Конспекти з алгебри 7 клас

Створено учнями 10-Г класу
КЗ”Науковий ліцей імені Анатолія Лигуна” КМР
Для повторення вивченого абітурієнтами в 7-ому класі матеріалу з алгебри.

Зміст

Степінь з натуральним показником

Означення. Степенем числа а з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює а.

Наприклад, **(½)*(½)*(½)=(½)^3** .

Вираз (½)^3 називають **степенем**, число (½) — **основою степеня**, а число 3 — **показником степеня**.

Означення. **Степенем числа *a* з показником 1 називають саме це число**.

Легко підрахувати, що, наприклад, **2^5 = 32**. У таких випадках говорять, що число 2 **піднесли до п'ятого степеня** й отримали число 32. Також можна сказати, що виконали **дію піднесення до п'ятого степеня** числа 2. Рівність **(–3)^2 = 9** означає, що число –3 **піднесли до квадрата** й отримали число 9, а рівність **(–3)^3 = –27** означає, що число –3 **піднесли до куба** й отримали число –27.

П Р И К Л А Д 1. Розв'яжіть рівняння: (x – 10)^8 = –1.

Розв'язання. Оскільки при піднесенні до степеня з парним показником будь-якого числа отримуємо невід'ємне число, то дане рівняння не має коренів. В і дп о в і д ь: коренів немає.

П Р И К Л А Д 2. Доведіть, що значення виразу 10^200 + 2 ділиться націло на 3.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^200 складається із цифри 1 і двохсот цифр 0, а запис значення виразу 10^200 + 2 — із цифри 1, цифри 2 і ста дев'яноста дев'яти цифр 0.

Отже, сума цифр числа, яка є значенням даного виразу, дорівнює 3. Тому й саме це число ділиться націло на 3.

П Р И К Л А Д 3. Доведіть, що значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Розв'язання. Якщо n — парне число, то вираз 9^n можна подати у вигляді добутку, який містить парну кількість дев'яток. Тоді можна записати, що:
$9^n = (9*9)*(9*9)...(9*9)$. Оскільки $9*9 = 81$, то останньою цифрою значення виразу $(9*9)(9*9)...(9*9)$ є одиниця. Тому останньою цифрою значення виразу $9^n - 1$ є нуль. Отже, значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Одночлени

Розглянемо вирази: $2b$; $(\frac{1}{3})^2 xy$; $-ab$; $m^3 \cdot 3k^5$;
$(3,14)^2 \cdot pq^3 \cdot (-7)r^2 \cdot t^4$.

Кожен із них є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.

Домовилися також вважати одночленами всі числа, будь-які змінні та їхні степені. Так, одночленами є вирази:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази

$$2a + b,\ x - 1,\ a : b,\ y2 + y - 2$$

не є одночленами, оскільки вони, крім множення та піднесення до степеня, містять ще й інші дії.

Коли ми бачимо одночлен $3ab^3 \cdot (-\frac{2}{3})abc$, виникає природне бажання спростити його. Маємо:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = 2a^2b^4c.$$

Отриманий одночлен містить *тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці*. Усі інші множники — це степені з *різними* основами. Такий вигляд одночлена називають **стандартним виглядом одночлена**.

Наведемо ще приклади одночленів стандартного вигляду:

$$-\left(\frac{1}{8}\right)xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази $a^2 \cdot 2b^3$ і $-3x^2xy^3$ не є одночленами стандартного вигляду. Справді, хоча перший із них і має єдиний числовий множник, але він не стоїть на першому місці. У другому — степінь з основою x записано двічі. Проте ці одночлени легко **привести** (перетворити) до стандартного вигляду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ і } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, наприклад 0x2, 0ab тощо, називають **нуль-одночленами**. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Означення. **Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена**.

Розглянемо одночлени $\left(\frac{2}{3}\right)x^3yz$ і $-2zx^3y$. У них однакові буквені частини, тобто буквені частини є тотожно рівними виразами. Такі одночлени називають **подібними**.

Означення. **Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю**.

П Р И К Л А Д 1. Спростіть вираз $0{,}2a^2b^4*(-5a^3b)^2$.

Розв'язання. Маємо:

$0{,}2a^2b^4*(-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4*(-5)^2*(a^3)^2*b^2 = 0{,}2*25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6$.

