数学实验第六周作业

塞傲霖 2018010919

1. 实验 1 第 13 题

自己算则一非负单调递减序列$a_1,a_2,\cdots,a_n$, $a_n\approx 0$，a_1远大于a_n，用从1到n和从n到1两种顺序计算$\sum_{k=1}^{n}a_n$，观察哪个更准确些，分析原因。

数列 1：负指数函数

y=exp(-n)

数列首项 y(1)= 0.367879441171442

N=1e4，y(N)≈0

根据等比数列求和公式得出精确结果

ytrue=0.58197670686932634343

正向计算结果 ypos=0.58197670686932623241

负向计算结果 yneg=0.58197670686932645445

正向计算误差 p=-1.110223024625156540 42e-16

负向计算误差 n=1.1102230246251565404 2e-16

数列 2：台阶数列

y=[ones(1,10),ones(1,1000)*1e-7];（前面 10 个 1，后面 1000 个 1e-7）

数列首项 y(1)= 1

N=1010，y(N)=1e-7≈0

精确值 real=10.0001≈10.000099999999999976694（机器精度所限）

正向计算结果　pos=10.000099999999939225290

负向计算结果　neg=10.000099999999999976694

正向计算误差 p=-6.0751403907488565 8920e-13

负向计算误差 n=0

小结：

由数列 1 计算结果可知，在连续计算极小数字的加法时，由于机器精度影响，导致结果出现以 2^{-53}=1.1102e-16 为单位的偏差。

由数列 2 计算结果可知，如果构造的数列中存在大数和众多小数逐个相加的情况，会出现较大的误差（主要是在得数已经较大时存在较大的舍入误差）。以数列 2 为例，正向计算出现较大误差（达到-6e-13），而负向计算误差几乎为 0，这说明如果要求解既有大数也有小数组成的数列和，从小数开始加起能够减小误差。

2. 比较选主元和非选主元高斯消去法的计算效果。

矩阵 1=

$$\begin{bmatrix} 10^{-13} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

选主元的高斯消去法

x=[1.0000,1.0000]

不选主元的高斯消元法

x=[1.0020,1.0000]

矩阵 2=

$$\begin{bmatrix} 10^{-13} & 1 & 2 \\ 2 & 10^{-13} & 3 \\ 2 & 1 & 10^{-13} \end{bmatrix}$$

选主元的高斯消去法

x=[1.0000,1.0000,1.0000]

不选主元的高斯消元法

x= [1.0007;1.0010;0.9995]

小结：

当 A 矩阵中的元素存在极小的数值时，如果不选主元进行高斯消去，由于某待解未知数的系数极小：在高斯消去时乘以大数导致误差放大；求解时有可能极小数作分母。这些因素带来很大的计算误差。

3. 实验 4 第 10 题（稍有修改）

对下列 3 级龙格-库塔方法：

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + \dfrac{h}{2}\left(k_2 + k_3\right) \\ k_1 &= f\left(x_n, y_n\right) \\ k_2 &= f\left(x_n + th, y_n + thk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \left(1-t\right)h, y_n + \left(1-t\right)hk_1\right) \end{cases}$$

试证明对于任意的参数 t，此方法均为至少 2 阶，并讨论 $t=1$ 时的稳定性。

（见下页）

考虑 $t\neq 0$ 且 $t\neq 1$ 的情况:

$$k_2 = f(x_n+th,\ y_n+thk_1)$$
$$= f(x_n,y_n) + th f_x'(x_n,y_n) + thk_1 f_y'(x_n,y_n) + O(h^2)$$
$$= y'(x_n) + th\, y''(x_n) + O(h^2)$$

$$k_3 = f(x_n+(1-t)h,\ y_n+(1-t)hk_1)$$
$$= f(x_n,y_n) + (1-t)hf_x'(x_n,y_n) + (1-t)hk_1 f_y'(x_n,y_n) + O(h^2)$$
$$= y'(x_n) + (1-t)h\, y''(x_n) + O(h^2)$$

故
$$\frac{h}{2}(k_2+k_3) = y'(x_n)h + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

代入 $\widetilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_2+k_3)$

$$= y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

误差 $E_{n+1} = \widetilde{y}_{n+1} - y_{n+1}$

$$= \widetilde{y}_{n+1} - \left[y_n + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)\right]$$

$$= O(h^3)$$

故 $t\neq 0$ 且 $t\neq 1$ 时 3 级龙格库塔方法至少具有 2 阶精度.

另: $t=0$ 时 $k_2 = y'(x_n)$
$k_3 = y'(x_n) + h y''(x_n) + O(h^2)$
$\frac{h}{2}(k_2+k_3) = h y'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$

$t=1$ 时 有相似结论.

因此 $\forall t\in\mathbb{R}$, 此方法至少 2 阶.

当 $t=1$ 时, 考虑 $y' = -\lambda y$ $(\lambda>0)$,

$K_1 = -\lambda y_n$
$K_2 = -\lambda(y_n + hK_1)$
$K_3 = -\lambda y_n$
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(K_2+K_3)$
$= \cdots$
$= \left[1 + \frac{h}{2}\lambda(\lambda h - 2)\right] y_n$

故误差 $\varepsilon_{n+1} = \left|1 + \frac{h}{2}\lambda(\lambda h-2)\right| \varepsilon_n$

令 $-1 \le 1 + \frac{h}{2}\lambda(\lambda h - 2) \le 1$

解得 $\lambda h \le 2 \Rightarrow h \le \frac{2}{\lambda}$ 与前向欧拉一致.