数学实验第十周作业

蹇傲霖 2018010919

4. 对于如下线性规划问题(有 $3n$ 个决策变量($\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}$)和 $2n$ 个约束):

$$\begin{aligned} &\min\ (-x_n) \\ &\text{s.t.}\ 4x_1 - 4r_1 = 1, \\ &x_1 + s_1 = 1, \\ &4x_j - x_{j-1} - 4r_j = 0, \quad j = 2,3,\cdots,n, \\ &4x_j + x_{j-1} + 4s_j = 4, \quad j = 2,3,\cdots,n, \\ &x_j, r_j, s_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

请分别对 n 的不同取值(如 $n=2,10,50,\cdots$)求解上述线性规划问题，算法使用 linprog 默认的算法(dual-simplex 算法)观察计算时间。

解:

选取

n=[2,10,50,100,1000]

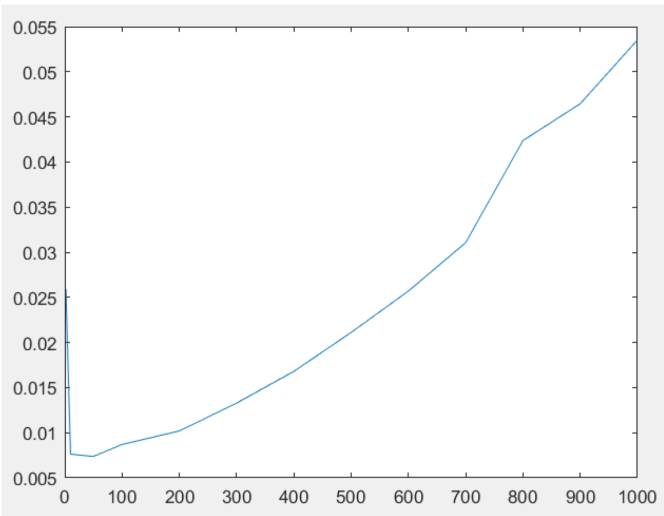
记录下 linprog 计算时间:

time=[0.0084858,0.0079638,0.0079962,0.0079118,0.0526361]

为了得到较为平滑的时间曲线，选取

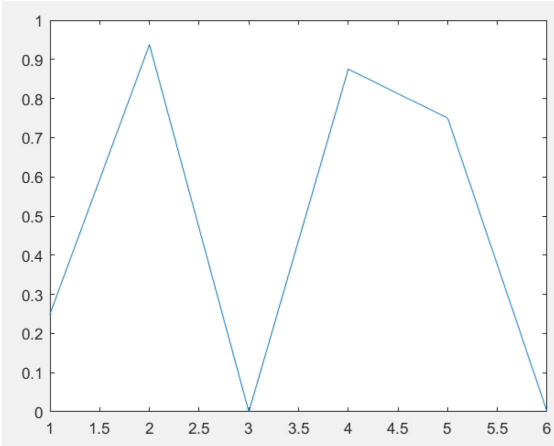
n=[**2**,10,50,100:100:**1000**]

得到计算时间曲线:(from 0.01s scale to 0.05s scale)

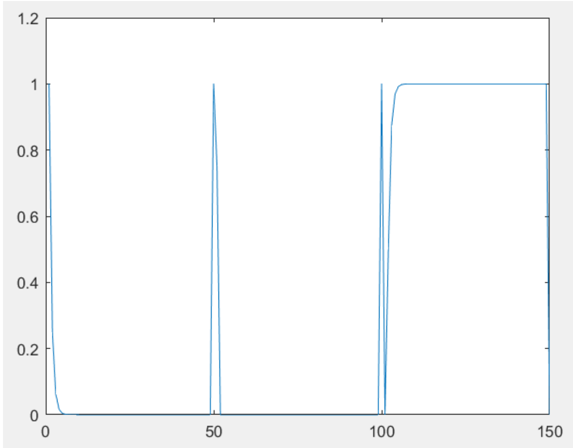


下面大致展示求解情况:

