线性代数方程组的数值解法

蹇傲霖 2018010919

1．若 A 为 n 阶可逆方阵，x 为方程组 $Ax=b$ 的精确解，$\bar{x}$ 为该方程组的一个近似解，对应近似解 $\bar{x}$ 定义剩余向量 $r=b-A\bar{x}$。证明

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|},$$

并说明这个结论有何实用意义。

1、 $r=b-A\bar{x}$，$Ax=b \Rightarrow r=A(x-\bar{x}) \Rightarrow \|A\|\cdot\|\bar{x}-x\| \ge \|r\|$

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} = \frac{1}{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{1}{\|A^{-1}\|}\frac{\|\bar{x}-x\|}{\|b\|} \quad ①$$

由于 $x=A^{-1}b \Rightarrow \|A^{-1}\|\cdot\|b\| \ge \|x\|$

$$① \le \frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|}$$

$$cond(A)\frac{\|r\|}{\|b\|} = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|b\|} \ge \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|r\|}{\|x\|} \quad ②$$

由于 $x-\bar{x}=A^{-1}r \Rightarrow \|A^{-1}\|\cdot\|r\| \ge \|\bar{x}-x\|$

$$② \ge \frac{\|\bar{x}-x\|}{\|x\|}$$

结合以上推导，原命题得证.

根据上述结论，解的相对误差的下界反比于 cond(A)，解的相对误差的上界正比于 cond(A)。如果矩阵 A 病态，cond(A)较大，此时解的相对误差的下界会较小，上界会较大，极端情况下迭代法永远不能收敛。

2. 分别用雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法计算下列方程组，均取相同的初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，观察其计算结果，并分析其收敛性.

(1) $\begin{cases} x_1-9x_2-10x_3=1, \\ -9x_1+x_2+5x_3=0, \\ 8x_1+7x_2+x_3=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3=-1, \\ -x_1+2x_2+4x_3=0, \\ -3x_1+4x_2+15x_3=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 10x_1+4x_2+5x_3=-1, \\ 4x_1+10x_2+7x_3=0, \\ 5x_1+7x_2+10x_3=4. \end{cases}$

注：以下 Jacobi 和 GS 迭代相对误差容限设置为 1e-4.

（1）

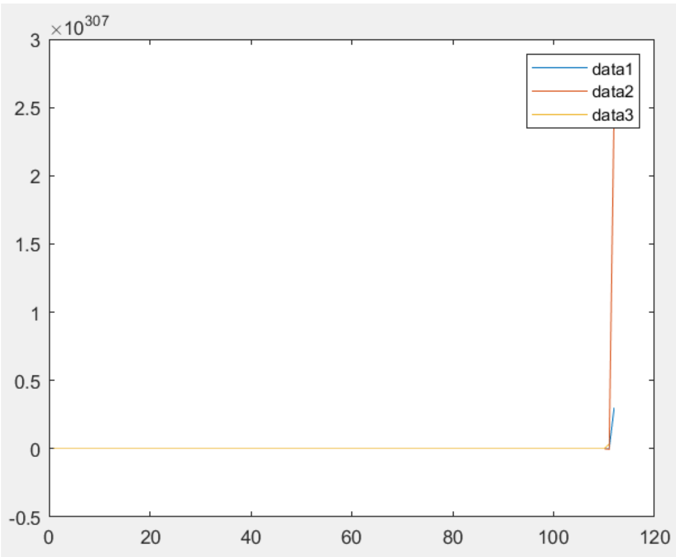
预先判断：

Jacobi 迭代法 B 矩阵的谱半径=8.2825>1，不收敛。

Guass-Seidel 迭代法 B 矩阵的谱半径= 594.6054>1，不收敛。

实验验证：

Jacobi 迭代法不收敛，解趋于无穷；



本例 Jacobi、GS 法迭代不收敛

Guass-Seidel 迭代法不收敛，解趋于无穷；

高斯消元法（A\b）解得

x=[-0.740425531914894;1.655319148936171;-1.663829787234043]

