数学实验作业：非线性方程数值解法

电 82 蹇傲霖

2021 年 3 月 29 日

1. 分别用 fzero 和 fsolve 程序求方程 $\sin x - x^2/2 = 0$ 的所有根，准确到 10^{-10}，取不同的初值计算，输出初值、根的近似值和迭代次数，分析不同根的收敛域；自己构造某个迭代公式（如 $x = (2\sin x)^{1/2}$ 等）用迭代法求解，并自己编写牛顿法的程序进行求解和比较.

解：通过以 0.1 为步长选取初值，得到在不同初值下的迭代次数、根近似值，并且判断收敛域。取目标函数 $f(x) = \sin(x) - \frac{x^2}{2}$

fzero 方法

收敛域 $[-5, 0.7]$ 以及 $[0.8, 14.7]$。迭代次数和根的近似值见下图，蓝色为迭代次数，红色为根的近似值。

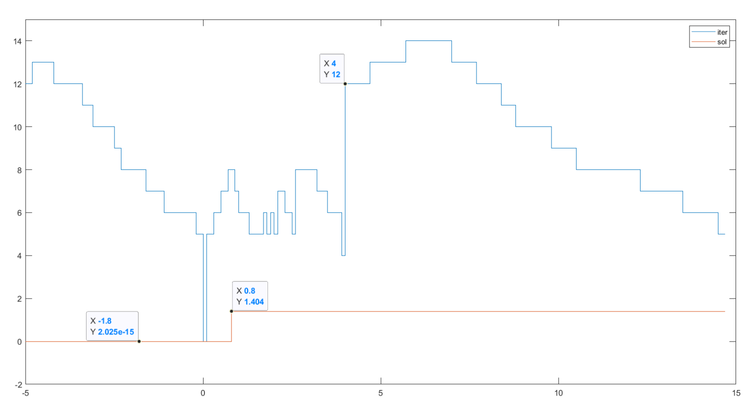

图 1: fzero

其中红色曲线左半部分根的近似值是趋近于 0 的小数，右半部分是趋近于 1.4404 的数，对应 $f(x)=0$ 的两个实数根。

fsolve 方法 (trust-region-dogleg)

收敛域 $[-1.4\times10^8, 0.7]$ 以及 $[0.8, 1.1\times10^8]$。迭代次数和根的近似值见下图，蓝色为迭代次数，红色为根的近似值与精确值的残差。

