수학의 활용

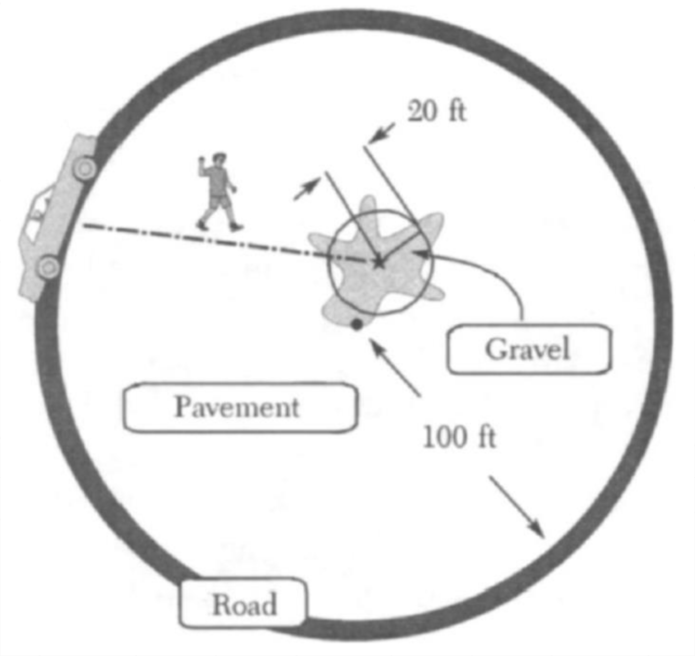
빅데이터 분석

GPS란?

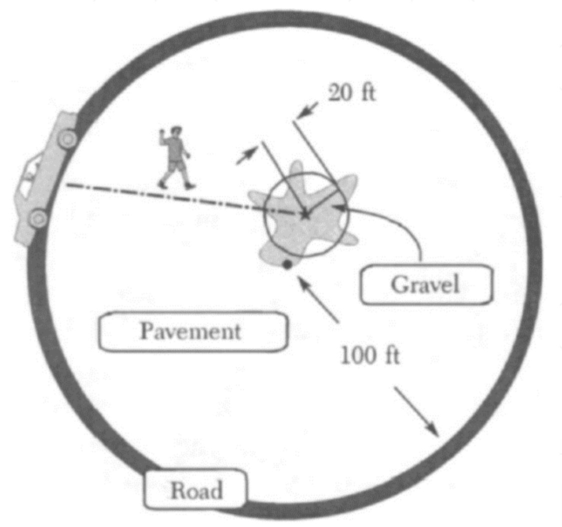
[엠클래스/기술] 내 위치를 찾아주는 24개의 눈, GPS (https://www.youtube.com/watch?v=fasFsEMoNwM)

GPS 원리 이해

GPS 원리의 기본 아이디어를 이해하기 위해 현실과 유사한 상황의 2차원 모델을 고려해 본다. 다음 그림과 조건은 2차원 모델을 자세하게 묘사한 것이며, 이 상황에서 내 위치를 어떻게 찾을 수 있는지 생각해 본다.



GPS 원리 이해 (cont'd)



조건1. 내 위치는 반지름이 100 ft인 큰 원 내부에 있다. 큰 원 내부는 포장이 잘 되어 있지만, 단 내 위치 주변으로는 불규칙한 모양으로 자갈이 깔려있다. 내 위치로부터 자갈이 깔려있는 영역의 경계까지의 평균 거리는 20 ft이다.
조건2. 자동차는 큰 원의 경계위에 만들어져 있는 도로 위를 달린다.
조건3. 배달원은 자동차에서 내려 나에게로 직선으로 걸어와 물건을 전달한다. 이 때, 큰 원 내부의 포장된 영역에서는 5 ft/sec의 속도로 걸으며, 자갈이 깔려있는 영역에서는 4 ft/sec의 속도로 걷는다.

