

Chotic Pendulum Experiment

변윤성

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea

E-mail: may670@snu.ac.kr

Abstract.

Chaotic Pendulum은 2개의 용수철과 금속 원판을 이용한 동역학계를 구성하여, 강제 진동자를 이용해 Chaotic Oscillation을 관측할 수 있는 실험이다. 구성된 역학계를 Capstone 분석 프로그램을 통해 얻어진 각변위 데이터를 분석하여, 비선형/비조화 역학계를 실험적으로 특성화하는데 익숙해지는 것을 목적으로 실험을 수행하였다. 주어진 초기조건에서 Double Pendulum의 거동을 관측하여 비선형 damping oscillation의 경우와 상전이의 양상에 대한 분석을 진행하였으며, 강제 진동자를 통해 driving force를 주어 에너지가 유입되는 경우 나타나는 Chaotic phase를 Poincare plot과 FFT분석을 통해 정량적으로 분석하였다. 이를 통해 비선형 역학계에서 일어나는 혼돈 현상을 이해할 수 있었고, 물리학에서 중요한 부분을 차지하는 상 경계에서 관측되는 현상들과 Chaotic한 현상들에 대한 이해를 높일 수 있었다.

(Dated: 4 June 2022)

1. Introduction

1.1. 복합 진자의 운동 방정식

본 실험에서 사용되는 역학계는 Figure 1와 같다.

위 역학계에 작용하는 힘들을 고려하여 역학적 에너지를 계산하면 Equation 2와 같다.

$$T = \frac{1}{2}(I + mR_m^2)\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$V = mgR_m(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad (2)$$

위 식에 본 역학계의 실의 길이 구속 조건을 적용하고, 외부 구동력 및 감쇠가 없는 상황에서 라그랑지안 $L = T - V$ 를 변수분리하여 식을 전개하면 Equation 3를 얻는다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -mgR_m\sin\theta - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} - R_1\theta) \quad (3)$$

반면, 감쇠 항 및 외부 구동력이 있는 상황에서는, 퍼텐셜에 시간과 속도 항이 추가 되므로, non-holonomic case에 대해 운동방정식을 구하면 Equation 4와 같다.

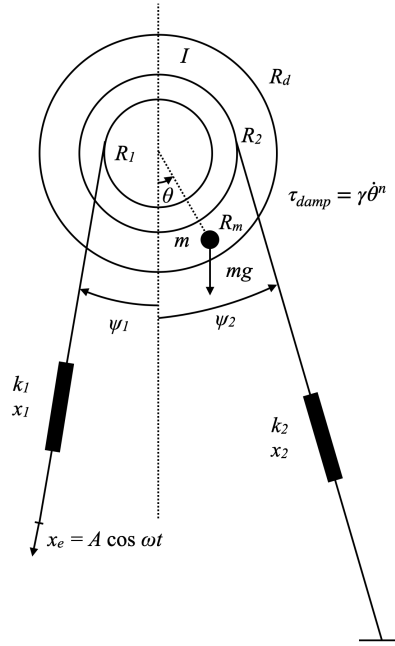


Figure 1: Chaotic Pendulum 실험의 동역학계 구성도.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -mgR_m \sin\theta - \gamma\dot{\theta}^n - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} + A\cos\omega t - R_1\theta) \quad (4)$$

위 미분방정식의 일반해는 Equation 5과 같이 나타난다.

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma_{eff}t} \cos(\omega_d t + \phi) + B \quad (5)$$

위 일반해를 모함수로 사용해 실험으로 얻어진 데이터와 비교 분석을 통해 진동 결과를 회귀할 수 있고, 이를 통해 ω_d , γ_{eff} , Q-factor 등의 값을 계산할 수 있다.

