第二次大作业：线性方程组求解的数值精度

塞傲霖 电 82 2018010919

一． 考察系数矩阵为范德蒙矩阵的线性方程组，

1. 研究条件数的变化；

2. 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响；

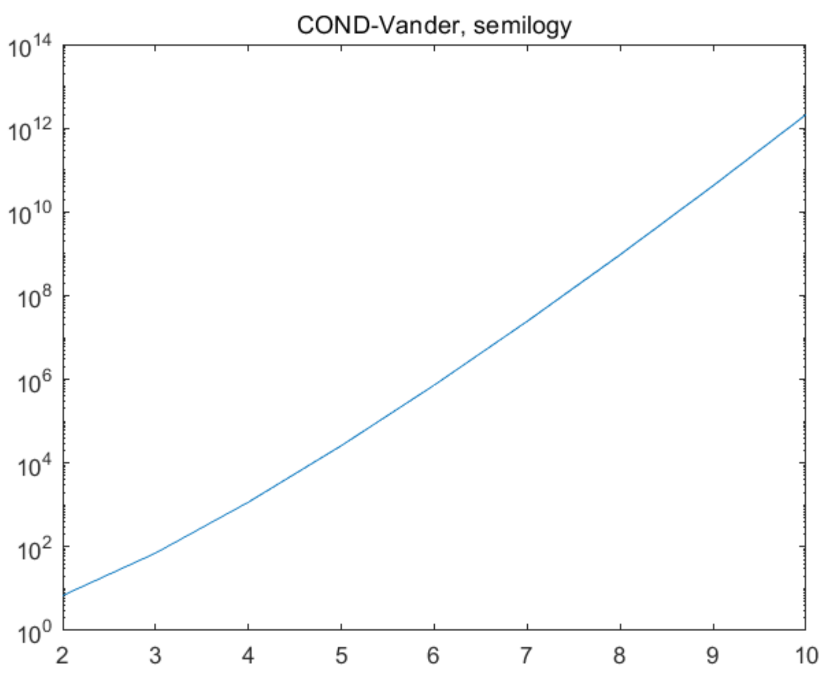
3. 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代求解，对比求解精度。

解：

1.

取范德蒙德矩阵阶数为 n，基本向量 v=[1,2,…,n]，以基本向量 v 构造范德蒙德矩阵 A_n。利用 cond 函数求解 A_n 的 2-范数，并且绘制单对数曲线图（2~10 阶）。

$$A_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^{n-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{bmatrix}$$



可见范德蒙德矩阵的 2-范数随着阶数基本上呈指数级增长，可见范德蒙德矩阵的病态性严重。在 n=10 时矩阵的 2-范数达到了 10^{12} 的量级。

2.

由解的相对误差上界公式：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|},$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

选取 6 阶范德蒙德矩阵。

构造精确解为标幺向量（ones）的线性方程组：

$$A_n x = b, x = [1,1,\ldots,1]_n^T$$

因而有：$b = sum(A,2)$，即 b 是 A 各列相加的结果。

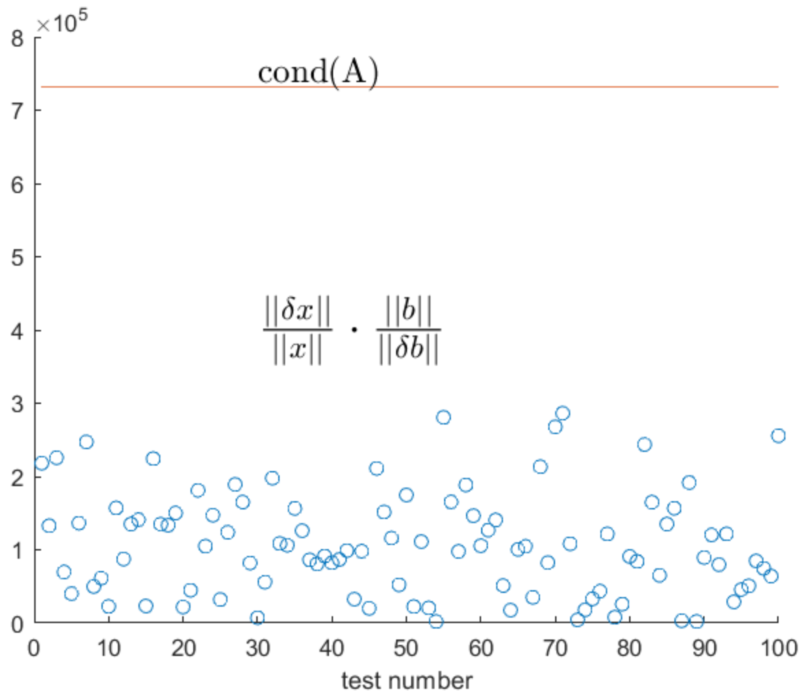
右端项 b 施加扰动：

设置 db=[-5,5]范围内 6 个元素组成的随机向量

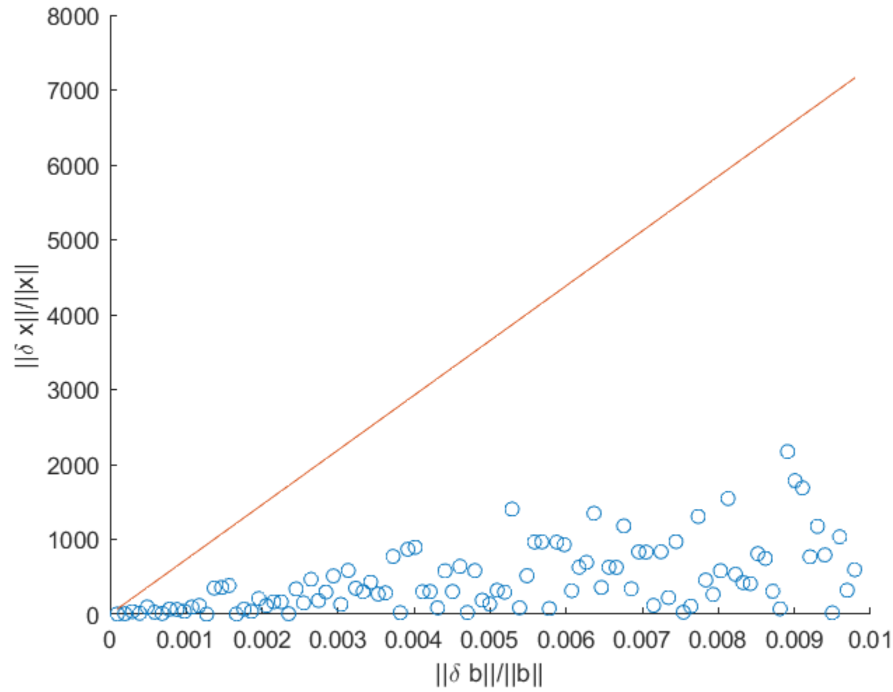
根据 A 和设定的精确解，计算 b 的原始值 b0=[6,63,364,1365,3906,9331]

其中一个典型的扰动 db=[3.2;-2.5;4.0;-2.0;1.2;3.0]

从范数角度来说，b0 处于 1e4 量级，db 处于 1e0 量级，A 处于 1e3 量级，x 处于 1e0 量级，dx 处于 1e2 量级。下图展示了相对误差不等式的效果：



