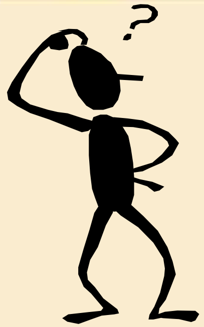
大学数学实验

Mathematical Experiments

第2讲

数值计算I 数值积分与插值

基本内容



一. 数值积分示例

二. 数值积分的基本原理

梯形公式、辛普森公式和高斯型求积公式

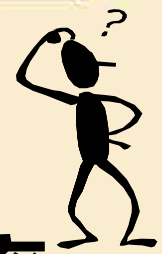
数值积分公式的评价，代数精度的概念

三. 插值问题介绍

四. 数值积分的 **MATLAB** 实现及数值积分的应用

五. 作业与数学写作导引

为什么要作数值积分



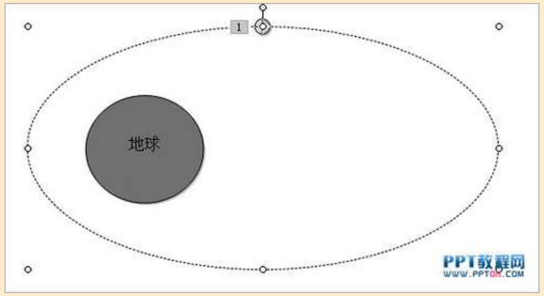
- 积分是重要的数学工具，是微分方程、概率论等的基础；在实际问题中有直接应用。

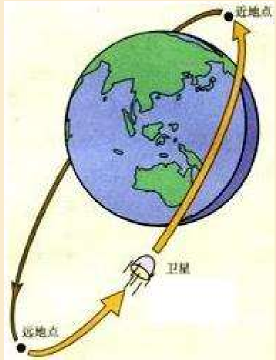
- 许多函数“积不出来”,只能用数值方法，如

$$\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ ,\qquad \int_a^b \frac{\sin x}{x}dx$$

