

Lock-in detection and Hall Effect

변윤성

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea
E-mail: may670@snu.ac.kr

Abstract. 본 실험에서는 Lock-in Detection을 통해 신호에서 노이즈를 제거하여 원하는 신호만을 얻는 실험을 수행하였다. Lock-in Detection을 정밀하게 수행하기 위하여 사전에 3dB frequency, 관측하기 최적이 되는 Phase, DC offset Stability 등의 관측을 진행하였으며, 이를 바탕으로 최적의 Lock-in 조건 하에서 노이즈를 걸러내 원하는 신호를 검출할 수 있음을 확인하였다. 또한, 앞에서 구해진 최적 조건 하에서 자기장을 걸어주어 흡 효과를 관측하고, 자기장의 세기와 자기 모멘트를 계산하였다. 일련의 실험 과정을 통해 물리 실험에서 중요한 역할을 하는 Osilloscope와 Amplifier, Function generator 등의 실험 기기를 다루는 방법을 포함한 Lock-in의 원리를 더욱 잘 이해할 수 있었다.

(Dated: 31 March 2022)

1. Introduction

1.1. Lock-in Detection

물리 실험에서 실험계는 필연적으로 오차와 Noise를 포함한다. 실험 신호가 아주 작은 경우 관측하고자 하는 신호가 노이즈와 합쳐져서 관측이 정확하지 않을 수가 있는데, Lock-in Detection을 통해 노이즈는 걸러주고 원하는 신호만을 증폭하면 더욱 정확하게 관측할 수 있다. 본 실험에서는 Lock-in 실험을 위해서 Teachspin 사의 Lock-in 실험 키트를 사용하였으며, 본 키트를 사용하여 각 장치의 기능과 특성을 확인하는 실습을 진행한 후, Lock-in을 통하여 노이즈로부터 원하는 신호를 걸러주는 실험을 진행하였다. Lock-in Detection의 원리는 Figure 1과 같다.[2]

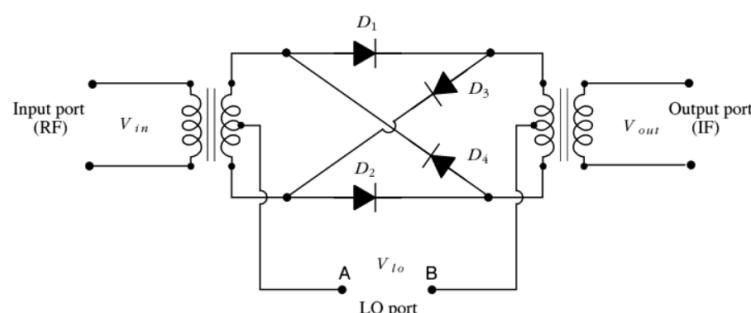


Figure 1: Double Balanced Mixer의 회로 개요도. $V_{out} = V_{in} \times \text{sgn}(V_{lo})$ 으로 output이 주어지는 구조이다. V_{in} 은 입력 신호, V_{lo} 는 레퍼런스 신호, V_{out} 는 출력 신호이다.

Lock-in detection은 기본적으로 노이즈는 '자명하지 않은 정보'를 전혀 싣지 않고 있음을 가정하는 데에서 출발한다. 이 경우 노이즈는 임의의 시간 가격에 대한 시간적분을 하면 기댓값이 0이 되기 때문에 '자명하지 않은 정보'를 싣고 있는 관측하고자 하는 신호의 진폭만을 얻을 수 있다. 실제 실험에서는 Figure 1에서 주어진 것과 같은 구조를 가진 DBM(Doubled Balanced Mixer)을 사용하였다.

주파수가 섞여 입력된 신호의 주파수를 f_1 , 관측하고자 하는 신호의 주파수를 f_2 이라고 한다면, 비선형 믹서를 통해 신호 두 개를 섞을 경우 $|f_1 - f_2|$ 와 $f_1 + f_2$ 의 신호를 얻게 되는데, 이를 low pass filter를 통해 $f_1 + f_2$ 의 신호를 걸러준 뒤 $f_1 = f_2$ 인 경우를 제외한 노이즈들은 average-out되어 사라지므로 원하는 주파수의 파장을 얻을 수 있다. 잡음이 큰 환경에서 관측하고자 하는 주파수를 인위적으로 걸어주어 Lock-in detection 과정을 거친다면, 다른 주파수의 신호를 모두 배제하고 원하는 주파수의 신호만을 얻어낼 수 있으므로, 이러한 기법은 광학적 측정 등의 여러가지 물리량 측정에 적용될 수 있다.

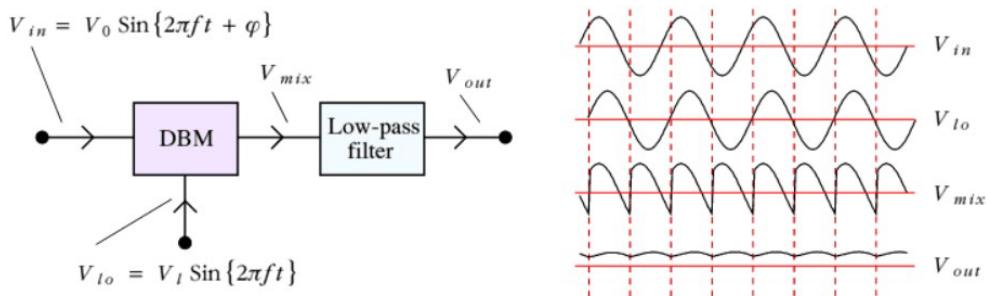


Figure 2: DBM을 사용한 Lock-in amplifier 회로의 개요도 및 예시.

