ODE 作业

塞傲霖 2018010919 电 82

1. 教材 85 页实验 4 第 2 题（1)、(2）的两个方程

（1）$\begin{cases} y' = y + 2x, \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(0 \le x \le 1)$。精确解$y = 3e^x - 2x - 2$

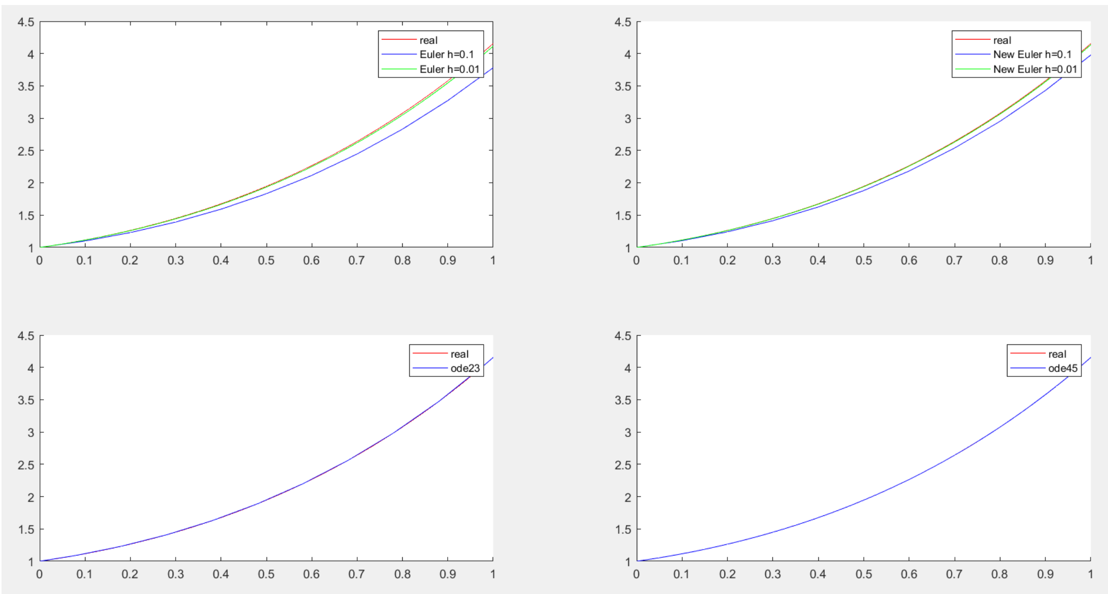
（2）$\begin{cases} y' = x^2 - y^2, \\ y(0) = 0 \text{ 或 } y(0) = 1 \end{cases}$

分别用欧拉法、改进欧拉法和 ODE23，ODE45 求解，画出解的图形，对结果进行分析比较。

（1）

前向欧拉法分别采用 h=0.1、0.01，改进欧拉法分别采用 h=0.1、0.01 进行计算。ode23、ode45 均采用默认精度，相对误差 10^{-3}，绝对误差 10^{-6}.

下图从左到右、从上到下分别描绘了四种方法的解的图像与真实解的对比。可以看出 ode45 方法误差最小，最大绝对误差约为 5.1128e-08；ode23 方法次之，最大绝对误差约为 2.9544e-04；改进欧拉法再次之；而前向欧拉法误差最大。在欧拉法中通过减小 ODE 解算步长（即 h）可以提高精度，但是会导致计算量增加。