- 对于用离散数据或者图形表示的函数,计算积分只有求助于数值方法。

数值积分的应用：人造卫星轨道长度





已知参数*a*和*b*，如何计算以下积分？

$$L = 4\int_0^{\pi/2} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

椭圆积分：无法用解析方法计算，往往借助数值积分进行近似处理。

计算概率: 标准正态分布分布函数表的构造

数值积分

1.梯形公式

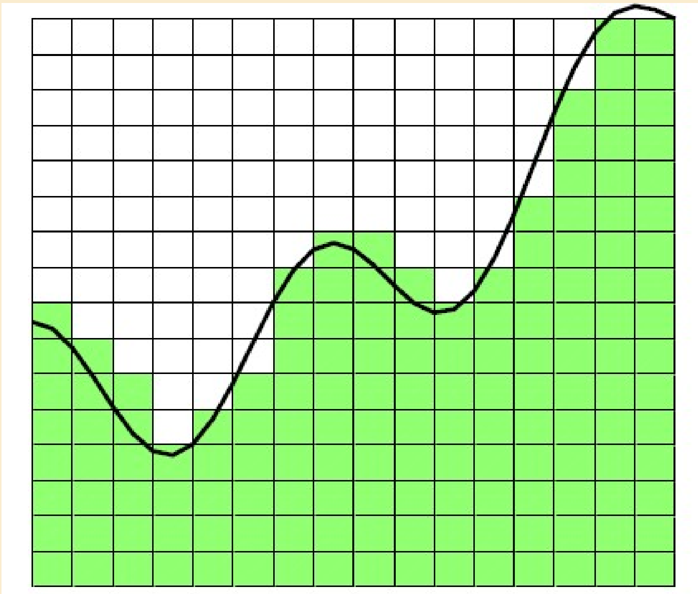
2.辛普森公式

3.高斯公式

定积分　面积

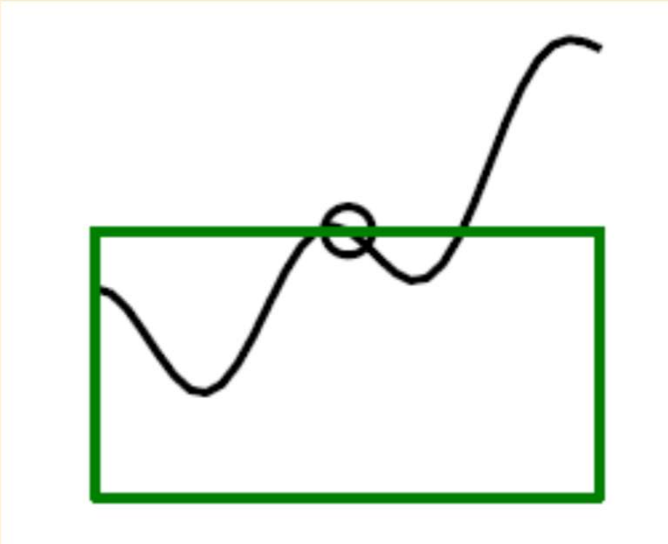
实函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分

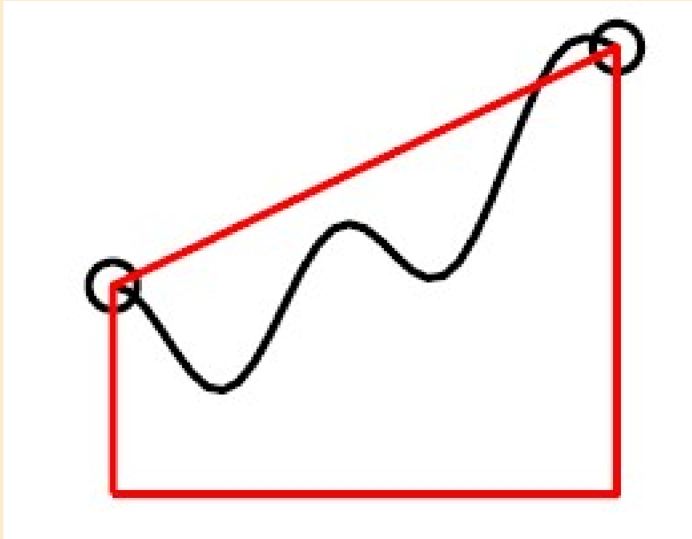
$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\lim_{\max|x_i-x_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

最简单的想法　中点法，梯形法





中点法　　梯形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \int_a^b f(x)dx \approx M = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

中点法和梯形法的改进

中点法 梯形法

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \int_a^b f(x)dx \approx M = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad \int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$2\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[2\times(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right]\times\frac{1}{3} = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

梯形公式和Simpson公式

梯形公式: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

Simpson公式: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

误差估计:

$$E_1[f] \le \left|\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\left\|f''\right\|_\infty$$

$$E_2[f] \le \frac{(b-a)^5}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

构造数值积分公式的基本思路

$$P_n(x) \approx f(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \;\approx\; \int_a^b P_n(x)dx$$

插值多项式问题:

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个不同节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的取值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 求一个不超过 n 次的多项式 $p_n(x)$ 满足

$$p_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

称 $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次插值多项式, $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点, $[a,b]$ 为插值区间, $p_n(x_i)=y_i$ 为插值条件.

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{array}$$

n次插值多项式

$$P_n(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

n+1个插值节点

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \end{matrix}$$

$$P_n(x_k)=y_k \qquad k=0,1,\cdots,n$$

存在、唯一性：**n+1**个互不相同的节点对应惟一的次数不超过**n**次的插值多项式

插值多项式（存在且唯一）

$$c_n x_i^n + c_{n-1} x_i^{n-1} + \cdots + c_1 x_i + c_0 = y_i\,, \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