Figure 2의 예시를 보면 V_{in} 과 V_{out} 의 위상 차이에 따라 V_{out} 이 완전히 달라지게 되는데, 예를 들어서 V_{in} 과 V_{out} 의 위상이 180° 만큼 차이가 나서 골과 마루가 완전히 겹쳐지게 된다면 주파수가 일치하더라도 평균값은 0이 나오게 된다. 이처럼 Lock-in detection은 주파수에 의존할 뿐 아니라 위상 차이에도 매우 민감하게 반응하기 때문에, Lock-in detection 실험을 하기에 앞서 Lock-in의 최적의 조건을 찾아낸 후 진행하였다.

1.2. Hall Effect

홀 효과란 도체 혹은 반도체의 내부에 흐르는 전류에 수직한 방향으로 자기장이 걸렸을 때, 전류에 수직한 방향으로 전위차가 형성되는 현상이다. 그 현상을 그림으로 나타내면 Figure 3과 같다.

홀 효과의 기본적인 원리를 살펴보면, Figure 3와 같이 도체 시료에 전류 i 를 위에서 아래 방향으로 흘려주면서 이에 수직하게 페이지를 뚫고 들어가는 방향으로 자기장을 걸었다고 가정했을 때, 아래에서 위로 움직이는 전자들은 로렌츠 힘에 의해 진행방향이 오른쪽으로 휘게 되므로 전자의 밀도가 왼쪽보다 상대적으로 오른쪽이 더 높게 형성될 것이다. 양전하의 밀도로 생각을 해보면 왼쪽이 오른쪽보다 양전하의 밀도가 높아지게 되는데, 이로 인하여 왼쪽에서 오른쪽으로의 전기장 E 가 형성이 되고, 이는 전위차를 만든다. 결국 Figure 3-(b)와 같이 전기장에 의한 힘은 왼쪽으로, 자기장에 의한 힘은 오른쪽으로 작용하게 되는데, 이 두 힘이 평형 상태를 이루게 되면 전자는 더 이상 움직이지

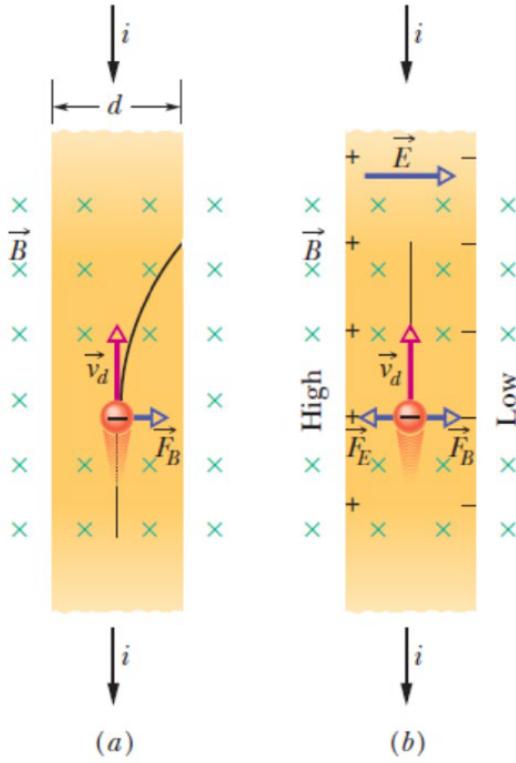


Figure 3: Hall Effect의 구조.

않으며, 그 경우 Hall Effect의 실험계는 Eq. 1과 2를 만족한다.

$$V_H = Ed, \quad qE = qvB \quad (1)$$

$$\therefore \frac{V_H}{vd} = B \quad (2)$$

Eq. (1), (2)에서 V_H 는 훌 효과로 인해 도체 시료에 걸리는 전압 차이고, v 는 전류의 속도, d 는 시료의 너비이다.

본 실험에서는 자기장의 생성과 관측을 위해 네오디뮴 자석과 Hall 소자를 사용하였다. 네오디뮴 자석이 생성하는 자기장의 세기를 계산하기 위하여 자석을 cubic magnetic field source로 가정한 뒤 단일 Dipole moment를 공간에 대해 적분하는 방법을 통해 계산하였고, 그 결과는 Eq. 3과 같다.

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{\pi abh} \left[\tan^{-1} \left(\frac{ab}{2t\sqrt{4t^2 + a^2 + b^2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{ab}{2(t+h)\sqrt{4(t+h)^2 + a^2 + b^2}} \right) \right] \quad (3)$$

계산 과정은 SM에 첨부하였다.

2. Method & Result

본 실험에서는 Teachspin 사의 Lock-in 실험 키트를 포함한 Function generator, Lock-in detector, Oscilloscope, Power supply 등을 사용하여 총 8가지의 실험을 진행하였다. 먼저 Lock-in 효과가 가장 잘 일어나는 최적의 조건을 찾기 위하여 Lock-in Amplifier

Calibration 실험을 진행하였고, 이 실험에서 얻어낸 Lock-in 최적의 조건들을 바탕으로 실제로 노이즈를 제거하여 원하는 신호만을 얻어내는 Lock-in detection 실험을 진행한 뒤, 자석과 홀 소자를 이용하여 Hall effect를 관찰하고 Lock-in 을 통해 자기장의 세기를 직접 계산하는 실험을 진행하였다. 자세한 실험의 설계와 결과는 아래와 같다.

