大学数学实验

第7讲

优化方法I 线性规划

(linear programming)

优化问题的一般形式

优化问题三要素：决策变量；目标函数；约束条件

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m \\
& g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, l \\
& x \in D \subseteq \Re^n
\end{aligned}
$$

目标函数

约束条件

决策变量

约束优化的分类

$$\min \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,m$$
$$g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,l$$
$$x \in D \subseteq \Re^n$$

连续优化

- 线性规划(LP)　目标和约束均为线性函数
- 非线性规划(NLP) 目标或约束中存在非线性函

离散优化

- 整数线性规划(ILP)
- 整数非线性规划(INLP)
- 0-1规划整数决策变量只取 0 或 1

本实验基本内容

1. 线性规划实例及其数学模型

2. 基本原理和算法

3. MATLAB实现

实例1: 食谱问题

背景　营养需求 / 人 / 天 →

50g蛋白质
4000IU维生素A
1000mg钙

食物	单位	蛋白质(g)	维生素A (IU)	钙(mg)	价格
苹果	个（138g）	0.3	73	9.6	**10**
香蕉	个（118g）	1.2	96	7	**15**
胡萝卜	个（72g）	0.7	20253	19	**5**
枣汁	杯（178g）	3.5	890	57	**60**
鸡蛋	个（44g）	5.5	279	22	**8**

确定每种食物的用量，以最小费用满足营养需求

- 维生素A的需求增加1单位，是否改变食谱？成本增加多少？
- 胡萝卜价格增1单位，是否改变食谱？成本增加多少？

实例1: 食谱问题

决策变量

5种食品数量:

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$

$c = (10, 15, 5, 60, 8)^T$

$b = (50, 4000, 1000)^T$

目标函数

费用 $Min\ \ z = 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 60x_4 + 8x_5$

约束条件

满足需求

$$0.3x_1 + 1.2x_2 + 0.7x_3 + 3.5x_4 + 5.5x_5 \ge 50$$

$$73x_1 + 96x_2 + 20253x_3 + 890x_4 + 279x_5 \ge 4000$$

$$9.6x_1 + 7x_2 + 19x_3 + 57x_4 + 22x_5 \ge 1000$$

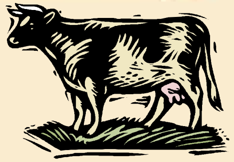
非负约束 $x_1, \cdots, x_5 \ge 0$

LP

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.2 & 0.7 & 3.5 & 5.5 \\ 73 & 96 & 20253 & 890 & 279 \\ 9.6 & 7 & 19 & 57 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