1.2. 상 전이 이론

상 전이 이론은 Lev Landau에 의해 정립된 이론으로, 많은 곳에 적용할 수 있는 Universal한 평균장 이론을 통해 상 전이를 기술할 수 있는 이론이다. 상 전이 이론에 따르면, 자유에너지 F 는 Equation 6를 통해 기술될 수 있다.

$$F(T, \eta) = F_0 + a(T)\eta^2 + c(T)\eta^3 + \frac{b(T)}{2}\eta^4 \quad (6)$$

위 식에서 T 는 온도, η 는 order parameter로, 본 실험의 경우는 θ 에 해당된다. 온도가 변화하며 나타나는 계수의 변화에 따라 상 전이가 일어나게 되는데, 자유에너지의 개형에 따라 나타나는 상의 개수와 평형 상태를 찾을 수 있으며, 임계 온도 및 상 전이 온도를 얻어낼 수 있다. 또한, 자유에너지의 미분계수가 0이 되는 지점, 즉 $\frac{F}{\eta} = 0$ 이 되도록 하는 지점의 order parameter인 η_0 에 대해 임계지수 β 가 존재하는데, 이 변수들은 Equation 7을 만족한다.

$$\eta_0 \propto |T - T_c|^\beta \quad (7)$$

상 전이에 영향을 줄 수 있는 변수는 온도 외에도 존재하는데, 본 실험에서는 온도 및 감쇠 상수를 조절하며 상도표를 얻을 수 있었다.

본 실험에서 사용되는 동역학계는 열역학계와 1:1 대응이 되지 않기 때문에, Equation 9와 같이 에너지 대신 유효 에너지인 E_{eff} 를 대입한 자유 에너지를 얻어야 의미 있는 상전이 분석이 가능했다.

$$F = E_{eff} - TS \quad (8)$$

$$E_{eff} = V(\theta) + \frac{T}{T_c} K(\theta) \quad (9)$$

1.3. 위상 공간

운동 상태를 나타내기 위해 사용되는 위상공간의 플롯을 통해 여러 정보를 얻을 수 있다. 단조화 진동자의 경우 위상 공간에서 타원형의 궤도를 나타내며, 타원의 장반경은 최대 운동에너지, 단반경은 최대 퍼텐셜에너지의 정보를 담고 있다. 이에 따라 에너지를 잃는 damping oscillation의 경우, 운동이 나타내는 등에너지선은 안쪽으로 파고드는 형태의 궤도를 그린다. 또한, 불확정성 원리에 따라 모든 접근 가능한 미시상태는 0이 아닌 유한한 면적을 가지는데, 때문에 닫힌 궤도에 감싸진 면적은 계가 가지는 상태수를 의미하며, 이를 바탕으로 엔트로피를 Equation 10를 통해 계산할 수 있다.

$$S = k_B \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (10)$$

여기서 A 는 위상공간에서 등에너지선 내부의 면적, A_0 는 dimensionless를 위해 도입된 위상공간에서 하나의 미시상태가 차지하는 면적이다.

퍼텐셜 에너지가 0이 되는 평형점에서의 운동에너지를 역학적 에너지로 간주하여 얻어내면, Equation 11를 통해, 단위 에너지를 더 얻었을 때 엔트로피의 변화량으로 정의되는 계의 통계역학적 온도를 계산할 수 있다.

$$T^{-1} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (11)$$

위의 일련의 계산 과정을 통해, 계의 열역학을 분석할 수 있다. 특히 본 실험과 같은 감쇠 진동하는 진동자의 경우, 감쇠의 크기를 통해 계가 에너지를 잃어버리는 속도를 조절하고, 이를 바탕으로 상을 점유하는 양상을 관측할 수 있다. 또한, 강제 진동자를 이용하여 에너지를 공급해 주는 경우, 더 큰 궤도를 그리거나 혹은 특정 조건에서 Chaotic Phase를 가지는 것 또한 관측할 수 있다.

1.4. Chaotic Phase

Chaos Thoery는 잘 정의된 법칙에 의해 기술될 수 있지만, 날씨를 예측하는 것과 같이 초기 조건에 아주 민감하여 격렬한 개형 변화를 일으키는 경우를 다룬다. 특정 동역학계를 혼돈계로 간주하기 위해서는 다음의 세 가지 조건이 필요하다고 알려져 있다.[1]

(1)초기 조건에 민감하고, (2)Topologically Transitive하며, (3)Dense Periodic Orbit을 가지는 것이다. Chaotic Phase임을 판단하기 위해서는 Poincare Plot을 이용해야 한다. Poincare Plot은, 주기함수와 같은 process 내에서의 자기 유사성을 정량화하는 데 사용되는 일종의 반복 플롯이다. 데이터를 보다 더 높은 차원의 상태 공간에 포함시켜 Poincare Plot을 통해 분석을 하면, randomness와 chaotic phase의 경우를 구분할 수 있다고 알려져 있다.[2]

2. Method & Result

본 실험은 Figure 1와 같이 구성된 동역학계를 이용해 진행하였으며, Capstone Analysis를 이용하여 촬영을 하고 데이터를 얻었다.