2.1. Experiment I : Lock-in Amplifier Calibration

Lock-in detection은 위상과 주파수에 큰 영향을 받기 때문에, 최적의 Lock-in 조건을 찾아내기 위해 사전에 최적의 값들을 찾아내는 실험을 수행하였다.

2.1.1. Preamplifier의 주파수 의존성 확인

Preamplifier는 모든 주파수 영역에서 이상적으로 작동하지 않고, 특정한 주파수 영역 밖으로 벗어나면 Gain이 감소하기 시작한다. 그렇기 때문에 주어진 각각의 Gain에 대해서 Gain이 3dB만큼 줄어들기 시작하는 주파수인 3dB frequency를 찾아내는 실험을 진행하였다. 3dB frequency를 찾아내는 실험의 회로 개요도는 Figure 4와 같다.

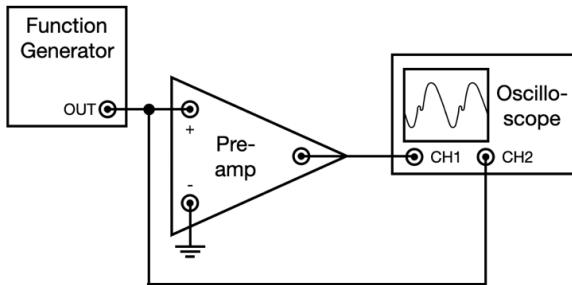


Figure 4: Preamp Gain의 주파수 의존성 확인 실험의 회로 개요도.

Figure 4와 같이 회로를 연결한 뒤, Oscilloscope에 나타나는 두 가지의 신호를 데이터로 저장한 뒤 한 주기당 Gain을 계산하여 평균을 내는 방식으로 Gain 값을 측정하였다. Figure 5는 Gain 5와 50에서의 측정과 Fitting 결과를 그래프로 나타낸 것이다.

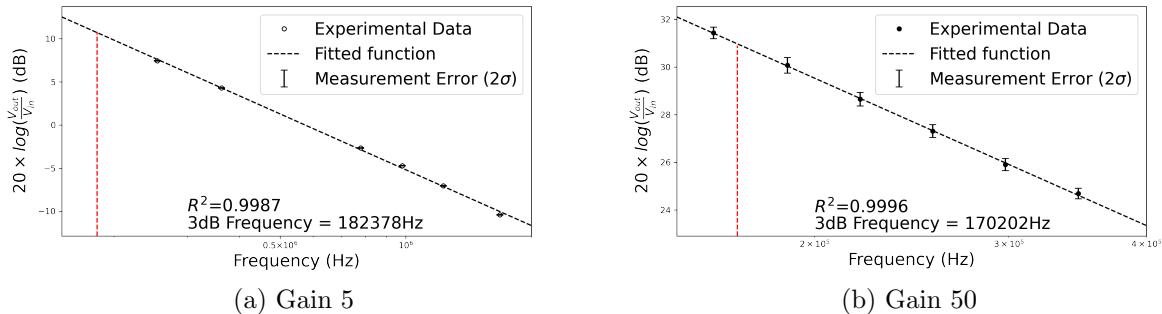


Figure 5: Preamplifier에서 주파수의 변화에 따른 Gain의 변화

Figure 5에 나타난 Fitted function은 선형회귀의 1차 최소 자승법을 사용하여 선형 Fitting을 수행한 결과이다.[1] Preamplifier의 Gain 5, 50에 대하여 측정을 수행한 결과, 주어진 Preamplifier의 Gain과 신호의 진동수는 로그 스케일에서 선형적인 관계를 보이는 것으로 나타났다.

2.1.2. Phase Shifter의 비이상 거동

위에서는 Preamplifier에서 주파수에 따른 Gain의 변화를 살펴보았다. 이와 마찬가지로 Phase Shifter 또한 주파수에 따라 약간의 틀어짐이 발생하기 때문에 주파수의 변화에 따른 위상의 변화 또한 측정해 보아야 한다. 주파수와 위상 간의 변화 관계를 측정하기 위해 Figure 6와 같이 회로를 구성하였다.

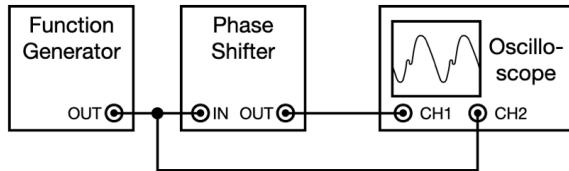


Figure 6: Phase Shifter의 비이상 거동 확인 실험의 회로 개요도.

위와 같이 회로가 구성된 상태에서 Phase를 0으로 고정한 뒤 주파수의 변화에 따른 실제 신호의 위상차를 측정하였고, 그 결과는 Figure 7와 같다.

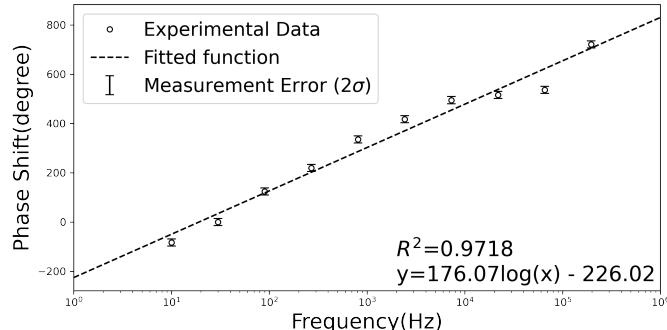


Figure 7: 주파수의 변화에 따른 입/출력 신호의 위상차 그래프. R^2 의 값은 0.91718이다.

