

姓名 \_\_\_\_\_ 学号 **20** \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_

[说明]

- (1) 第一、二、三、四、五题的答案直接填在试题纸上；
- (2) 第六、七题、简单的解题过程和结果写在试题纸上；卷面空间不够时请写在背面
- (3) 除非特别说明，计算结果保留 4 位有效数字
- (4) 考试时间为 120 分钟

1. (6 分) 现有一函数  $f(x)$ ，其在节点  $x_k (k=0,1,2,3,4)$  的取值如下：

k	0	1	2	3	4
$x_k$	0	0.5	1	1.5	2
$y_k$	0	0.4159	1.3272	2.7294	4.6184

考虑积分  $\int_0^2 f(x)dx$ ，利用上述节点值以及梯形公式求得积分的近似值为\_\_\_\_\_；若以

$x_0, x_2, x_4$  为插值节点，那么函数  $f(x)$  的二次 Lagrange 插值多项式  $P(x)=$ \_\_\_\_\_，

$\int_0^2 P(x)dx=$ \_\_\_\_\_。

2. (6 分) 考虑如下的常微分方程初值问题：  $\begin{cases} y' = y + 3t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ，取计算步长  $h = 0.1$ ，分别利用向前欧拉

法和改进欧拉法计算至  $t=1$  时刻，那么向前欧拉法得到的值为\_\_\_\_\_，改进欧拉

法得到的值为\_\_\_\_\_，由误差分析可知改进欧拉法是\_\_\_\_\_阶精度的。

3. (6 分) 矩阵  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $\text{cond}_2(A) =$ \_\_\_\_\_，现求解线性代数方

程组  $Ax = b$ ，取初值  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，用高斯-赛德尔迭代计算时  $x^{(5)} =$ \_\_\_\_\_

此时与精确解  $x^*$  误差的二范数  $\|x^{(5)} - x^*\|_2 =$ \_\_\_\_\_。

4. (6 分) 用 Newton 法求解方程  $e^x - a = 0 (a > 0)$  和方程  $\frac{1}{a} - \frac{1}{e^x} = 0 (a > 0)$  的迭代公式分别是

$x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$  和  $x_{k+1} = \varphi_2(x_k)$ 。试确定常数  $c_1$  和  $c_2$  的值，使迭代法

$x_{k+1} = c_1 \varphi_1(x_k) + c_2 \varphi_2(x_k)$  局部收敛于  $\ln a$ ，并使收敛阶尽可能高，此时  $c_1 =$ \_\_\_\_\_，

$c_2 =$ \_\_\_\_\_。收敛阶最高能是\_\_\_\_\_阶。

5. (6分) 为估计某物体的质量, 用一台天平独立地测量 5 次 (单位克), 结果为 5.72, 5.48, 5.64, 5.51, 5.43, 总体分布服从  $N(\mu, \sigma^2)$ 。写出  $\sigma^2$  未知时, 参数  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间 \_\_\_\_\_, 写出  $\sigma^2 = 0.01$  时, 参数  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间 \_\_\_\_\_, 写出方差  $\sigma^2$  的置信水平为 0.95 的置信区间 \_\_\_\_\_。

6. (8分) 有 1000000 元资金用于投资, 有如下四个项目可选 (其中的回报和风险如表中数据),

项目	回报	风险
房屋信贷	9%	4
个人贷款	12%	6
商业贷款	8%	3
政府债券	6%	1

未投资的资金存到银行, 无风险回报 3%。设计一个投资方案, 使得

A. 极大化投资回报;

B. 平均风险 (所有项目风险的加权平均) 不超过 3。

这个方案一个投资周期 (每年) 的总回报是多少?

7. (12分) 下面是一组中国人口量数据

年份	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000	2013
人口数 (亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0	13.6

(1) 建立以年份  $x$  作为自变量, 人口数的对数值  $y$  作为因变量的回归模型。写出回归直线方程, 计算总偏差平方和与回归平方和, 并检验模型的有效性, 解释得到的结果;

(2) 考虑人口增长的 Logistic 模型,  $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$ , 取  $r=0.02$ , 求参数  $x_m$  的适当的取值。简要给出计算方法和程序。