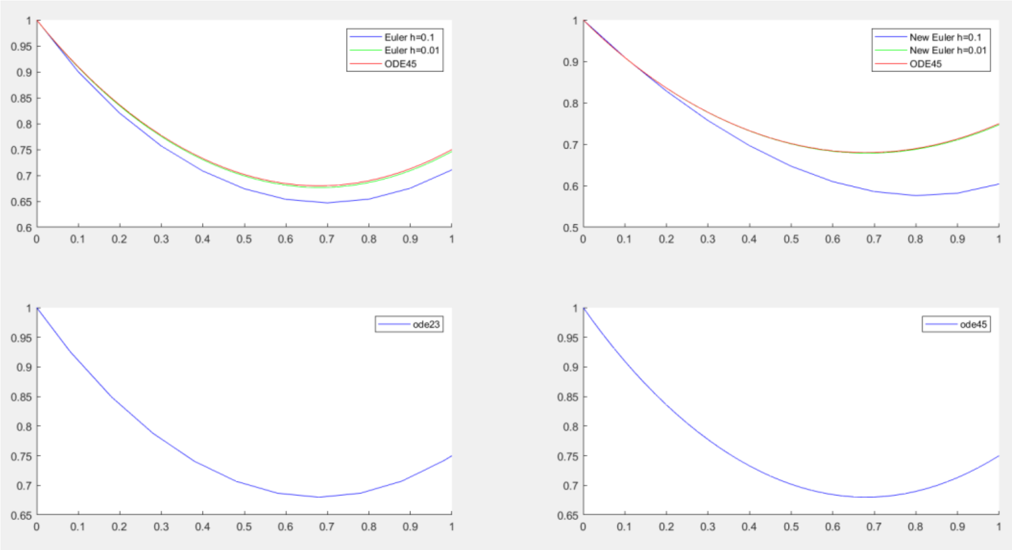


（2）

设 y(0)=1：

前向欧拉法分别采用 h=0.1、0.01，改进欧拉法分别采用 h=0.1、0.01 进行计算。ode23、ode45 均采用默认精度，相对误差 10^{-3}，绝对误差 10^{-6}.

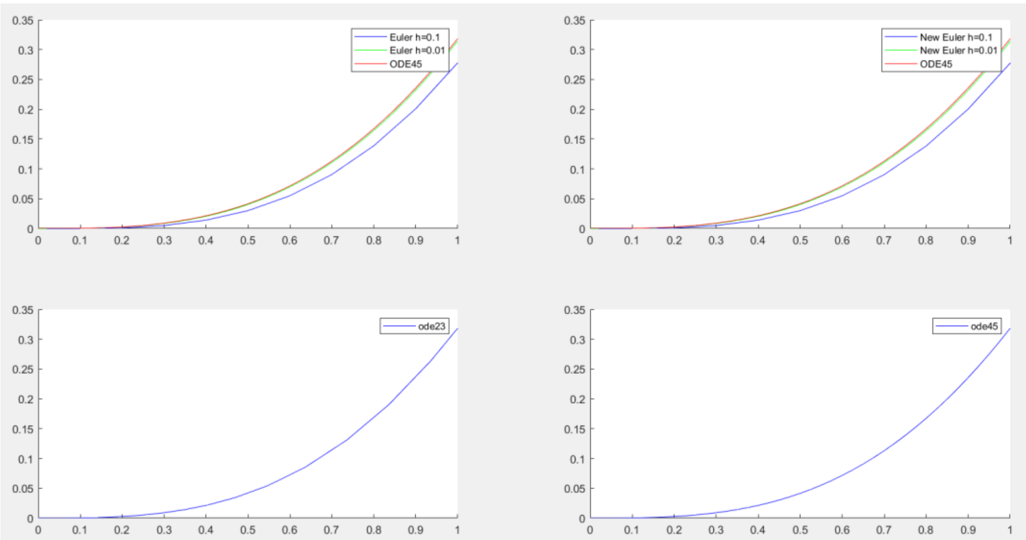
下图从左到右、从上到下分别描绘了四种方法的解的图像，其中欧拉法和改进欧拉法（图 1、2）与 ODE45 的解进行了对比。在欧拉法中通过减小 ODE 解算步长（即 h）可以提高精度，但是会导致计算量增加。



设 y(0)=0：

前向欧拉法分别采用 h=0.1、0.01，改进欧拉法分别采用 h=0.1、0.01 进行计算。ode23、ode45 均采用默认精度，相对误差 10^{-3}，绝对误差 10^{-6}.