2.1. Potential Characterization

먼저, Double Pendulum의 퍼텐셜을 실험적으로 얻기 위한 측정을 수행하였다. 퍼텐셜 에너지와 같은 개형의 그래프를 얻기 위해, 각도에 따른 각속도의 제곱을 플롯하여 관측한 뒤 수치해석으로 운동방정식을 풀어 나타낸 결과와 비교하였고, Figure 4에 나타내었다.

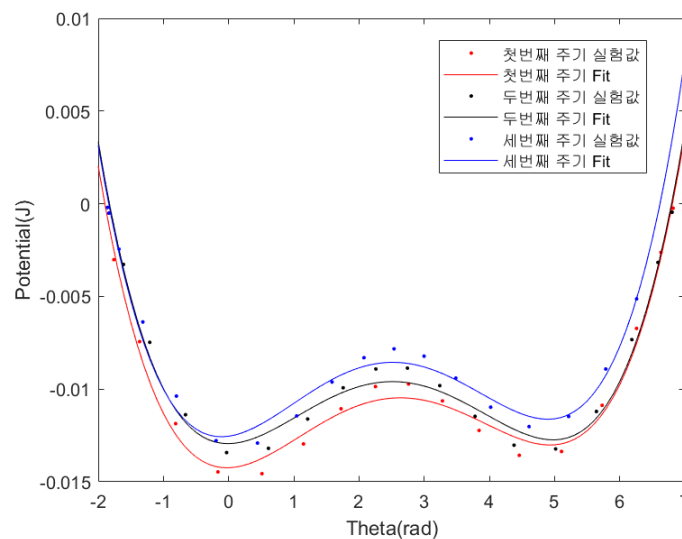


Figure 2: 퍼텐셜 에너지의 그래프 개형. 감쇠에 따라 퍼텐셜 에너지가 감소하는 형태를 띈다. R^2 값은 첫번째 주기부터 0.985, 0.981, 0.980이다.

시간이 흐름에 따라 감쇠로 인해 운동 에너지가 감소하고, 퍼텐셜 에너지가 증가하는 개형을 볼 수 있다.

2.2. Damped Oscillation

감쇠를 주는 자석과 회전체 간의 거리를 통해 감쇠를 조절해가며 감쇠 진동을 관측하였다. 이 때, 실의 길이는 최대가 되도록 설정하였고, 진동 결과의 시간에 따른 각도의

변화를 관측하였다. 본 실험의 경우, 감쇠는 $\gamma\dot{\theta}^n$ 으로, 선형 감쇠가 아니다. $n=1$ 인 경우, 즉, Q-factor가 $\dot{\theta}$ 에 대해 독립인 경우에는 $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, 즉 $\omega_d^2 + \gamma^2 = \omega_0^2 = \text{constant}$ 의 선형관계를 만족할 것이고, $n \neq 1$ 인 경우에는 Q-factor가 $\dot{\theta}$ 에 의존하며, 즉 비선형적인 감쇠를 보여준다. 본 실험의 경우 전체 구간에서 속도의 변화에 따라 Q-factor가 변화하기 때문에, 전체 구간에서 감쇠 진동의 회귀모형인 Equation 5이 맞지 않는다. 이를 보정하기 위해서 진동 결과를 $\dot{\theta}$ 의 변화가 작아 Q인자 및 γ_{eff} 가 일정하다고 간주가 가능한 구간에 대해서 fitting을 해주었고, 각 구간에서 γ_{eff} 와 ω_d 를 계산하여 결과를 Figure 3에 나타내었다.