GPS 원리 이해 (cont'd)

Q. 2명의 배달원이 각기 다른 위치에 있는 자동차에서 내려 나에게 물건을 전달한 기록이 있다. 다음의 배달 정보를 이용해서 내 위치를 추정해 보자.

배달원1. 12시 정각에 북쪽에서 시계방향으로 45° 회전한 자동차에서 내려 20.2초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.

배달원2. 12시 1분에 북쪽에서 시계방향으로 135° 회전한 자동차에서 내려 29.5초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.

GPS 원리 이해 (cont'd)

Q. 만약 배달원의 시계에 약간의 오차가 있다면 무슨 일이 발생할 것인지 생각해 보자. 단, 배달원 시계의 오차는 얼마인지 모르지만 상수값을 가진다고 가정한다. 이 상황에서 내 위치를 추정하기 위해서는 추가로 배달원 1명의 배달 정보가 필요하다. 다음의 추가된 배달 정보를 이용해서 시계에 오차가 있는 경우의 내 위치를 추정해 보자.

배달원3. 12시 2분에 북쪽에서 시계방향으로 180° 회전한 자동차에서 내려 32.2초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.

GPS 원리 이해 (cont'd)

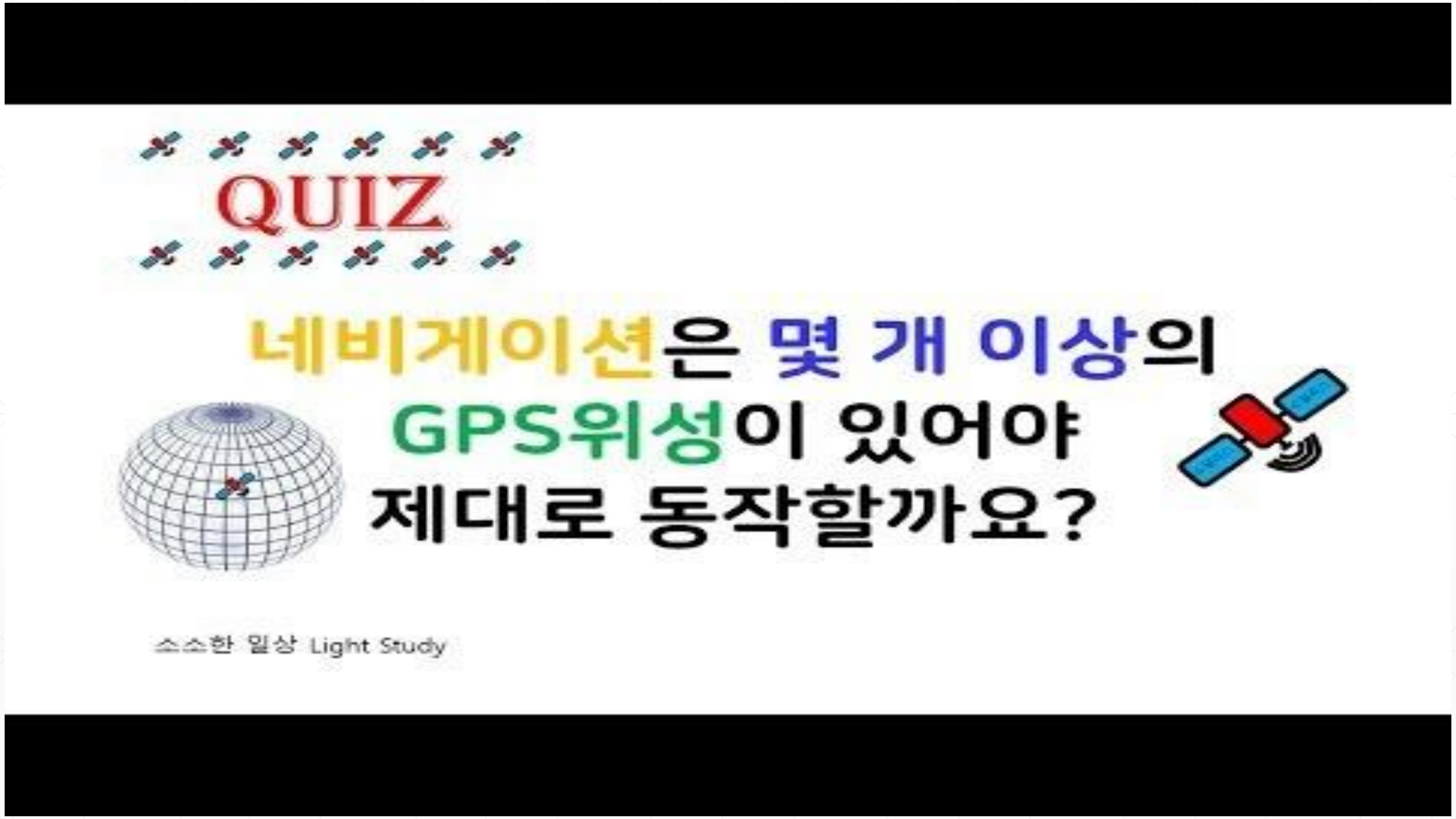
Q. 내 위치 주변으로 자갈이 불규칙한 모양으로 깔려있어 지금까지 우리는 내 위치로부터 자갈이 깔려있는 영역의 경계까지의 평균 거리를 이용하여 내 위치를 추정하였다. 자갈이 깔려있는 영역은 지구 대기에 비유되는 것으로써, 실제로 지구 대기의 두께는 위치마다 다르다는 것이다. GPS의 정확도를 높이기 위해 주파수가 다른 두 개의 전파를 동시에 송신하는 기법이 알려져 있으며, 이 방법에 대해 다음 예제를 통해 이해해 보려고 한다.