实例2: 奶制品生产销售计划



1桶牛奶 或

12小时 → 3千克A_1 → 获利12元/千克

1千克 → 2小时,1.5元 → 0.8千克B_1 → 获利22元/千克

8小时 → 4千克A_2 → 获利8元/千克

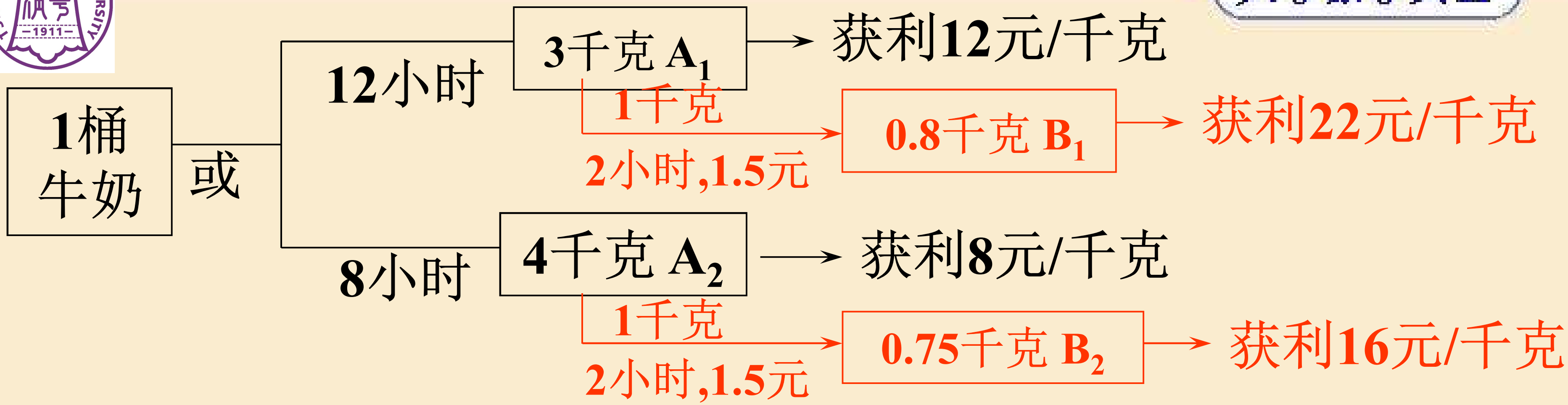
1千克 → 2小时,1.5元 → 0.75千克B_2 → 获利16元/千克

50桶牛奶, 480小时

至多100公斤A_1

制订生产计划，使每天净利润最大

- 15元可增加1桶牛奶，应否投资？
- 聘用临时工人增加劳动时间，工资最多每小时几元？
- B_1，B_2的获利经常有10%的波动，对计划有无影响？



决策变量

出售 x_1 千克 A_1, x_2 千克 A_2， x_3 千克 B_1, x_4 千克 B_2

x_5 千克 A_1 加工 B_1， x_6 千克 A_2 加工 B_2

LP

目标函数

利润 $$Max\ \ z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$$

约束条件

原料供应 $$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

劳动时间 $$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

加工能力 $$x_1 + x_5 \le 100$$

其他约束 $$x_3 = 0.8x_5$$ $$x_4 = 0.75x_6$$

非负条件 $$x_1, \cdots x_6 \ge 0$$

求解线性规划(LP)的基本原理

基本模型

$$\max(\text{or } \min)\ z = c^T x,\ x \in R^n$$

$$s.t. \quad Ax = b,\ x \ge 0$$

$$c \in R^n,\ A \in R^{m\times n},\ b \in R^m$$

- 二维线性规划的图解法
- 一般线性规划的单纯形算法
- 线性规划的敏感性分析
- 线性规划的对偶问题
- 线性规划的其他算法

二维线性规划的图解法

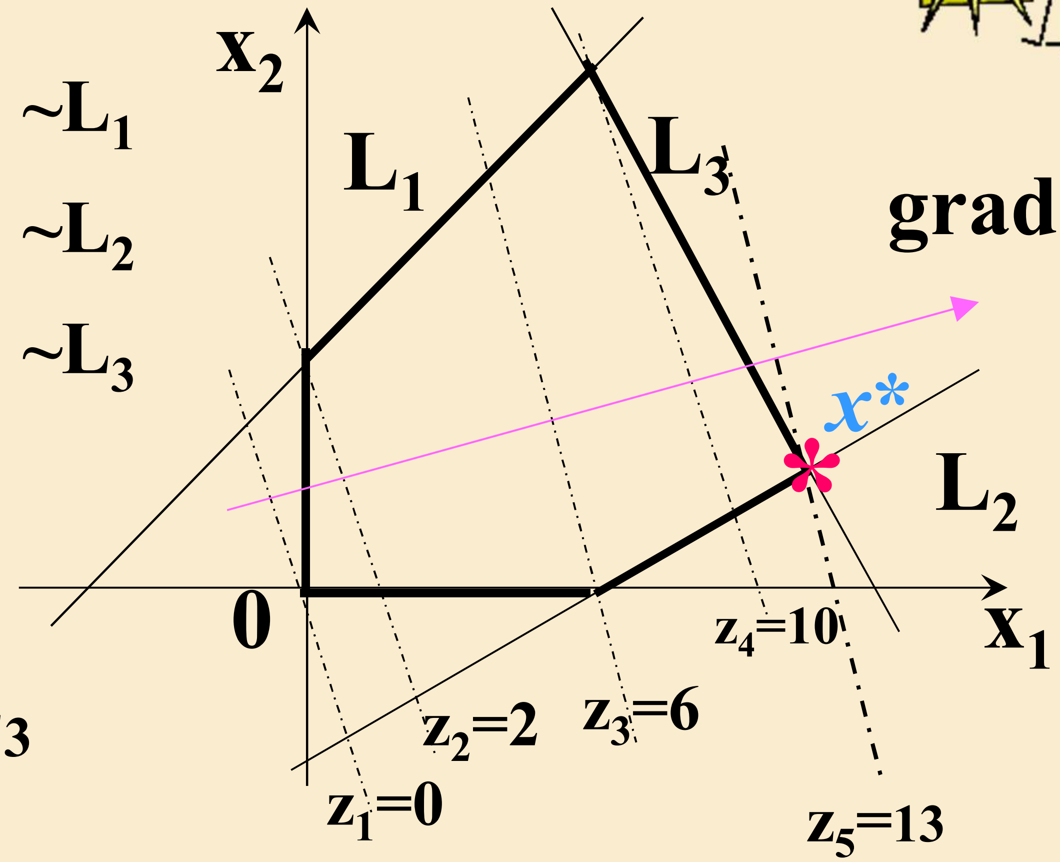
$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 \geq -2 \quad \sim L_1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 \quad \sim L_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14 \quad \sim L_3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



