单纯性求解 TSP 问题-读书报告

塞傲霖 2018010919

问题描述

在本报告中，仅讨论 Hamilton（每个顶点只到达 1 次）无向图（即下述 $d_{ij}=d_{ji}$）的情形，城市之间的联系为路程。

在编号为 1~n 的 n 个城市中，给定 1 个出发城市，选择一条依次经过其余(n-1)个城市并最终回到出发城市的最短路径。城市之间的路程已经给定，记为 **d** 对称矩阵，d_{ij} 代表 i 城市与 j 城市之间的路程，有 $d_{ij}=d_{ji}$。在分析此问题时引入 **x** 矩阵，代表城市之间路线的选择情况，i 到 j 被选中则有 $x_{ij}=1$，否则 $x_{ij}=0$. **x** 矩阵的对角线元素为 0，且每一行和每一列都有且仅有 1 个 1 元素。

线性规划问题可以写作：

$$\min D(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i,j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{n} x_{ij}=1$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_{ij}=1$$

$$\sum_{i\in Q}\sum_{j\neq i,j\in Q} x_{ij}\leq |Q|-1$$

其中

约束条件 1 表示从某个城市出发仅有一次；

约束条件 2 表示从另外的城市到达某个城市仅有一次；

约束条件 3 则限制路径不能出现局部回路，Q 代表 n 个城市的任意一个子集，|Q|则代表 Q 的非空元素个数。

特别需要指出的是，给定出发城市，问题的情况数为$\frac{1}{2}(n-1)!$。在 n 较大时，如 n=30，问题的情况数达到 10^{30} 量级，由于计算能力有限，n 较大时不可能利用枚举法得到答案。

案例分析 1

在例 1 中，给定 5 顶点按照边长为 1 的正五边形排布，我们一开始就选择了最优路线——（1 2 3 4 5），总路程$D(\bar{x}) = 5$。此时有

$\bar{x}_{12}=\bar{x}_{23}=\bar{x}_{34}=\bar{x}_{45}=\bar{x}_{51}=1$

这 5 个对应着实际路线的 x 也被称为“基变量”。而其他 5 个未被选择的 x 则被称为“非基变量”。

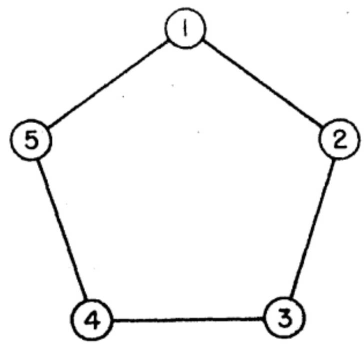


FIGURE 1

根据式（2、3）：

$$\sum_{J=1}^{n} x_{IJ}=2. \qquad (x_{IJ}\geq 0;\ I=1,2,\cdots,n;\ I\neq J;\ x_{IJ}\equiv x_{JI}) \quad (2)$$

$$D(x)=\sum_{I>J} d_{IJ}\,x_{IJ}, \qquad (3)$$

待定系数π、δ，得到

$$D(x)=\sum_{I>J} d_{IJ}x_{IJ}-\sum_{I=1}^{n}\pi_I\left(\sum_{J=1}^{n}x_{IJ}-2\right) \qquad (x_{IJ}\equiv x_{JI};\ I\neq J)$$
$$=-\sum_{I>J}(\pi_I+\pi_J-d_{IJ})x_{IJ}+2\sum_{1}^{n}\pi_I.$$

$$D(x)=-\sum_{I>J}\delta_{IJ}x_{IJ}+2\sum_{1}^{n}\pi_I. \qquad (\delta_{IJ}=\pi_I+\pi_J-d_{IJ}) \quad (7)$$