也可以画为下图的形式，呈现了 x 相对误差和 b 相对误差的对比。散点在红线以下代表解的相对误差处于上界控制之内。从图中可以看出，不等式规定的上界只是一个较为宽松的估计值，对于 b 施加随机误差所导致解的误差很少能够达到上界。随着对 b 扰动的增大，解的相对误差也随之增大。



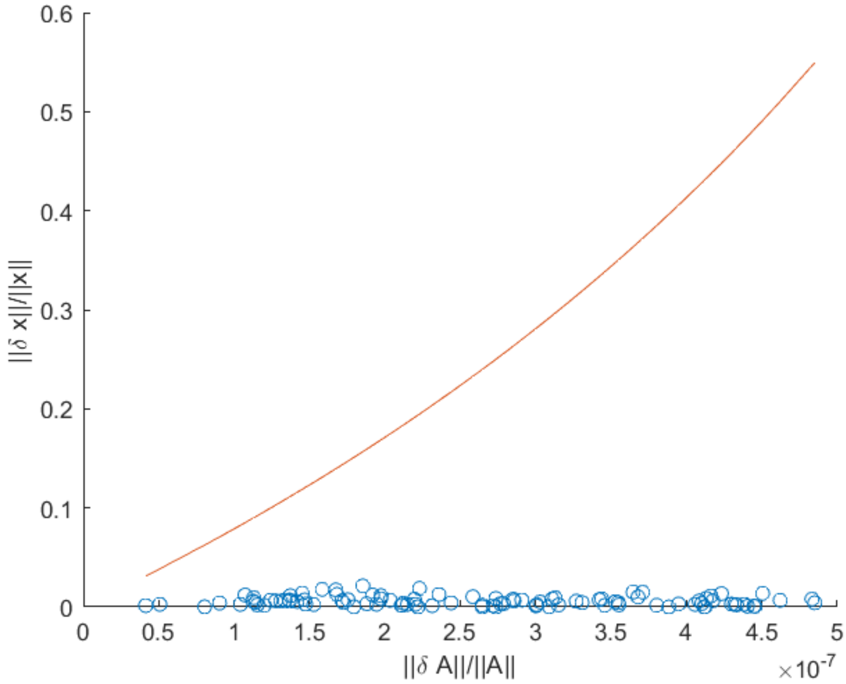
系数矩阵 A 施加扰动：

由于上界不等式的限制，需要满足

$$\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$$

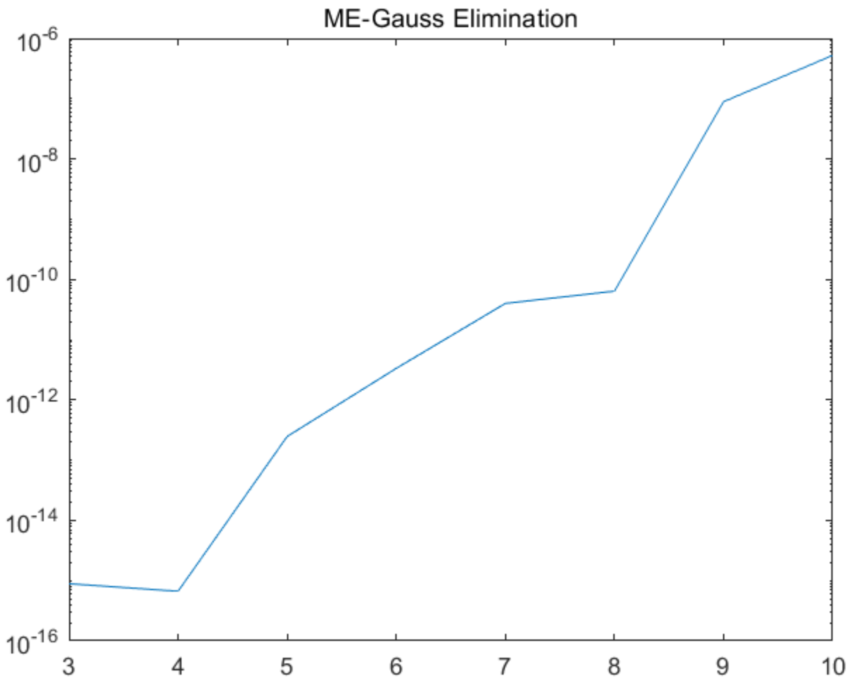
对于 A 施加小扰动，dA 为 A 的 10^{-7} 左右。结果如下图所示：散点位于红色曲线之下说明解的相对误差在上界控制之内。从图中可以看出，不等式规定的上界只是一个较为宽松的估计值，对于 A 施加随机误差所导致解的误差很少能够达到上界。整体来说，解的相对误差与 A 的扰动之间没有明显的关联。

选主元的高斯消去法的最大误差与范德蒙德矩阵的阶数基本呈指数关系。不过即使达到 n=10，此方法的精度仍然相当高，能够达到 10^{-6}.



3.

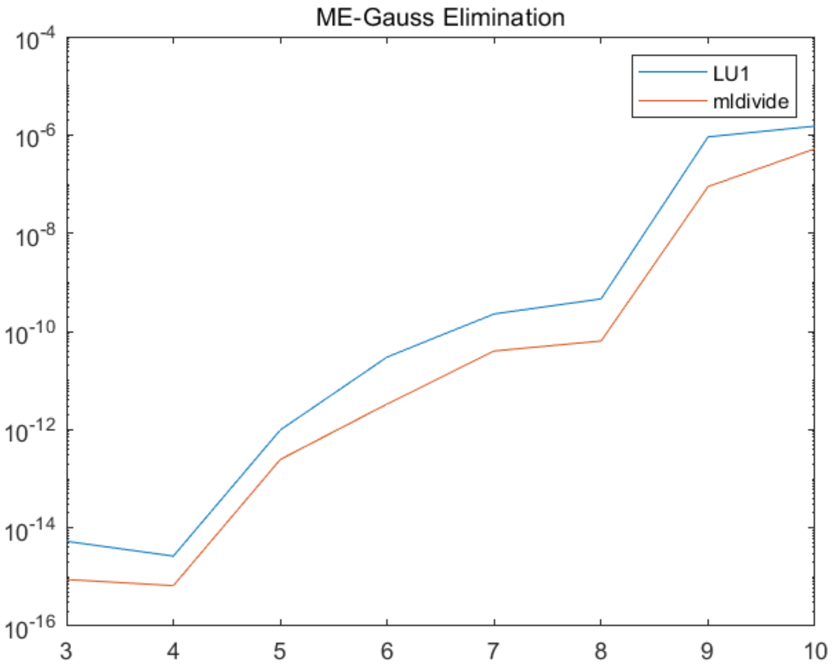
高斯消去法（选主元方法）



选主元的高斯消去法的最大误差与范德蒙德矩阵的阶数基本呈指数关系。不过即使达到 n=10，此方法的精度仍然相当高，能够达到 10^{-6}.

