第七讲 优化方法 I 线性规划

二维线性规划的图解法

加入松弛变量/剩余变量将不等式变为等式。线性规划标准形式：

$$\min z = c^T x$$

$$s.t. Ax = b, x \geq 0$$

$$A \in R^{m \times n}, m \leq n$$

基本可行解：设 B 是秩为m的约束矩阵 A 的一个m阶满秩子方阵，则称 B 为一个**基**；

B 中m个线性无关的列向量称为**基向量**，变量x中与之对应的m个分量称为**基变量**，其余的变量为**非基变量**。令所有的非基变量取值为 0，得到的解$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$称为相应于 B 的**基本解**。当$B^{-1}b \geq 0$则称基本解为**基本可行解**,这时对应的基阵 B 为**可行基**。

最优解只需在有限个可行解(基本可行解)中寻找。

LP 的通常解法：**单纯形法：**

用迭代法从一个顶点(基可行解)转换到另一个顶点(称为一次旋转)，每一步转换只将一个非基变量(指一个分量)变为基变量，称为进基，同时将一个基变量变为非基变量，称为出基，进基和出基的确定需要使目标函数下降(至少不增加)。

基本步骤：

选取初始基可行解(顶点)；

判断当前解是否最优；

选择进基和出基变量；

防止迭代过程出现循环。

线性规划的对偶问题，对偶问题的最优解：

原始问题(P)：

$$\min z = c^T x$$

$$s.t. Ax = b, x \geq 0$$

对偶问题(D)：

$$\max b^T y$$

$$s.t. A^T y \le c$$

定理：原问题和对偶问题互为对偶问题。

对偶定理：如果x是原问题的可行解(原可行解)，y是对偶问题的可行解(对偶可行解)，则$b^T y \le c^T x$。

若x和y还满足$b^T y = c^T x$，则分别是(P)和(D)的最优解；

若原问题无下界，则对偶问题不可行；

若对偶问题无上界，则原问题不可行。

影子价格：考虑在最优解处右端项b_i的微小变动对目标函数值的影响。

由于$f^* = c^T x^* = b^T y^* = y_1^* b_1 + y_2^* b_2 + \cdots + y_m^* b_m$，假设$b_1, b_2, \dots, b_m$是变化的，则$\frac{\partial f^*}{\partial b_1} = y_1^*, \frac{\partial f^*}{\partial b_2} = y_2^*, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial b_m} = y_m^*$。$y_i^*$可以理解为当资源$b_i$变化 1 单位时极小化问题的目标函数值的变化量。

$B^{-1} b > 0$，对充分小的需求增量Δb，$B^{-1}(b + \Delta b) > 0$仍为最优解，此时相应最优费用变化为$C_B^T B^{-1} \Delta b$，对偶变量$y^* = (C_B^T B^{-1})^T$被称为边际价格或影子价格。

y^*可以看成最优解时，为了第i种需求提供一个单位需求的边际费用，即当达到最优时，为了满足附加的需求，必须向顾客索取的最小单位价格。

MATLAB 求解 LP：linprog 命令

[x, fval, exitflag, output, lambda] = linprog(c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,opt);

exitflag:

1	Function converged to a solution x.
0	Number of iterations exceeded options.MaxIterations.
-2	No feasible point was found.
-3	Problem is unbounded.
-4	NaN value was encountered during execution of the algorithm.
-5	Both primal and dual problems are infeasible.
-7	Search direction became too small. No further progress could be made.

lambda: Lagrange 乘子，对偶问题的最优解。

lambda.ineqlin: 对应 $A_1 x \le b_1$

lambda.eqlin: 对应 $A_1x=b_1$

lambda.lower: 对应 $v_1\le x$

lambda.upper: 对应 $x\le v_2$

第八讲 整数线性规划

$$\min z=c^Tx$$

$$s.t. Ax=b$$

$$x\ge 0, x\text{为整数}$$

分枝定界算法：

枚举，求解放松的线性规划问题。

最优值比界坏——舍弃；

最优解为整数最优值比界好/最优值为非整数最优值比界好——分枝。

旅行商问题（TSP）的动态规划算法：

用$f_k(v_i,V)$表示从v_i点出发，经过V中的点各一次，最后回到v_0点的最短路程，V是一个顶点集合，$|V|=k$，d_{ij}是v_i到v_j的弧长，则：

$$\begin{cases} f_k(v_i,V)=\min\limits_{v_j\in V}\{d_{ij}+f_{k-1}(v_j,V\{v_j\})\}, k=1,2,\dots,n \\ f_0(v_i,\emptyset)=d_{i0} \end{cases}$$