根据线性规划的基本思路，要让目标函数取最小值，必须要

$$\delta_{IJ}=0, \qquad (\text{for } \bar{x}_{IJ}=1) \quad (8)$$

此时已经可以解出每个顶点所对应的“potential”π的值。

我们还有下式，显示了一般情况下D(x)和最优$D(\bar{x})$的差（一般δ≤0）

$$D(x)-D(\bar{x})=-\sum_{I>J}\delta_{IJ}x_{IJ}. \qquad (10)$$

案例分析 2

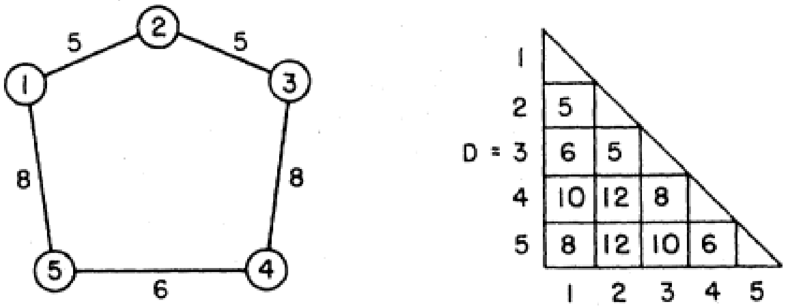


FIGURE 2

根据例 1 得到的结论，我们已经可以根据所有 δ=0，计算出所有顶点的“potential”来：

$$\pi_1=5,\qquad \pi_2=0,\qquad \pi_3=5,\qquad \pi_4=3,\qquad \pi_5=3.$$

利用 δ 的定义也可以计算非基变量对应的 δ：

$$\delta_{31}=5+5-6=+4,$$

其他非基 δ ≤0.文章中设想了如果令 x_{31}= θ（ θ ≤1）进入基变量，而其他非基变量不变，同时令原来的基变量其中三个改变值（图 4），就有可能得到新的拓扑。

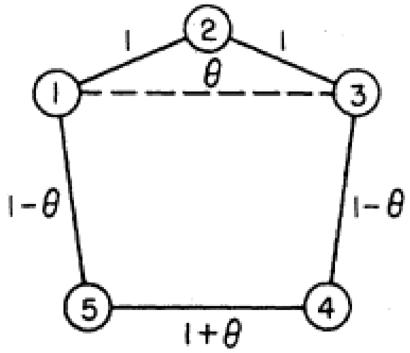


FIGURE 4

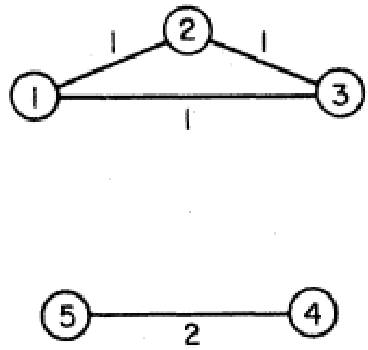


FIGURE 5

比如当 θ =1 时我们得到两个子回路，当然这并不是一个可行解。这时就需要加入新的不等式约束条件（即 x_{45}≤1）来避免子回路的情况：

$$x_{45}+y_6-1=0,\qquad\qquad (y_6\geq 0)\quad (11)$$

我们在之前 5 个基变量基础上添加 x_{13} 为第六个基变量，所有基变量初始取值

$$\bar{x}_{12}=\bar{x}_{23}=\bar{x}_{34}=\bar{x}_{45}=\bar{x}_{51}=1,\ \bar{x}_{13}=0.$$

非基变量初始取值都是 0.通过前述方程（11）的变换，得到

$$\sum_{I>J} d_{IJ}\, x_{IJ} = -\sum_{I>J} \delta_{IJ}\, x_{IJ} + 2\sum_{I=1}^{5} \pi_I + \pi_6\,(1-y_6) \qquad (12)$$

其中δ的取值

where $\delta_{IJ}=\pi_I+\pi_J-d_{IJ}$ except $\delta_{45}=\pi_4+\pi_5-(d_{45}-\pi_6)$.

下面为了求取最优解下的“potential”π，

$$\delta_{12}=\delta_{23}=\delta_{34}=\delta_{45}=\delta_{51}=\delta_{13}=0, \qquad (13)$$