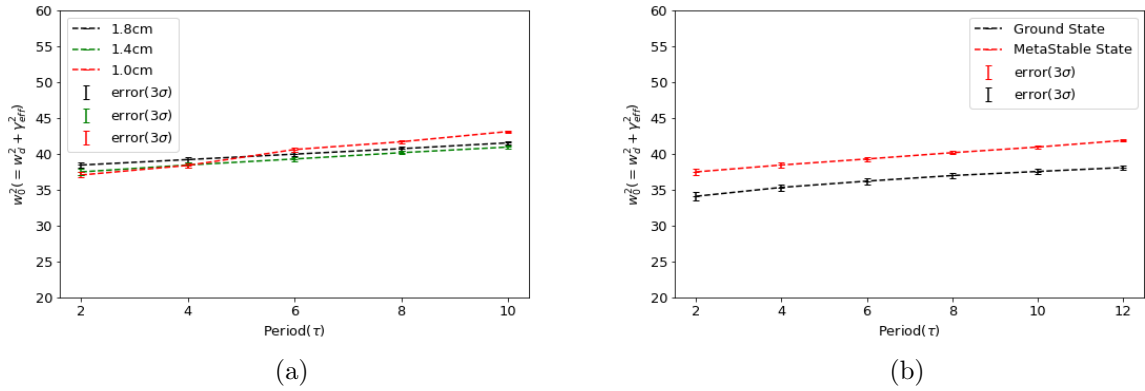


Figure 3: (a) 서로 다른 세 가지 자석-회전체 거리에 대한, 구간별 ω_0^2 의 개형. ω_0^2 가 상수에 가까운 것을 확인할 수 있다. (b) 자석-회전체 거리가 1.4cm일 때, Ground state와 MetaStable State에 대한 구간별 ω_0^2 의 개형. 마찬가지로 ω_0^2 가 상수에 가까운 것을 확인할 수 있다.

2.3. Linearization of Data - Practice

서로 다른 세 가지 자석-회전체 거리에 대해서, 위 실험의 결과로 계산된 Q-factor와 진동수 간의 선형 관계를 찾은 뒤 플롯한 결과는 Figure 4와 같다.

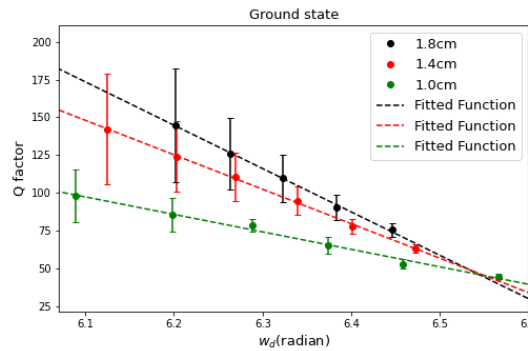


Figure 4: Q인자와 진동수 간의 선형 관계를 나타낸 그림. R^2 값은 1.0cm부터 1.8cm까지 순서대로 0.9893, 0.9984, 0.9978이다.

2.4. Observation of Phase Transition

본 역학계는 Landau 이론에 따라 자유 에너지를 이용해 상 전이를 기술할 수 있다. order parameter를 θ 로 두고 Equation 9를 이용해 계의 자유 에너지를 계산한 각 상에서의 온도와 엔트로피를 계산하여 나타낸 그림은 Figure 5와 같다.

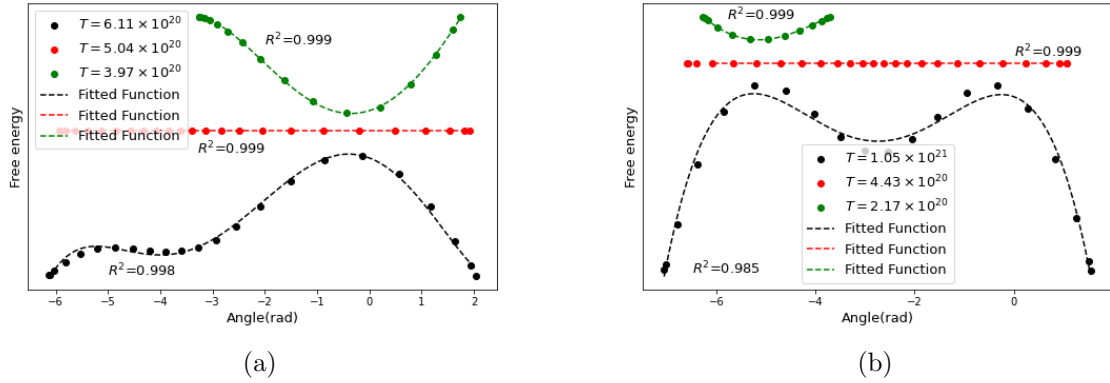


Figure 5: (a)초기의 Doubly Trapped 구간에서 Ground 상태로의 상전이가 일어나는 경우의 자유 에너지. R^2 의 값은 아래에서부터 순서대로 0.985, 0.999, 0.999이다. (b)초기의 Doubly Trapped 구간에서 Metastable 상태로의 상전이가 일어나는 경우의 자유 에너지. R^2 의 값은 아래에서부터 순서대로 0.998, 0.999, 0.999이다.