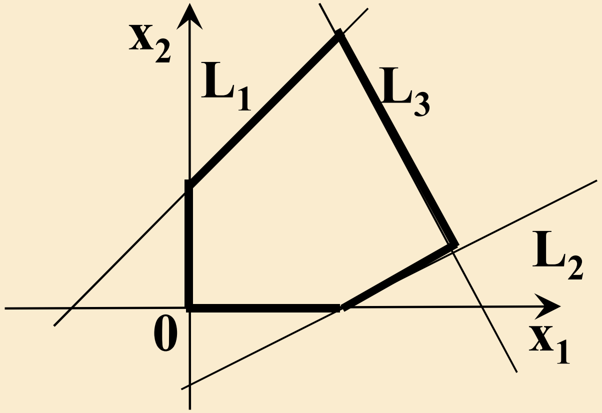
起作用约束：$L_2;L_3$

最优解（4，1），最优值z_{max}=13

求解LP的特殊情形

$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$

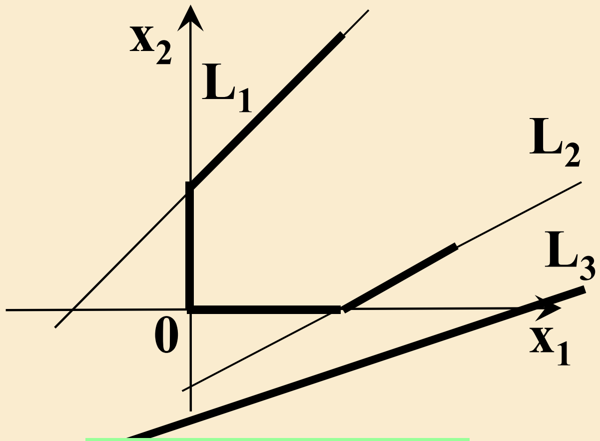
$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1 - x_2 \ge -2 && \sim L_1 \\ & x_1 - 2x_2 \le 2 && \sim L_2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 14 && \sim L_3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



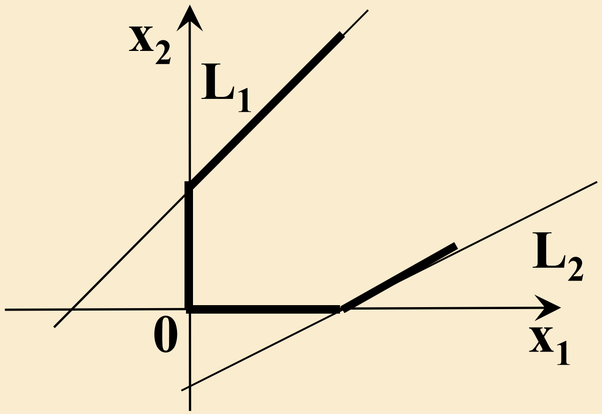
$-3x_1 + 2x_2 \ge 14 \sim L_3$

无 L_3

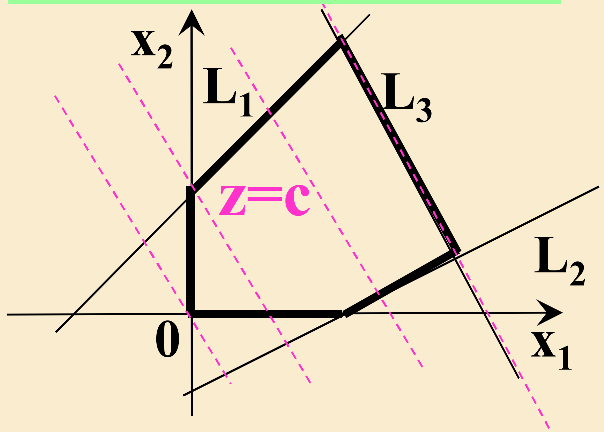
$3x_1 + x_2 \le 14 \sim L_3$



无可行解



无最优解(无界)