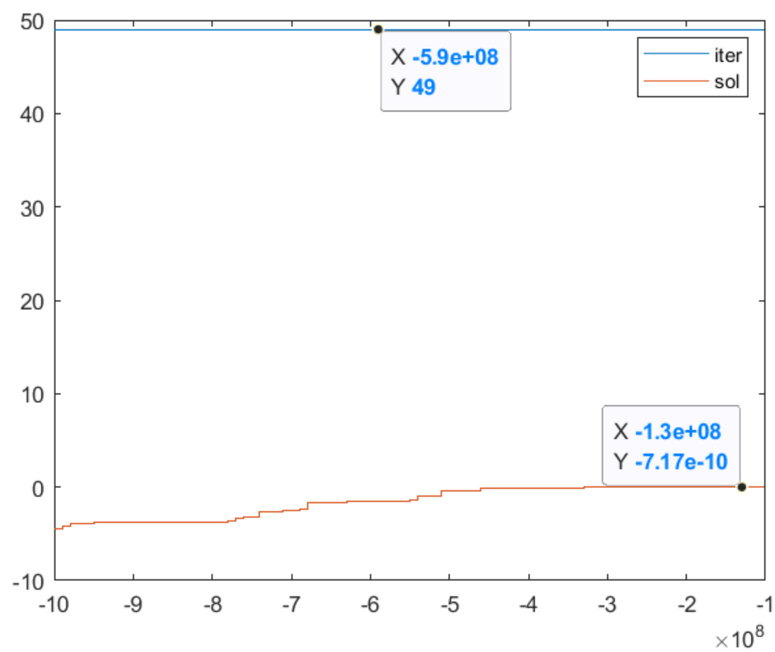

图 2: fsolve: negative

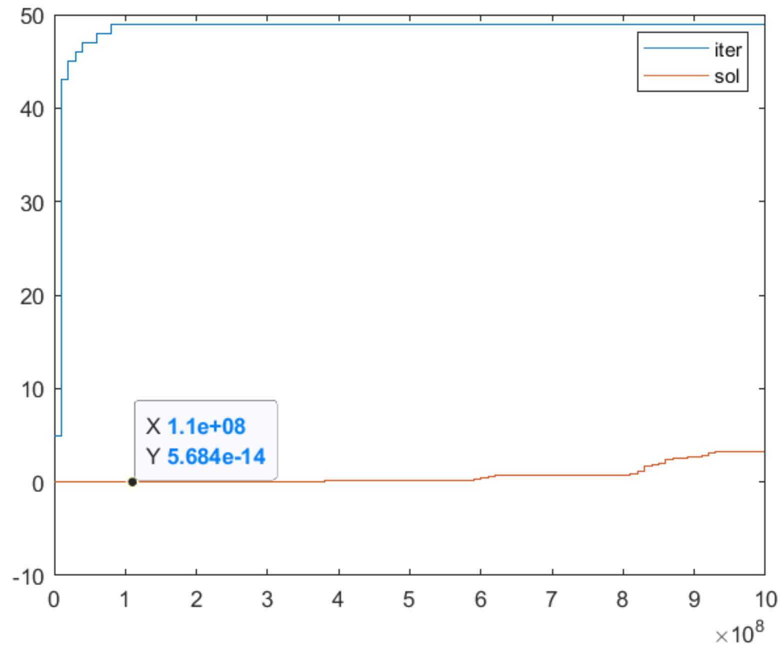

图 3: fsolve: positive

DIY 方法

自己设计迭代函数，可以参考理论题 2：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{2(f'(x))^3}$$

虽然理论题 2 的前提是 $f(x) = 0$ 仅有单根，但是我们只要初值选取得当，迭代点落在单一的收敛域内，一样可以实现三阶收敛性。

$$\phi(x) = x - \frac{\sin x - x^2/2}{\cos x - x} - \frac{(\sin x - x^2/2)^2(-\sin x - 1)}{2(\cos x - x)^3}$$

选取初值进行迭代，得到相应的近似解和迭代次数。

Newton 迭代法

牛顿法即 $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$，得到相应的近似解和迭代次数。下面的图片展示了 DIY 函数和牛顿迭代法在 [-10,10] 以 0.1 为步长的迭代表现，它

们都达到了 1e-10 的精度要求，其中 DIY 函数法采取了 $|\Delta x| < 1e - 11$ 作为收敛依据。

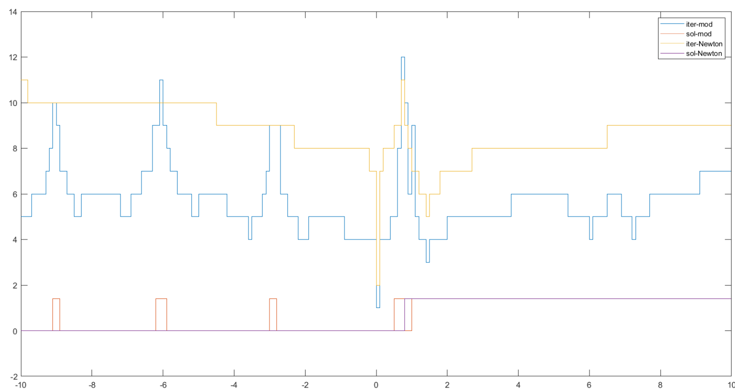

图 4: DIY & Newton

可以发现，DIY 函数法虽然平均来看迭代次数更少就能达到收敛要求，收敛速度更快，但是由于函数更复杂，计算量有可能更大。同时 DIY 算法无论是近似解还是迭代次数都不够稳定。以近似解为例，Newton 法以 $x = 0.8$ 为界区分开了两个收敛域，而 DIY 算法则存在收敛域的不稳定，没有明确的收敛域界限。

3.（1）小张夫妇以按揭方式贷款买了 1 套价值 20 万元的房子，首付了 5 万元，每月还款 1000 元，15 年还清. 问贷款利率是多少？

（2）某人欲贷款 50 万元购房，他咨询了两家银行，第一家银行开出的条件是每月还 4500 元，15 年还清；第二家银行开出的条件是每年还 45000 元，20 年还清. 从利率方面看，哪家银行较优惠（简单地假设年利率＝月利率×12）？

解：

(1)

设第 i 月结束后欠款为 M_i。则 $M_0 = 15e4, M_180 = 0$。可以得到递推公式 $M_{i+1} = M_i(1 + I) - p$，其中 I 为贷款的月利息率，p 为每月固定缴纳

的还款。根据递推公式，可以得到

$$M_{i+1} - \frac{p}{I} = (M_i - \frac{p}{I})(1+I)$$

因此可以列出关于 I 的方程：

$$(15e4 - \frac{1e3}{I})(1+I)^{180} + \frac{1e3}{I} = 0$$

令 $f(I) = 15e4(1+I)^{180} + \frac{1e3}{I}$，利用 MATLAB 函数 fsolve（trust-region-dogleg 方法）进行迭代求解。考虑到贷款利率一般在 [0,10%] 区间内，取 I 初值 =0.05. 迭代 15 次，得到 $I = 0.002081163889460 \approx 0.208\%$。

