення***.

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах.
Вони називалися **основними властивостями**.

П Р И К Л А Д : Раніше було сформульовано такі аксіоми:

- **для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями;**
- **кожний відрізок має певну довжину**;
- **кожний кут має певну величину.**

Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Означення. Трикутником називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

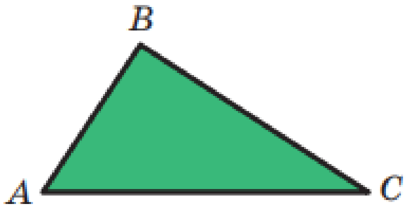


Рис. 108

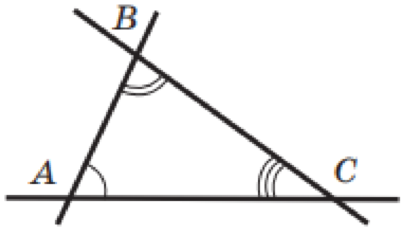


Рис. 109

Кути *BAC, ABC, BCA* (рис. 109) називають **кутами трикутника** *ABC*.

Означення. Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.

Означення. Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі (<90); Трикутник називають прямокутним, якщо один із його кутів прямий (=90); Трикутник називають тупокутним, якщо один із його кутів тупий (>90) (рис. 110).

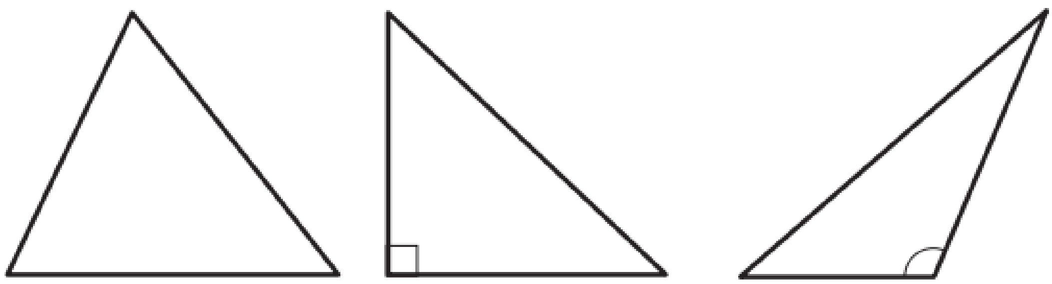


Рис. 110

Означення. Два трикутники та фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають **відповідними сторонами** й **відповідними кутами**.

Означення. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

На рисунку 116 відрізки *BB*1 і *CC*1 — висоти трикутника *ABC*.

Означення. **Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.**

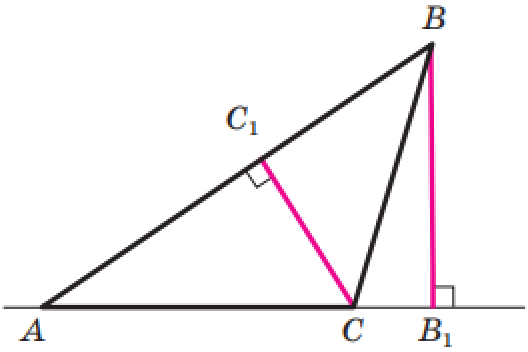


Рис. 116

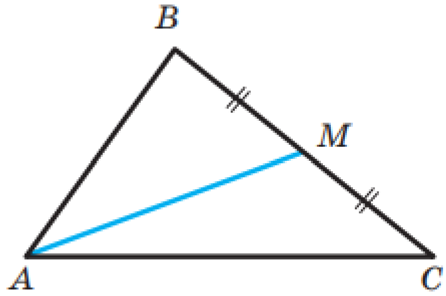


Рис. 117

Означення. **Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.**

На рисунку 118 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC.

Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

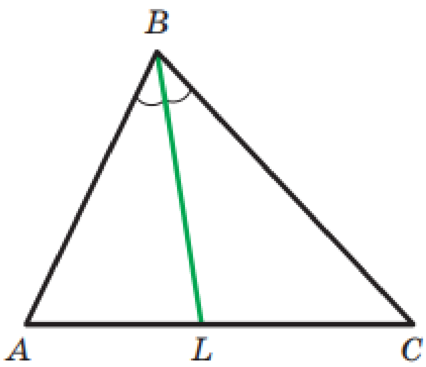


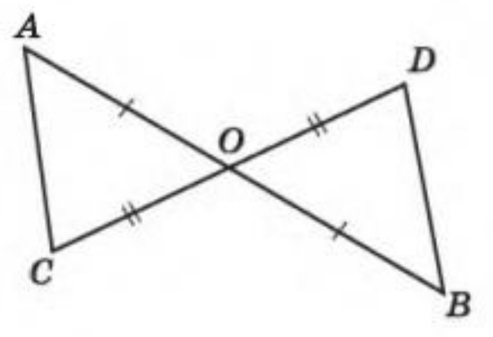
Рис. 118

Ознаки рівності трикутників

Теорема (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

П Р И К Л А Д 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Доведення.
Розглянемо мал. 222. За умовою $AO = OB$ і CO - OD.
Окрім того, $\angle AOC$ - $\angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$.



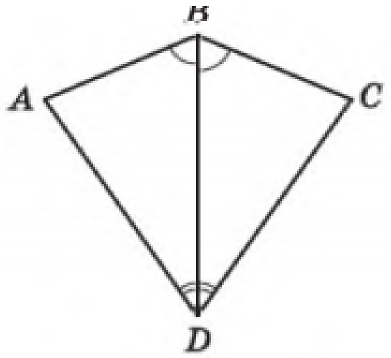
Мал. 222

Теорема (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

П Р И К Л А Д 2.

Задача 2. Довести рівність кутів A і C (мал. 224), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

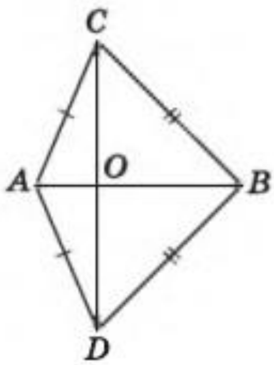
Д о в е д е н н я. Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\triangle ABD = \triangle CBD$. Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$. ▲



Мал. 224

Теорема (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами).
Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

П Р И К Л А Д 3.



Мал. 278

Задача. Д а н о: $AC = AD$, $BC = BD$ (мал. 278).
Д о в е с т и: $CO = OD$.

Д о в е д е н н я.

1) Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$.
$AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою),
AB — спільна сторона.
Тоді $\triangle ABC = \triangle ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB — бісектриса кута CAD.

3) Тоді AO — бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника AO є також і медіаною. Оскільки AO — медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й треба було довести. ▲

Рівнобедрений трикутник та його властивості

Означення. **Трикутник називають рівнобедреним, якщо в нього дві сторони рівні.**

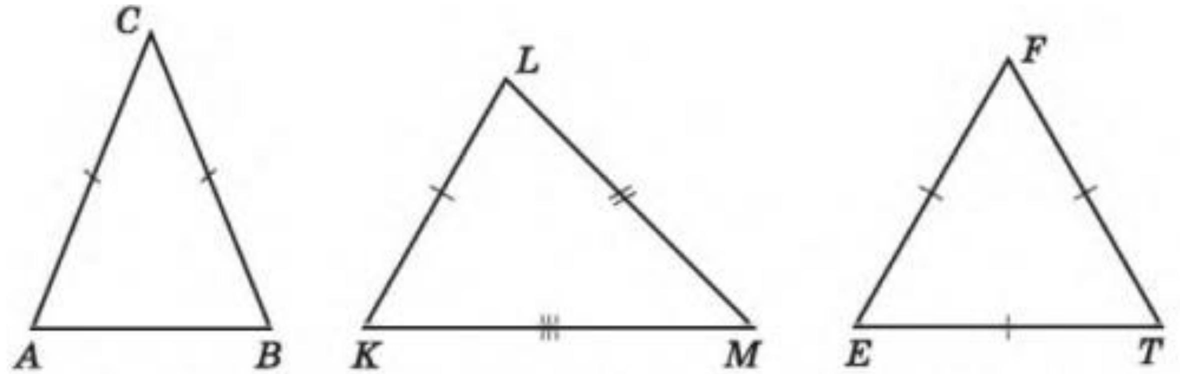
Трикутник, усі сторони якого мають різні довжини, називають різностороннім.