最优解不唯一

LP的约束和目标函数均为线性函数

⇩

	2维	n维
可行域	线段组成的凸多边形	超平面组成的凸多面体
目标函数	等值线为直线	等值线是超平面
最优解	凸多边形的某个顶点	凸多面体的某个顶点

求解LP的基本思想

从可行域的某一顶点开始，只需在有限多个顶点中一个一个找下去，一定能得到最优解。

算法：怎样从一点转到下一点，尽快找到最优解。

线性规划的标准形式和基本性质

$$\begin{aligned}\max \quad & z = 3x_1 + x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\min z = & -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \\ s.t. \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_3 \geq 0 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \quad x_4 \geq 0 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \quad x_5 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{aligned}$$

加入松弛变量/剩余变量将不等式变为等式

标准形

$$\begin{aligned}& \min \ z = c^T x \\ & s.t. \ \ Ax = b, \ x \geq 0 \\ & A \in R^{m\times n}, \ m \leq n\end{aligned}$$

假设：A行满秩

b非负

基本可行解

定义：设 B 是秩为 m 的约束矩阵 A 的一个 m 阶满秩子方阵，则称 B 为一个基；B 中 m 个线性无关的列向量称为基向量，变量 x 中与之对应的 m 个分量称为基变量，其余的变量为非基变量，令所有的非基变量取值为 0，得到的解 $x=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为相应于 B 的基本解。当 $B^{-1}b \geq 0$ 则称基本解为基本可行解，这时对应的基阵 B 为可行基。

如果 $B^{-1}b > 0$，则称该基本可行解为非退化的，如果一个线性规划的所有基本可行解都是非退化的，则称该规划为非退化的。

$$\begin{aligned}-x_1+x_2+x_3&=2\\ x_1-2x_2+x_4&=2\\ 3x_1+2x_2+x_5&=14\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]$$

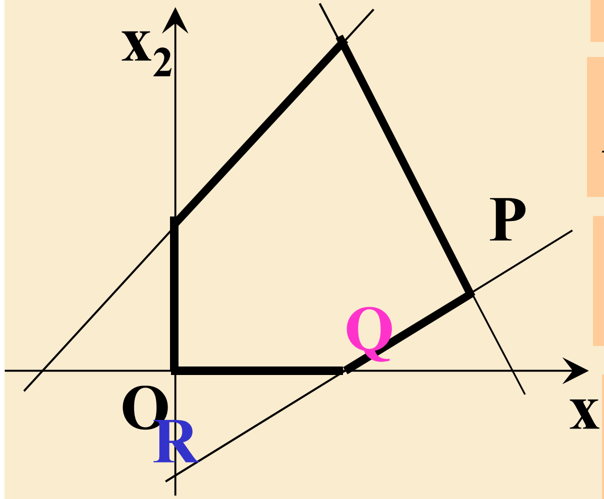
$A \Rightarrow [A_B, A_N]$, A_B可逆

$$x^T \Rightarrow [x_B, x_N]^T$$

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$x_N = 0 \Rightarrow x_B = A_B^{-1} b$$

A_B: 基(矩阵)　x: 基(本)解　x_B: 基变量　x_N: 非基变量



$A_B=[p_3\ p_4\ p_5] \Rightarrow x=(0,0,2,2,14)^T$ **O点**

$A_B=[p_1\ p_3\ p_5] \Rightarrow x=(2,0,4,0,8)^T$ **Q点**

$A_B=[p_2\ p_3\ p_5] \Rightarrow x=(0,-1,3,0,16)^T$ **R点**

$A_B=[p_1\ p_2\ p_3] \Rightarrow x=(4,1,5,0,0)^T$ **P点**

基(本)可行解x： $Ax=b$, $x \ge 0$ ($x_B \ge 0$， $x_N=0$)