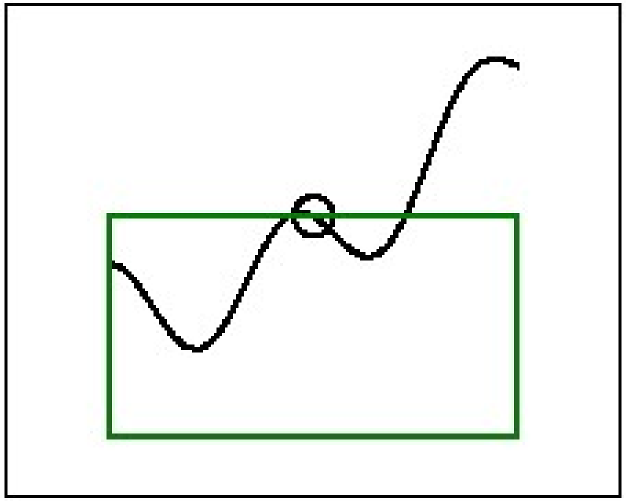
系数矩阵为Vandermonde矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

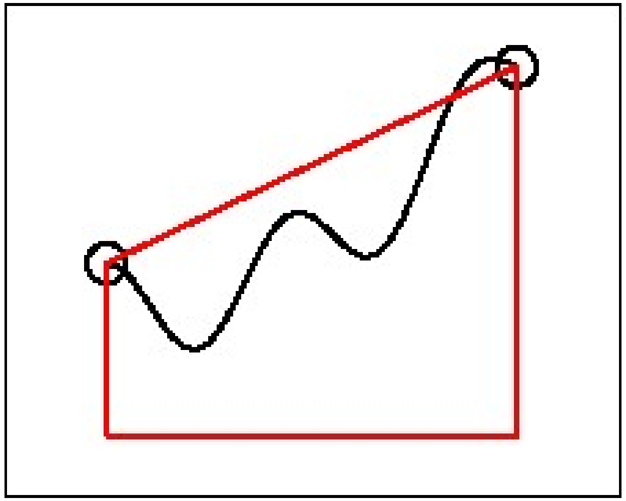
$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

基本方法

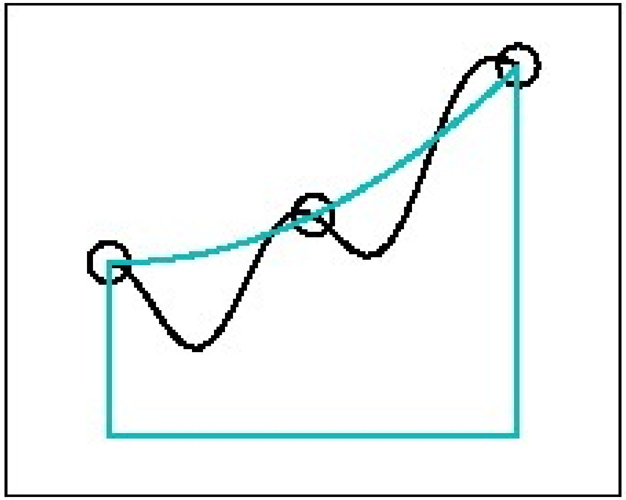
Midpoint rule



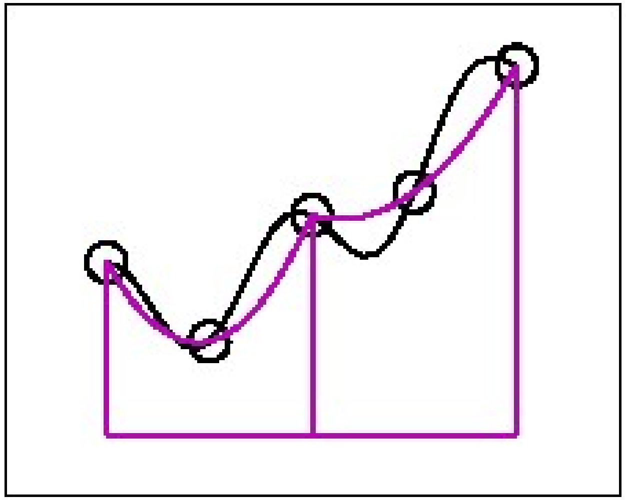
Trapezoid rule



Simpson's rule



Composite Simpson's rule



复合求积公式Ⅰ 复合梯形

将区间 $[a,b]$ n 等分，令 $h=\dfrac{b\text{-}a}{n}, x_k=a+kh,\ x_{k-\frac{1}{2}}=x_k-\dfrac{1}{2}h\left(k=0,1,\cdots,n\right)$