П Р И К Л А Д 2. Значення змінних a і b такі, що $4a^3b^4 = 7$. Знайдіть значення виразу $-(2/7)a^6b^8$.

Розв'язання. Маємо:

$-(2/7)a^6b^8 = -(1/56)*16a^6b^8 = -(1/56)*(4a^3b^4)^2 =$
$-(1/56)*7^2 = -(1/56)*49 = -(7/8)$.

Многочлени

Означення. **Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом**.

Ось ще приклади многочленів: $7xy+y-11$; $x^4-2x^3+5x^2-x+1$; $3a-a+b$; $11x-2x$.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy+y-11$ є одночлени $7xy$, y і -11.

Многочлен, який складається з двох членів, називають **двочленом**, а той, який складається з трьох членів, — **тричленом**. Домовилися розглядати одночлен як окремий вид многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв’язки між многочленами, одночленами та їхнім окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 5.

Рис. 5

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають **подібними членами многочлена**. Наприклад, у многочлені $7a^2b-3a+4-a^2b-1+a+b$ подібні члени є $7a^2b$ і a^2b , $3a$ і a , 4 і -1 .

Використовуючи правило зведення подібних доданків, спростимо цей многочлен: $7a^2b-3a+4-a^2b-1+a+b = 6a^2b-2a+b+3$. Таке спрощення називають **зведенням подібних членів многочлена**.

Означення. **Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду**.

Означення. **Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.**

Наведемо ще приклади:

- степінь многочлена $3x^2 – xy^2 + 5y^2$ дорівнює двом;
- степінь многочлена $3x^4y^2$ дорівнює шести;
- степінь многочлена 3 дорівнює нулю.

Число 0, а також многочлени, які тотожно дорівнюють нулю (наприклад, $0a + 0b$, $x – x$ і т. п.), називають **нуль-многочленами**.

Добуток різниці та суми двох виразів

Нерідко в математиці, крім знання загального закону (теореми), зручно користуватися правилами, що застосовуються в окремих (особливих) випадках. Наприклад, коли множать десятковий дріб на 10, 100, 1000 й т. д., то немає потреби використовувати загальний алгоритм множення у стовпчик, а набагато зручніше застосувати правило перенесення коми.

Особливі ситуації трапляються також при множенні многочленів. Розглянемо окремий випадок, коли в добутку двох многочленів один із них є різницею двох виразів, а другий — їхньою сумою.

Маємо: (a-b)*(a+b) = a^2 +ab-ba-b^2 = a^2-b^2 .

Отримали тотожність:

(a-b)*(a+b) = a^2-b^2 .

Тепер при множенні різниці виразів на їхню суму можна скоротити роботу, одразу записавши результат — різницю квадратів цих виразів. Тому цю тотожність називають **формулою скороченого множення**. Її виражає таке правило:

добуток різниці двох виразів та їхньої суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Означення. **Формулами скороченого множення називають поширені випадки множення многочленів**.

П Р И К Л А Д 1. Виконайте множення многочленів:

1) (2a – 5b) (2a + 5b);

2) (y^2 + 3x^4) (3x^4 – y^2);

3) (–4mn – p) (4mn – p).

Розв'язання.

1) (2a – 5b) (2a + 5b) = (2a)^2 – (5b)^2 = 4a^2 – 25b^2.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) =$
$= (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.
3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 -$
$- (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$.

П Р И К Л А Д 2. Спростіть вираз:
1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;
2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;
3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Розв'язання.

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 -$
$- 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.
2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.
3) Застосувавши двічі формулу добутку різниці та суми двох виразів, отримаємо:
$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16$

Різниця квадратів двох виразів

Формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ перепишемо так:

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}.$$

Цю тотожність називають **формулою різниці квадратів двох виразів**.

Тепер можна сформулювати правило.

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їхньої суми.

П Р И К Л А Д 1. Розкладіть на множники:
1) $a^2 - 4$;
2) $36m^2 - 2(7/9)n^8$;
3) $-a^2b^6 + 1$.

Розв'язання.

1) Маємо: $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2)$.