LP基本性质

可行域存在时，必是凸多面体；

最优解存在时，必在可行域的顶点取得；

基本可行解对应于可行域的顶点。

基本解数量不超过 $$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

最优解只需在有限个可行解（基本可行解）中寻找

LP的通常解法是单纯形法(G. B. Dantzig, 1947)

单纯形法的基本思路

用迭代法从一个顶点（基可行解）转换到另一个顶点（称为一次旋转），每一步转换只将一个非基变量（指一个分量）变为基变量，称为进基，同时将一个基变量变为非基变量，称为出基，进基和出基的确定需要使目标函数下降（至少不增加）。

- 选取初始基可行解（顶点）；
- 判断当前解是否最优;
- 选择进基和出基变量;
- 防止迭代过程出现循环 。

单纯形算法的基本思想

$$\min z = -3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = 1,2,3,4,5$$

第 1 步：找到一个基本可行解（顶点）

令 x_3, x_4, x_5 为基变量，得到一个基本可行解 $x^1 = (0,0,2,2,14)^T$

第 2 步：判断当前的基本可行解是不是最优解

用**当前的非基变量表示目标函数**，得到 $z = -3x_1 - x_2 = 0$，

当 x_1 从 0 开始增大时，目标值下降，所以希望 x_1 增大

单纯形算法的基本思想

$$\min z = -3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = 1,2,3,4,5$$

第 2 步：让 x_1 增大，$x_2 = 0$ 不变；为了满足约束，x_3, x_4, x_5 将发生变化

第 1 个方程 x_1 增大时，x_3 也增大；

第 2 个方程 x_1 增大时，x_4 减小；当 x_1 增大到 2 时，$x_3 = 0$

第 3 个方程 x_1 增大时，x_5 减小；当 x_1 增大到 14/3 时，$x_5 = 0$

单纯形算法的基本思想

$$\min z = -3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = 1,2,3,4,5$$

第 3 步：确定使得目标值下降的新的基变量 x_1, x_3, x_5，$(x_1 = 2)$

第 4 步：确定新的基变量 x_1, x_3, x_5 对应的基本可行解（消去第 1, 3 个方程及目标的 x_1）

$$\min z = -7x_2 + 3x_4 - 6$$

$$\begin{cases} 0 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 0 + 8x_2 - 3x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

单纯形算法的基本思想

$$\min z = -7x_2 + 3x_4 - 6$$

$$\begin{cases} 0 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 0 + 8x_2 - 3x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

重复刚才的过程

第 1 步：确定基变量 x_1, x_3, x_5 对应的基本可行解 $x^2 = (2,0,4,0,8)^{\mathrm{T}}$

第 2 步：判断当前的基本可行解是不是最优解

用当前的非基变量表示目标函数， $z = -7x_2 + 3x_4 - 6$ =0，

当 x_2 从 0 开始增大时，目标值下降，所以希望 x_2 增大

$$\min z = -7x_2 + 3x_4 - 6$$

$$\begin{cases} 0 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 0 + x_2 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 = 1 \end{cases}$$

单纯形算法的基本思想

$$\min z = -7x_2 + 3x_4 - 6$$

$$\begin{cases} 0 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 0 + x_2 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 = 1 \end{cases}$$

第 2 步：让 x_2 增大， $x_4 = 0$ 不变；为了满足约束， x_1, x_3, x_5 将发生变化

第 1 个方程 x_2 增大时， x_3 也增大；　　第 2 个方程 x_2 增大时， x_1 也增大；

第 3 个方程 x_2 增大时， x_5 减小；当 x_2 增大到 1 时， $x_5 = 0$

$$\min z = \frac{3}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5 - 13$$

$$\begin{cases} 0 + x_3 + \frac{5}{8}x_4 \quad \frac{1}{8}x_5 = 5 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 \quad \frac{1}{4}x_5 = 4 \\ 0 + x_2 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\min z = -3x_1 - x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

$$\min z = \frac{3}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5 - 13$$

$$\begin{cases} 0 + x_3 + \frac{5}{8}x_4 \quad \frac{1}{8}x_5 = 5 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 \quad \frac{1}{4}x_5 = 4 \\ 0 + x_2 - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 = 1 \end{cases}$$