小结：

本例系数矩阵非对称正定，不能用 pcg 共轭梯度法，同时 Jacobi 和 GS 法因为 A 矩阵不是对角优势或下三角优势而不能收敛。方程组阶数较小、非病态时

高斯消元法能够得到精确的解。

（2）

预先判断：

Jacobi 迭代法 B 矩阵的谱半径= 0.9592<1，收敛。

Guass-Seidel 迭代法 B 矩阵的谱半径= 0.5193<1，收敛。

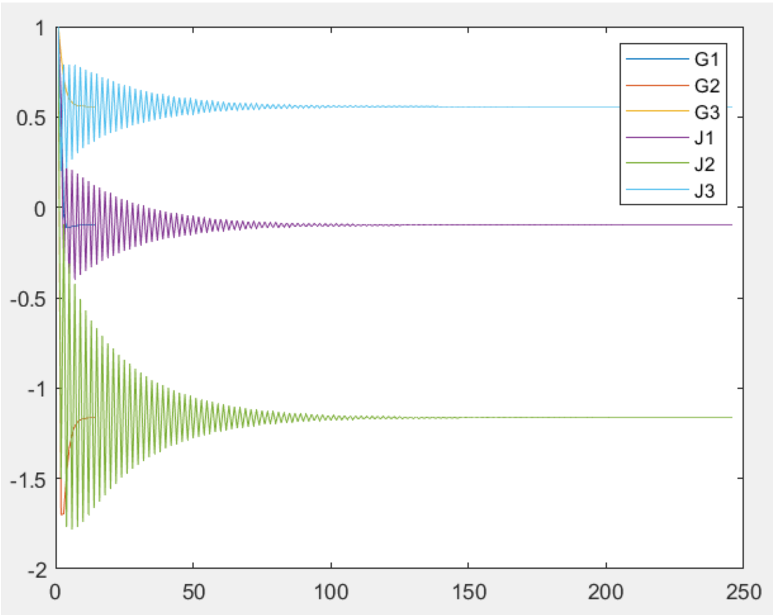
实验验证：

Jacobi 迭代法

x= [-0.098346377551093;-1.163966896144731;0.557365045578624]；

Guass-Seidel 迭代法

x= [-0.098385373691093;-1.164181155657871;0.557437900103880]；



本例 Jacobi 法有较大的振荡，GS 法收敛性较好

高斯消元法（A\b）解得

x= [-0.098360655737705;-1.163934426229508;0.557377049180328]

pcg 共轭梯度法解得

x= [-0.098360655737705;-1.163934426229509;0.557377049180327]