위 그림에서 fitting을 통해 각 온도에서 자유에너지의 order parameter η_0 를 계산하여 나타낸 결과는 Figure 6와 같다.

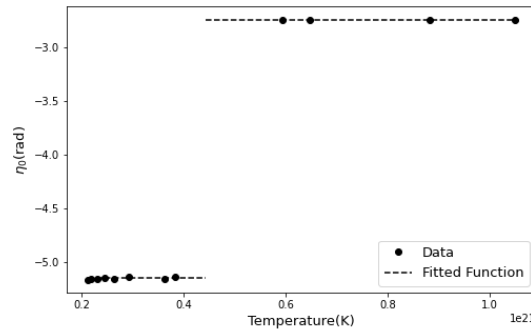


Figure 6: 각 온도에 대한 η_0 의 그래프.

위 그림과 Equation 7의 비교를 통해, Phase Transition 상황에서의 임계 지수 $\beta = 0$ 임을 확인할 수 있었다.

2.5. Resonance Curve

강제 구동기를 작동하여 Chaotic Phase를 관측할 경우, 강제 구동기가 퍼텐셜 에너지를 흔드는 과정에서 1개의 공명점과 특이점이 발생한다. 강제 구동기의 전압을 바꾸어가며

진동을 관찰하고, 시간이 충분히 지난 뒤 정상상태에 진입했을 경우의 진폭을 측정하여, 강제 구동기와 진폭의 관계를 나타낸 그래프는 Figure 7와 같다.

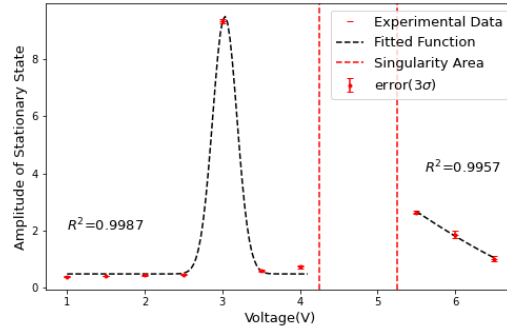


Figure 7: 강제 구동기의 전압과 정상상태의 진폭의 관계 그래프. R^2 값은 특이점 발생 이전의 구동전압에서는 0.9987, 정상상태 이후의 구동전압에서는 0.9957이다.

Resonance Curve 상에서 진폭이 매우 높아지는 3.0V의 근방에서는 강제 진동의 에너지 공급으로 인해 Steady Amplitude가 존재하지 않고, Chaotic Behavior를 가지는 것을 확인하였고, 이것이 Chaotic하다는 것을 가시적으로 나타내기 위해 Phase Diagram과 Poincaré Plot을 통해 나타낸 것은 Figure 8과 같다.