每个区间上用梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]+\tilde{E}_n(f)$$

$$T_n(f)=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+f(x_k)\right]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$\tilde{E}_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta),\ \eta\in[a,b]$$

复合求积公式 II 复合Simpson

将区间$[a,b]$ n等分，令 $h=\dfrac{b-a}{n}, x_k=a+kh,\ \ x_{k-\frac{1}{2}}=x_k-\dfrac{1}{2}h\left(k=0,1,\cdots,n\right)$

每个区间上用Simpson求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx=\frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_{k-1})+4f\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right)+f(x_k)\right]+\tilde{E}_n(f)$$

$$S_n(f)=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$\tilde{E}_n(f)=-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta),\ \ \eta\in[a,b]$$

梯形公式和辛普森公式的收敛性

若对I某个数值积分I_n有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I-I_n}{h^p}=c$ **(非零常数)**

则称 I_n是 p 阶收敛的。

梯形公式 2 阶收敛，辛普森公式 4 阶收敛。

c=0: 至少p阶收敛

一般方法　插值型的求积公式

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \int_a^b l_k(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

x_k：求积节点　　A_k：求积系数

$[a,b]$ 上取 $n+1$ 个节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，得到 n 次插值多项式，$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$，$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E_n(x)$$

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\,dx \qquad E_n(x) = \int_a^b R_n(x)\,dx$$

代数精度（对积分公式的评价标准）

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx I_n=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

代数精度

设 $f(x)=x^k$，**用上述公式计算**

若对于 $k=0,1,\cdots m$ **都有** $I_n=I$,

而当 $k=m+1$, $I_n \neq I$, **则称I_n的代数精度为m.**

梯形公式的代数精度（考察T_1）

k=1
f(x)=x

$$T_1 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)(a+b)}{2}$$

$$I = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow \boxed{T_1 = I}$$

k=2
f(x)=x²

$$T_1 = \frac{(b-a)(a^2+b^2)}{2}$$

$$I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \Rightarrow \boxed{T_1 \neq I}$$

梯形公式的代数精度为1　　辛普森公式的代数精度为3

举例

1. 试确定求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a)+c_2 f(b)$中求积系数，使求积公式的代数精度尽可能高.

2. 试确定求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a)+c_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right)+c_3 f(b)$中求积系数,使求积公式的代数精度尽可能高.

3. 试确定求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A f(-h)+B f(x_1)$ 中求积系数和求积节点,使求积公式的代数精度尽可能高.

插值型求积公式的代数精度

$n+1$个节点的插值型求积公式至少具有n次代数精度,

如果$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$形式的求积公式至少具有

n次代数精度，则它必定是插值型的求积公式。

获得尽可能高的代数精度

对于求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，试确定节点和求积系数，使其代数精度尽可能高.

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

高斯型求积公式

插值型求积公式 $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 具有

$2n+1$ 次代数精度的充分必要条件是求积节点是 $[a,b]$

上的 $n+1$ 次正交多项式的零点.

区间 $[a,b]=[-1,1]$，对应的正交多项式是

Legendre多项式 $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,$

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \quad n\geq 1$$

高斯型求积公式

插值型求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 具有 $2n+1$ 次代数精度的充分必要条件是求积节点是 $[a,b]$ 上权函数 $\rho(x)$ 的 $n+1$ 次正交多项式的零点.