由方程（12）有

$$D(x)-D(\bar{x}) = -\sum \delta_{IJ}\, x_{IJ} - \pi_6\, y_6. \qquad (14)$$

求解出

$$\pi_1=3,\ \pi_2=2,\ \pi_3=3.\ \pi_4=5,\ \pi_5=5.\ \pi_6=-4.$$

如图 7 所示，4、5 支路上的标记代表 x_{45} 有上界限制。

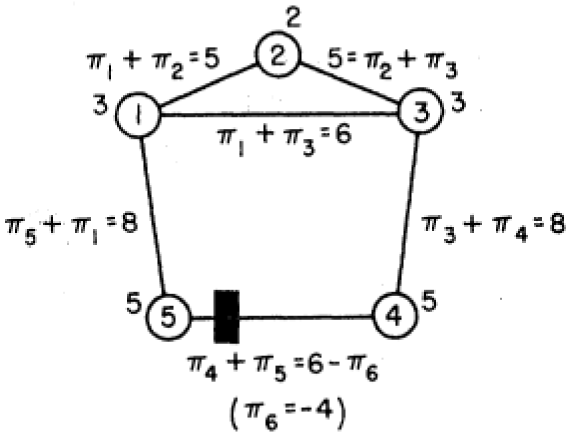


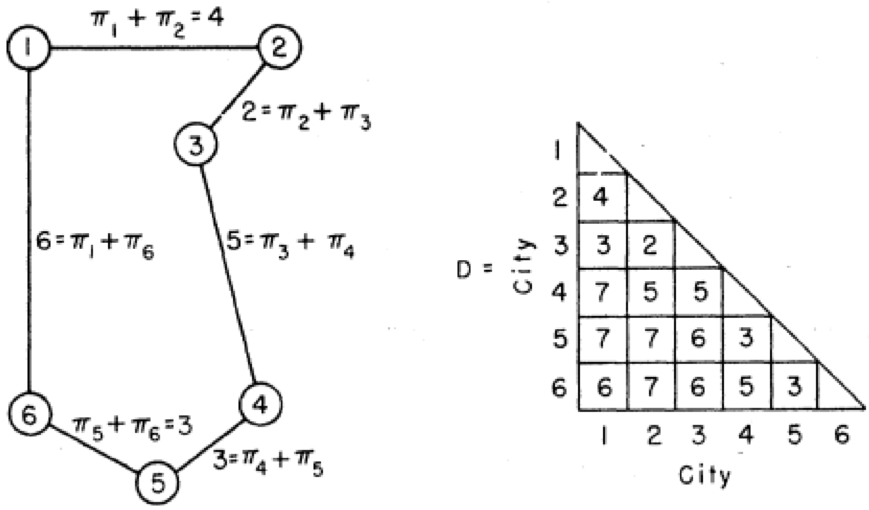
FIGURE 7

由于δ≤0，x≥0，π_6≤0，y_6≥0，故

$$D(x)-D(\bar{x}) = -\sum \delta_{IJ}\, x_{IJ} - \pi_6\, y_6. \geqslant 0$$

因此（1 2 3 4 5）是本题的最优解。

案例分析 3



City	1	2	3	4	5	6
1						
2	4					
3	3	2				
4	7	5	5			
5	7	7	6	3		
6	6	7	6	5	3	

FIGURE 8

考虑 6 城问题，初始（1 2 3 4 5 6）不是最优路线。发现若令 6 个 δ=0，方程无解（偶数支路的情况下容易出现这种问题）。合理选取基变量，使它们的系数矩阵非奇异。

为 x_{45} 加入上界约束：

$$x_{45}+y_7=1 \qquad (y_7\geq 0) \quad (15)$$

类似的，有

$$D(x)-D(\bar{x})=-\sum \delta_{IJ}\,x_{IJ}-\pi_7\,y_7, \qquad (16)$$

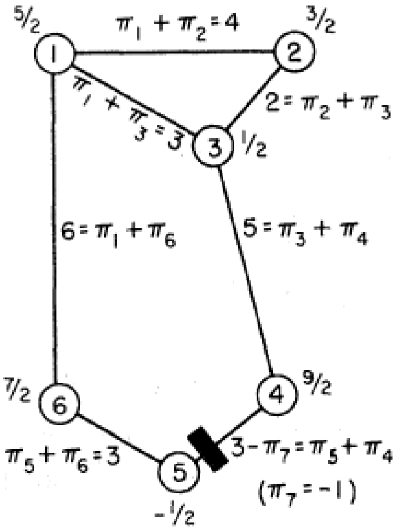


FIGURE 9

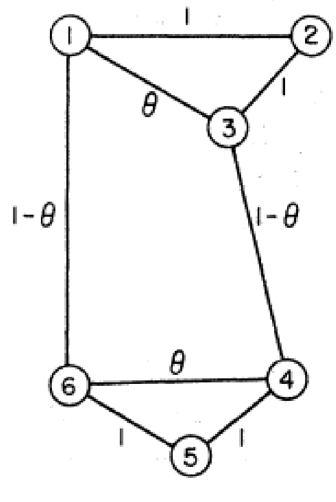


FIGURE 10

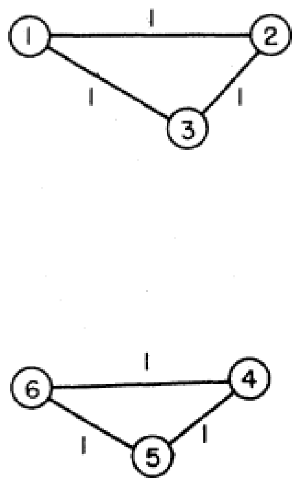


FIGURE 11

为了避免出现子回路又加入：

$$x_{12}+x_{23}+x_{31}\leq 2, \quad \text{or} \quad x_{12}+x_{23}+x_{31}+y_8=2, \qquad (y_8\geq 0) \quad (17)$$