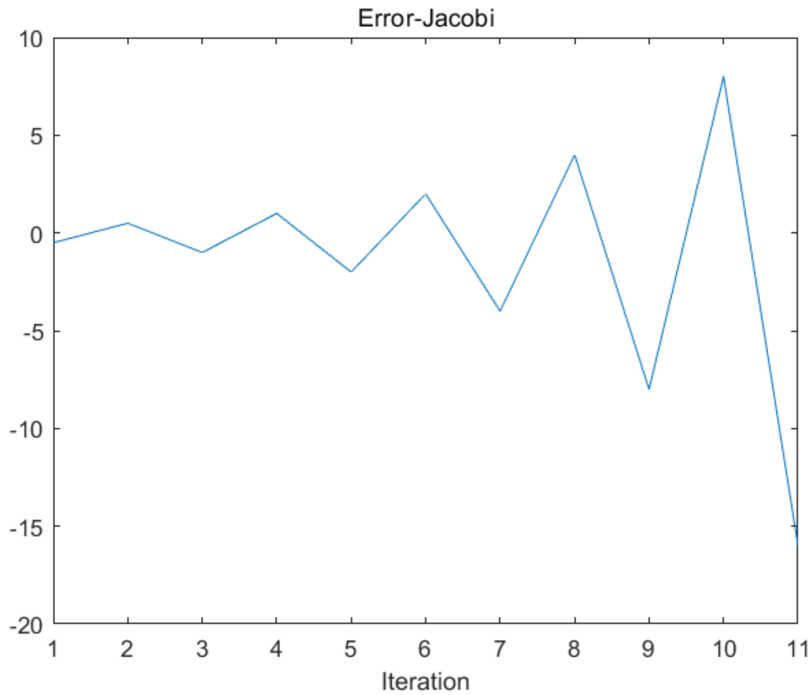
高斯消去法（不选主元）

从下图可以看出，不选主元的高斯消元法（LU1）比选主元的方法得到了具有更大误差的结果。但是误差并不高，10 阶方程组求得最大误差也在 10^{-6} 上下。

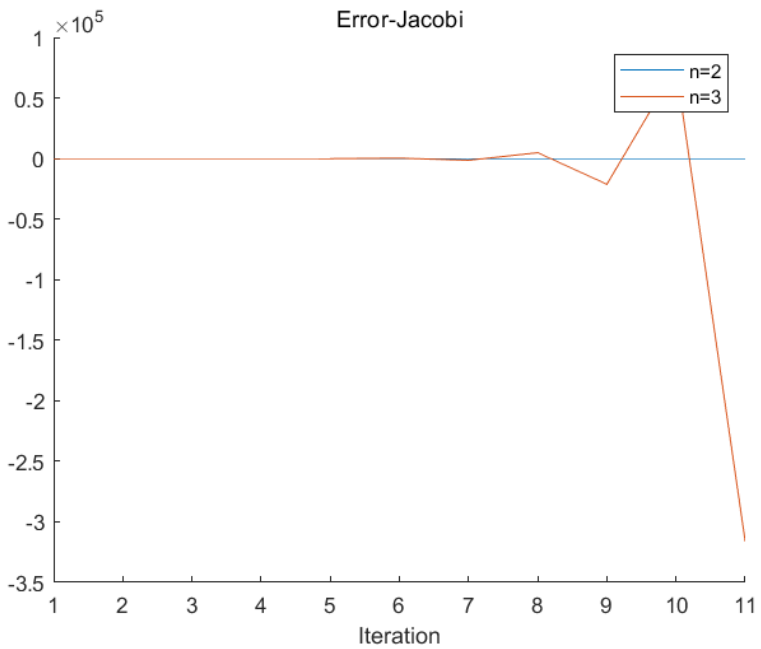


Jacobi 迭代法

利用迭代法的前提是，迭代矩阵的谱半径（特征值的最大绝对值）应该<1，这样才能够收敛到精确解。对于用以上方法构造的 2 阶范德蒙德矩阵，Jacobi 法的迭代矩阵谱半径=1.4142>1，因此本方法误差不断增大，振荡发散至无穷，如下图所示。

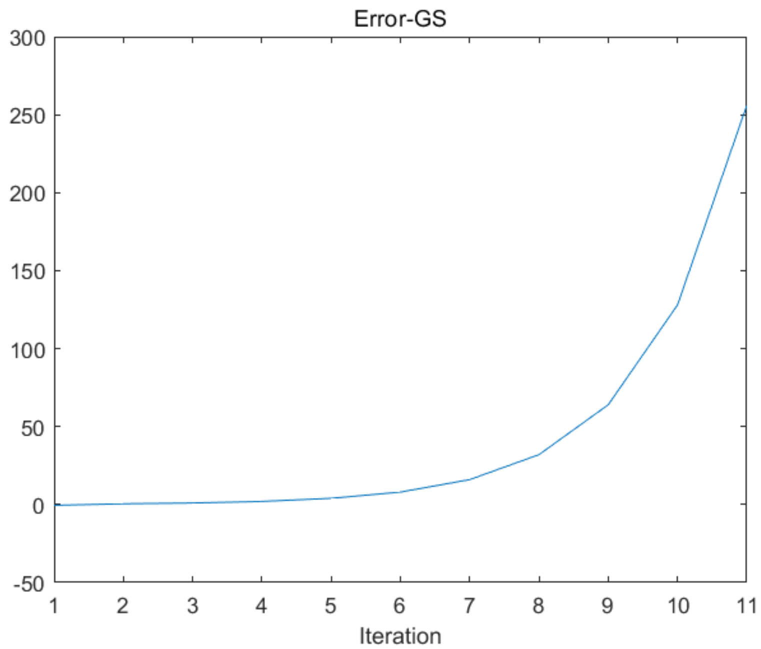


3 阶范德蒙德矩阵的 Jacobi 迭代矩阵谱半径=3.8979>1，同样不收敛。2、3 阶的情况对比如下图所示：

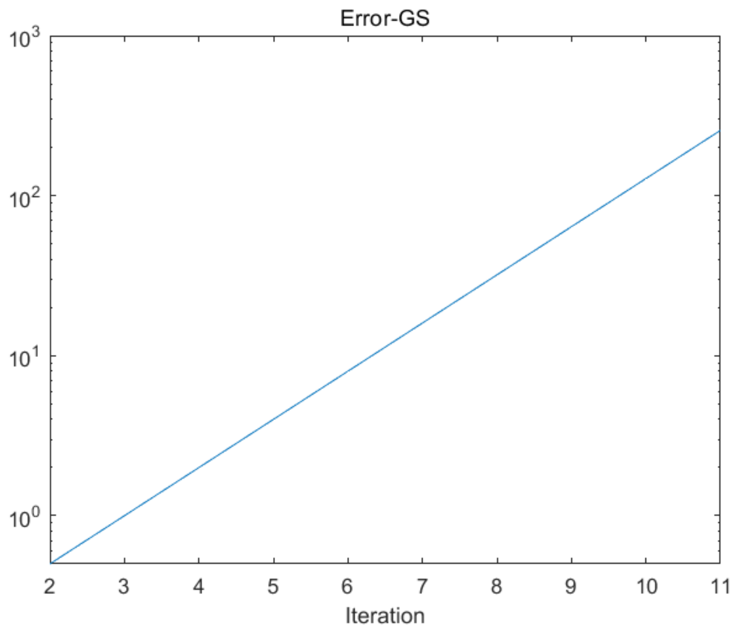


Gauss-Seidel 迭代法

利用迭代法的前提是，迭代矩阵的谱半径（特征值的最大绝对值）应该<1，这样才能够收敛到精确解。对于 2 阶范德蒙德矩阵，GS 法的迭代矩阵谱半径=2>1，因此本方法误差不断增大，不振荡发散至无穷，如下图所示。