区间 $[a,b]=[-1,1]$, $\rho(x)=1$ 对应的正交多项式是

Legendre多项式 $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$,

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \quad n \ge 1$$

Gauss-Legendre求积公式

对于任意区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$, 首先把区间 $[a,b]$变换到 $[-1,1]$, 令 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$, $t\in[-1,1]$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n}A_k f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_k\right)$$

利用**Gauss-Legendre**求积公式近似$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$ 。

首先把区间 $[0,1]$ 变换到 $[-1,1]$:

$$x=\frac{t+1}{2}\quad\Rightarrow\quad\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 e^{-\frac{t+1}{2}}\,dt$$

改进的高斯公式

思路：将积分区间分小，在小区间上用***n***不太 大的G_n。而在节点加密一倍时能够利用原节点的函数值，可以把区间的端点作为固定节点。

Gauss-Lobatto求积公式

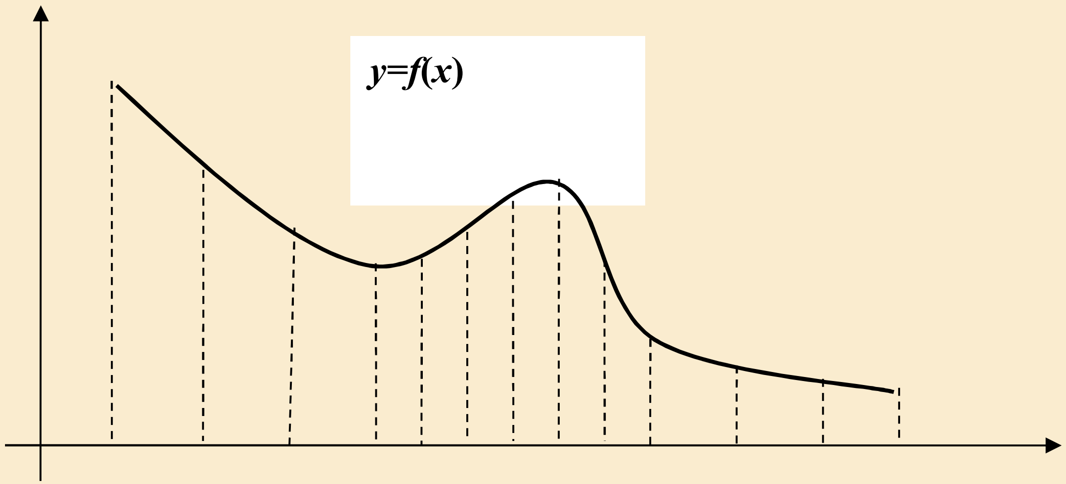
$$G_n = A_1 f(a) + \sum_{k=2}^{n-1} A_k f(x_k) + A_n f(b)$$

其中a, b为小区间的端点，$x_2,\cdots,x_{n-1},A_1,\cdots A_n$ 为$2n$-2个参数，

代数精度可达到**2*n*-3**

实际计算中一般采用自适应方法确定步长

自适应方法：将函数变化较快的区间分得细一些，函数变化较慢的区间分得粗一些



自适应步长的基本思想：每一小区间，用两种精度不同的算法进行计算，如果相差小于某给定精度要求，则接受较精确算法的结果；否则，对该区间进行细分，一般是二分。

MATLAB 的求和命令

矩形公式

$$L_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f_k \qquad R_n = h\sum_{k=1}^{n} f_k$$

sum(x) 输入数组x(即f_k), 输出x的和(数)

cumsum(x) 输入数组x, 输出x的依次累加和(数组)

```
x=[2 3 5 7 11]
sum(x)
ans =      28
cumsum(x)
ans =      2       5      10      17      28
```

用MATLAB 作数值积分

梯形公式

$$T_n = h\sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{h}{2}(f_0 + f_n)$$

trapz(x) 输入数组x, 输出按梯形公式x的积分(单位步长)

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_n) + \sum_{k=2}^{n-1} x_k$$

trapz(x,y) 输入同长度数组 x,y, 输出按梯形公式y对x的积分(步长不一定相等)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(y_k + y_{k-1})$$

用MATLAB 作数值积分

辛普森公式

$$S_n = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2m} + 4\sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1} + 2\sum_{k=1}^{m-1} f_{2k}\right), \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

```
quad(@fun,a,b,tol)
[I,fn]=quad(…)
```

用自适应辛普森公式计算

tol为绝对误差，缺省时为10^{-6}

quad：quadrature

Gauss-Lobatto公式 $G_n = A_1 f(a) + \sum_{k=2}^{n-1} A_k f(x_k) + A_n f(b)$

```
quadl(@fun,a,b,tol)
[I,fn]=quadl(…)
```