조건1. 내 위치는 반지름이 100 ft인 큰 원 내부에 있다. 큰 원 내부는 포장이 잘 되어 있지만, 단 내 위치 주변으로는 불규칙한 모양으로 자갈이 깔려있다.
조건2. 자동차는 큰 원의 경계위에 만들어져 있는 도로 위를 달린다.
조건3. 각 자동차에는 배달원 1명과 보조원 1명이 타고 있으며, 이 2명은 동시에 내려 나에게로 직선으로 걸어와 물건을 전달한다. 이 때, 큰 원 내부의 포장된 영역에서는 2명 모두 걷는 속도가 동일하며 5 ft/sec의 속도로 걷는다. 하지만 자갈이 깔려있는 영역에서는 걷는 속도가 서로 다른데, 배달원은 4 ft/sec의 속도로 걷고 보조원은 3 ft/sec의 속도로 걷는다.

배달원1조. 12시 정각에 북쪽에서 시계방향으로 47.2° 회전한 자동차에서 모두 내려 배달원은 20.8초 동안, 보조원은 22.9초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.
배달원2조. 12시 1분에 북쪽에서 시계방향으로 138.5° 회전한 자동차에서 모두 내려 배달원은 30.1초 동안, 보조원은 32.0초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.
배달원3조. 12시 2분에 북쪽에서 시계방향으로 8.1° 회전한 자동차에서 모두 내려 배달원은 18.9초 동안, 보조원은 19.9초 동안 걸어와 나에게 물건을 전달하였다.

위의 상황에서 배달원 시계에 오차가 있는 경우의 내 위치를 추정해 보자. 단, 배달원 시계의 오차는 얼마인지 모르지만 상수값을 가진다고 가정한다.