Трикутник, усі сторони якого рівні, називають рівностороннім.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами,* а його третю сторону — *основою* .

На малюнку 245 зображено рівнобедрений трикутник *ABC, AB* — його основа, *AC* і *BC* — бічні сторони.

На малюнку 246 зображено різносторонній трикутник *KLM*
На малюнку 247 — рівносторонній трикутник *EFT*.

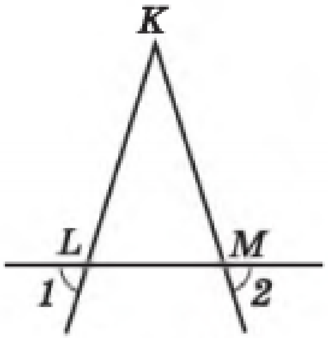


Мал. 245 Мал. 246 Мал. 247

Теорема (властивості рівнобедреного трикутника).
У рівнобедреному трикутнику:
1) ***кути при основі рівні;***
2) ***бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.***

П Р И К Л А Д 1.

Д о в е д е н н я. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ — рівносторонній. ▲



Мал. 250

Задача 2. Д а н о: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 250).

Д о в е с т и: $\triangle KLM$ — рівнобедрений.

Д о в е д е н н я.

$\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні),

$\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні),

$\angle 1 = \angle 2$ (за умовою).

Тому $\angle KLM = \angle KML$.

Отже, $\triangle KLM$ — рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). ▲

Ознаки рівнобедреного трикутника

Теорема. ***Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Теорема. ***Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Теорема. ***Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.***

Теорема ***Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.***

ПРИКЛАД 1.

Задача. У трикутнику ABC проведено бісектрису BM (рис. 172), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

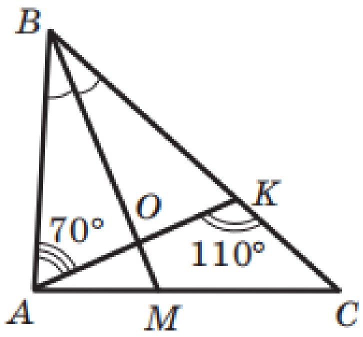


Рис. 172

Розв'язання. Оскільки кути BKA і AKC суміжні, то $\angle BKA = 180° - \angle AKC$. Тоді $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Отже, у трикутнику ABK отримуємо, що $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. Тому трикутник ABK рівнобедрений з основою AK, і його бісектриса BO (O — точка перетину відрізків AK і BM) є також висотою, тобто $BM \perp AK$.

Паралельні прямі та ознаки паралельності двох прямих

Означення. **Дві прямі називають п а р а л е л ь н и м и, якщо вони не перетинаються.**

На рисунку 190 зображено паралельні прямі a і b. Записують: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 191 відрізки AB і CD паралельні. Записують: $AB \parallel CD$.

Рис. 190

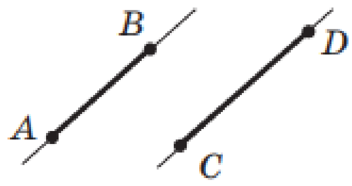


Рис. 191

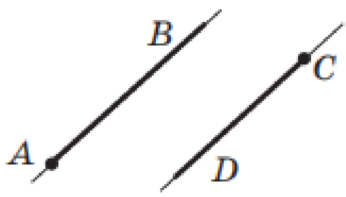


Рис. 192

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 192 зображено паралельні промені AB і CD.