单纯形算法的矩阵表示

$$\begin{aligned} \min \quad & z = C^T X \\ s.t. \quad & AX = b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

z	$-C^T$	0
	A	b

$$\begin{aligned} \min \quad & z = C_B^T X_B + C_N^T X_N \\ s.t. \quad & BX_B + NX_N = b \\ & X_B, X_N \geq 0 \end{aligned}$$

z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
	B	N	b
	X_B	X_N	RHS

$$\begin{aligned} \min \quad & z = C_B^T X_B + C_N^T X_N \\ s.t. \quad & X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ & X_B, X_N \geq 0 \end{aligned}$$

z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$$\min z = -3x_1 - x_2$$

B

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & & = 2 \\ x_1 - 2x_2 & + x_4 & = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 & \qquad + x_5 & = 14 \end{cases}$$

N

$$x_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4,5$$

$$\min z = \frac{3}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5 - 13$$

$$\begin{cases} 0 \qquad\qquad + x_3 + \frac{5}{8}x_4 \quad \frac{1}{8}x_5 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + \frac{1}{4}x_4 \quad \frac{1}{4}x_5 = 4 \\ 0 + x_2 \qquad\qquad - \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{8}x_5 = 1 \end{cases}$$

B^{-1}

标准单纯形表，检验数

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = C_B^T B^{-1} b - (C_B^T B^{-1} N - C_N^T) X_N \\
s.t. \quad & X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N \\
& X_B, X_N \geq 0
\end{aligned}
$$

z	0^T	$C_B^T B^{-1} N - C_N^T$	$C_B^T B^{-1} b$
X_B	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

线性规划的敏感性分析

（当C, b有小的扰动时， 对解的影响）

z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
	B	N	b

	X_B	X_N	RHS
z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

z	0^T	$C_B^TB^{-1}N-C_N^T$	$C_B^TB^{-1}b$
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

线性规划的敏感性分析

已知某线性规划问题,其初始及最优单纯形表如图一、图二

（1） 求出对偶问题的最优解

（2） 使最优解不变,c_1的变化范围

（3） 如果b_1由12变为16,求最优解

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	0	0	0	0
2	2	1	0	0	12
3	0	0	1	0	9
0	2	0	0	1	8

图一

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	-1/2	0	-1/2	-10
1	0	1/2	0	-1/2	2
0	0	-3/2	1	3/2	3
0	1	0	0	1/2	4

图二

对偶问题

对偶是什么：对同一事物（或问题），从不同的角度（或立场）提出对立的两种不同的表述。

这种表述有利于加深对事物的认识和理解

例如

在平面内，矩形的面积与其周长之间的关系，有两种不同的表述方法。

- （1）周长一定，面积最大的矩形是正方形。
- （2）面积一定，周长最短的矩形是正方形。

线性规划的对偶举例

- 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗。
- 一件产品Ⅰ获利2元，一件产品Ⅱ获利3元

资源　　产品	I	II	拥有量
设　备	1	2	8台时
原材料 A	4	0	16 kg
原材料 B	0	4	12 kg

线性规划的对偶问题

对偶问题 (D)

$$\max\ b^T y \quad s.t.\ A^T y \le c$$

$$\min\ z = c^T x \quad s.t.\ Ax = b, x \ge 0$$

原(始)问题 (P)

定理：原问题和对偶问题互为对偶问题，即：对偶问题的对偶问题就是原问题。

对偶定理: 如果x是原问题的可行解（原可行解），y 是对偶问题的可行解（对偶可行解），则 $b^T y \le c^T x$

- 若x和 y还满足$b^T y = c^T x$, 则分别是(P)和(D)的最优解
- 若原问题（P）无下界，则对偶问题（D）不可行
- 若对偶问题（D）无上界，则原问题（P）不可行

对偶问题的经济学解释：影子价格

1、定义 影子价格是最优配置下资源的理想价格

2、含义 由于$f^* = c^T x^* = b^T y^* = y_1^* b_1 + y_2^* b_2 + \cdots + y_m^* b_m$

考虑在最优解处,右端项b_i的微小变动对目标函数值的影响.