GPS 원리 이해 (cont’d)



네비게이션은 몇개 이상의 GPS위성이 있어야 동작하나 (https://www.youtube.com/watch?v=h8ItAQsaClk)

이미지에 대하여

픽셀(pixel)이란? [용어설명] (https://www.youtube.com/watch?v=4AtYkiS5HQ0)

대각화 & 직교행렬

$n \times n$ 행렬 A가 **대각화 가능(diagonalizable)**하다는 것은 A가 대각행렬 D와 닮음일 때를 말한다. 즉, $P^{-1}AP = D$를 만족하는 $n \times n$ 가역행렬 P가 존재하는 경우이다.

$m \times n$행렬 Q의 열벡터들이 **정규직교 집합**일 필요충분조건은 $Q^TQ = I_n$이다.

정사각행렬 Q가 직교행렬이 될 필요충분조건은 $Q^{-1} = Q^T$이다.

대칭행렬의 직교대각화

스펙트럼 정리

A가 $n \times n$ 실행렬에 대하여, A가 대칭행렬일 필요충분조건은 A가 직교대각화 가능한 것이다.

스펙트럼 분해(spectral decomposition)

$$
\begin{aligned}
A = QDQ^T &= [q_1 \quad \cdots \quad q_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \\
&= [\lambda_1 q_1 \quad \cdots \quad \lambda_n q_n]\begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T
\end{aligned}
$$

행렬의 특잇값 & 특잇값 분해

A가 $m \times n$ 행렬이면 A의 **특잇값(singular values)**은 $A^T A$의 고윳값의 제곱근들이고 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$으로 나타낸다. 특잇값이 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$이 되도록 정리하는 것이 관례적이다.

특잇값 분해

A가 특잇값 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$과 $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$을 가지는 $m \times n$ 행렬이라 하자. 그러면

$$A = U\Sigma V^T$$

를 만족하는 $m \times m$ 직교행렬 U, $n \times n$ 직교행렬 V, $\Sigma = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 형태의 $m \times n$ 행렬 Σ가 존재한다.

SVD의 외적 형태

스펙트럼 분해(spectral decomposition)

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T$$

SVD의 외적 형태

A는 특잇값 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$과 $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$을 가지는 $m \times n$ 행렬이라 하자. $u_1, \cdots, u_r$은 이러한 특잇값에 대응하는 A의 왼쪽 특이벡터들, $v_1, \cdots, v_r$은 A의 오른쪽 특이벡터라고 놓자. 그러면

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

MATLAB

https://kr.mathworks.com/academia/tah-portal/korea-university-of-technology-and-education-867985.html

특잇값 분해의 응용

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

```
img = imread('figure1.jpg');
grayimg = rgb2gray(img);

[numRows,numCols] = size(grayimg);
[U,S,V] = svd(double(grayimg));

%%% 64
num_sing_vectors = 64;

S(num_sing_vectors+1:numRows,num_sing_vectors+1:numCols) = 0;

VT = V';
outputimg = U(:,1:num_sing_vectors)*S(1:num_sing_vectors,1:num_sing_vectors)*VT(1:num_sing_vectors,:);
outputimg64 = cast(outputimg,'uint8');

%%% 32
num_sing_vectors = 32;

S(num_sing_vectors+1:numRows,num_sing_vectors+1:numCols) = 0;

VT = V';
outputimg = U(:,1:num_sing_vectors)*S(1:num_sing_vectors,1:num_sing_vectors)*VT(1:num_sing_vectors,:);
outputimg32 = cast(outputimg,'uint8');

%%% 16
num_sing_vectors = 16;

S(num_sing_vectors+1:numRows,num_sing_vectors+1:numCols) = 0;

VT = V';
outputimg = U(:,1:num_sing_vectors)*S(1:num_sing_vectors,1:num_sing_vectors)*VT(1:num_sing_vectors,:);
outputimg16 = cast(outputimg,'uint8');

subplot(2,2,1), imshow(grayimg);
subplot(2,2,2), imshow(outputimg16);
subplot(2,2,3), imshow(outputimg32);
subplot(2,2,4), imshow(outputimg64);
```

특잇값 분해의 응용 (cont'd)