下图从左到右、从上到下分别描绘了四种方法的解的图像，其中欧拉法和改进欧拉法（图 1、2）与 ODE45 的解进行了对比。在欧拉法中通过减小 ODE 解算步长（即 h）可以提高精度，但是会导致计算量增加。



对比（2）中 y 初值不同对应的不同解，得出结论：ODE 初值问题中变量初值是很重要的因素，在书写代码时需要格外注意，避免出错。

2. 我们课上学习了求解常微分方程（Ordinary differential equation,简称 ODE）初值问题的单步法。在实际计算中，人们也常常采用多步法，即形如 $y_{n+k}=-\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j y_{n+j}+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}$ 的线性 k 步法，利用前 k 步计算的信息，计算下一步的近似值。这种方法的启动需要 y_0 到 y_{k-1} 的估计值，它的局部截断误差分析是假设前 k 步为精确的，分析通过该算法得到下一步近似值的误差。请分析下面显示 2 步法的局部截断误差，给出局部截断误差的主项。

显示2步 **Admas**方法：$y_{n+2}=y_{n+1}+\dfrac{h}{2}\left(3f_{n+1}-f_n\right)$

根据Taylor级数：

$$y(n+2)-y(n+1)=f(n+1)h+\frac{h^2}{2}f'(n+1)+\frac{h^3}{6}f''(n+1)+O(h^4) \quad \cdots ①$$

显式Adams两步法：

$$y(n+2)-y(n+1)=\frac{h}{2}\left(3f(n+1)-f(n)\right) \quad \cdots ②$$

① - ②（主项相减）

$$\triangle=-\frac{h}{2}f(n+1)+\frac{h}{2}f(n)+\frac{h^2}{2}f'(n+1)+\frac{h^3}{6}f''(n+1)$$

$$=-\frac{h}{2}\left[f'(n+1)h+\frac{h^2}{2}f''(n+1)+O(h^3)\right]+\frac{h^2}{2}f'(n+1)+\frac{h^3}{6}f''(n+1)$$

这一步用了后向Euler

$$=-\frac{1}{12}h^3f''(n+1)+O(h^4)$$

因此显式Adams两步法局部截断误差为 $\frac{1}{12}h^3f''(n+1)$.

3. 小型火箭初始质量为 1400kg，其中包括 1080kg 燃料. 火箭竖直向上发射时燃料燃烧率为 18kg/s，由此产生 32000N 的推力，火箭引擎在燃料用尽时关闭. 设火箭上升时空气阻力正比于速度的平方，比例系数为 0.4kg/m，求引擎关闭瞬间火箭的高度、速度、加速度，及火箭到达最高点时的高度和加速度，并画出高度、速度、加速度随时间变化的图形.

$$t_{boost} = \frac{1080}{18} = 60\ (s)$$

$$m(t) = \begin{cases} 1400 - 18t & 0 \le t < 60 \\ 320 & t \ge 60 \end{cases}$$

以竖直向上为 v 的正方向：

$$m\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 32000 - 0.4v^2 - 9.8m & 0 \le t < 60 \\ -0.4v^2 - 9.8m & t \ge 60 \end{cases}$$

因此可以解关于 v 的 ODE，$t \ge 0$，

通过选取不同的 t_{final} 找到火箭 $v=0$ 的时刻.

即

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = \begin{cases} \dfrac{32000 - 0.4v^2}{1400 - 18t} - 9.8 & 0 \le t < 60 \\ -\dfrac{0.4v^2}{320} - 9.8 & t \ge 60 \end{cases} \\ v(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$y = \int_0^t v(t)\,dt$$

计算出火箭燃料可供匀速燃烧 60s，可以得到火箭质量关于时间 t 的函数表达式，进而写出关于火箭速度 v 的微分方程，分为 0~60s 和 60s~减速到 0 的时刻（经过尝试选取为 72s）两段。

提供 v 的初值为 0，解上述 ODE。在 MATLAB 中利用 ode45 函数，设置绝对误差容限 1e-10，相对误差容限 1e-6，指定结果步长为 1e-4 s，解得在给定时刻点上的火箭速度。

