数值积分作业

蹇傲霖 2018010919

1．确定积分公式 $\int_0^1 f(x)\,dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + B_0 f'(0)$ 的系数，使得代数精度尽可能高，并确定所得公式的代数精度为几次。

解：

设$f(x) = 1$, 有

$$1 = C_0 + C_1$$

设$f(x) = x$，有

$$\frac{1}{2} = C_1 + B_0$$

设$f(x) = x^2$，有

$$\frac{1}{3} = C_1$$

联立上述三式，解得$C_0 = \frac{2}{3}$,$C_1 = \frac{1}{3}$,$B_0 = \frac{1}{6}$

即

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

设$f(x) = x^3$，有

$$\frac{1}{4} \neq C_1$$

因此所得公式的代数精度为 2 次。

2、 选用教材65页第4题第（2）（3）小题的两个积分，完成如下任务

（1） 用梯形、辛普森公式近似计算积分，并估计误差上限；

（2） 用复合梯形公式和复合辛普森公式近似计算积分，如果要使误差不超过 10^{-6}，根据误差估计公式，至少需要将区间等分多少份；

（3） 用trapz和Simpson命令，按照上面估计的等分份数近似计算积分；

（4） 用Matlab的自带函数quad，quadl两个命令分别近似计算积分，其中误差容许限度参数tol分别采用默认值，10^{-4}，10^{-8}，10^{-10}，10^{-12}。

解：

（1）

（2）$y=e^{3x}\sin 2x$，$0\leqslant x\leqslant 2$；

（3）$y=\sqrt{1+x^2}$，$0\leqslant x\leqslant 2$；

利用梯形公式及其误差上限公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

高阶导数模的最大值利用数值方法估计。先利用符号计算得到函数的高阶导数解析式，在[0,2]内取步长为1e-3逐步计算，取最大值。

可以计算出积分1=-305.3159175943688，误差上限3.127308984028400e+03；

积分2=3.236067977499790，误差上限0.666666666666667

利用simpson公式及其误差上限公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

$$E_2[f] \le \frac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(4)}\|_\infty$$

可以计算出积分1=-77.420336477233900，误差上限1.568859120524292e+02；

积分2=2.964307408997390，误差上限0.033333333333333

通过对比，发现在步长相同情况下simpson公式精度较高。

（2）

利用复合误差上限公式：

$$| I - T_n | \leqslant \frac{h^2}{12} M_2 (b - a).$$

$$| I - S_n | \leqslant \frac{h^4}{180} M_4 (b - a),$$

采用循环方式令等分数递增 1，求得：

函数 1 采用复合梯形公式时等分数≥6162；采用复合 simpson 公式等分数≥224.

函数 2 采用复合梯形公式时等分数≥817；采用复合 simpson 公式时等分数≥28.

（3）

利用上述等分数，计算积分：

函数 1 梯形法：　-29.734661773373920

函数 1simpson 法：　-29.734649105778690

函数 2 梯形法：　2.957886161751834

函数 2simpson 法：　2.957885714119466

最大的误差来源可能是计算二阶导数、四阶导数的模的最大值时精度有限。

（4）

quad-函数 1~1e-4：	-29.734679459357434
quadl-函数 1~1e-4:	-29.734649084757706
quad-函数 1~1e-6：	-29.734649479620660
quadl-函数 1~1e-6:	-29.734649084757706
quad-函数 1~1e-8：	-29.734649082564786
quadl-函数 1~1e-8:	-29.734649084972340
quad-函数 1~1e-10：	-29.734649084973558
quadl-函数 1~1e-10:	-29.734649084972848
quad-函数 1~1e-12：	-29.734649084972850
quadl-函数 1~1e-12:	-29.734649084972848

在相同误差容限下，quadl（Gauss-Lobatto）比 quad（Simpson）能够达到更高的精度，准确的小数位数更多。

quad-函数 2~1e-4：	2.957884740708685
quadl-函数 2~1e-4:	2.957886220517614
quad-函数 2~1e-6：	2.957885697765622
quadl-函数 2~1e-6:	2.957886220517614
quad-函数 2~1e-8：	2.957885714859374
quadl-函数 2~1e-8:	2.957885715089237
quad-函数 2~1e-10：	2.957885715089356
quadl-函数 2~1e-10:	2.957885715089237
quad-函数 2~1e-12：	2.957885715089191
quadl-函数 2~1e-12:	2.957885715089188

quadl 函数似乎经常出现改变精度容限后结果不变的情况，应该说较低的精度容限有时达到了更高的精度。比如函数 2 的 1e-8 精度事实上达到了 1e-10.