Теорема. (ознака паралельності прямих). **Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.**

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). **Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.**

Теорема. **Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.**

Теорема. **Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.**

Теорема. Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Теорема. Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Задача. На рисунку 208 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання. Для трикутників ABD і CDB маємо: $AB = CD$ і $\angle ABD = \angle CDB$ за умовою, BD — спільна сторона. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

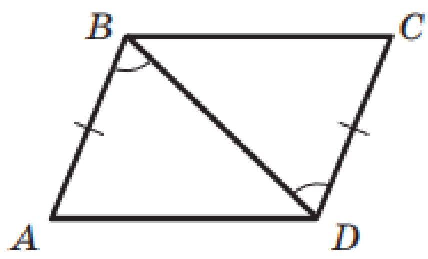


Рис. 208

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Оскільки кути BDA і DBC — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD і ці кути рівні, то $BC \parallel AD$. ●

Властивості паралельних прямих

Теорема. **Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.** *(рис. 225)*

Теорема. **Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.** *(рис. 226)*

Теорема. **Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.**

Наслідок. **Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої** *(рис.227)*.

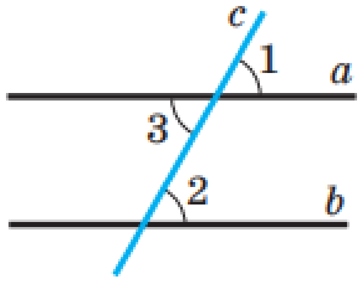


Рис. 225

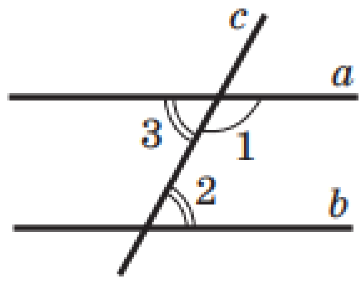


Рис. 226

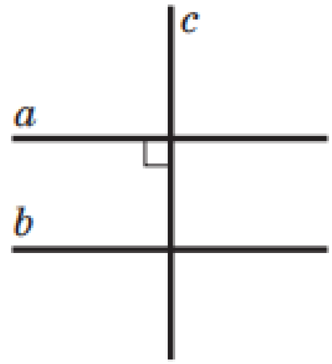


Рис. 227

П Р И К Л А Д 1.

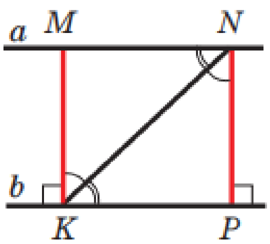


Рис. 228

Задача 1. Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні (рис. 228), M і N — дві довільні точки прямої a. Опустимо з них перпендикуляри MK і NP на пряму b. Доведемо, що $MK = NP$.

Розглянемо трикутники MKN і PNK. Відрізок KN — їхня спільна сторона. Оскільки $MK \perp b$ і $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а кути MKN і PNK рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і NP та січній KN.

Аналогічно кути MNK і PKN рівні як різносторонні при паралельних прямих MN і KP та січній KN.

Отже, трикутники MKN і PNK рівні за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Тоді $MK = NP$.

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

П Р И К Л А Д 2.

Наприклад, на рисунку 228 довжина відрізка MK — це відстань між паралельними прямими a і b.

Задача 2. На рисунку 229 відрізок AK — бісектриса трикутника ABC, $MK \parallel AC$. Доведіть, що трикутник AMK рівнобедрений.

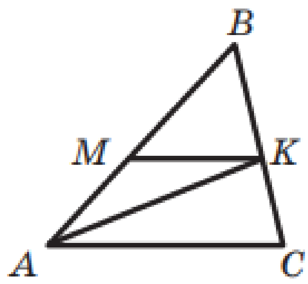


Рис. 229

Розв'язання. Оскільки AK — бісектриса трикутника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Кути KAC і MKA рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і AC та січній AK. Отже, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тоді трикутник AMK рівнобедрений.

Сума кутів трикутника. Нерівність трикутника

Теорема. Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Наслідок. Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Означення. Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

Теорема. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

П Р И К Л А Д 1.