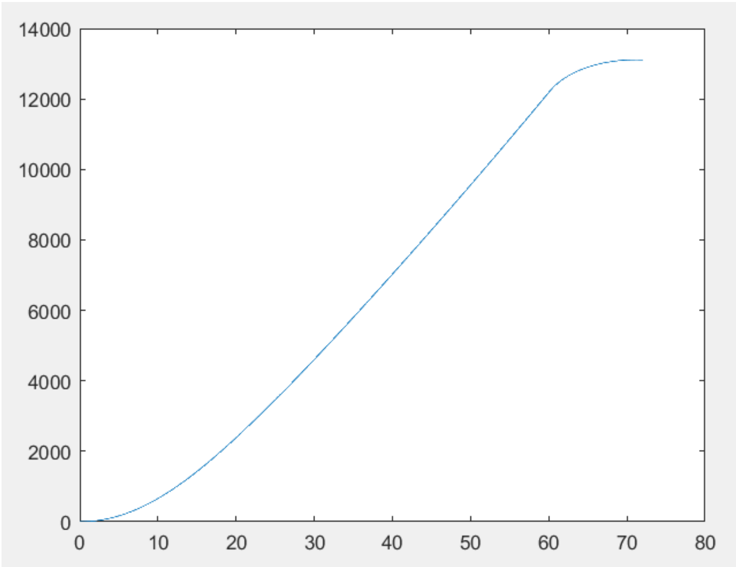
接着利用 cumtrapz 函数可以解得火箭所到达的高度。将 t 和 v 代入 dv/dt 函数中

可以解得火箭的加速度。

发现引擎关机即 60s 时刻速度=267.2719m/s，加速度=-99.1m/s^2，高度=12189.66m。

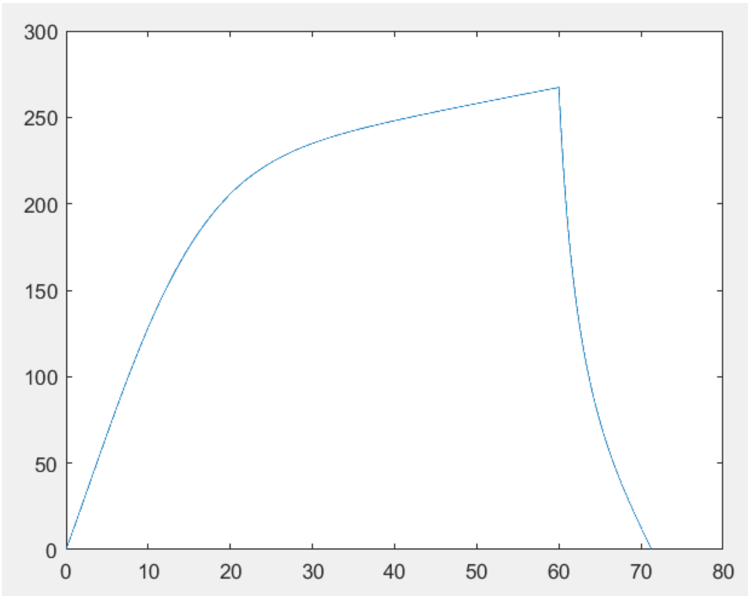
发现 t=71.30192s 时火箭减速为 0，火箭到达最高点。高度=13115.1438m，加速度=-9.8 m/s^2.