2) $36m^2 - 2(7/9)n^8 = 36m^2 - (25/9)n^8 = (6m)^2 - ((5/3)n^4)^2 = (6m - (5/3)n^4)(6m + (5/3)n^4)$.

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$.

П Р И К Л А Д 2. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $100 - (a + 5)2$;

2) $(2a + 3b)2 - (3a - b)2$.

Розв'язання.

1) $100 - (a + 5)2 = 102 - (a + 5)2 = = (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) = = (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a)$.

2) $(2a + 3b)2 - (3a - b)2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) + + (3a - b)) = (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) = (4b - a)(5a + 2b)$.

П Р И К Л А Д 3. Розв’яжіть рівняння:

1) $x2 - 36 = 0$;

2) $(2x - 7)2 - 81 = 0$.

Розв'язання.

1) Застосувавши формулу різниці квадратів та умову рівності добутку нулю, отримуємо: $(x - 6)(x + 6) = 0$; $x - 6 = 0$ або $x + 6 = 0$; $x = 6$ або $x = -6$.

2) Маємо: $(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0$; $(2x - 16)(2x + 2) = 0$; $2x - 16 = 0$ або $2x + 2 = 0$; $x = 8$ або $x = -1$.

П Р И К Л А Д 4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(6n + 7)2 - (2n - 1)2$ ділиться націло на 8.

Розв'язання. Маємо: $(6n + 7)2 - (2n - 1)2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) = = (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2)æ2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3)$. Даний вираз подано у вигляді добутку трьох множників, один з яких дорівнює 8, а два інших — теж натуральні числа.

Звідси випливає, що значення даного виразу ділиться націло на 8 при будь-якому натуральному n.

Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів

Перетворимо в многочлен вираз $(a + b)^2$. Маємо:
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Отже,

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Цю тотожність називають **формулою квадрата суми двох виразів**. Тепер можна сформулювати правило.

Означення. **Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу**.

Перетворимо в многочлен вираз $(a - b)^2$. Маємо:
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Ми отримали **формулу квадрата різниці двох виразів**:

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Означення. **Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу**.

П Р И К Л А Д 1. Подайте у вигляді многочлена вираз:
1) $(3b - 4c)^2$;
2) $(a3 + 5a)^2$.

Розв'язання.

1) За формулою квадрата різниці двох виразів отримуємо:

$(3b – 4c)^2 = (3b)^2 – 2*3b*4c + (4c^)2 = 9b^2 – 24bc + 16c^2$.

2) За формулою квадрата суми двох виразів отримуємо:

$(a^3 + 5a)^2 = (a^3)^2 + 2*a^3*5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2$.

П Р И К Л А Д 2. Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(–a – b)^2$;

2) $(–x2 – 6)^2$.

Розв'язання.

1) Маємо: $(–a – b)^2 = (–a)^2 – 2 (–a)b + b^2 = = a^2 + 2ab + b^2$.

Цей приклад можна розв'язати інакше. Оскільки $(–a – b)^2 = (–1(a + b))^2 = (–1)^2*(a + b)^2 = (a + b)^2$, тобто вирази $(–a – b)^2$ і $(a + b)^2$ тотожно рівні, то маємо: $(–a – b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) $(–x2 – 6)^2 = (x2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$.

П Р И К Л А Д 3. Розв'яжіть рівняння $(x – 10)^2 = (x + 7)^2 – 17$.

Розв'язання. Маємо: $x^2 – 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 – 17$;

$x^2 – 20x – x^2 – 14x = 49 – 17 – 100$;

$–34x = –68$;

$x = 2$.

Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

Перепишемо формули квадрата суми та квадрата різниці двох виразів, помінявши місцями їхні ліві й праві частини:

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$\mathbf{a^2 – 2ab + b^2 = (a – b)^2}$$

У такому вигляді ці формули в ряді випадків дозволяють «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Означення. **Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають повним квадратом**.

П Р И К Л А Д 1. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:
1) $x^2 + 10x + 25$;

2) $9a^6 – 42a^3b^2 + 49b^4$.

Розв'язання.

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2*x*5 + 5^2 = (x+5)^2$.

2) $9a^6 – 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 – 2*3a^3*7b^2 + (7b^2)^2 = (3a^3 – 7b^2)^2$.