用自适应Gauss-Lobatto公式计算

tol为绝对误差，缺省时为10-6

也可使用 integral

用MATLAB 作数值积分

例. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin x} dx$

1）梯形公式

将(0, π /4)100等分

精确值为 $\sqrt{2}$

2）辛普森公式和Gauss-Lobatto公式

精确、方便

Exp02.m

```
z(1)=quad('1./(1-sin(x))',0,pi/4);

z(2)=quad(@mysin,0,pi/4);

z(3)=quad(@mysin,0,pi/4,1.0e-8);

z(4)=quad(@mysin,0,pi/4,1.0e-10);

function y=mysin(x)
y=1./(1-sin(x));

f1=inline('1./(1-sin(x))');   % inline object

z1(1)=quad(f1,0,pi/4)

f2=@ (x) 1./(1-sin(x));       % function handle

z1(2)=quad(f2,0,pi/4)

f3= '1./(1-sin(x))';          % char (string)

z1(3)=quad(f3,0,pi/4)
```

```
function r=simpson(fv,a,b,n)
% 利用复合Simpson公式计算积分, a,b为积分上下限, n等分
x=linspace(a,b,2*n+1);
r0=feval(fv,x([1 2*n+1]));
r1=4*feval(fv,x(2:2:2*n));
r2=2*feval(fv,x(3:2:2*n));
r=(sum(r0)+sum(r1)+sum(r2))*(b-a)/6/n;

for k=1:100
    n=k*10;
    z2(k)=simpson(@mysin,0,pi/4,n);
end
```

1.414215599760211

1.414213690575088

1.414213587729009

1.414213570399425

1.414213565661355

1.414213563959046

1.414213563229210

1.414213562874955

1.414213562686413

1.414213562578668

1.414213562513506

1.414213562472236

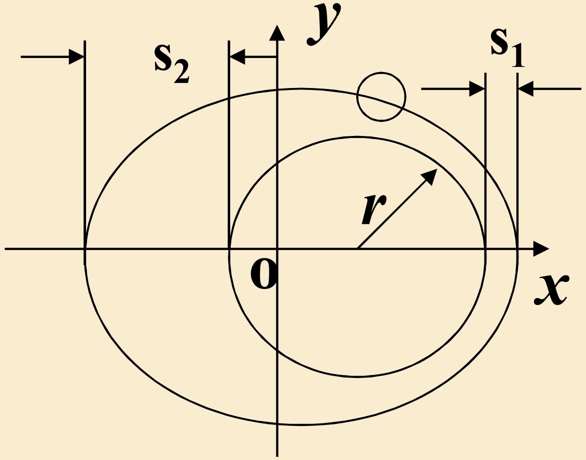
……

1.414213562373095

数值积分的应用

实例

人造卫星轨道长度



近地点s_1=439km,远地点s_2= 2384km

地球半径r=6371km

$a \sim$ 长半轴

$b \sim$ 短半轴

由s_1, s_2, r决定

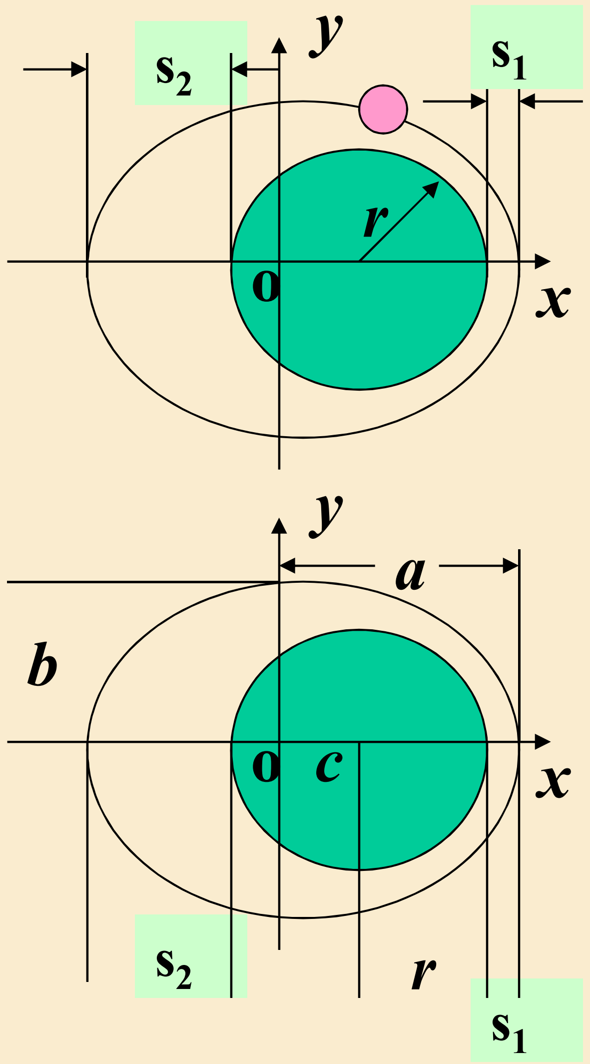
$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$
$$(0 \le t \le 2\pi)$$

