**第七讲 优化方法I 线性规划**

二维线性规划的图解法

加入松弛变量/剩余变量将不等式变为等式。线性规划标准形式：

基本可行解：设B是秩为的约束矩阵A的一个阶满秩子方阵，则称B为一个**基**；

B中个线性无关的列向量称为**基向量**，变量中与之对应的个分量称为**基变量**，其余的变量为**非基变量**。令所有的非基变量取值为0，得到的解称为相应于B的**基本解**。当则称基本解为**基本可行解**,这时对应的基阵B为**可行基**。

最优解只需在有限个可行解(基本可行解)中寻找。

LP的通常解法：**单纯形法：**

用迭代法从一个顶点(基可行解)转换到另一个顶点(称为一次旋转)，每一步转换只将一个非基变量(指一个分量)变为基变量，称为进基，同时将一个基变量变为非基变量，称为出基，进基和出基的确定需要使目标函数下降(至少不增加)。

基本步骤：

选取初始基可行解(顶点)；

判断当前解是否最优；

选择进基和出基变量；

防止迭代过程出现循环。

**线性规划的对偶问题，对偶问题的最优解：**

原始问题(P)：

对偶问题(D)：

定理：原问题和对偶问题互为对偶问题。

对偶定理：如果是原问题的可行解(原可行解)，是对偶问题的可行解(对偶可行解)，则。

若和还满足, 则分别是(P)和(D)的最优解；

若原问题无下界，则对偶问题不可行；

若对偶问题无上界，则原问题不可行。

**影子价格：**考虑在最优解处右端项的微小变动对目标函数值的影响。

由于，假设是变化的，则。可以理解为当资源变化1单位时极小化问题的目标函数值的变化量。

，对充分小的需求增量，仍为最优解，此时相应最优费用变化为，对偶变量被称为边际价格或影子价格。

可以看成最优解时，为了第种需求提供一个单位需求的边际费用，即当达到最优时，为了满足附加的需求，必须向顾客索取的最小单位价格。

MATLAB求解LP：linprog命令

[x, fval, exitflag, output, lambda] = linprog(c,A1,b1,A2,b2,v1,v2,x0,opt);

exitflag:

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Function converged to a solution x. |
| 0 | Number of iterations exceeded options.MaxIterations. |
| -2 | No feasible point was found. |
| -3 | Problem is unbounded. |
| -4 | NaN value was encountered during execution of the algorithm. |
| -5 | Both primal and dual problems are infeasible. |
| -7 | Search direction became too small. No further progress could be made. |

lambda: Lagrange乘子，对偶问题的最优解。

lambda.ineqlin: 对应

lambda.eqlin: 对应

lambda.lower: 对应

lambda.upper: 对应

**第八讲 整数线性规划**

为整数

**分枝定界算法：**

枚举，求解放松的线性规划问题。

最优值比界坏——舍弃；

最优解为整数最优值比界好/最优值为非整数最优值比界好——分枝。

**旅行商问题（TSP）的动态规划算法：**

用表示从点出发，经过中的点各一次，最后回到点的最短路程，是一个顶点集合，，是到的弧长，则：

**第十讲 统计量和MC算法**

**MATLAB数据描述的常用命令：**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 命令 | 名称 | 输入 | 输出 |
| [n,y]=hist(x,k) | 频数表 | x: 原始数据行向量 k:等分区间数 | n: 频数行向量 y: 区间中点行向量 |
| hist(x,k) | 直方图 | 同上 | 直方图 |
| mean(x) | 均值 | x: 原始数据行向量 | 样本均值 |
| median(x) | 中位数 | 同上 | 中位数 |
| range(x) | 极差 | 同上 | 极差 |
| std(x) | 标准差 | 同上 | 样本标准差s |
| var(x) | 方差 | 同上 | 样本方差s2 |
| skewness(x) | 偏度 | 同上 | 偏度 |
| kurtosis(x) | 峰度 | 同上 | 峰度 |

MATLAB命令：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 分布 | 均匀分布 | 指数分布 | 正态分布 | 卡方分布 | t分布 | F分布 | 二项分布 | 泊松分布 |
| 字符 | unif | exp | norm | chi2 | t | f | bino | poiss |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 功能 | 概率密度 | 分布函数 | 逆概率分布 | 均值与方差 | 随机数生成 |
| 字符 | pdf | cdf | inv | stat | rand |

**Monte Carlo方法：**

一般区间重积分的计算：

分别为和区间上的均匀分布随机数，判断每个点是否落在域内，将落在域内的m个点记作：，则：

计算积和式的MC方法：

将0-1矩阵A随机化，0的位置保持不变，1的位置以的概率取1和-1，则：

是一个随机变量。

**第十一讲 统计推断**

**参数估计：**

MATLAB实现：

[mu sigma muci sigmaci] = normfit(x, alpha);