Задача. Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Розв'язання. За умовою $AM = CM$ (рис. 249). Тоді в трикутнику AMC кути A та ACM рівні.

За умовою $BM = CM$, звідси випливає, що в трикутнику BMC кути B і BCM рівні.

У трикутнику ACB маємо: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle ACM$ і $\angle B = \angle BCM$, отримуємо: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$. Оскільки $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180°$. Тоді $\angle ACB = 90°$.

Отже, трикутник ABC прямокутний.

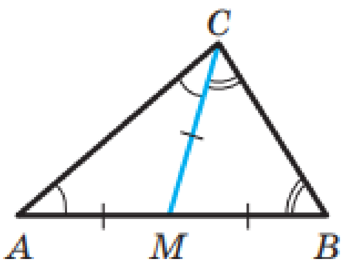


Рис. 249

Прямокутний трикутник та його властивості

Означення. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Означення. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

Означення. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Означення. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорів нює 30°.

Означення. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Ознака рівності прямокутних трикутників:

1)Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні.

2)Якщо катет і прилеглии до нього гострии кут одного пря мокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні.

3)Якщо гіпотенуза і гострии кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні;

4)Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні.

П Р И К Л А Д 1.

Задача. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

Розв'язання. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 259) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 — бісектриси, $AD = A_1D_1$.

Маємо: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом.

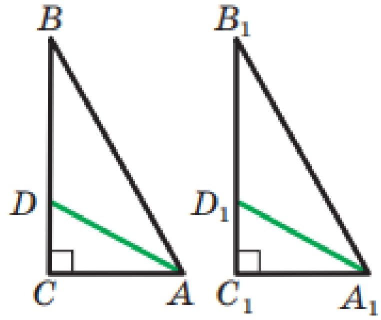


Рис. 259

Геометричне місце точок. Коло та круг

Означення. Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Теорема. Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Пряма теорема. Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.

Обернена теорема. Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

Теорема. Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

Пряма теорема. Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.

Означення. Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу.

Означення. Кругом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Задану точку називають **центром круга**. Радіус кола, яке обмежує круг, називають **радіусом круга**.

Якщо X — довільна точка круга із центром O та радіусом R, то $OX \leqslant R$ (рис. 279). Якщо $OX < R$, то говорять, що точка X лежить усередині кола, яке обмежує даний круг. Точка Y не належить кругу (рис. 279). У цьому разі говорять, що точка Y лежить поза колом, яке обмежує круг.

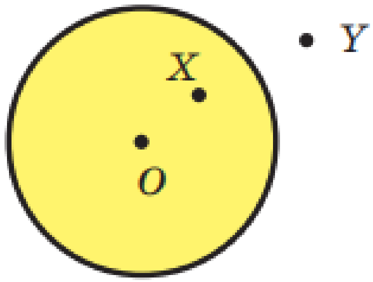


Рис. 279

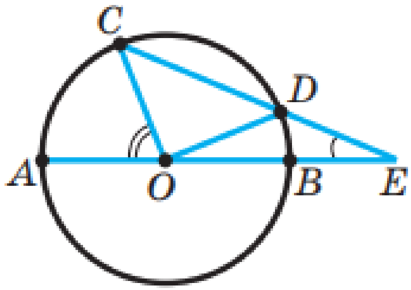


Рис. 280

З означення круга випливає, що коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

Задача. На продовженні хорди CD кола із центром O за точку D позначено точку E таку, що відрізок DE дорівнює радіусу кола. Пряма OE перетинає дане коло в точках A і B (рис. 280). Доведіть, що $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Розв'язання. Нехай $\angle CEO = \alpha$.

Оскільки трикутник ODE рівнобедрений, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Кут ODC — зовнішній кут трикутника ODE. Тоді $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Оскільки трикутник COD рівнобедрений, то маємо: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Кут AOC — зовнішній кут трикутника COE. Тоді $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, тобто $\angle AOC = 3\angle CEO$. ●

Властивості кола. Дотична до кола

Означення. Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають **дотичною** до кола.