绘出上述高度、速度、加速度的曲线图如下：



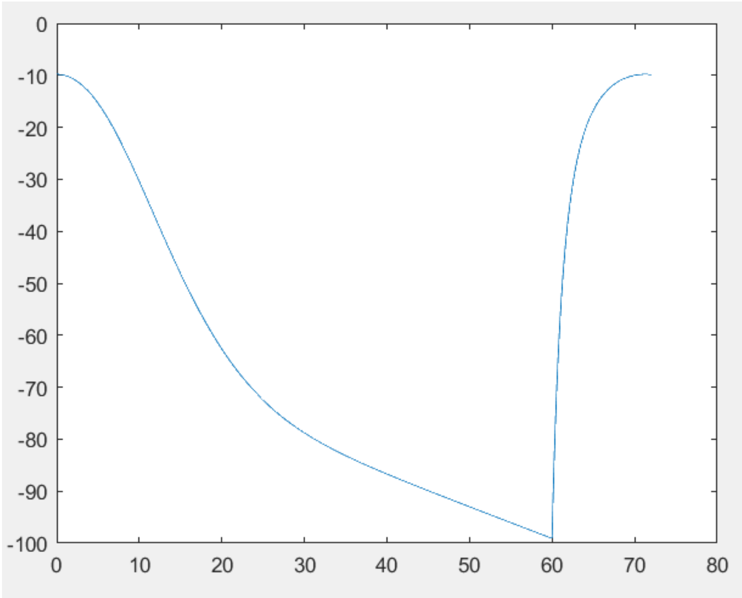
高度（向上为正）

最大高度在 71.30192s，13115.1438m



速度（向上为正）

最大速度在 60s，267.2719m/s。



加速度（向上为正）

向下的最大加速度在 60s，-99.1m/s^2 左右。

4.人口问题 Logistic 模型和其数值求解的简介。

答：

用 r(t)代表人口自然增长率，其随时间推移、人口增加而变化：

$$r(t) = r_0(1 - \frac{N(t)}{K})$$

K 代表地球所能容纳的人口上限，当 P(t)人口总量增加，r(t)会随之减小。

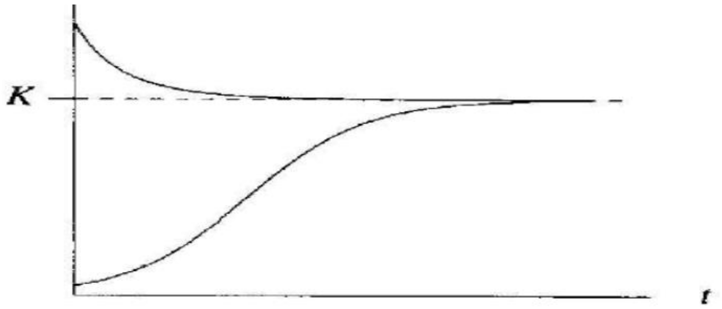
对于关于 P 的 ODE

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = r_0(1 - \frac{N(t)}{K})N(t)$$

进行求解，解的形式为

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-r_0(t-t_0)}} \qquad C = \frac{K - P_0}{P_0}$$

若人口的初值不同，有不同的结果，如下图所示，当人口初值小于 K 时人口会渐渐从下方趋近于 K；当人口初值大于 K 时人口会渐渐从上方趋近于 K。



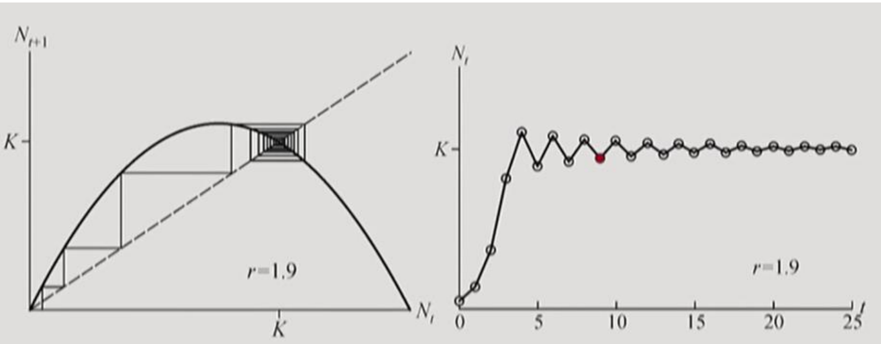
如果对于 Logistic 模型（常数为 r、K）进行离散化，取 t 的步长为 1，即：

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

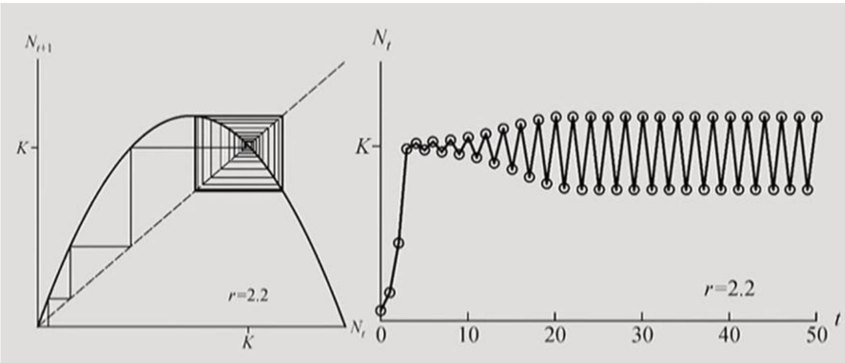
$$N_{t+1} - N_t = rN_t\left(1-\frac{N_t}{K}\right)$$