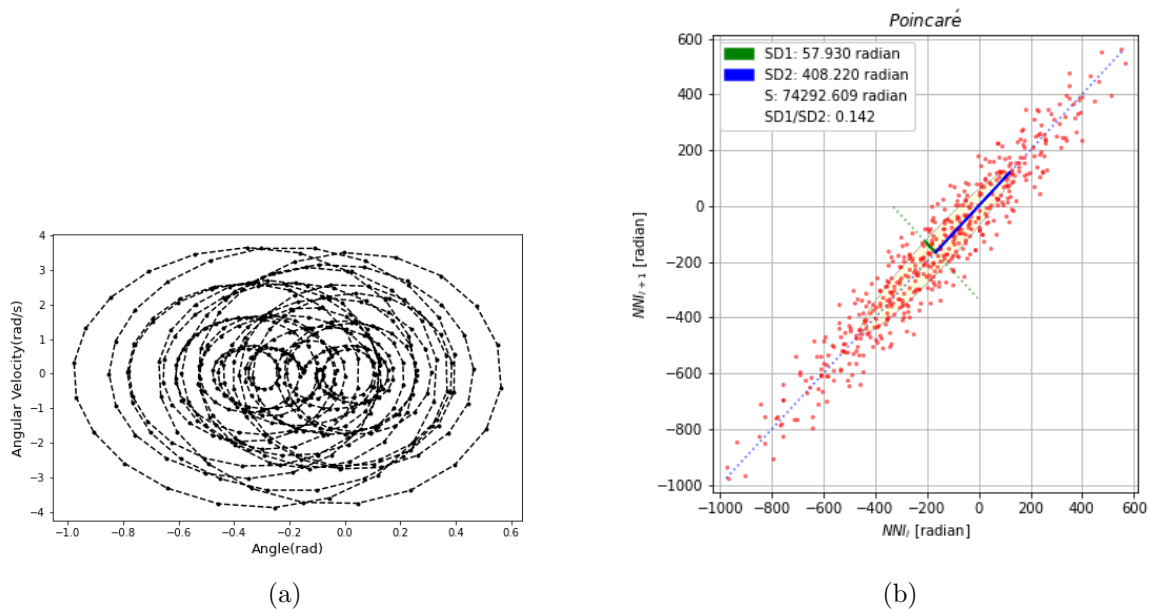


Figure 8: (a)공명점 근처인 3.0V에서의 Phase Diagram. Phase Diagram의 등에너지선이 서로 cross하는 것을 확인할 수 있다. (b)3.0V에서의 Poincaré Plot.

3. Discussion

3.1. Negative Specific Heat

본 실험에서 사용한 역학계는 실제 열역학계가 아니기 때문에, 그럼에도 유효한 분석을 수행하기 위하여 자유 에너지를 구하는 과정에서 에너지 대신 유효 에너지를 사용하였고, 열역학 제 1,2법칙을 만족하는 가짜 에너지와 엔트로피를 계산하여 온도를 계산하였다. 때문에 본 역학계에서 계산된 온도는 열역학 제 0법칙을 만족하지 않고, 음의 비열이 발생한다. 즉, 음의 비열로 인해서 에너지가 커질 때 온도가 감소하는 구간이 발생하는데, 이것을 Figure 9에 나타내었다.

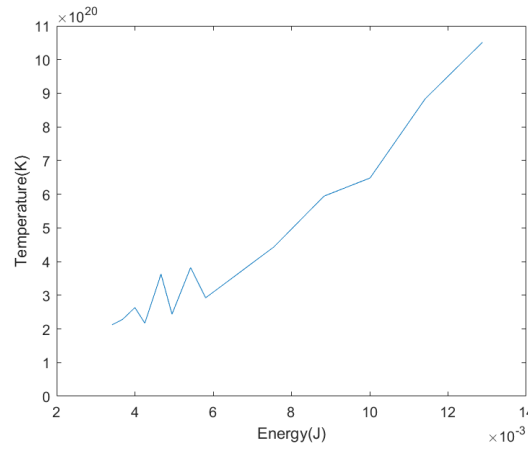


Figure 9: Doubly trapped state에서 Metastable State로의 전이가 일어나는 상황에서 계산된 에너지에 따른 온도의 그래프. 임계점 근처에서 음의 비열이 발생하여 에너지와 온도가 비례관계를 보이지 않는 구간이 존재한다.

3.2. Singularity Area

강제 구동기를 작동시켜 진동을 관찰하는 실험에서, 강제 구동기의 전압이 4.5V, 5.0V 인 경우 정상상태의 진폭이 수렴하지 않는 특이점이 발생하는 것을 확인하였다. 특이점이 발생하는 구간에서의 시간에 따른 θ 의 그래프는 Figure 10와 같다.

3.3. Error Analysis

본 실험은 주어진 초기조건에 따른 Oscillation의 변화를 관측하는 실험이었다. 초기조건이 조금만 달라져도 같은 결과를 내지 않으며, 특히 Chaotic Phase는 초기조건에 아주 민감하게 반응하여 격렬한 개형 변화를 일으키기 때문에, 동일한 초기조건을 주는 것은 불가능하다고 말할 수 있다. 때문에, 한 가지의 task 내에서는 필수적으로 동일한 실험의 데이터를 이용해 분석해야 하기 때문에, random error를 줄일 수 있는 가장 좋은 수단인 실험의 반복을 수행하지 못했다. 하지만, 안시 관측이 아닌 Capstone software와 카메라를 통해 정량적으로 데이터를 얻을 수 있었기 때문에, 실험을 반복하지 못하는 데에서 오는 random error는 무시 가능한 수준이라고 판단하였다. 다만, 초기조건을 완벽하게