П Р И К Л А Д 2. Знайдіть, користуючись перетворенням виразу у квадрат двочлена, значення суми $5{,}2^2 + 10{,}4*4{,}8 + 4{,}8^2$.

Розв'язання. Маємо:

$5{,}2^2 + 10{,}4*4{,}8 + 4{,}8^2 = 5{,}2^2 + 2*5{,}2*4{,}8 + 4{,}8^2 =$
$= (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100.$

П Р И К Л А Д 3. Розв’яжіть рівняння $4x^2 – 12x + 9 = 0$.

Розв'язання. Подамо ліву частину рівняння у вигляді квадрата різниці:

$(2x – 3)^2 = 0$.

Оскільки значення квадрата дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його основа дорівнює нулю, то отримуємо:

$2x – 3 = 0$;

$x = 1{,}5$.

П Р И К Л А Д 4. Доведіть, що значення виразу $(2x + 1)^2 – 2 (2x + 1)(2x – 5) + (2x – 5)^2$ не залежить від значення змінної.

Розв'язання. Маємо: $(2x + 1)^2 – 2(2x + 1)(2x – 5) + (2x – 5)^2 = ((2x + 1) – (2x – 5))^2 = (2x + 1 – 2x + 5)^2 = 62 = 36.$

П Р И К Л А Д 5. Доведіть, що вираз x2 – 4x + 5 набуває додатних значень при будь-яких значеннях x. Якого найменшого значення набуває вираз і при якому значенні x?

Розв'язання. Перетворимо даний вираз:

$x^2 – 4x + 5 = x^2 – 4x + 4 + 1 = (x – 2)^2 + 1$. Подання виразу у вигляді суми, одним із доданків якої є квадрат двочлена (у нашому прикладі це $(x – 2)^2$), називають **виділенням квадрата двочлена** з даного виразу. Оскільки $(x −2)^2 > 0$, при будь-яких значеннях x, то вираз $(x – 2)^2 + 1$ набуває лише додатних значень. Також зрозуміло, що $(x – 2)^2 + 1 > 1$. Звідси найменшого значення, яке дорівнює 1, даний вираз набуває при x = 2.

П Р И К Л А Д 6. При яких значеннях x і y значення многочлена $x^2 + y^2 – 12x + 4y + 40$ дорівнює нулю?

Розв'язання. Маємо:

$x^2 + y^2 – 12x + 4y + 40 = = x^2 – 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x – 6)^2 + (y + 2)^2$.

Ми подали даний многочлен у вигляді суми двох доданків, які можуть набувати лише невід'ємних значень. Їхня сума, а отже, і даний многочлен набуватимуть нульового значення тоді й тільки тоді, коли кожен із доданків дорівнюватиме нулю, тобто коли

x = 6 і y = –2.

Застосування різних способів розкладання многочлена на множники

У попередніх пунктах ми розглянули такі способи розкладання многочлена на множники:

- **винесення спільного множника за дужки;**

- **метод групування;**
- **застосування формул скороченого множення.**

Дамо **кілька** загальних **порад**:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;

2) далі потрібно перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;

3) якщо не вдається застосувати формули скороченого множення, то можна спробувати скористатися методом групування.

П Р И К Л А Д 1. Розкладіть на множники многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;

2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;

3) $24m^4 + 3m$;

4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Розв'язання.

1) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу різниці квадратів, отримаємо:

$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2)$.

2) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу квадрата різниці, отримаємо:

$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5(x - 3y)^2$.

3) Винесемо спільний множник за дужки та застосуємо формулу суми кубів:

$24m^4 + 3m = 3m(8m^3 + 1) = 3m(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1)$.

4) Комбінуючи метод винесення спільного множника за дужки та метод групування, матимемо:

$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a(a^2 + 7a - 2ab - 14b) = 3a((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a(a(a + 7) - 2b(a + 7)) = 3a(a + 7)(a - 2b)$.

П Р И К Л А Д 2. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $x^{16} - 1$;

2) $a^{12} – b^{12}$.

Розв'язання.

1) $x^{16} – 1 = (x^8 – 1) (x^8 + 1) = (x^4 – 1) (x^4 + 1) (x^8 + 1) = (x^2 – 1) (x^2 + 1) (x^4 + 1) (x^8 + 1) = (x – 1) (x + 1) (x^2 + 1)* (x^4 + 1) (x^8 + 1)$.