Теорема. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Теорема. Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

Теорема. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

На рисунку 288, *в* пряма a — дотична до кола із центром у точці O, A — **точка дотику.**

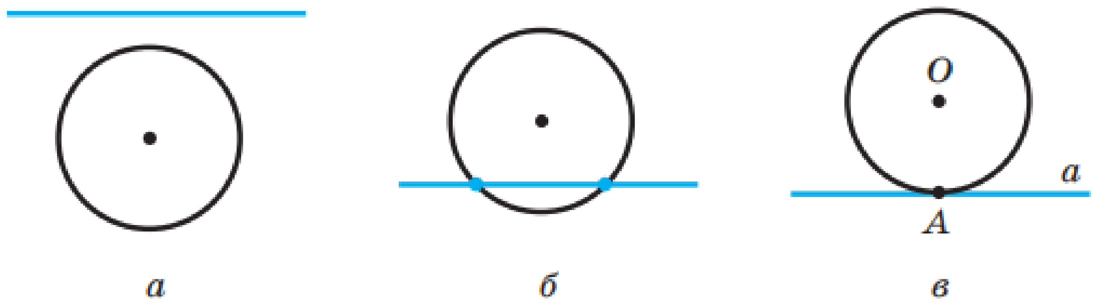


Рис. 288

Теорема. Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

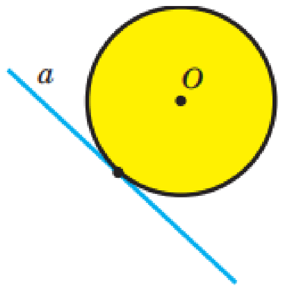


Рис. 289

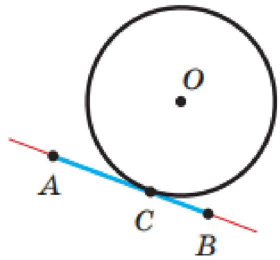


Рис. 290

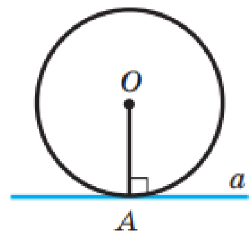


Рис. 291

Описане та вписане кола трикутника

Означення. **Коло називають** **описаним** **навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.**

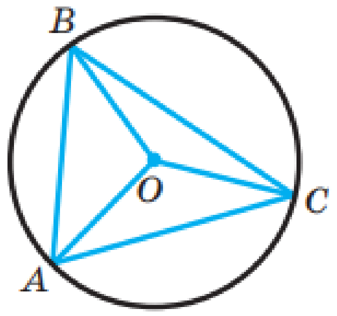


Рис. 300

На рисунку 300 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що **трикутник вписаний у коло.**

На рисунку 300 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Відрізки OA, OB і OC — радіуси цього кола, тому $OA = OB = OC$. Отже, *центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.*

Теорема. **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**

Теорема. **У будь-який трикутник можна вписати коло**

Означення. **Коло називають** **впис аним** **у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

На рисунку 302 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що **трикутник описаний навколо кола.**

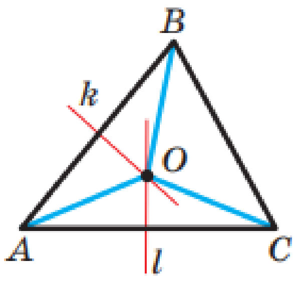


Рис. 301

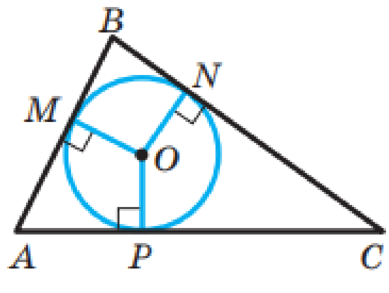


Рис. 302

Посилання на тести для перевірки власних знань

Від авторів

Дякуємо, що ознайомились з нашими невеликими нотатками з вивчених тем алгебри 7-ого класу, бажаємо успіхів на вступному турі в КЗ “Науковий ліцей імені Анатолія Лигуна”, ми віримо в вас!