IG3 - TP3 - 2024/2025

OPTIMISATION POUR LA DATA SCIENCE

Le but de ce TP est de présenter différentes méthodes de calcul d'un minimum global d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ au minimum doublement différentiable et convexe.

1. Méthode par dichotomie

Commençons par le cas unidimensionel. Le but est donc de calculer $\min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Algorithm 1 (Dichotomie)

while $b - a > \epsilon$ **do**
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  if $f'(m) \geqslant 0$ **then**
    $b \leftarrow m$
  else
    $a \leftarrow m$
  end if
end while

Exercice 1 : *(Dichotomie)*

(1) Implémenter la fonction *dichotomie* qui prend comme paramètres la fonction f', deux nombres a et b tel que $f'(a) < 0 < f'(b)$ et un paramètre de tolérance ϵ.
(2) Tester *dichotomie* pour la fonction $x \mapsto x^2$ et tracer les points d'itérations de l'algorithme pour $a = -2$, $b = 3$ et $\epsilon = 1e^{-3}$.
(3) Tracer un tableau avec les différents points d'itérations et les valeurs de f' et f asscociées.
(4) Quels sont les principaux avantages et inconvénients de cette méthode ?

2. Méthode du gradient

Algorithm 2 (Gradient à pas fixe)

gf $\leftarrow \nabla f(x_0)$
$x \leftarrow x_0$
while $\|\text{gf}\| > \epsilon$ **do**
  $x \leftarrow x - \rho * \text{gf}$
  gf $\leftarrow \nabla f(x)$
end while

Exercice 2 : *(Gradient à pas fixe)*

(1) Implémenter la fonction *gradient_pas_fixe* qui prend comme argument la fonction ∇f, un point x_0, un nombre ρ qui sera le pas et un paramètre de tolérance ϵ.
(2) Tracer le graphe et les lignes de niveaux des fonctions $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - x_2 + 30$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_2^2$.
(3) Ajouter sur le graphe des lignes de niveaux de f_1 et f_2 la trace de la fonction *gradient_pas_fixe* avec $x_0 = (3, 3)$, $\rho = 0.15$ et $\epsilon = 10^{-5}$.
(4) Faire la même chose en changeant le paramètre ρ. Qu'observe-t-on ?
(5) Quels sont les principaux avantages et inconvénients de cette méthode ?
(6) *(Vérification)* Tracer le graphe et les lignes de niveaux de la fonction $f_3(x_1, x_2) = 2(x_1 - 4)^2 + 3(x_2 - 3)^2$ .Ajouter sur ce graphe la trace de la fonction *gradient_pas_fixe* avec $x_0 = (0.0)$, $\rho = 0.1$ et $\epsilon = 10^{-3}$.
(7) *(Vérification)* Tracer un tableau avec les différents points d'itérations et les valeurs de f_3 asscociées. Vérifier que les points correspondent bien à ceux vus en cours.

Algorithm 3 (Gradient à rebroussement)

gf $\leftarrow \nabla f(x_0)$
$x \leftarrow x_0$
while $\|\text{gf}\| > \epsilon$ **do**
  $\eta \leftarrow 1$
  ngf2 $\leftarrow \|\text{gf}\|^2$
  while $f(x - \eta * \text{gf}) > f(x) - \alpha * \eta * \text{ngf2}$ **do**
    $\eta \leftarrow \eta * \beta$
  end while
  $x \leftarrow x - \eta * \text{gf}$
  gf $\leftarrow \nabla f(x)$
end while

Exercice 3 : *(Gradient à rebroussement)*

(1) Implémenter la fonction *gradient_rebr* qui prend comme argument la fonction f, la fonction ∇f, un point x_0, deux paramètres α et β et un paramètre de tolérance ϵ.
(2) Tracer le graphe et les lignes de niveaux des fonctions $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - x_2 + 30$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_2^2$. (comme à la question 2.2)
(3) Reprendre les lignes de niveaux de la fonction f_2.
(4) Ajouter aux lignes de niveaux de f_2 la trace de la fonction *gradient_rebr* avec $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0.7$. Combien d'itérations ont étés nécessaires pour atteindre le minimum local ?
(5) Faire varier α et β. Qu'observe-t-on ?
(6) Quels sont les principaux avantages et inconvénients de cette méthode ?