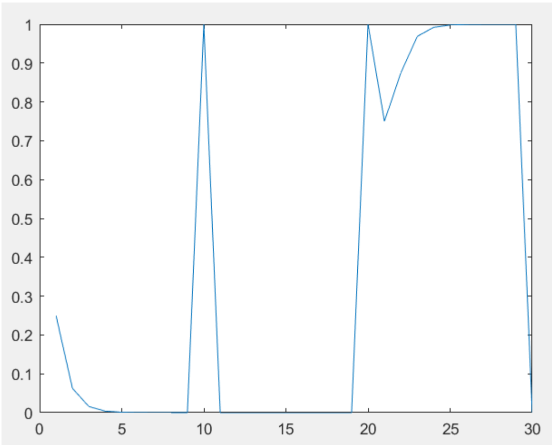
发现——数值集中在 x 开头和结尾、r 开头和结尾、s 中间



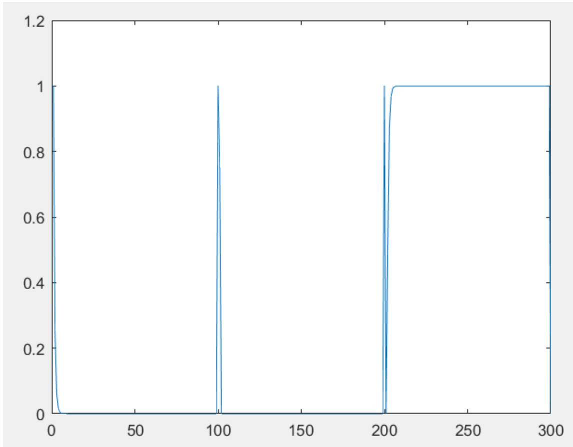
n=2



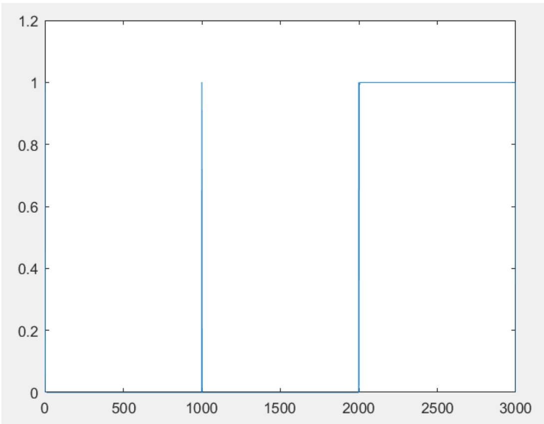
n=50



n=10



n=100



n=1000

2. 某牧场主知道，对于一匹普通的马，每周最低的营养需求为：40 磅蛋白质，20 磅碳水化合物，45 磅粗饲料。这些影响成分是从不同饲料中得到的，饲料及其价格在下表中列出。建立数学模型，确定如何以最低的成本满足马的最低营养需求，并分析当蛋白质最低需求量增加 2 磅或碳水化合物需求增加 1 磅时，最低成本的变化。

——	蛋白质/磅	碳水化合物/磅	粗饲料/磅	价格/元
干草/捆	0.5	2.0	5.0	1.80
燕麦片/袋	1.0	4.0	2.0	3.50
饲料块/块	2.0	0.5	1.0	0.40
高蛋白浓缩料/袋	6.0	1.0	2.5	1.00
每匹马的需求/周	40.0	20.0	45.0	——

解：

设干草、燕麦片、饲料块、高蛋白浓缩料四种饲料使用量为 a、b、c、d，蛋白质、碳水化合物、粗饲料三种营养物质的含量为 p、ch、r，若将此六变量写为 x=[a,b,c,d,p,ch,r]的格式，则利用 linprog 函数的输入格式，有：

```
Aeq=[0.5 1 2 6 -1 0 0;
     2 4 0.5 1 0 -1 0;
      5 2 1 2.5 0 0 -1];
beq=zeros(3,1);
LB=[zeros(4,1);40;20;45];
f=[1.8;3.5;0.4;1;0;0;0];
sol=linprog(f,[],[],Aeq,beq,LB);
cost=f'*sol
```

解得 sol= [5 0 20 0 42.5 20 45]，cost=17，即购买 5 捆干草、20 块饲料块，即可获得 42.5 磅蛋白质、20 磅碳水化合物和 45 磅粗饲料。

为了分析蛋白质、碳水需求分别改变的情况，将原 LP 问题改写为：

x=[a,b,c,d,e,f,g,p,ch,r]，e、f、g 用于不等式到等式的转换，p-e=40，ch-f=20，r-g=45. 所有变量的下界都为 0.

```
Aeq=[0.5 1 2 6 0 0 0 -1 0 0;
    2 4 0.5 1 0 0 0 0 -1 0;
    5 2 1 2.5 0 0 0 0 0 -1;
    zeros(1,4) -1 0 0 1 0 0;
    zeros(1,5) -1 0 0 1 0;
    zeros(1,6) -1 0 0 1;
```

```
    ];
beq=[0,0,0,40,20,45]';
```