与 $y_{7、8}$ 相配合的是 $\pi_{7、8}$，有

$$D(x)-D(\bar{x})=-\sum \delta_{IJ}x_{IJ}-\pi_7 y_7-\pi_8 y_8 \qquad (18)$$

最终经过 x_{12}、x_{34} 出基、x_{13}、x_{24} 入基，得到最优解。

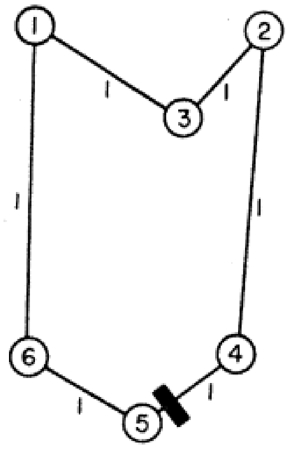


FIGURE 14

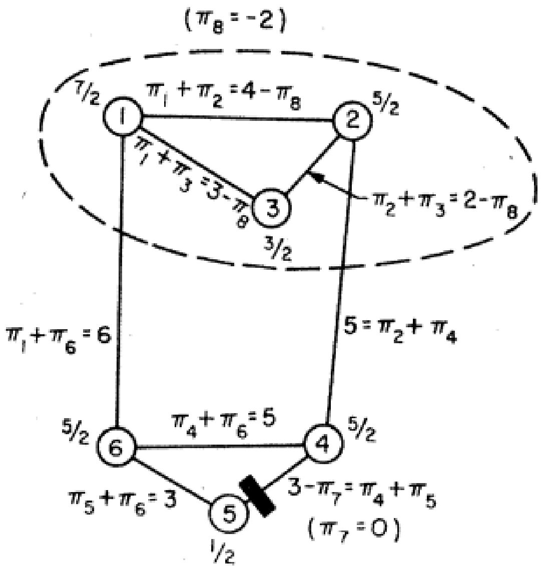


FIGURE 15

方法归纳

第一步，写出差式

$$D(x)-D(\bar{x})=-\sum_{J=1}^{n'}\delta_J x_J \qquad (x_J\geq 0) \quad (19)$$

第二步，分正负部分

$$D(x)-D(\bar{x})=-\sum_{\delta_J>0}\delta_J x_J-\sum_{\delta_J\leq 0}\delta_J x_J, \qquad (x_J\geq 0) \quad (20)$$

$$D(x)-D(\bar{x})\geq -\sum_{\delta_J>0}\delta_J x_J\geq -E, \qquad (E\geq 0) \quad (21)$$

第三步，令 x_J 抵达上界 r_J

$$D(x)-D(\bar{x})\geq -\sum_{\delta_J>0}\delta_J r_J.$$

第四步，最优解不满足

$$\delta_{IJ}<-E,$$

在第二篇文献（*On a Linear-Programming, Combinatorial Approach to the TSP*）中作者又提到，δ 对于基变量和非基变量的意义是不同的。对于基变量，负的 δ 意味着选中该支路可以缩短路程，而对于非基变量则恰好相反，不选择这条支路可以缩短路程。

因此下面开始迭代，选择基变量 δ 为负的支路，放弃基变量 δ 为正的支路（出基），选择非基变量 δ 为正的支路（入基）。每进行一次迭代，都要检查支路条件（0~1）的约束是否满足，随时动态添加约束条件，而且还要注意排除子回路的情况。

在迭代计算的早期阶段，E 可能非常大，这条规则（4）很难删除支路；但是，在后一阶段通常能够消除许多支路，以至于可以列出所有可能的路线，并从中查找满足约束条件的可行路线。通过引入“松弛”变量 y_k，通常在迭代算法的早期阶段可以排除较多的路线。

本文尚未解决的问题

本文的分析立足于 3 个案例和美国 49 城问题，引入的求解 TSP 问题的单纯性方法较为实用，可以求解中等规模问题。不过解题过程依赖于解题者根据不同问题设计相应的待求变量、松弛变量。关于求解流程的相应理论问题（如怎样判断子回路的出现、约束条件的设计、约束条件的个数、迭代次数与题目类型的关系、总计算量等）还有待进一步分析。实践证明，单纯型算法在绝大多数情况下都是具有多项式复杂度的。