也可以画为单对数曲线图：



二． 对不同阶数的希尔伯特矩阵为系数矩阵的线性方程组

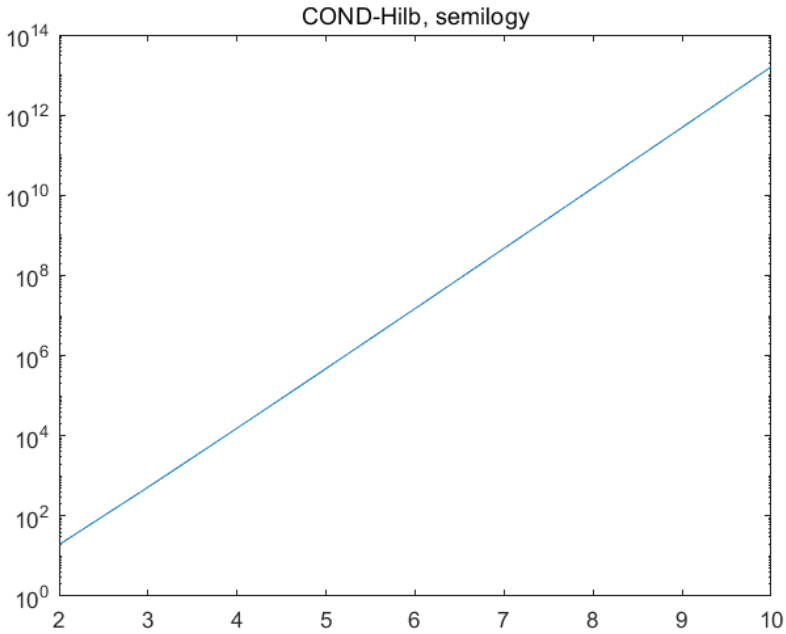
1. 研究条件数的变化；

2. 考察系数矩阵与右端项出现的扰动对精确解的影响；

3. 分别用高斯消去法、雅克比迭代法、高斯-赛德尔迭代、SOR 迭代与带预处理的梯度法求解，对比求解精度。

1.

绘图发现，希尔伯特矩阵的条件数与阶数之间为严格指数增长关系。当 n=10 时条件数达到 10^{13} 量级。



2.