假设$b_1, b_2, \cdots, b_m$是变化的，则$\dfrac{\partial f^*}{\partial b_1} = y_1^*, \dfrac{\partial f^*}{\partial b_2} = y_2^*, \cdots, \dfrac{\partial f^*}{\partial b_m} = y_m^*$

y_i^*可以理解成当资源b_i变化1单位时，

极小化(L)问题的目标函数值的变化量

影子价格

z	0^T	$C_B{}^T B^{-1} N - C_N{}^T$	$C_B{}^T B^{-1} b$
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$$f^* = c^T x^* = b^T y^* = y_1^* b_1 + y_2^* b_2 + \cdots + y_m^* b_m$$

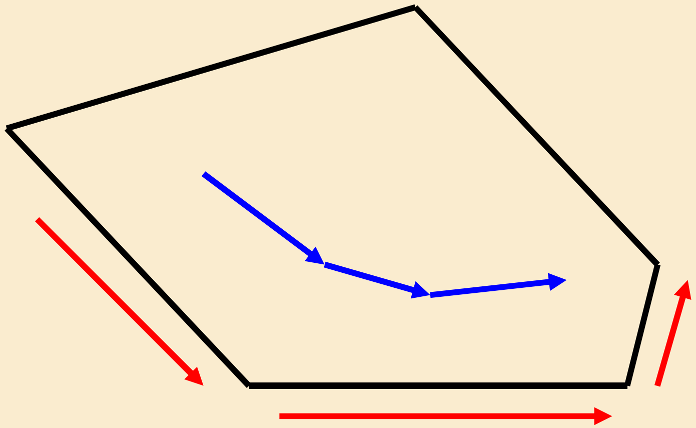
$B^{-1}b > 0$，对充分小的需求增量Δb，$B^{-1}(b+\Delta b) > 0$仍为最优解，此时相应的最优费用变化为$C_B{}^T B^{-1}\Delta b$对偶变量$y^* = \left(C_B{}^T B^{-1}\right)^T$被称为边际价格或影子价格

y^*_i可以看成最优解时，为了第i种需求提供一个单位需求的边际费用，即当达到最优时，为了满足附加的需求，必须向顾客索取的最小单位价格。

LP其他算法

内点算法(Interior point method)

- 1980年代人们提出的一类新的算法—内点算法
- 也是迭代法，但不再从可行域的一个顶点转换到另一个顶点，而是直接从可行域的内部逼近最优解。



MATLAB 求解 LP

$$\min\ z = c^T x$$

$$s.t.\ \ A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

```
[x,fval,exitflag,output,lambda] =
linprog(c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,opt)
```

输入：

x0~初始解(缺省时为0)

opt ~ MATLAB控制参数

中间所缺参数项补[]

Exp07.m

输出：

lambda ~ Lagrange乘子，维数等于约束个数，非零分量对应于起作用约束

- lambda.ineqlin: 对应 $A_1x \le b_1$
- lambda. eqlin : 对应 $A_2x = b_2$
- lambda. lower : 对应 $v_1 \le x$
- lambda. upper : 对应 $x \le v_2$

```
% 线性规划例1
% max   z=3*x1+x2
% s.t.-x1+x2    <=2      <== x1-x2>=-2
%          x1-2*x2 <=2
%        3*x1+2*x2 <=14
%          x1,x2>=0

c=-[3,1];A=[-1,1;1,-2;3,2];b=[2,2,14];
v1=[0 0];

[x,f,exitflag,output,lag]=linprog(c,A,b,[],[],v1)
zz=-f
z=-c*x
```

$$\min\ z = c^T x$$

$$s.t.\ \ A_1 x \le b_1, A_2 x = b_2, v_1 \le x \le v_2$$

exitflag

1	Function converged to a solution x.
0	Number of iterations exceeded options.MaxIterations.
-2	No feasible point was found.
-3	Problem is unbounded.
-4	NaN value was encountered during execution of the algorithm.
-5	Both primal and dual problems are infeasible.
-7	Search direction became too small. No further progress could be made.

lambda—Lagrange乘子

lower	Lower bounds corresponding to lb
upper	Upper bounds corresponding to ub
ineqlin	Linear inequalities corresponding to A and b
eqlin	Linear equalities corresponding to Aeq and beq

实例1: 食谱问题

$$\min \quad z = c^T x$$
$$s.t. \quad Ax \ge b$$
$$x \ge 0$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{c} = (10, 15, 5, 60, 8)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{b} = (50, 4000, 1000)^{\mathrm{T}}$