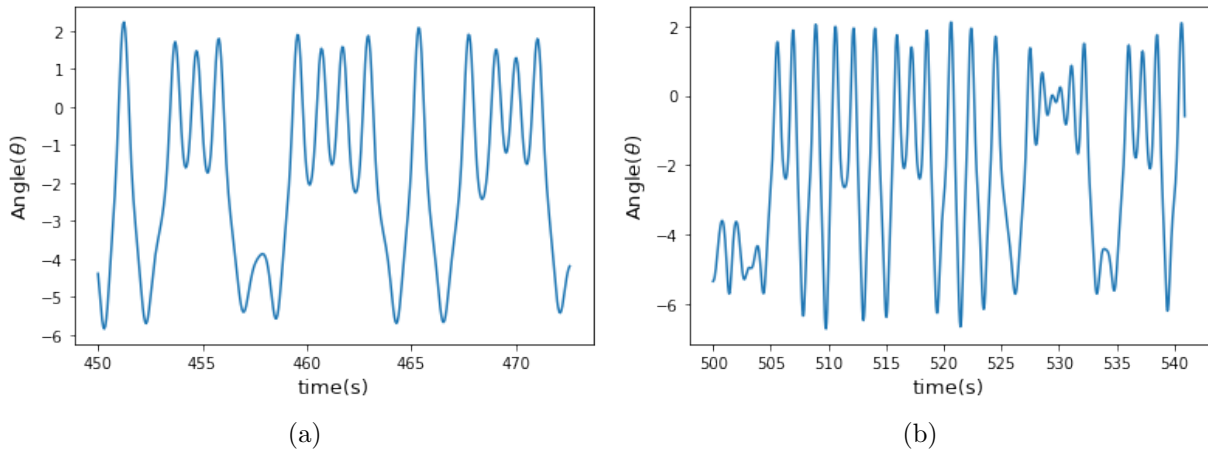


Figure 10: (a) 4.5V에서의 시간에 따른 θ 의 그래프. (b) 5.0V에서의 시간에 따른 θ 의 그래프.

통제하지 못하는 데에서 오는 오차는 존재하였다. Doubly trapped state에서 Ground와 Metastable state로 빠지는 경우를 관측하는 실험에서, 두 번의 실험에서 온전히 같은 초기조건을 주지 못했기 때문에 fitting과 분석 과정에서 오차가 발생했을 것이라고 말할 수 있다. 또한, 실험을 하기 위해 구성된 동역학계는 완전히 닫힌 계가 아니다. 주위의 공기의 움직임으로 인한 공기저항이 존재하여 이론적인 값과 다른 random error를 만들 것이고, 마찬가지로 이론적으로는 oscillation이 일어나는 도중에 생기는 마찰을 무시하였지만, 실제로는 disk와 실 사이에 friction이 존재하기 때문에 오차가 발생했을 것이라고 생각할 수 있었다.

4. Conclusion

본 실험은 두 개의 용수철과 강제 구동기를 이용하여 열역학 제 1법칙과 2법칙을 만족하는 유사 열역학계를 구성하고, 계에서 일어나는 상전이 현상과 강제 구동기를 통한 에너지 공급으로 발생하는 Chaotic Behavior를 분석하였다. 두 개의 용수철로 인해 만들어지는 Doubly trapped state, Metastable state, Ground state 총 세 가지의 상이 서로 전이되는 과정에서 Free energy와 엔트로피, 온도 등을 계산하여 이론적인 현상과 비교 분석하였다. 또한, 강제 구동기를 이용하여 나타나는 공명점과 특이점을 관측하여 이론과 비교하고, 공명점 근처에서 일어나는 Chaotic Behavior를 Poincare Plot을 통해 정성적으로 나타내었다. 본 실험을 통해 비선형 역학계에서 나타나는 혼돈 현상과 상 경계에서 일어나는 현상들을 더욱 잘 이해할 수 있었다.

References

- [1] D. of Physics Astronomy, "Chaotic Pendulum Experiment Manual" 2022
- [2] Yale Fractal Geometry Course Notes. <https://users.math.yale.edu/>