위상과 주파수의 관계를 선형 회귀를 통해 분석한 결과 위상은 주파수의 로그에 선형적으로 비례하며 변화한다는 것을 확인할 수 있었다.

2.1.3. Amplitude Detector를 사용한 DBM 실험

Input signal과 Reference signal 사이의 위상차가 관측에 큰 영향을 미친다. 위상이 바뀜에 따라 Lock-in Detector를 통과한 신호의 위상이 어떻게 변화하는지를 알아보기 위해 Figure 8와 같이 회로를 구성한 뒤, 레퍼런스 시그널의 위상을 90도 단위로 변화시키면서 나타나는 출력 신호의 모양을 확인한 결과는 Figure 9와 같다.

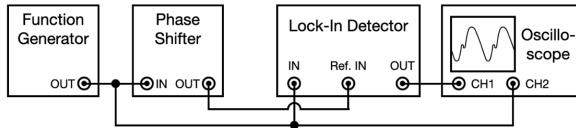


Figure 8: DBM 실험의 회로 개요도.

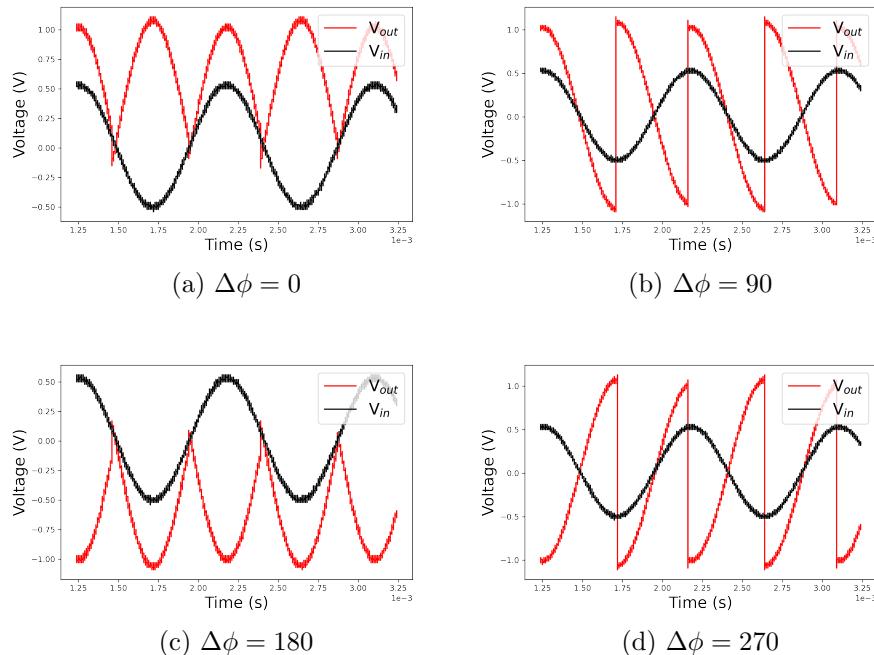


Figure 9: 위상의 차이에 따른 신호의 변화.

2.1.4. Low-Pass Amplifier 실험

Lock-in 검출을 하기 위한 Calibration 과정의 마지막 단계로서, Amplitude Detector에 장착할 저역통과 증폭필터에 대한 분석이 필요하다. 본 분석을 위하여 구성한 회로도의 개요는 Figure 10와 같다.

이 장치는 시상수, roll off, de offset을 조절할 수 있다. 우리는 총 6가지의 roll off/시상수 조합에서 주파수의 변화에 따른 Gain의 변화를 측정하였고, roll off 혹은 시상수를 고정시킨 상태에서 나머지 변수를 변화시켰을 때 나타나는 Gain 스펙트럼의 개형에 대해서 분석하였다. 그 결과는 Figure 11와 Figure 12와 같다.

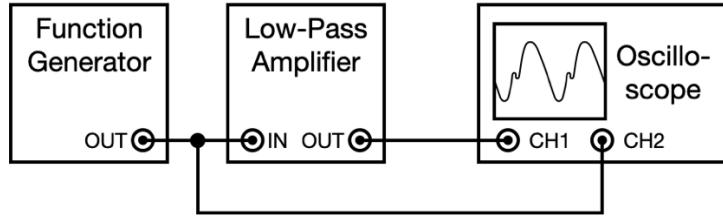


Figure 10: Low-Pass Amplifier 실험의 회로 개요도.