$$N_{t+1} = (1+r)N_t - \frac{r}{K}N_t^2$$

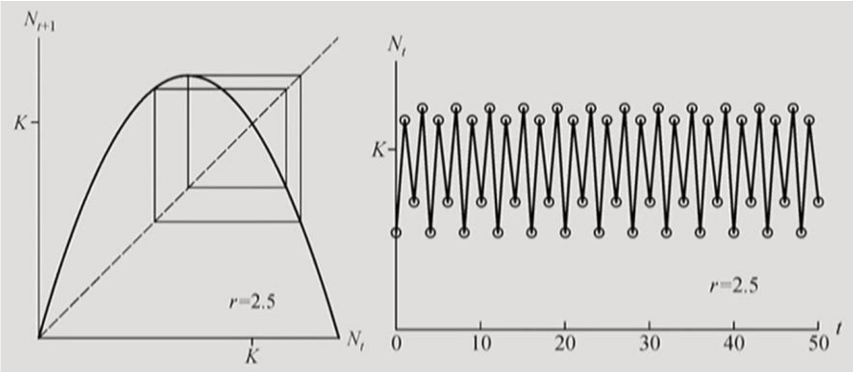
通过选取 r、K 的值，并给 N 指定初值，即可开始迭代。指定 K 不变，我们发现在不同的 r 值之下，解的情况有不同的特征。



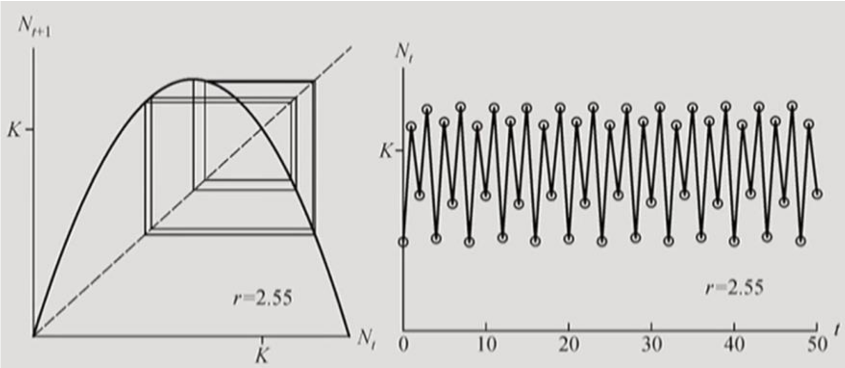
r=1.9，稳态解趋近于 K。



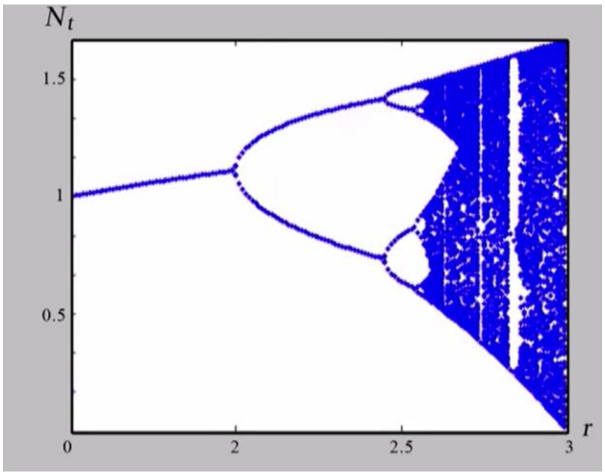
r=2.2，稳态解没有极限，以 2 为周期。



r=2.5，稳态解没有极限，以 4 为周期。



r=2.55，稳态解没有极限，以 8 为周期。



上图反映了稳态解的周期随 r 的变化情况，可以看到 r=2、r=2.45、r=2.54 等是稳态解的周期发生改变的点。随着 r 的增大，周期有翻倍的现象。这种解的形式随着参数变化，而变化后的许多具体特征（如新位置）难以描述清楚的现象称为混沌。混沌的重要特征是，对于初值非常敏感。