2) $a^{12} – b^{12} = (a^6 – b^6) (a^6 + b^6) = (a^3 – b^3) (a^3 + b^3) (a^6 + b^6)$. Ми отримали три множники, один з яких є різницею

кубів, а два інших — сумою кубів. Використовуючи відповідні формули, отримуємо:

$a^{12} – b^{12} = (a – b) (a^2 + ab + b^2) (a + b) (a^2 – ab + b^2)* (a^2 + b^2) (a^4 – a^2b^2 + b^4)$.

<u>П Р И К Л А Д 3</u>. <u>Розкладіть на множники</u>:

1) $m^2 – 16n^2 + 2m – 8n$;

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 – 16$.

Розв'язання.

1) $m^2 – 16n^2 + 2m – 8n = (m^2 – 16n^2) + (2m – 8n) = (m – 4n) (m + 4n) + 2(m – 4n) = (m – 4n) (m + 4n + 2)$.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 – 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) – 16 = (x + 2y)^2 – 42 = (x + 2y – 4) (x + 2y + 4)$.

<u>П Р И К Л А Д 4</u>. <u>Розв'яжіть рівняння $x^3 + x^2 – 4x – 4 = 0$</u>.

Розв'язання. Маємо:

$x^2(x + 1) – 4(x + 1) = 0; (x + 1) (x^2 – 4) = 0; (x + 1) (x – 2) (x + 2) = 0; x + 1 = 0$, або $x – 2 = 0$, або $x + 2 = 0$; 19.

Застосування різних способів розкладання многочлена на множники:

139 $x = –1$, або $x = 2$, або $x = –2$.

<u>П Р И К Л А Д 5</u>. <u>Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 8x – 9$, виділивши попередньо квадрат двочлена</u>.

Розв'язання. Якщо до суми $x^2 + 8x$ додати число 16, то отриманий вираз $x^2 + 8x + 16$ можна «згорнути» за формулою квадрата суми. Тому, додавши до даного тричлена число 16 і віднявши від нього 16, отримуємо:

$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 = (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9)$.

Лінійна функція, її графік і властивості

Розглянемо два приклади.

П Р И К Л А Д 1. У басейні було 200 л води.Протягом t хв до басейну наливається щохвилини 80 л води. Тоді об’єм V води в басейні до його заповнення можна обчислити за формулою $V = 80t + 200$, де $t > 0$. Ця формула задає функціональну залежність змінної V від змінної t.

П Р И К Л А Д 2. Перша бригада зібрала 25 ящиків яблук; кожний робітник другої бригади зібрав по 2 ящики. Нехай у другій бригаді було х робітників. Позначимо кількість усіх ящиків, зібраних двома бригадами, буквою у. Тоді залежність змінної у від змінної х виражається формулою у 2х 25, де х — натуральне число. У наведених прикладах ми побудували функції, що описують дві різні реальні ситуації. Проте ці функції схожі в тому, що формули, які їх задають, мають вигляд у kx b.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, х — незалежна змінна, називають лінійною.**

Ось ще приклади лінійних функцій:

$$y = -2x + 1,\ y = 1 - x,\ y = 5x,\ y = 2.$$

Зауважимо, що областю визначення лінійної функції є всі числа. Побудуємо *графік функції у = – 2х + 1*. Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	−1	−3	−5

Точки A (−3;7), B (−2;5), C (−1;3), D (0;1), E (1; −1), F (2; −3), G (3; −5) нал графіку (рис. 37). Усі ать на о є графіком функції у ис. 38).

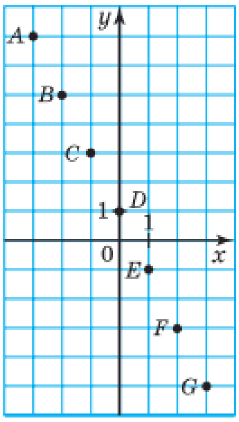

Рис. 37

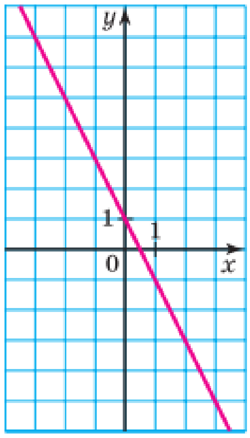

Рис. 38

Зазначимо, що ця **пряма не може бути вертикальною**, тобто прямою, перпендикулярною до осі абсцис. Справді, вертикальна пряма не може слугувати графіком функції.