第十讲 统计量和 MC 算法

MATLAB 数据描述的常用命令：

命令	名称	输入	输出
[n,y]=hist(x,k)	频数表	x: 原始数据行向量 k:等分区间数	n: 频数行向量 y: 区间中点行向量
hist(x,k)	直方图	同上	直方图
mean(x)	均值	x: 原始数据行向量	样本均值
median(x)	中位数	同上	中位数
range(x)	极差	同上	极差
std(x)	标准差	同上	样本标准差 s
var(x)	方差	同上	样本方差 s2
skewness(x)	偏度	同上	偏度
kurtosis(x)	峰度	同上	峰度

MATLAB 命令：

分布	均匀分布	指数分布	正态分布	卡方分布	t 分布	F 分布	二项分布	泊松分布
字符	unif	exp	norm	chi2	t	f	bino	poiss

功能	概率密度	分布函数	逆概率分布	均值与方差	随机数生成
字符	pdf	cdf	inv	stat	rand

Monte Carlo 方法：

一般区间重积分的计算：$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$

$x_i, y_i (i=1,\dots,n)$分别为$[a,b]$和$[c,d]$区间上的均匀分布随机数，判断每个点是否落在Ω域内，将落在Ω域内的 m 个点记作：$(x_k, y_k), k=1,\dots,m$，则：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = S_{\Omega}\iint_{\Omega} f(x,y)\frac{1}{S_{\Omega}}dxdy = S_{\Omega}\cdot E\big(f(X,Y)\big)$$

$$\approx \frac{m}{n}(b-a)(d-c)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k,y_k) = \frac{(b-a)(d-c)}{n}\sum_{k=1}^{m} f(x_k,y_k)$$

计算积和式的 MC 方法：

将 0-1 矩阵 A 随机化，0 的位置保持不变，1 的位置以$\frac{1}{2}$的概率取 1 和-1，则：

$$E(\det(B)^2) = per(A)$$

$\det(B)$是一个随机变量。

第十一讲 统计推断

参数估计：

MATLAB 实现：

[mu sigma muci sigmaci] = normfit(x, alpha);

[muhat muci] = expfit(data, alpha);

x 为样本，alpha 为显著性水平（缺省时为 0.05）

mu——均值μ的点估计；

sigma——标准差σ的点估计；

muci——均值μ的区间估计；

sigmaci——标准差σ的区间估计。

假设检验：

基本步骤：

1) 建立假设；

2) 选择检验统计量，给出拒绝域(W)形式；

3) 选择显著性水平α

假设检验的两类错误：

第一类错误：$\alpha = P\left(拒绝H_0 \middle| H_0为真\right) = P_\theta(X \in W), \theta \in \Theta_0$

第一类错误：$\alpha = P\left(接受H_0 \middle| H_0不真\right) = P_\theta(X \in \bar{W}), \theta \in \Theta_1$

总体均值假设检验：

总体方差$\boldsymbol{\sigma^2}$已知：

$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$|z| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$时接受$H_0$；否则拒绝$H_0$。

$H_0: \mu \geq \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$

$|z| \geq u_\alpha(= -u_{1-\alpha})$时接受$H_0$；否则拒绝$H_0$。

总体方差$\boldsymbol{\sigma^2}$未知：

$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

$|t| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$时接受$H_0$；否则拒绝$H_0$。

$H_0: \mu \geq \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$

$t \geq t_\alpha(= -t_{1-\alpha})$ 时接受H_0；否则拒绝H_0。

两总体的假设检验——均值：

总体方差$\boldsymbol{\sigma_1^2, \sigma_2^2}$已知：

$H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$|z| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$时接受$H_0$；否则拒绝$H_0$。

总体方差$\boldsymbol{\sigma_1^2, \sigma_2^2}$未知（$\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$）：

$H_0: \mu_1 = \mu_2; H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), S^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$|t| \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$时接受$H_0$；否则拒绝$H_0$。

统计检验中的 P 值：

P 值是在一个假设检验问题中，利用观测值能够做出拒绝原假设的最小显著性水平。即原假设成立条件下，样本量出现在观测值以外的概率的最大值，称为检验的 P 值。利用 P 值做检验比较方便。P 值是异常程度的刻画。

假设检验的 MATLAB 实现：

<table>
<tr><th colspan="2">假设检验</th><th>MATLAB 命令</th></tr>
<tr><td rowspan="2">单个总体均值（σ^2已知）</td><td rowspan="2">$H_0: \mu = \mu_0$
$H_0: \mu < \mu_0$
$H_0: \mu > \mu_0$</td><td>h = ztest(x,mu,sigma)</td></tr>
<tr><td>[h,sig,ci,zval] = ztest(x,mu,sigma,alpha,tail)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">单个总体均值（σ^2未知）</td><td rowspan="2">$H_0: \mu = \mu_0$
$H_0: \mu < \mu_0$
$H_0: \mu > \mu_0$</td><td>h = ttest(x,mu)</td></tr>
<tr><td>[h,sig,ci] = ttest(x,mu, alpha,tail)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">两个总体均值（$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，未知）</td><td rowspan="2">$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_0: \mu_1 < \mu_2$
$H_0: \mu_1 > \mu_2$</td><td>h = ttest2(x,y)</td></tr>
<tr><td>[h,sig,ci] = ttest2(x,y, alpha,tail)</td></tr>
</table>

输入参数 x 是样本，mu 是H_0中的μ_0，sigma 是总体标准差σ。

alpha 是显著性水平（缺省时设定为 0.05）

tail 是对双侧检验和两个单侧检验的标识：

'both' (0)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is not m.