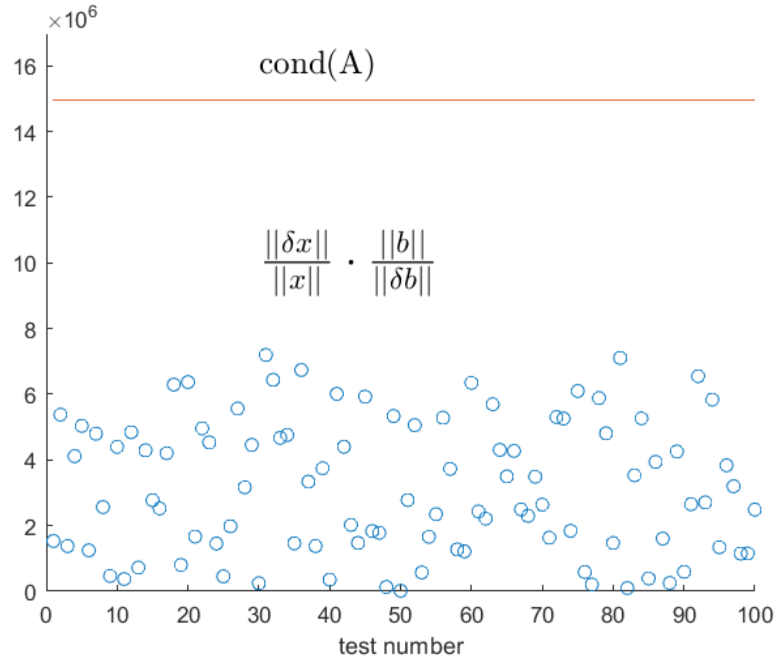
构造精确解为标幺向量（ones）的线性方程组：

$$A_n x = b, x = [1,1,\dots,1]_n^T$$

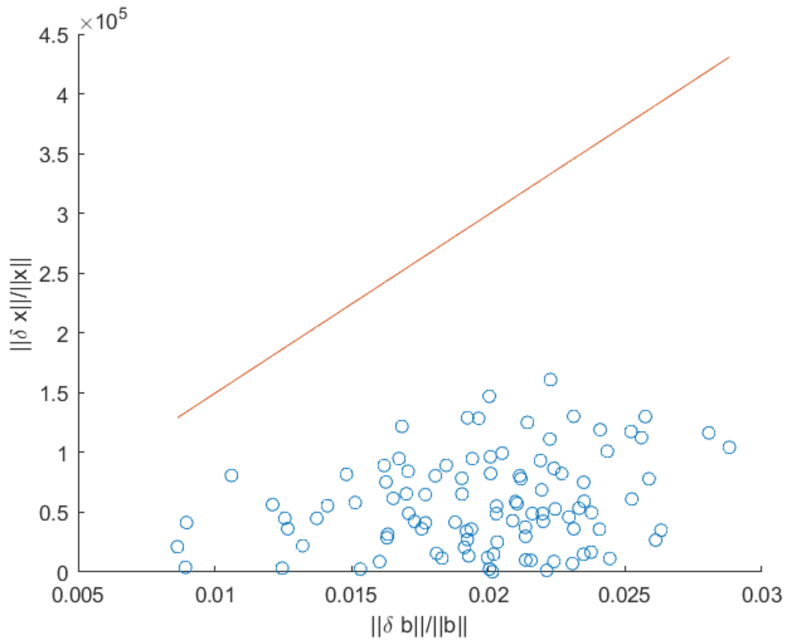
因而有：$b = sum(A,2)$，即 b 是 A 各列相加的结果。

对于右端项 b 施加随机扰动

得到如下散点图。散点位于红线以下说明处于上界控制之内。



也可以画为 x 相对误差与 b 相对误差对比的形式：随着对 b 扰动的增大，解的相对误差也随之增大。



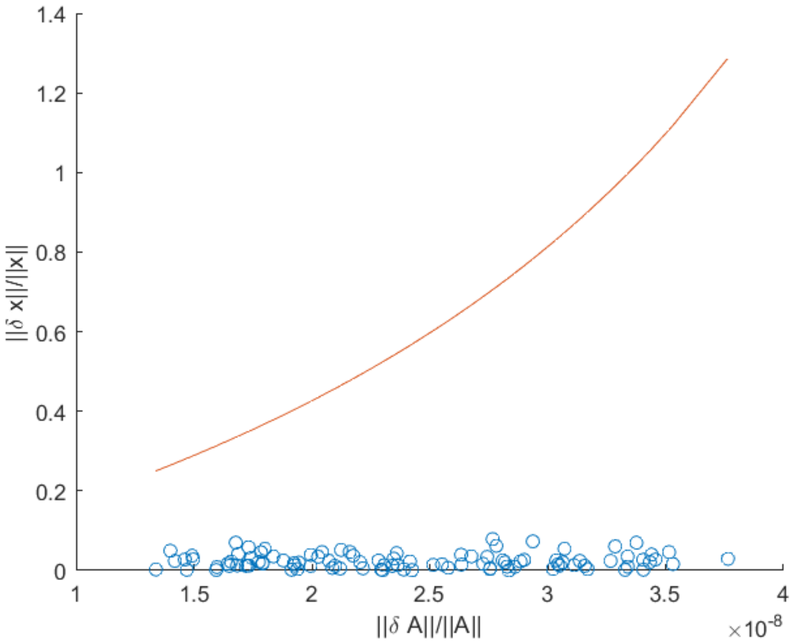
对于 A 施加小扰动

由于上界不等式的限制，需要满足

$$\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$$

对于 A 施加小扰动，dA 为 A 的 10^{-7} 左右。结果如下图所示：散点位于红色曲线之下说明解的相对误差在上界控制之内。从图中可以看出，不等式规定的上界只

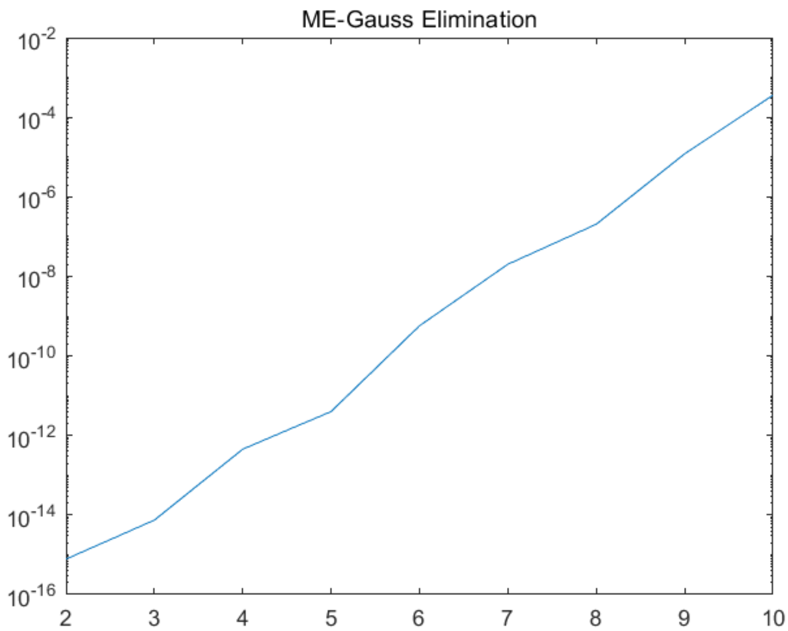
是一个较为宽松的估计值，对于 A 施加随机误差所导致解的误差很少能够达到上界。整体来说，解的相对误差与 A 的扰动之间没有明显的关联。



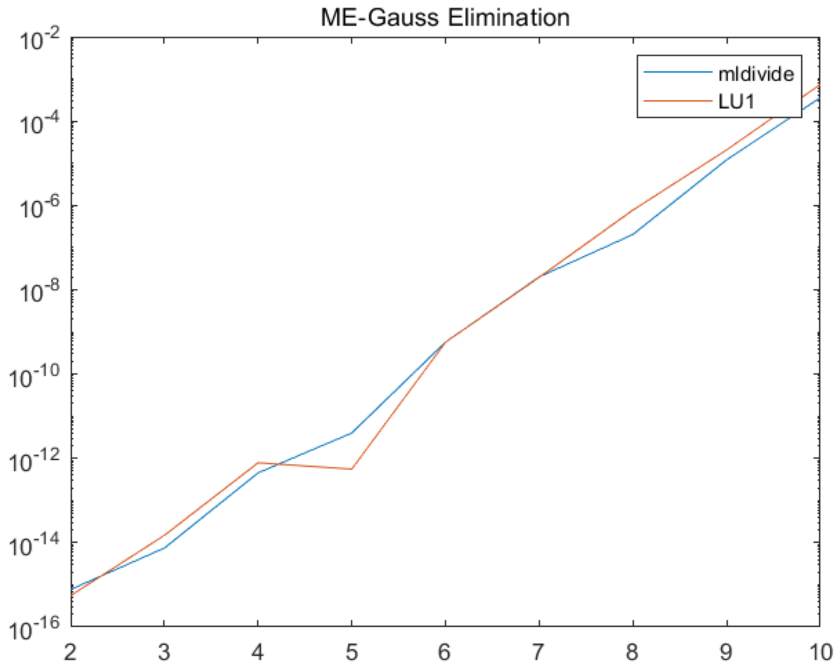
3.

高斯消元法

利用 MATLAB “\” 命令，即选主元的高斯消元法，绘制出最大误差与阶数的关系曲线图如下：基本呈指数增长关系。当阶数=10 时解的误差已经较大，达到 1e-4 量级。