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 1.2 & 0.7 & 3.5 & 5.5 \\ 73 & 96 & 20253 & 890 & 279 \\ 9.6 & 7 & 19 & 57 & 22 \end{pmatrix}$$

x=(0，0，49.3827，0, 2.8058)，最优值z0 =269.36：

每天吃**49.3827**个胡萝卜和**2.8058**个鸡蛋，成本**269.36**美分

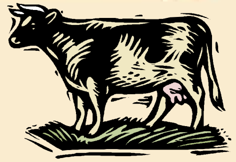
- 维生素**A**的需求增加**1**单位，是否改变食谱？成本增加多少？

  lag.ineqlin =(0.4714;0; 0.2458) 不改变；不增加

- 胡萝卜价格增**1**美分，是否改变食谱？成本增加多少？

  用**MATLAB**重新求解 不改变；成本增加**49.38**

实例2: 奶制品生产销售计划



$$Max \quad z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$$

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_5 + 3x_6 \le 600$$

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_5 + 2x_6 \le 240$$

$$x_1 + x_5 \le 100$$

$$x_3 - 0.8x_5 = 0$$

$$x_4 - 0.75x_6 = 0$$

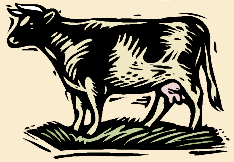
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

```
c=[12 8 22 16 -1.5 -1.5];
A1=[4 3 0 0 4 3;2 1 0 0 3 2;1 0 0 0 1 0];
b1=[600 240 100];
A2=[0 0 1 0 -0.8 0;0 0 0 1 0 -0.75];
b2=[0 0];
v1=[0 0 0 0 0 0];
[x,z0,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,A2,b2,v1)
```

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4; **Exp07.m**

lag.ineqlin =(1.58;3.26; 0.00) ; …

实例2: 奶制品生产销售计划



$$Max \quad z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$$

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

$\Rightarrow 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \le 600$

$\Downarrow$

601

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

$$x_1 + x_5 \le 100$$

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58;3.26; 0.00) ; …

z1=1731.98

z1-z = 1731.98-1730.4=1.58

z1=lag.ineqlin(1)

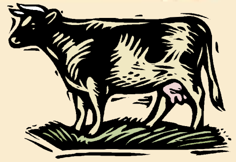
"影子价格"

z1*12=1.58*12= 18.96>15

- **15元可增加1桶牛奶，应否投资？**

应该投资！

实例2: 奶制品生产销售计划



$$Max \quad z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$$

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 + 3x_2 + 4x_5 + 3x_6 \le 600$$

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 3x_5 + 2x_6 \le 240$$

$$x_1 + x_5 \le 100$$

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58;3.26; 0.00) ; …

lag.ineqlin(2)=3.26，所以1小时劳动时间的影子价格应为3.26/2=1.63，即单位劳动时间增加的利润是1.63(元)

- 聘用临时工人增加劳动时间，工资最多每小时几元？

实例2: 奶制品生产销售计划

$$Max \quad z = 12x_1 + 8x_2 + 22x_3 + 16x_4 - 1.5x_5 - 1.5x_6$$

$$\frac{x_1 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_6}{4} \le 50$$

$$4(x_1 + x_5) + 2(x_2 + x_6) + 2x_5 + 2x_6 \le 480$$

$$x_1 + x_5 \le 100$$

$$x_3 = 0.8x_5$$

$$x_4 = 0.75x_6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

若每公斤**B1**的获利下降**10%**，应将目标函数中$\boldsymbol{x_3}$的系数改为**19.8**，重新计算发现最优解和最优值均发生了变化

若**B2**的获利向上波动**10%**，原计划也不再是最优的

x=(0,168,19.2,0,24,0) ; z = -z0 =1730.4
lag.ineqlin =(1.58;3.26; 0.00) ;

MATLAB没有给出这种敏感性分析的结果

- **B$_1$**，**B$_2$**的获利经常有**10%**的波动，对计划有无影响？

布置实验内容

实验目的

- 了解线性规划问题
- 理解单纯形算法的基本思想
- 掌握用MATLAB优化工具箱求解线性规划问题；
- 练习建立实际问题的线性规划模型。

实验内容

课程作业