П Р И К Л А Д 3. Побудуйте графік функції у = –3х + 2.

Розв'язання. Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу:

x	0	1
y	2	−1

Позначимо на координатній площині точки (0; 2) і

(1; –1) та проведемо через них пряму (рис. 39). Ця пряма є графіком лінійної функції $y = –3x + 2$. У формулі $y = kx + b$, яка задає лінійну функцію, припустимими є й випадки, коли $k = 0$ та/або $b = 0$. Розглянемо випадок, коли $b = 0$ і $k \neq 0$. Тоді формула набуває вигляду $y = kx$. Звідси для всіх значень аргументу, відмінних від нуля, можна записати, що $y\ x = k$. Ця формула показує, що для функції $y = kx$ при $x \neq 0$ відношення відповідних значень залежної та незалежної змінних залишається сталим і дорівнює k. Нагадаємо, що в курсі математики 6 класу ви вже ознайомилися з подібними залежностями між величинами. Таку залежність називають прямою пропорційністю. Тому лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, також називають **прямою пропорційністю**.

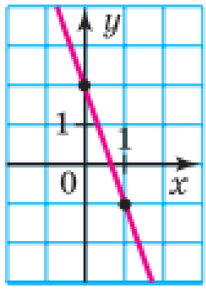

Рис. 39

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це ілюструє схема, зображена на рисунку 40), то її графік — пряма.

Рис. 40

Особливість цієї прямої полягає в тому, що вона при будь-якому значенні k проходить через точку O (0; 0). Справді, якщо у формулі $y = kx$ покласти $x = 0$, то отримаємо

$y = 0$. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку й точку O (0; 0). На рисунку 41 зображено графіки прямих пропорційностей, які наводилися вище як приклади.

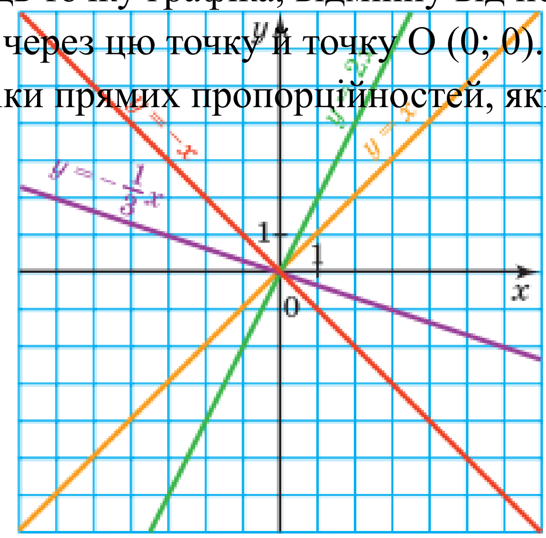

Рис. 41

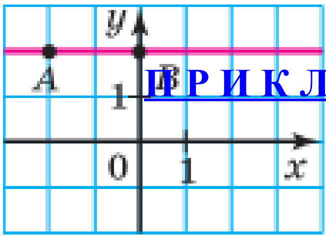

Рис. 42

П Р И К Л А Д 4. Побудуйте графік функції у = 2.
Розв'язання. Як і для побудови графіка будь-якої лінійної функції, треба знати дві точки, які належать йому. Ці точки матимуть однакові ординати, які дорівнюють 2. Їхні абсциси виберемо довільно, наприклад –2 і 0. Залишається провести пряму через точки А (–2; 2) і В (0; 2) (рис. 42). Ця пряма паралельна осі абсцис.

Графічний метод розв’язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Легко перевірити, що пара чисел (–2; 0) є розв’язком як рівняння x^2 + y^2 = 4, так і рівняння y = x^2 – 4. У таких випадках говорять, що пара чисел (–2; 0) — спільний розв’язок зазначених рівнянь. На рисунку 68 зображено графіки рівнянь –6x + 5y = 9 і 4x + 3y = 13. Вони перетинаються в точці M (1; 3). Ця точка належить кожному з графіків. Отже, пара чисел (1; 3) є **спільним розв’язком даних рівнянь**.