小结：

本例系数矩阵对称正定，能用 pcg 共轭梯度法。同时 Jacobi 和 GS 法因为 A 矩阵是对角优势、下三角优势而能收敛。方程组阶数较小、非病态时高斯消元法

能够得到精确的解。

（3）

预先判断：

Jacobi 迭代法 B 矩阵的谱半径= 1.077>1，不收敛。

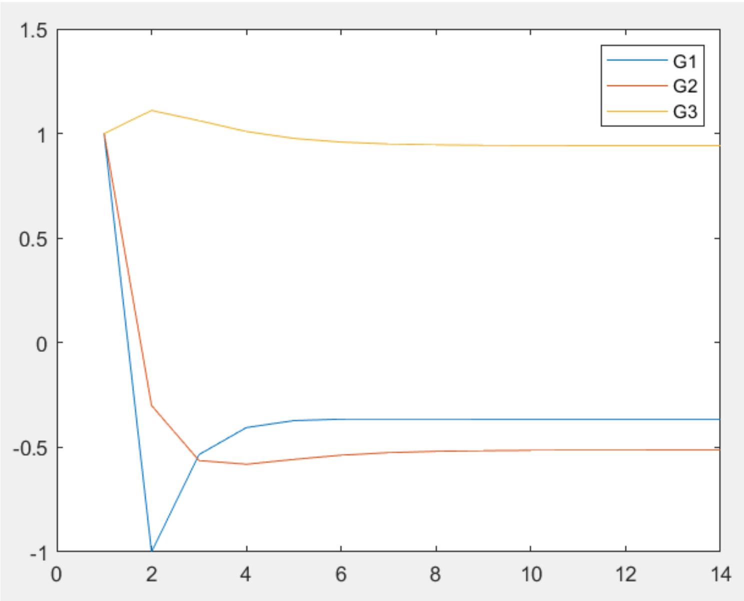
Guass-Seidel 迭代法 B 矩阵的谱半径= 0.4463<1，收敛。

实验验证：

Jacobi 迭代法不收敛，解趋于无穷；

Guass-Seidel 迭代法

x= [-0.365776249677731;-0.513211886297922;0.942136445247411]



本例 Jacobi 法不收敛，GS 法收敛

高斯消元法（A\b）解得

x= [-0.365789473684211;-0.513157894736842;0.942105263157895]

pcg 共轭梯度法解得

x= [-0.365789473684211;-0.513157894736842;0.942105263157895]

小结：

本例系数矩阵对称正定，能用 pcg 共轭梯度法，同时 Jacobi 法因为 A 矩阵不是明显的对角优势而不能收敛，因为矩阵是下三角优势所以 GS 法收敛。方程组阶数较小、非病态时高斯消元法能够得到精确的解。

10. 通过下面的数字例子观察加权因子 ω 对超松弛迭代收敛速度的影响.

已知方程组

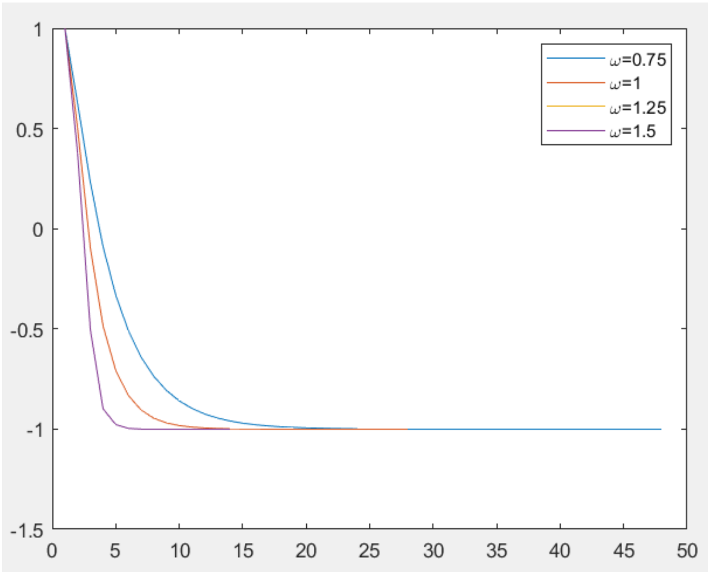
$$\begin{cases} -4x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2-4x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-4x_4=1. \end{cases}$$

取 $\omega=0.75,1.0,1.25,1.5$，用 SOR 迭代法求解，比较其迭代结果（并与精确解相比）.