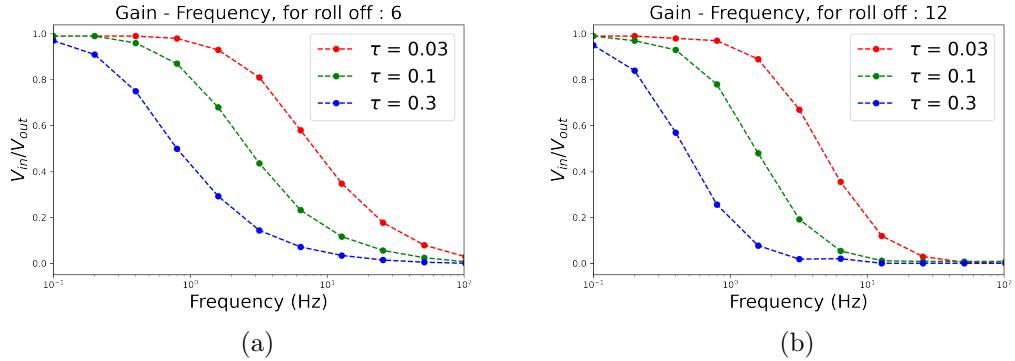


Figure 11: roll off를 고정시켰을 때, 시상수에 따른 Gain - 주파수의 개형 변화

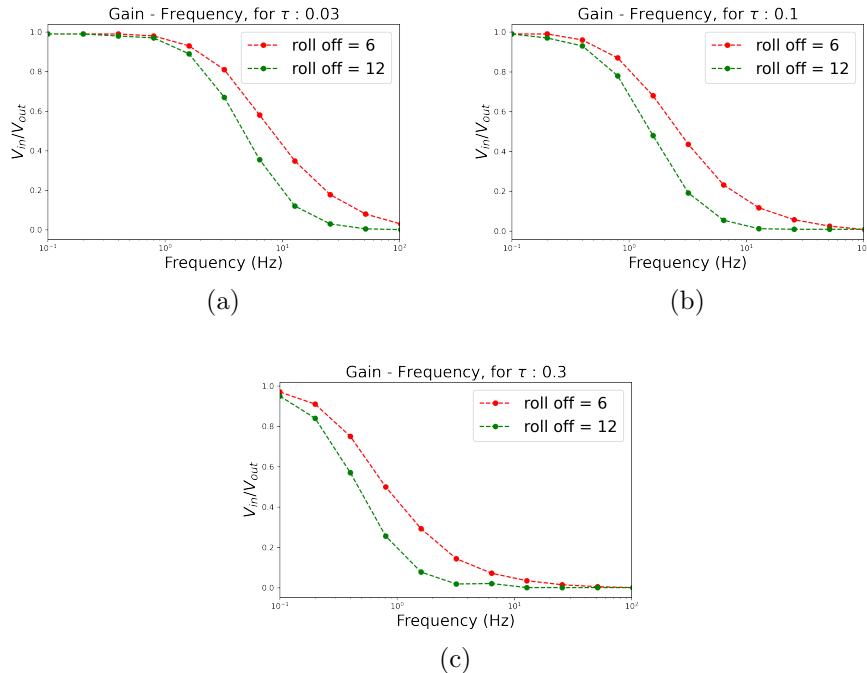


Figure 12: 시상수를 고정시켰을 때, roll off에 따른 Gain - 주파수의 개형 변화

2.2. Experiment II : Lock-in Detection

앞선 일련의 실험들에서 실험 장치의 Calibration 과정을 통해 기기가 정상적으로 작동하는 범위를 알려주는 3dB frequency의 값과 최적의 Lock-in이 발생하는 조건 등을 찾았으며, 이를 바탕으로 최적의 Lock-in 회로를 구성하여 원하는 신호에서 Noise를 제거하는 Lock-in Detection 실험을 수행할 수 있었다.

2.2.1. FFT를 이용한 Noise + Signal 스펙트럼 관찰

먼저, Noise Generator를 사용해 함수 발생기에서 입력되는 신호에 노이즈를 섞고 관찰하는 실험을 수행하였다. Noise + Signal 스펙트럼 관찰 실험의 회로 개요도는 Figure 13와 같다.

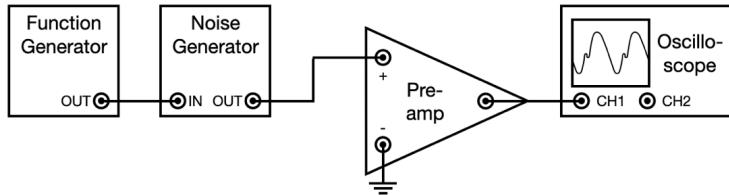


Figure 13: Noise + Signal 스펙트럼 관찰 실험의 회로 개요도.

위와 같이 회로를 구성한 뒤, Noise Generator를 통해 노이즈가 있는 경우와 노이즈가 없는 경우에서의 FFT 스펙트럼을 관측하였고, 결과는 Figure 14와 같았다.

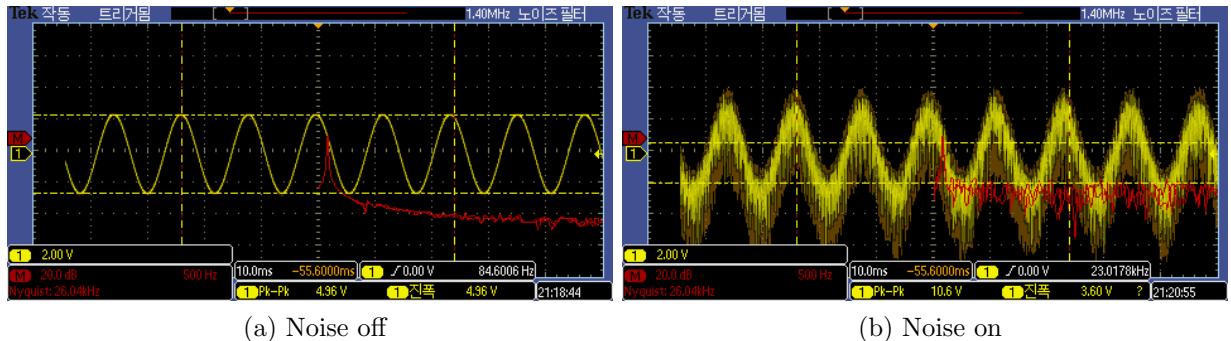


Figure 14: 노이즈가 없는 경우(왼쪽)와 10^{-1} 의 노이즈를 주었을 경우(오른쪽)의 FFT 스펙트럼 개형.