从下图来看，选主元和不选主元的高斯消元法精度相差不多。从总体上讲选主元方法精度更高。

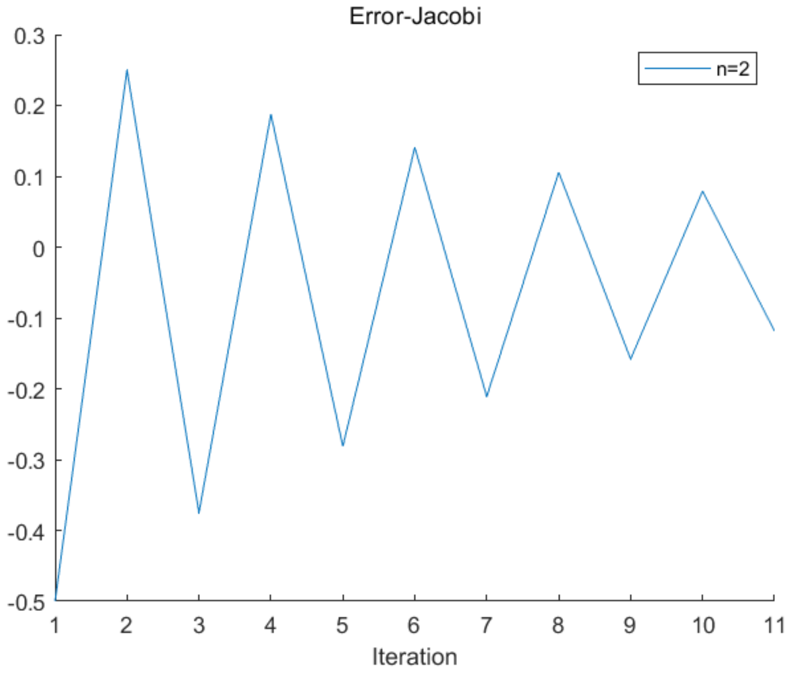


Jacobi 迭代法

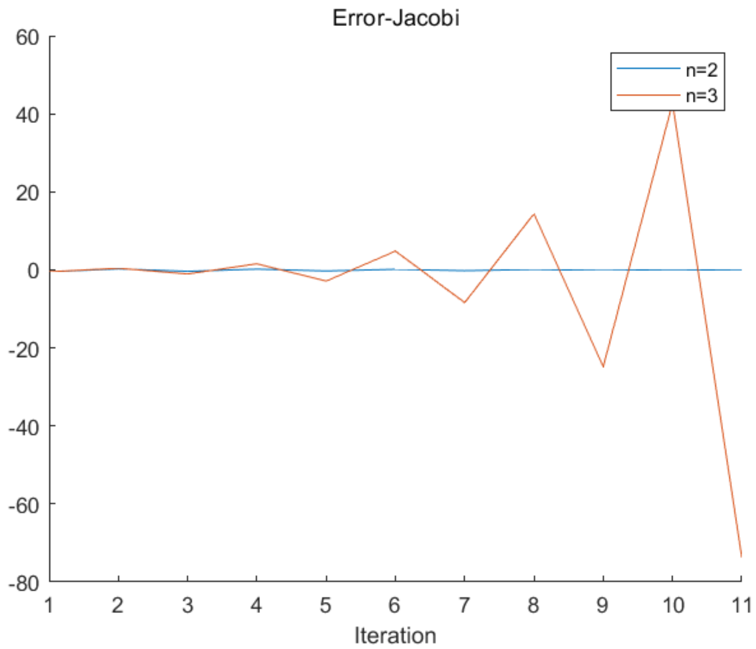
以矩阵阶数 n=2~10 时为例，谱半径单调递增：

ρ=[0.866,1.722,2.582,3.444,4.308,5.174,6.042,6.910,7.779]