'right'(1)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is greater than m.

'left' (-1)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is less than m.

输出参数 h=0 表示接受H_0，h=1 表示拒绝H_0。

sig 表示对假设的接受和拒绝程度，P 值。

ci 给出置信区间，zval 是样本统计量 z 的值。

第十二讲 拟合优度检验与伪随机数

拟合优度检验：

设总体服从离散分布：

X	x_1	…	x_k
P	p_1	…	p_k

进行 k 次独立地检验，k 个取值出现的频次分别为$N_i(i=1,\dots,k)$，则

$$X=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}$$

近似服从自由度为 k-1 的χ^2分布。

若需要通过样本估计 s 个参数，则

$$X=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}$$

近似服从自由度为 k-s-1 的χ^2分布。

独立性检验（列联表检验）：

$A\backslash B$	1	2	⋯	j	⋯	t	行合计
1	n_{11}	n_{12}	⋯	n_{1j}	⋯	n_{1t}	c_1
2	n_{21}	n_{22}	⋯	n_{2j}	⋯	n_{2t}	c_2
⋮	·	·	·	·	·	·	⋮
i	n_{i1}	n_{i2}	⋯	n_{ij}	⋯	n_{it}	c_i
⋮	·	·	·	·	·	·	⋮
s	n_{s1}	n_{s2}	⋯	n_{sj}	⋯	n_{st}	c_s
列合计	d_1	d_2	⋯	d_j	⋯	d_t	n

$$Y=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{\left(n_{ij}-n\cdot\frac{c_i}{n}\cdot\frac{d_j}{n}\right)^2}{n\cdot\frac{c_i}{n}\cdot\frac{d_j}{n}}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{\left(nn_{ij}-nc_id_i\right)^2}{nc_id_i}$$

近似服从自由度为(s-1)(t-1)的χ^2分布。

正态性检验：

假设检验		MATLAB 命令
总体分布正态性	H_0:总体服从$N(\mu,\sigma^2)$	h = jbtest(x)
		[h,p,jbstat,cv] = jbtest(x,alpha)
	H_0:总体服从$N(0,1)$	h = kstest(x)
	H_0:总体服从$N(\mu,\sigma^2)$	h = lillietest(x)
		[h,p,lstat,cv] = lillietest(x,alpha)

伪随机数：

平方取中法：容易出现循环

线性同余生成器(LGG)：

$$X_i=BX_{i-1}+A\ mod\ m,i>1$$

多步同余：

$$x_i\equiv(\alpha_1x_{i-1}+\cdots+\alpha_kx_{i-k})\ mod\ p,i\geq k$$

多项式同余：

$$x_i\equiv\left(ax_{i-1}^2+bx_{i-1}+c\right)mod\ m$$

从均匀分布到一般分布：

设随机变量U服从[0,1]上的均匀分布，函数F为定义在实数集合R的连续单调递增函数，且对任何$x\in R$有：

$$F(-\infty)=0\leq F(x)\leq 1=F(+\infty)$$

则随机变量$X=F^{-1}(U)$的概率分布函数为$F(x)$。

由均匀分布生成正态随机变量：

Box- Muller 方法：X,Y相互独立，且均服从$U(0,1)$，做变换

$$\begin{cases} U = (-2lnX)^{1/2}cos2\pi Y \\ V = (-2lnX)^{1/2}sin2\pi Y \end{cases}$$

则得到的U和V相互独立，且均服从$N(0,1)$。

MATLAB 伪随机数生成命令：

rand(m,n)：生成 m 行 n 列均匀分布在(0,1)之间的伪随机数

randn(m,n)：生成 m 行 n 列标准正态分布（均值为 0，方差为 1）的伪随机数

rands(m,n)：生成 m 行 n 列均匀分布在（-1，1）之间的伪随机数

randi(a)：在[1,a]上生成均匀分布的伪随机整数

randi(a,m,n)：在[1,a]上生成均匀分布的 m*n 的随机整数矩阵

randi([a,b],m,n)：在[a,b]上生成均匀分布的 m*n 的随机整数矩阵