仅仅形式上的改变不会影响最优解。此时求取 lambda.eqlin 得到的恰好是我们定义的拉格朗日乘子的负数。

```
lambda.eqlin=[0 -0.4 -0.2 0 -0.4 -0.2]
```

根据拉格朗日乘子可以计算出蛋白质、碳水需求分别改变为 42 和 21 之后的费用：

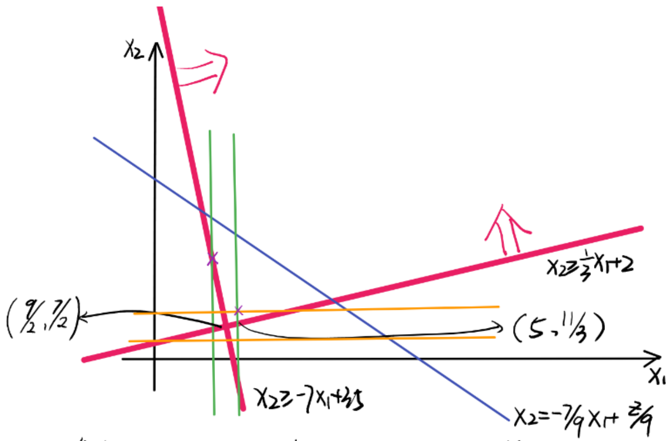
```
cost1 =
    17
cost2 =
   17.4000
```

检验 $B^{-1}b\geq 0$，检验通过，因此结果正如上。重新计算 linprog 结果一致。

3. 用分支定界算法求解下面整数线性规划问题

$$\min z = 7x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \; -x_1 + 3x_2 \geq 6,$$
$$7x_1 + x_2 \geq 35$$
$$x_1, x_2 \in Z^+$$

解：



分支：$\begin{cases} x_1 \leq 4，在(4,7)取 z_{min}=91 \\ x_1 \geq 5 \begin{cases} x_2 \geq 4，在(5,4)取 z_{min}=71 \\ x_2 \leq 3，无可行解 \end{cases} \end{cases}$

故已求得最优解 (5,4)，$z_{min}=71$.

4. 用动态规划方法求解下面旅行商问题。

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

默认第一行代表从 0 出发、第一列代表到达 0.出发城市是 0.

$$f_3(V_0,\{V_1,V_2,V_3\}) = \min\left\{\begin{array}{l} d_{01}+f_2(V_1,\{V_2,V_3\}) \\ d_{02}+f_2(V_2,\{V_1,V_3\}) \\ d_{03}+f_2(V_3,\{V_1,V_2\}) \end{array}\right\}$$

$$f_2(V_1,\{V_2,V_3\}) = \min\left\{\begin{array}{l} d_{12}+f_1(V_2,\{V_3\}) \\ d_{13}+f_1(V_3,\{V_2\}) \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{l} d_{12}+d_{23}+d_{30} \\ d_{13}+d_{32}+d_{20} \end{array}\right\}$$

其余类推

$f_k(V_i, V)$ 指从 V_i 出发，经过 V 中顶点各一次，回到 V_0 点的最短路程.

现有 $f_1(V_1,\{V_2\}) = d_{12}+d_{20} = 3+9 = 12$

$f_1(V_1,\{V_3\}) = d_{13}+d_{30} = 5+5 = 10$

$f_1(V_2,\{V_3\}) = d_{23}+d_{30} = 4+5 = 9$

$f_1(V_2,\{V_1\}) = d_{21}+d_{10} = 1+7 = 8$

$f_1(V_3,\{V_1\}) = d_{31}+d_{10} = 6+7 = 13$

$f_1(V_3,\{V_2\}) = d_{32}+d_{20} = 2+9 = 11$

$f_2(V_1,\{V_2,V_3\}) = \min\{\underline{f_1(V_2,\{V_3\})+d_{12}}, f_1(V_3,\{V_2\})+d_{13}\}$

$= \min\{9+3, 11+5\} = 12$

类似地 $f_2(V_2,\{V_1,V_3\}) = \min\{\underline{d_{21}+10}, d_{23}+13\} = 11$

$f_2(V_3,\{V_1,V_2\}) = \min\{d_{31}+12, \underline{d_{32}+8}\} = 10$

故 $f_3(V_0,\{V_1,V_2,V_3\}) = \min\left\{\begin{array}{c} 16 \\ \underline{13} \\ \underline{13} \end{array}\right\} = 13.$

$$\left\{\begin{array}{l} 0\to 2\to 1\to 3\to 0 \\ 0\to 3\to 2\to 1\to 0 \end{array}\right.$$