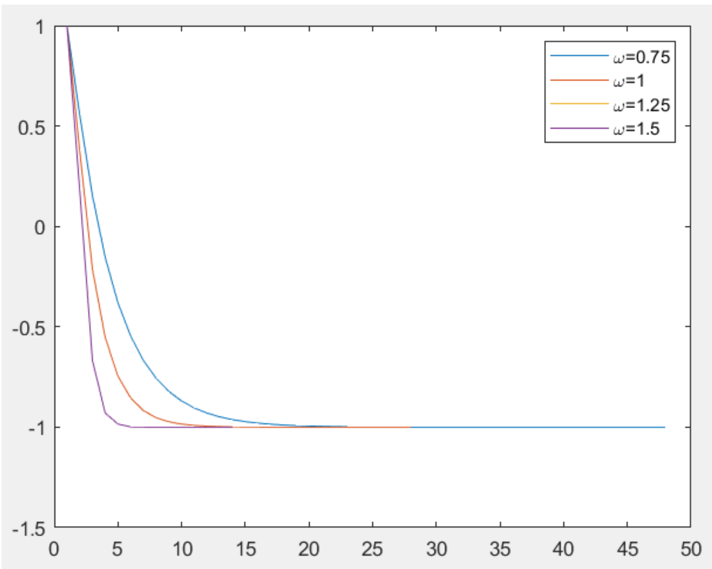
用高斯消元法（A\b）解得

x= [-1;-1;-1;-1]，是精确解

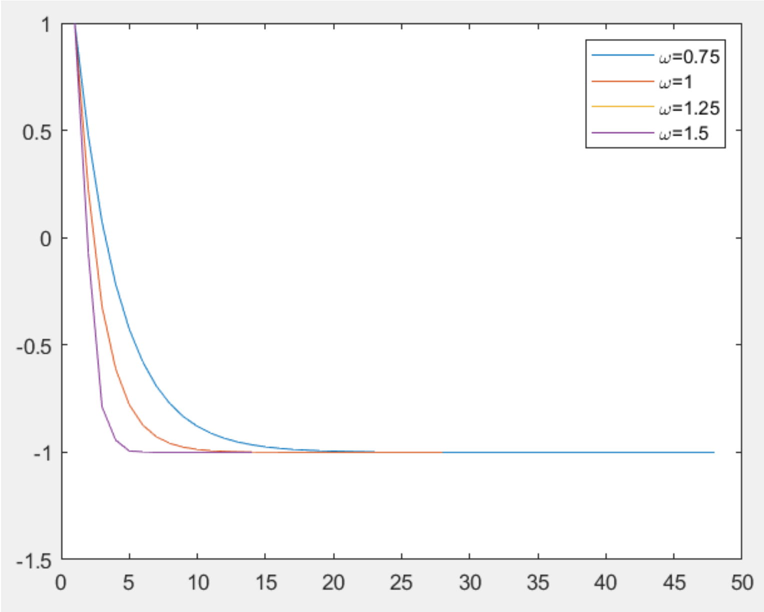
下面分别采用 w= [0.75 1 1.25 1.5]进行低松弛/GS/超松弛迭代，四张图像分别展示了 x1、x2、x3、x4 的迭代收敛过程：



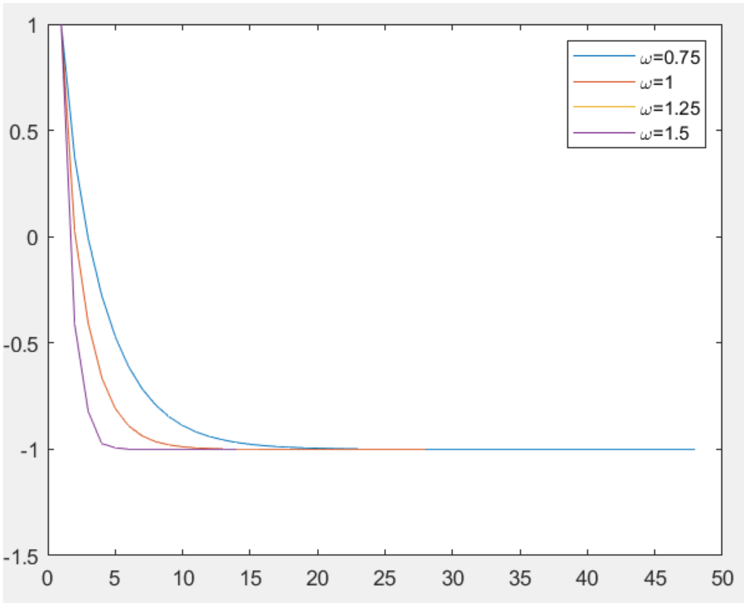
x1



x2



x3



x4

通过对比ω不同取值的收敛过程，发现ω=1.25 或 1.5 收敛最快，而ω越小收敛越慢。这显示了 SOR 超松弛迭代如果松弛因子选取得当可以大大加快收敛速度。实际应用中可以通过二分比较法、逐次搜索法、黄金分割法等方法对于最优松弛因子进行搜索。