2.2.2. Lock-in Detection을 이용한 Noise로부터의 Signal 검출

앞선 실험들의 결과를 토대로, 최적의 Lock-in 조건 하에서 Signal로부터 Noise를 걸러내기 위하여 회로를 Figure 15과 같이 구성하였다.

최적의 Lock-in이 이루어지는 Phase를 찾기 위해서, Phase에 따른 Low-Pass amplifier의 출력을 측정한 후 2차함수 fitting을 수행한 결과는 Figure 16와 같다.

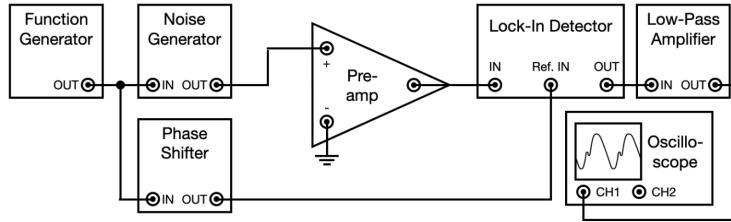


Figure 15: Lock-in Detection을 이용한 Noise 제거 실험의 회로 개요도.

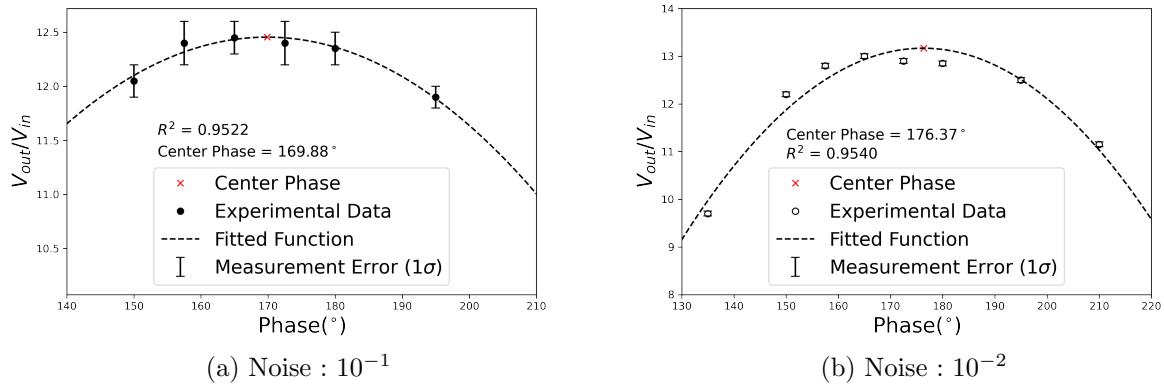
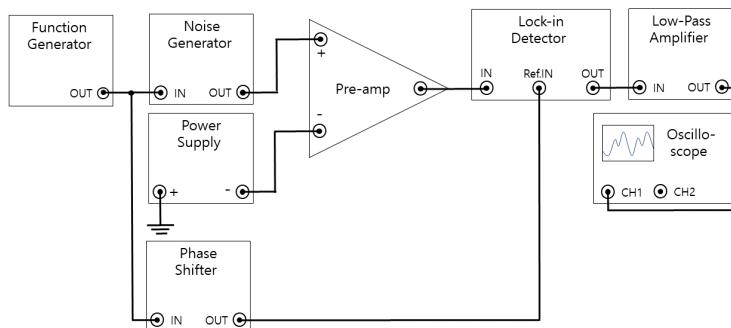


Figure 16: Noise가 포함된 상황에서 Phase에 따른 Gain의 변화.

2.2.3. Lock-in Detection의 DC Offset Stability 측정

이론적으로는 입력 신호에 DC Offset을 더해도 Low-Pass Amplifier의 출력은 일정하게 유지되어야 한다. 하지만, 실제는 이론과 다를 수 있으므로, 회귀 분석을 통해 DC Offset을 변화시킴에 따라 출력이 어떻게 바뀌는지 확인해야 한다. DC Offset을 함수 발생기에서 걸어주면 Reference Signal에도 DC Offset이 더해져 Duty 비에 영향을 줄 수 있으므로, 전원 공급기를 추가로 설치하여 실험을 진행하였다. 본 실험을 위해 구성한 회로의 개요도는 Figure 17와 같다.

Figure 17: DC Offset- Gain의 그래프. R^2 값은 0.9930이다.

DC Offset을 변화시키며 Low-Pass Amplifier의 출력의 변화를 측정한 결과는 Figure 18와 같고, DC Offset과 출력 사이에는 기울기가 0이 아닌 선형 비례관계가 존재함을 확인할 수 있었다.

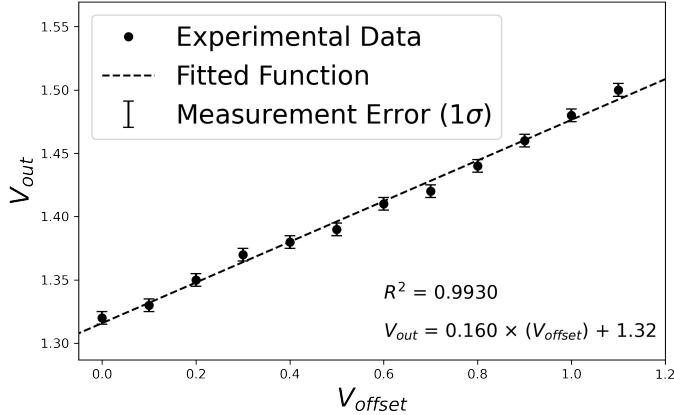


Figure 18: 전원공급기로 걸어준 Offset의 변화에 따른 Low-Pass Amplifier의 출력값 변화. R^2 의 값은 0.9930이다.