（2）

无论是以月结算，还是以年结算，都可以参照（1）中的迭代式，只是利率要注意是针对月还是年而言。

若以月结算，有

$$(50e4 - 4500/I)(1+I)^{180} + 4500/I = 0$$

若以年结算，有

$$(50e4 - 45e3/I)(1+I)^{20} + 45e3/I = 0$$

利用 MATLAB 函数 fsolve（trust-region-dogleg 方法）进行迭代求解。考虑到贷款利率一般在 [0,10%] 区间内，取 I 初值 =0.05. 迭代 14、5 次，得到

$$I_m = 0.005850792582845 \approx 0.585\%$$

$$I_y = 0.063948777092386 \approx 6.395\%$$

计算得知 $12I_m > I_y$，因此认为以年结算利息率更低。

4. 水槽由半圆柱体水平放置而成，如图 6.12 所示．圆柱体长 L，半径 r，当给定水槽内盛水的体积 V 后，要求计算从水槽边沿到水面的距离 x．今已知 $L=25.4$m，$r=2$m，求 V 分别为 10,50,100m³ 的 x.

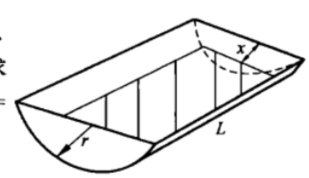

图 6.12　第 4 题图

解：

设从容器上边缘到水面的竖直距离记为 x_0，而 x 则指从容器上边缘到微分截面的竖直距离。因此

$$\int_0^{x_0} 2\sqrt{r^2-x^2}L\mathrm{d}x + V = \frac{1}{2}\pi r^2 L$$

进一步推导得出

$$Lr^2(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{1}{2}\sin(2\alpha)) + V - \frac{1}{2}\pi r^2 L = 0$$

其中 $\alpha = \cos^{-1}(x_0/r)$。利用 fsolve（levenberg-marquardt 方法），得到迭代次数、解的近似值等参数见下表。

V/m^3	迭代次数	近似解
10	5	1.71658
50	3	1.14466
100	4	0.59546

表 1: 解题情况

其中解得 x_0 的单位为 m.

理论题1. 给定迭代公式 $\boldsymbol{x_{k+1}=\frac{x_k\left(x_k^2+3a\right)}{3x_k^2+a}}$

(1). 证明这个公式是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法；

(2). 假定初值 x_0 充分靠近 $\sqrt{a}$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{\left(\sqrt{a}-x_k\right)^3}$。

解：

令 $x_k = x_{k+1}$，解出不动点 x_0：(a>0)

$${x_0}^2 + 3a = 3{x_0}^2 + a$$

$$x_0 = \pm\sqrt{a}$$

即这个迭代公式可以是计算 $\pm\sqrt{a}$ 的方法。下面证明计算 $\sqrt{a}$ 为三阶：

当初值充分靠近 $\sqrt{a}$，迭代次数很大时，可以认为 x_k 和 x_{k+1} 趋近于 a。下面分别是关于三阶和二阶的计算。

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3} &= \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}-\frac{x^3+3ax}{3x^2+a}}{(\sqrt{a}-x)^3}\\ &= \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{1}{3x^2+a}\\ &= \frac{1}{4a}\ >0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^2} &= \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}-\frac{x^3+3ax}{3x^2+a}}{(\sqrt{a}-x)^2}\\ &= \lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}-x}{3x^2+a}\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此，我们认为此迭代方法是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法，且三阶极限等于 $\frac{1}{4a}$。

理论题 2. 设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(x)=0$ 仅有单根。以

$$\varphi(x)=x-p(x)f(x)-q(x)f^2(x)$$

为迭代函数，计算 $f(x)=0$。试确定 $p(x)$ 和 $q(x)$，使得迭代法至少三阶收敛。

解：

设 x^* 为 $f(x)=0$ 的单根，即 $f(x^*)=0$。我们有

$$\varphi(x)=x-p(x)f(x)-q(x)f^2(x)$$

$$\varphi'(x)=1-p'(x)f(x)-p(x)f'(x)-2q(x)f(x)f'(x)-q'(x)f^2(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x)=&-p''(x)f(x)-2p'(x)f'(x)-p(x)f''(x)-2f(x)(q(x)f'(x))'\\ &-2q(x)(f'(x))^2-q''(x)f^2(x)-2q'(x)f(x)f'(x)\end{aligned}$$

$$\varphi'(x^*) = 0 \implies p(x^*)f'(x^*) = 1 \implies p(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$$

可以令

$$p(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\varphi''(x^*) = 0 \implies p(x^*)p'(x^*) + 2q(x^*) = 0 \implies q(x^*) = -\frac{p(x^*)p'(x^*)}{2}$$

可以令

$$q(x) = -\frac{p(x)p'(x)}{2} = \frac{f''(x)}{2(f'(x))^3}$$

综上，这样的 $p(x), q(x)$ 可以满足迭代法至少三阶收敛。