因此利用 Jacobi 迭代法解希尔伯特矩阵线性方程组仅在 n=2 时收敛。76 次迭代达到 1e-5 的相对精度。下图展示了 n=2 迭代振荡收敛的情况：



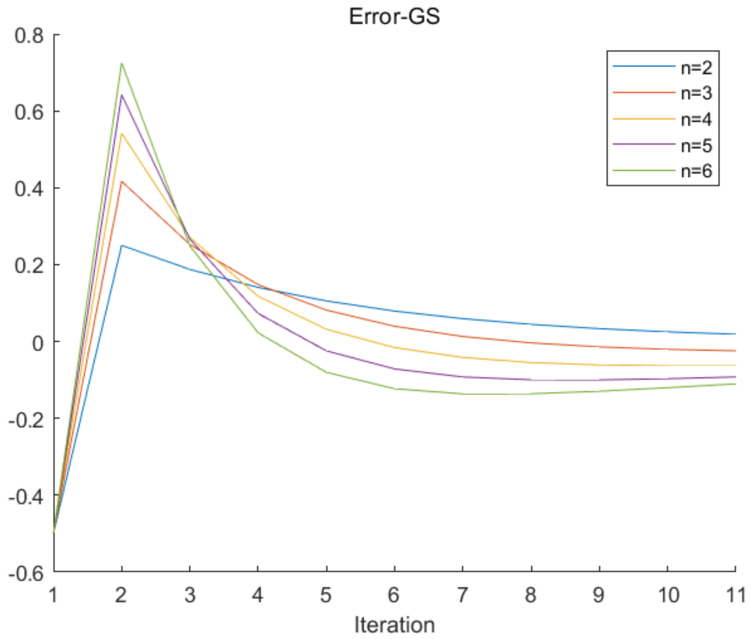
下图展示了 n=3 时不收敛的情况：



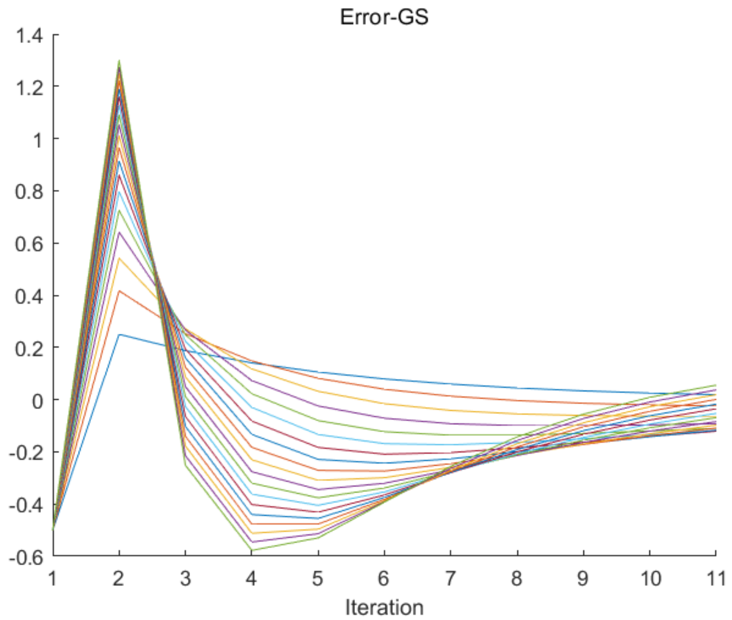
Gauss-Seidel 迭代法

迭代结果：n=6，b 相对误差 1e-5，迭代次数=362

为说明谱半径的变化规律，以 n=2~6 为例，ρ=[0.750,0.980,0.999,0.999,0.999]，谱半径逐渐收敛至 1.下图展示了收敛情况：



下图展示了 n=2~20 的收敛情况：

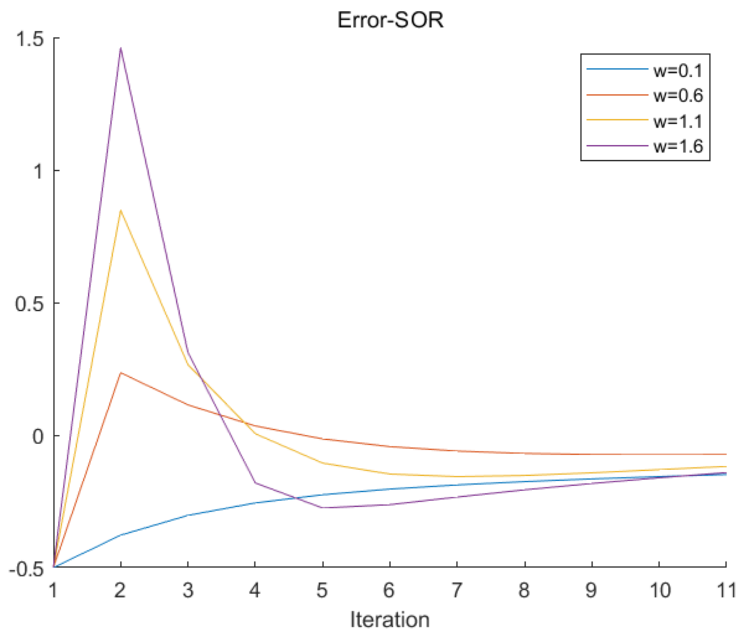


SOR 超松弛迭代法

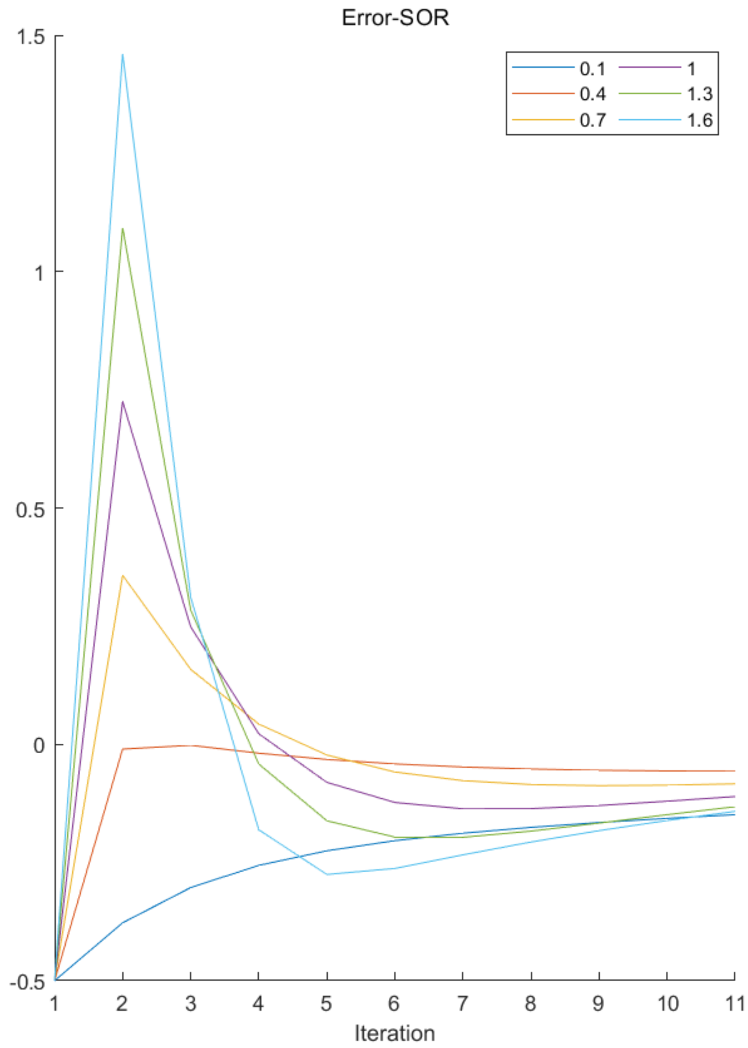
w=1 的 SOR 迭代法与 Gauss-Seidel 法等价。首先定性画出松弛因子ω对于收敛的影响情况：

对于 w=[0.1 0.6 1.1 1.6 2.1]，有谱半径ρ=[0.999,0.999,0.999,0.999,1.311]

下图画出了 0<w<2 以内一些取值所对应的收敛情况：



Error-SOR
w=0.1
w=0.6
w=1.1
w=1.6
1.5
1
0.5
0
-0.5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Iteration

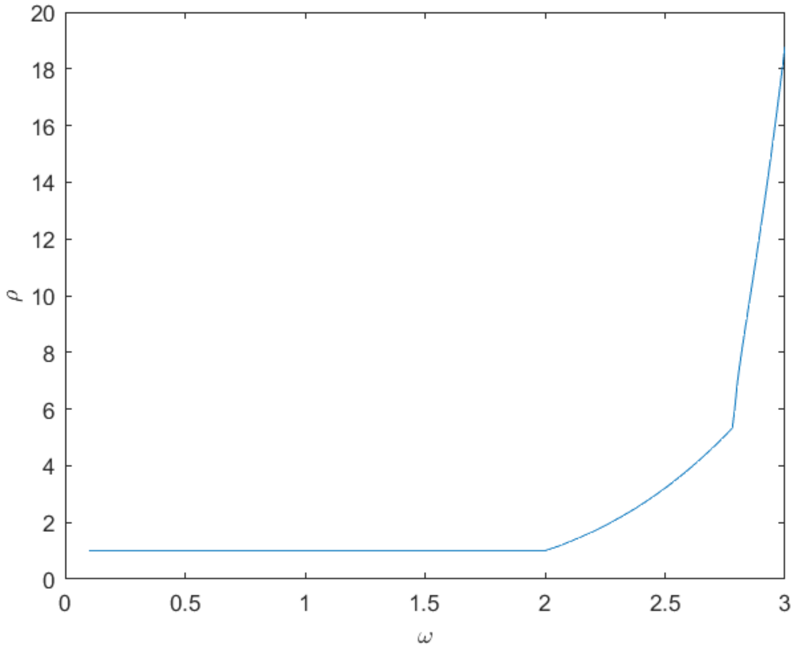


Error-SOR
0.1
0.4
0.7
1
1.3
1.6
1.5
1
0.5
0
-0.5
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Iteration