[muhat muci] = expfit(data, alpha);

x为样本，alpha为显著性水平（缺省时为0.05）

mu——均值的点估计；

sigma——标准差的点估计；

muci——均值的区间估计；

sigmaci——标准差的区间估计。

**假设检验：**

基本步骤：

1. 建立假设；
2. 选择检验统计量，给出拒绝域(W)形式；
3. 选择显著性水平

假设检验的两类错误：

第一类错误：

第一类错误：

**总体均值假设检验：**

**总体方差已知：**

时接受；否则拒绝。

时接受；否则拒绝。

**总体方差未知：**

时接受；否则拒绝。

时接受；否则拒绝。

**两总体的假设检验——均值：**

**总体方差已知：**

时接受；否则拒绝。

**总体方差未知（）：**

时接受；否则拒绝。

**统计检验中的P值：**

P值是在一个假设检验问题中，利用观测值能够做出拒绝原假设的最小显著性水平。即原假设成立条件下，样本量出现在观测值以外的概率的最大值，称为检验的P值。利用P值做检验比较方便。P值是异常程度的刻画。

**假设检验的MATLAB实现：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 假设检验 | | MATLAB命令 |
| 单个总体均值（已知） |  | h = ztest(x,mu,sigma) |
| [h,sig,ci,zval] = ztest(x,mu,sigma,alpha,tail) |
| 单个总体均值（未知） |  | h = ttest(x,mu) |
| [h,sig,ci] = ttest(x,mu, alpha,tail) |
| 两个总体均值（，未知） |  | h = ttest2(x,y) |
| [h,sig,ci] = ttest2(x,y, alpha,tail) |

输入参数x是样本，mu是中的，sigma是总体标准差。

alpha是显著性水平（缺省时设定为0.05）

tail是对双侧检验和两个单侧检验的标识：

'both' (0)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is not m.

'right'(1)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is greater than m.

'left' (-1)— Test against the alternative hypothesis that the population mean is less than m.

输出参数h=0表示接受，h=1表示拒绝。

sig表示对假设的接受和拒绝程度，P值。

ci给出置信区间，zval是样本统计量z的值。

**第十二讲 拟合优度检验与伪随机数**

**拟合优度检验：**

设总体服从离散分布：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X |  |  |  |
| P |  |  |  |

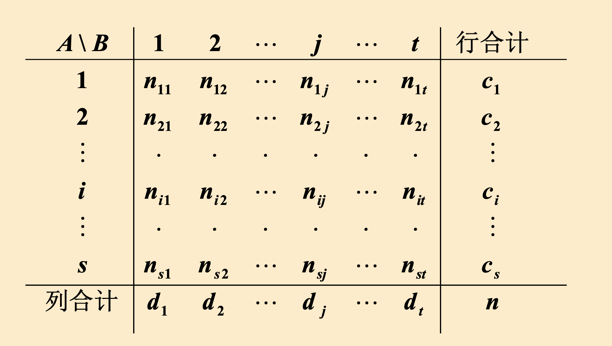
进行k次独立地检验，k个取值出现的频次分别为，则

近似服从自由度为k-1的分布。

若需要通过样本估计s个参数，则

近似服从自由度为k-s-1的分布。

**独立性检验（列联表检验）：**



近似服从自由度为(s-1)(t-1)的分布。

**正态性检验：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 假设检验 | | MATLAB命令 |
| 总体分布正态性 | 总体服从 | h = jbtest(x) |
| [h,p,jbstat,cv] = jbtest(x,alpha) |
| 总体服从 | h = kstest(x) |
| 总体服从 | h = lillietest(x) |
| [h,p,lstat,cv] = lillietest(x,alpha) |

**伪随机数：**

平方取中法：容易出现循环

线性同余生成器(LGG)：

多步同余：

多项式同余：

从均匀分布到一般分布：

设随机变量服从上的均匀分布，函数为定义在实数集合的连续单调递增函数，且对任何有：

则随机变量的概率分布函数为。

由均匀分布生成正态随机变量：

Box- Muller方法：相互独立，且均服从，做变换

则得到的和相互独立，且均服从。

**MATLAB伪随机数生成命令：**

rand(m,n)：生成m行n列均匀分布在(0,1)之间的伪随机数

randn(m,n)：生成m行n列标准正态分布（均值为0，方差为1）的伪随机数

rands(m,n)：生成m行n列均匀分布在（-1，1）之间的伪随机数

randi(a)：在[1,a]上生成均匀分布的伪随机整数

randi(a,m,n)：在[1,a]上生成均匀分布的m\*n的随机整数矩阵

randi([a,b],m,n)：在[a,b]上生成均匀分布的m\*n的随机整数矩阵