2.3. Hall Effect

앞선 실험에서는 최적의 Lock-in 조건을 찾고, 최적 조건에서 실제로 Noise가 섞인 신호에서 Noise를 제거하는 실험을 수행하였다. 본 실험에서는 훌 소자를 이용해서 자기장이 만드는 전압을 이용해 Lock-in Detection을 하고, Equation 1, 3 등을 사용하여 자기장의 세기와 자기 쌍극자 모멘트를 계산하였다. 실험을 수행하기 위하여 설치한 회로의 개요도는 Figure 19와 같다.

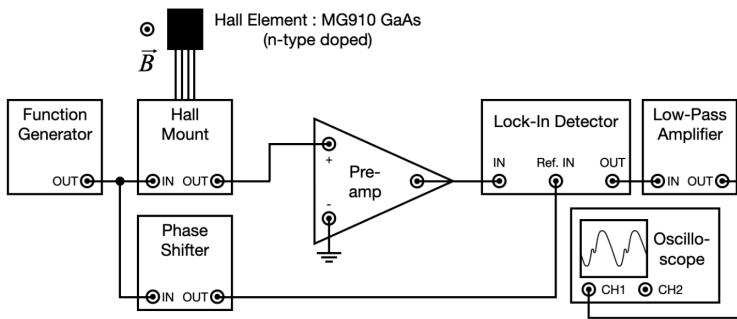


Figure 19: 훌 효과 관측 실험의 회로 개요도.

Hall 소자는 입력 전압에 비례하는 출력 전압을 가진다. 원하는 주파수에서 Gain 을 적절히 증폭시킨 후 최적의 조건에서 Lock-in detection을 구성하여 자석과 훌 센서 간의 거리의 변화에 따른 출력 전압의 변화를 얻은 결과는 Figure 20와 같고, 이를 바탕 으로 Equation 3를 통해 자석의 쌍극자 모멘트를 계산한 결과 3.93 ± 0.350 J/T (1σ)로 도출되었다.

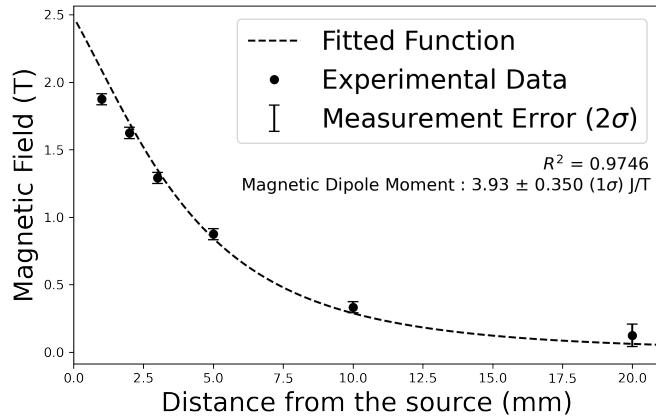


Figure 20: 홀 소자로부터의 거리에 따른 자기장의 변화 그래프. 자기장의 세기는 Equation 3를 통해 계산되었으며, R^2 값은 0.9746이다.

또한, 각 거리에 대해서 출력이 최대가 되는 Phase와 그 Phase에서의 출력은 Table 1와 같다.

Table 1: Optimum phase and output voltage for distances

Distance(mm)	Phase(°)	Output(mV)
1	165	-500
2	165	-506
3	165	-514
5	165	-524
10	165	-537
20	165	-542.5

3. Discussion

3.1. Lock-in Amplifier Calibration

Lock-in Detection을 수행하기에 앞서 최적의 Lock-in 조건을 찾기 위해 Calibration 과정을 거치면서 얻어낸 몇 가지 중요한 결과에 대해 논의해 보고자 한다.

첫번째로, Preamp의 주파수 의존성을 확인하였다. 실험 결과, Preamp의 Gain은 특정 주파수 영역을 벗어나면 로그 스케일에서 선형적으로 감소하는 것을 확인하였는데, 이는 교류저항성 소자들로 인해 주파수에 따라 변화하는 임피던스에 기인한 것으로 추측된다.

두번째로, Low-Pass Amplifier의 주파수에 따른 Gain 스펙트럼 개형의 roll off와 시상수 의존성을 확인하였다. 실험 결과, 동일한 roll off에서는 시상수가 커질수록 Gain이 더 가파르게 줄어들고, 동일한 시상수에서는 roll off가 클수록 Gain이 더 가파르게 줄어드는 것을 확인하였다. roll off는 보통 1옥타브당 줄어드는 Gain의 값을 나타내는 값인데,

이것은 필터의 성능을 나타내는 요소 중 한 가지로, roll off가 클수록 대역폭이 좁아 신호를 날카롭게 cut-off를 할 수 있다는 것을 생각해보면, roll off가 커질수록 Gain이 빠르게 줄어든다는 Figure 12의 결과는 쉽게 도출해 낼 수 있다. 또한, 동일한 roll off에서 시상수가 커질수록 Gain이 빠르게 줄어든다는 Figure 11의 결과는 간단한 Low-Pass Filter의 전달함수에서 기인한 것으로 추측된다. 여기서 시상수 $\tau = RC$ 로 정의되는데, 가장 간단한 전달함수는 Equation 4와 같이 나타난다.[3]

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC} \quad (4)$$

위 식을 jw 허수 축에서 보면 Equation 5과 같이 나타내지는데,

$$H(jw) = \frac{1}{1 + jwRC} \quad (5)$$

이것을 출력이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 가 되는 지점에서의 w 값을 w_c 라 하고, w_c 대해서 풀면 Equation 6가 도출된다.

$$w_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (6)$$

즉, τ 가 커질수록 cutoff frequency는 줄어들으므로, Figure 11의 실험결과와 부합한다.