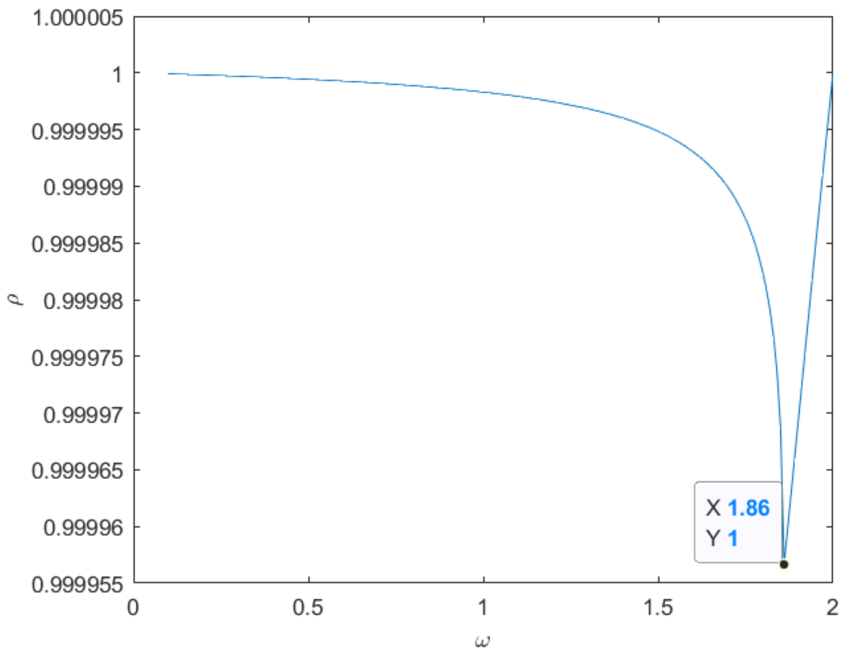
上图均可以收敛，另外可见 w 较小时迭代不会发生振荡，w 较大时会发生振荡。

下面我们以谱半径为指标，寻找希尔伯特矩阵的最优松弛因子 ω 。

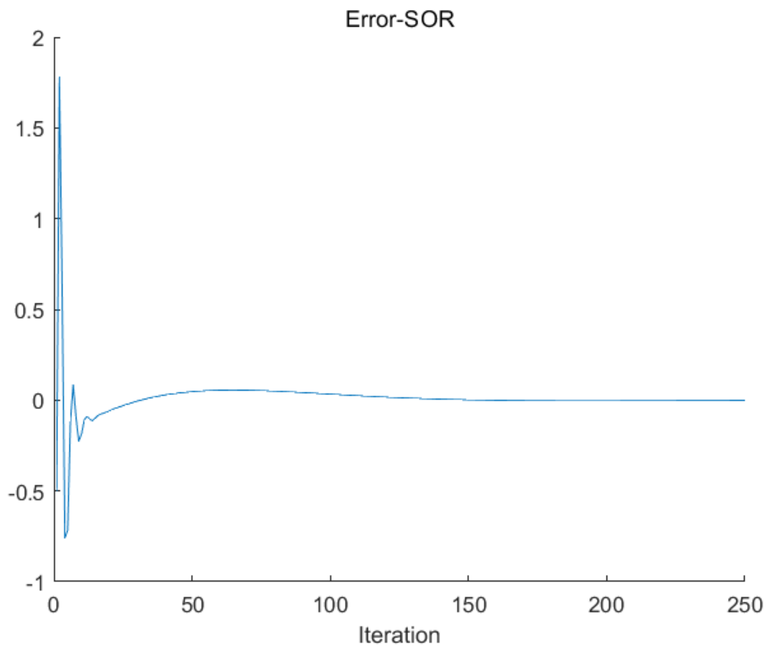
0<w<3 时：



对于 0<w<2 进行绘制：

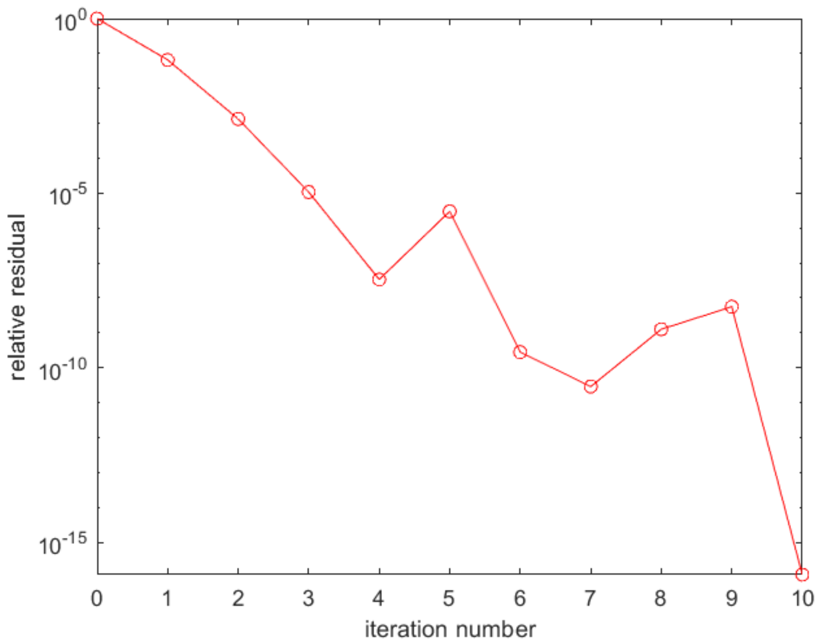


谱半径极小值点对应 w=1.86。进一步计算，达到 1e-5 精度需要 250 步迭代。



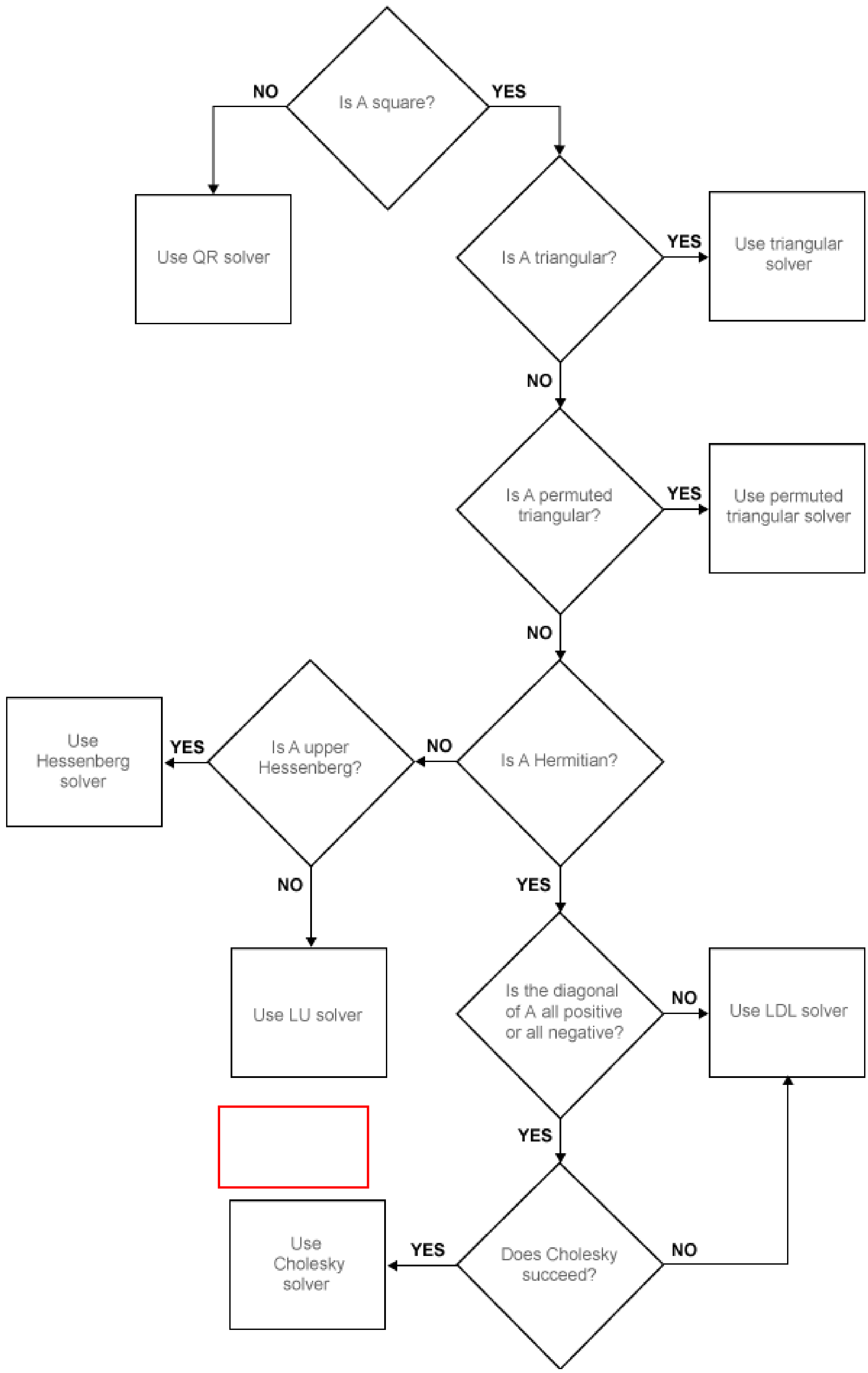
预处理共轭梯度法 pcg

对称正定矩阵，收敛非常快。如图所示，对于 6 阶希尔伯特矩阵，迭代 10 次已经达到了 1e-15 的相对精度（即 `norm(b-A*x)/norm(b)`）。



附录：

关于 MATLAB 的 mldivide（\），其实简单的“\”包含了许多种算法，当矩阵不具备所述特殊性质时使用 LU 分解，即选取主元的高斯消元法。



MATLAB mldivide (\)算法