Якщо треба знайти всі спільні розв’язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв’язати систему рівнянь. Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Так, запис

$$\begin{cases} xy = 12 \\ 2x + 2y = 14, \end{cases}$$

є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см2, а периметр — 14 см. Система

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

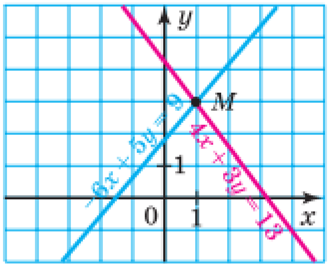

Рис. 68

є математичною моделлю задачі про знаходження координат спільних точок двох прямих (рис. 68).

Означення. **Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність**.

Означення. **Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає**.

Пара чисел (–2; 0) не вичерпує всіх розв'язків останньої системи. Наприклад, пара чисел (2; 0) — також її розв'язок. Цю систему, як і систему, отриману в задачі про прямокутник, ви навчитеся розв'язувати в курсі алгебри 9 класу.

Справді, графіки рівнянь системи перетинаються в точці M (1; 3) (рис. 68). Її координати є розв'язком кожного рівняння системи, а отже, і самої системи. Інших спільних точок графіки рівнянь не мають, таким чином, не має інших розв'язків і сама система. Висновок: пара чисел (1; 3) — єдиний розв'язок даної системи. Описаний метод розв'язування системи рівнянь називають **графічним**.

Його суть полягає в такому:

- *побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;*
- *знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;*
- *отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.*

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Розглянемо ще один спосіб, який дає змогу звести розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо систему рівнянь

{2x – 5y = 7
{4x + 5y = 5

Оскільки в цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, то рівняння з однією змінною можна отримати, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Запишемо: 2x – 5y + 4x + 5y = 7 + 5; 6x = 12. x = 2. Підставити знайдене значення змінної x можна в будь-яке з рівнянь системи. Підставимо, наприклад, у перше.

Отримаємо: 2*2 – 5y = 7; –5y = 3; y = –0,6. Отже, розв'язком системи є пара чисел (2; –0,6). Описаний спосіб розв'язування системи називають **методом додавання**. Цей метод заснований на такому твердженні: якщо одне з рівнянь системи замінити на рівняння, отримане шляхом додавання лівих і правих частин рівнянь системи, то отримана система буде мати такі самі розв'язки, що й початкова (приймемо цей факт без доведення).

Щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;

2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;

3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;

4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної в будь-яке з рівнянь вихідної системи;

5) обчислити значення другої змінної;

6) записати відповідь.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Розв'яжемо систему рівнянь

{2x – y = 8
{3x + 2y = 5

З першого рівняння виразимо змінну у через змінну х: у 2х 8. Підставимо в друге рівняння системи замість змінної у вираз 2х – 8. Отримаємо систему

{y = 2x – 8
{3x + 2(2x – 8) = 5

Ця система та вихідна мають одні й ті самі розв'язки. Приймемо тут цей факт без обґрунтувань. Ви можете розглянути доведення цього факту на заняттях математичного гуртка. Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв’яжемо його:

3x 2 (2x 8) 5; 3x 4x 16 5; 7x = 21; x = 3. Підставимо знайдене значення змінної x у рівняння y = 2x – 8. Отримаємо: y = 2*3 – 8; y = –2. Пара чисел (3; –2) — шуканий розв’язок.

Описаний тут спосіб розв’язування системи називають **методом підстановки**.

Отже, щоб розв’язати систему двох лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;

2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;

3) розв’язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;

4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;

5) обчислити значення другої змінної;

6) записати відповідь.

Посилання на тести для перевірки власних знань

Від авторів

Дякуємо, що ознайомились з нашими невеликими нотатками з вивчених тем алгебри 7-ого класу, бажаємо успіхів на вступному турі в КЗ “Науковий ліцей імені Анатолія Лигуна”, ми віримо в вас!

Вступайте в наш Науковий ліцей імені Анатолія Лигуна!

ну будь ласка... 👉👈