轨道长度

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt$$

需要作数值积分，weixing.m

数值积分实例　人造卫星轨道长度



$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

$a \sim$ 长半轴, $b \sim$ 短半轴, 由 s_1, s_2, r 决定

s_1=439km, s_2= 2384km, r=6371km

$$2a = 2r + s_2 + s_1 \qquad \boxed{a = r + \frac{s_2 + s_1}{2} = 7782.5}$$

焦距 $c = a - r - s_1 \qquad c = \dfrac{s_2 - s_1}{2}$

$$\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2} = 7721.5}$$

数值积分实例　人造卫星轨道长度

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$$

用梯形公式和辛普森公式计算

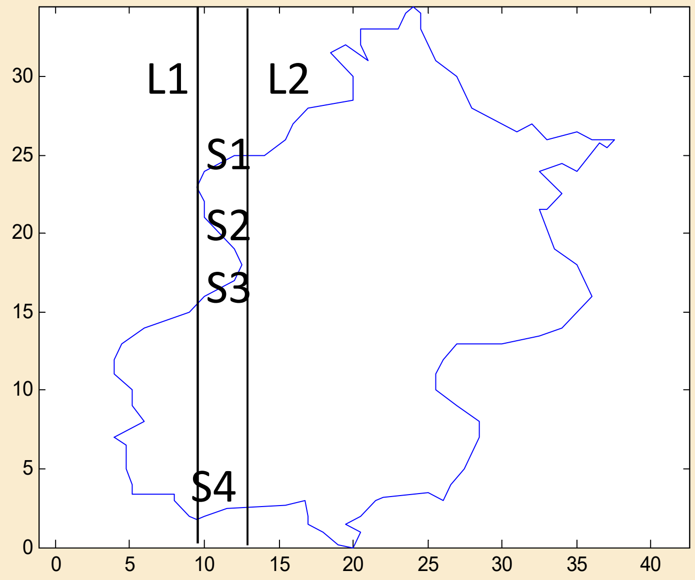
轨道长度　L=**4.8707×10^4**千米

只将区间5等分，梯形公式就给出很好的结果

面积估算

trapz计算面积，***L*1**和***L*2**两条直线分割边界线**S1, S2, S3, S4**四条线段。

用**trapz**计算**S1**对应的数据段时，得到的是**S1**之下、***x***轴上的面积，符号为正；计算**S2**对应的数据段时，由于按顺时针标记坐标点，**S2**对应数据的两点的***x***坐标之差为负数，因此计算出**S2**之下、***x***轴上的面积，但符号为负。于是这两部分数值积分之和正好是**S1**之下**S2**之上部分的面积。



jf_mianji.m

trapz命令恰好给出了计算边界区域面积的一个非常简单的方法。

面积估算为**16676**平方公里

布置实验

目的

1、掌握用MATLAB及梯形公式、辛普森公式计算数值积分

2、掌握代数精度和插值型求积公式的概念

3、通过实例学习用数值积分解决实际问题

面积16808平方公里

内容

网络学堂—课程作业