3.2. Error Analysis

우리는 첫 실험에서 Gain 값을 구하기 위하여 데이터를 주기별로 나누어 진폭을 계산한 뒤 평균을 내었으며, 오차 범위로는 계산된 진폭값들의 표준편차를 사용하였다. 그렇기 때문에 Gain 5에 비해 Noise의 크기가 커지는 Gain 50의 경우 오차가 더욱 크게 측정되었지만, 2시그마의 범위 내에서 최소 자승법으로 구해진 근사식과 $R^2 > 0.998$ 로 잘 일치하는 것을 확인하였다. 또한, 오실로스코프를 통하여 출력전압의 V 단위 측정 시, 소수 2자리까지만 cutoff 하여 값을 제시하는 오실로스코프의 특성 상 최소 단위 이하의 오차가 발생할 수 있었다. 또한, Phase를 변화시키며 Gain을 읽는 Lock-in Detection 실험에서, Phase의 최소 눈금이 15° 이기 때문에, 최소 눈금의 절반인 7.5° 로 최대한 정확하게 측정하려고 노력했음에도 불구하고 측정 오차가 발생할 수 있었다. 이와 함께, 다이얼을 돌리는 과정에서 방향을 바꿀 시 발생하는 역학적 반발(backlash)에 의한 오차도 발생할 수 있었다.

또한 홀 효과 실험 서 거리에 따른 홀 전압을 측정하는 과정에서, 자석이 만드는 자기장을 정확히 측정하기 위해서는 첫째로 자석의 중심이 이동하는 경로는 자석의 중심과 홀 센서의 직선 거리 상에 있어야 한다. 하지만, 홀 소자는 고정시켜 놓은 반면 자석은 손으로 직접 들고 이동시키며 측정을 한 탓에 중심이 맞지 않을 가능성이 존재했고, 이에 따라 random error가 발생했을 것으로 보인다. 둘째로 홀 전압을 측정하는 과정에서 자석과 홀 센서 간의 거리가 멀어질수록 낮아지는 S/N ratio 때문에 오차가 증가했을 것으로 추측된다. 또한, 홀 효과를 관찰하는 과정에서 사용된 자석이 만드는 자기장인 Equation 3는 자석이 완전한 cuboid이고 homogeneous하다고 가정하여 계산된 식이기 때문에, 실제 상황과의 차이에서 오차가 발생했을 것으로 추측된다.

4. Conclusion

본 실험에서는 Teachspin 사의 Lock-in 실험 키트와 별도의 Function generator, Power supply 등을 사용하여 Lock-in 관측을 진행하였다. 본 실험을 통해 Preamplifier의 Gain과 Phase Shifter는 주파수에 로그 스케일에서 선형적으로 의존하는 것을 확인하였고, 위상의 변화에 따른 Lock-in Detector에 나타나는 신호의 개형 변화를 관측하였다. 또한, roll off와 시상수에 의존하는 Low-Pass Amplifier의 Gain 스펙트럼의 변화를 측정함으로써 해당 변수들이 Low-Pass filter에 미치는 영향을 확인하였다. 그 결과, roll off와 시상수가 커질수록 Low-Pass filter의 출력이 주파수가 증가함에 따라 더욱 가파르게 줄어듦을 확인할 수 있었다.

앞선 실험들을 통한 Calibration 과정을 거친 후, Lock-in Detection을 이용하여 Noise가 섞인 신호로부터 원하는 주파수의 신호를 얻어내는 실험을 수행하였고, 그 결과 얻어진 출력이 최대가 되는 Phase에 대한 DC offset의 연관성 또한 측정하였다. 이론적으로는 DC offset과 상관없이 LOW-Pass Amplifier의 출력은 일정하게 유지되어야 하지만, 측정 결과 실제로는 offset이 증가함에 따라 Amplifier의 출력값도 증가하는 것을 확인하였다.

마지막으로, Hall effect 실험을 통해 자석이 만드는 자기장에 의한 훌 전압을 관측하였고, 이를 Lock-in Detect하여 얻어낸 신호를 이용해 자기장과 자기 쌍극자 모멘트를 계산하였다. 계산 결과 자기 쌍극자 모멘트는 $3.93 \pm 0.350 \text{ J/T}$ (1σ)로 계산되었다.

본 실험에서는 Lock-in의 최적 조건을 찾기 위한 Calibration부터 시작해서 실제 Lock-in Detection을 수행한 뒤, 나아가 Hall effect에의 적용을 통한 자기장과 자기 쌍극자 모멘트의 계산까지, 일련의 실험과정을 통해 Lock-in Detection 기술에 대하여 탐구하였다. 본 실험을 통해 Lock-in과 Low-Pass Filter의 원리에 대하여 더욱 더 깊이 이해할 수 있었으며, 이러한 경험은 추후 있을 여러 전자기 실험의 밑거름이 되리라 생각한다.

References

- [1] K. Sol, *Error Analysis for Experimental Physicists*, 2021.
- [2] hello K. Sol, *Lock-in Detection and Hall Effect Manual*, 2021.
- [3] Van Valkenburg, M. E., *Network Analysis*, 2008.